Cuadernos de Educación y Desarrollo
Vol 3, Nº 29 (Julio 2011)
http://www.eumed.net/rev/ced/index.htm

PROPUESTA METODOLÓGICA PARA EL TRATAMIENTO A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS DE CÁLCULO Y DEMOSTRACIÓN

Dr. C. Juan Enrique García La Rosa
Universidad de Ciencias Pedagógicas "Frank País García". Cuba
juaneg@ucp.sc.rimed.cu

RESUMEN

Como respuesta a los bajos niveles de aprendizaje en la resolución de problemas geométricos que alcanzan los estudiantes en la enseñanza media y media superior y en las universidades de ciencias pedagógicas, en este trabajo se realiza una propuesta metodológica para su tratamiento, que es uno de los resultados del proyecto investigativo "La dirección del aprendizaje de la Matemática para la formación de profesores de Matemática", que ha sido implementado en las actividades metodológicas y de superación a metodólogos y profesores de Matemática y que ha arrojado resultados satisfactorios en la elevación de la calidad del aprendizaje.
Palabras claves: Problema, partes de un problema, resolver un problema, propuesta metodológica, relaciones, conceptos, procedimientos, proposiciones.

INTRODUCCIÓN

Durante muchos años ha constituido una preocupación de profesores y didactas de la Matemática en Cuba los bajos niveles de aprendizaje en la resolución de problemas geométricos que alcanzan los alumnos de las educaciones media y media superior y de los estudiantes de las universidades de ciencias pedagógicas que se forman para desempeñarse como profesores de la asignatura Matemática en la escuela, lo que evidentemente repercute en las insuficiencias que estos manifiestan en la dirección del aprendizaje de estos problemas en sus educandos, una vez que se incorporan al proceso de enseñanza – aprendizaje de esta asignatura en las diferentes educaciones.
Producto de la sistematización teórica y metodológica realizada por el autor en los últimos diez años, relacionada con la problemática expuesta en el párrafo anterior, se propone en este trabajo una propuesta metodológica para el tratamiento a la solución de problemas geométricos, las que se han ido implementando en las actividades metodológicas y de superación a metodólogos y profesores de Matemática de las educaciones anteriormente mencionadas, como parte de las actividades que ejecuta el proyecto de investigación: "La dirección del aprendizaje de la Matemática para la formación de profesores de Matemática".

DESARROLLO

La definición de problema es compleja y ha sido enfocada por distintos autores desde distintos ángulos: filosófico, pedagógico y didáctico. No obstante, para los didactas en Matemática ha constituido una tarea necesaria la precisión de la definición de este concepto como premisa para el trabajo a desarrollar en su enseñanza y aprendizaje. Para ello, presentamos algunas de estas definiciones a continuación:

- (Fridmam, 1993): Si analizamos detenidamente cualquier problema, nos daremos cuenta que este consiste de alguna exigencia, requerimiento o pregunta, para la cual se necesita encontrar la respuesta, apoyándose en y tomando en cuenta las condiciones señaladas en el problema.
- Schoenfeld (1985): usa el término problema como una tarea que es difícil para el individuo que está tratando de resolverla. Además, la dificultad debe ser un impase intelectual y no solamente al nivel operacional o de cálculo." (Citado por Santos Trigo, 1994).

- Polya (1962): establece que tener un problema significa "buscar conscientemente con alguna acción apropiada para lograr una meta claramente concebida pero no inmediata de alcanzar." Esta caracterización identifica tres componentes de un problema: (Citado por Santos Trigo, 1994).
  a) Estar consciente de una dificultad.
  b) Tener deseos de resolverla.
  c) La no existencia de un camino inmediato para resolverla.
- Kilpatrick (1985): sugiere que la forma en que un problema es enunciado también influye en su significado. En un sentido general un problema matemático se identifica como una tarea que requiere conocimientos matemáticos para resolverla y para la cual no existe un camino directo o inmediato para obtener su solución o soluciones. (Citado por Santos Trigo, 1994).
- (Santos Trigo, 1994): Un problema en términos generales es una tarea o situación en la cual aparecen los siguientes componentes.
  a) La existencia de un interés. Es decir, una persona o un grupo de individuos quieren o necesitan encontrar una solución.
  b) La no existencia de una solución inmediata. Es decir, no hay un procedimiento o regla que garantice la solución completa de la situación.
  c) La presencia de diversos caminos o métodos de solución (algebraico, numérico, geométrico). También el problema puede tener más de una solución.
  d) La atención por parte de una persona o un grupo de individuos para llevar a cabo un conjunto de acciones pendientes a resolver esa situación. Es decir, un problema es tal hasta que existe un interés y se emprenden acciones específicas para intentar resolverlo.
- (Ballester, 1992): Un problema es un ejercicio que refleja, determinadas situaciones a través de elementos y relaciones del dominio de la ciencia o la práctica, en lenguaje común y exige de medios matemáticos para su solución. Se caracteriza por tener una situación inicial (elementos dados, datos) conocida y una situación final (incógnita, elementos buscados) desconocida, mientras que su vía de solución se obtiene con ayuda de procedimientos heurísticos.
- (Campistrous, 1996): Un problema es toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo. La vía para pasar de la situación inicial a la nueva situación exigida tiene que ser desconocida; cuando es conocida deja de ser un problema.

Tanto en las educaciones media y media superior como en la formación de profesores de Matemática, se trabaja la caracterización dada por el doctor Sergio Ballester y es la que hemos asumido para la propuesta metodológica que realizamos en este trabajo.

Partes de un problema:

Al analizar cualquier problema matemático podemos darnos cuenta que en su formulación están presentes las condiciones del problema (lo dado) y las exigencias (lo buscado). En cualquier problema puede haber varias condiciones y también varias exigencias.

¿Qué se entiende por resolver un problema de Matemática?

Resolver un problema de Matemática significa encontrar una sucesión tal de principios generales de la Matemática (definiciones, axiomas, teoremas, reglas, leyes, fórmulas), cuya aplicación a las condiciones del problema o las consecuencias derivadas de estas, nos conducen a obtener lo que se exige en el problema, es decir, la respuesta. (Fridman, 1993).
Resolver un problema de Matemática es "… la actividad de llegar al resultado, es decir, en la búsqueda de vías para provocar la transformación deseada y no solo la solución del problema en sí misma. Esa actividad de búsqueda es la que realmente provoca y estimula el desarrollo de los estudiantes".
La resolución de problemas es un objetivo general en la enseñanza de la Matemática, ya que esta se justifica por su aplicación y utilidad en la vida real. Es un proceso de pensamiento pues, al resolver un problema se aplican conocimientos previos a situaciones nuevas o poco conocidas, se intenta reorganizar datos y conocimientos previos en una nueva situación mediante un proceso secuencial, en este sentido, son tan importantes los procedimientos y métodos empleados como el resultado final. Por último, es una destreza básica cuando se consideran los contenidos específicos, los tipos de problemas y sus métodos de solución; de este modo se puede organizar el trabajo escolar de enseñanza de conceptos y de aprendizaje de destrezas.
Para el tratamiento de la resolución de problemas diversos investigadores han presentado diferentes modelos, entre los que se encuentran:

1. Modelo de Polya, que consta de cuatro etapas: comprender el problema; concebir el plan de solución; ejecutar el plan de solución y examinar la solución obtenida.
2. Modelo de Fridman, que comprende: análisis del problema; escritura esquemática del problema; búsqueda del plan de solución; ejecución del plan de solución; investigación del plan de solución; investigación del problema; formulación de la respuesta al problema y análisis final de la solución del problema.

3. Modelo de Bell, que comprende: presentar el problema en forma general; reformular el problema en forma operacional; formular hipótesis y procedimientos alternativos para atacar al problema; probar las hipótesis y llevar a cabo procedimientos que permitan obtener una solución o conjunto de soluciones; analizar y evaluar las soluciones, las estrategias usadas y los métodos que condujeron al descubrimiento de estrategias para resolver el problema.
4. Modelo de Steinhöfel y Frenzel (abordados por Jungk en la Metodología de la enseñanza de la Matemática) que comprende: orientación hacia el problema; trabajo con el problema; solución del problema y consideraciones retrospectivas y perspectivas.
5. Modelo de Miguel De Guzmán, que comprende: la familiarización con el problema; búsqueda de estrategias; llevar adelante la estrategia y revisar el proceso y sacar consecuencias de él.
6. Modelo de Schoënfeld. Es uno de los más completos, sobre todo en lo que se refiere a las estrategias heurísticas. Este modelo consta de cuatro etapas: análisis; exploración; ejecución y comprobación. El mismo brinda elementos nuevos y de gran connotación al considerar para la enseñanza de la resolución de problemas cuatro dimensiones:

- Dominio del conocimiento o recursos: Representan un inventario de lo que en un individuo sabe y de las formas que adquiere ese conocimiento. Aquí incluye, entre otras cosas, los conocimientos informales e intuitivos de la disciplina en cuestión, hechos y definiciones, los procedimientos rutinarios, y otros recursos útiles para la solución.
- Los métodos heurísticos: En esta dimensión se ubican las estrategias generales que pueden ser útiles en la resolución de un problema, como, por ejemplo, las aisladas por Polya.
- Las estrategias metacognitivas o el monitoreo o autoevaluación del proceso utilizado al resolver un problema.
- El sistema de creencias en la cual se ubica la concepción que tenga el individuo acerca de las matemáticas. Según Schoënfeld, las creencias establecen el contexto dentro del cual funcionan las restantes tres dimensiones.

En las educaciones media y media superior y en las universidades de ciencias pedagógicas de Cuba, en la Didáctica de la Matemática se utiliza para el tratamiento de problemas y ejercicios con texto, el modelo del Dr. Werner Jungk, (denominado programa heurístico general), empleado también por otros didactas alemanes como Wolfgang Zillmer y Horst Müller, que consta de las siguientes fases principales: orientación hacia el problema, trabajo en el problema, solución del problema y evaluación de la solución y la vía. (Jungk, 1981). Sin embargo, las tareas y acciones principales que se describen para cada una de las fases anteriores no se han desarrollado suficientemente para el tratamiento a la resolución de problemas geométricos, pues estas quedan en un plano muy general.
A partir del estudio que hemos realizado en esta dirección se realiza la siguiente propuesta metodológica para el tratamiento a los problemas geométricos, que a continuación explicamos, teniendo en cuenta las fases y tareas principales del programa heurístico general.

Propuesta metodológica

Para comprender la propuesta metodológica que presentamos, es necesario previamente referirse a un resultado teórico – metodológico, que le sirve de sustento y que ha sido uno de los resultados del proyecto investigativo al que hicimos referencia anteriormente y que se denomina: “Aproximación a la lógica de la búsqueda de la vía de solución a los problemas geométricos”.

Aproximación a la lógica de la búsqueda de la vía de solución a los problemas geométricos de cálculo y demostración

En la búsqueda de la vía de solución a los problemas geométricos el estudiante debe realizar una serie de actividades muy movidas que no solo requieren del pensamiento lógico, sino también del pensamiento lateral (“forma del pensamiento que no se ajusta necesariamente a la estructura inferencial propia del pensamiento, y que es un componente imprescindible de la creatividad y de la posesión de un pensamiento flexible”[1]) donde se ponga de manifiesto su creatividad, fantasía e imaginación que le permita no solo seguir un camino formalmente lógico sino, hacer conjeturas hipotéticas sobre posibles vías de solución y experimentarlas para cerciorarse de su viabilidad hasta encontrar la que pueda conducirlo a la exigencia planteada. Para ello, este no debe aferrarse a la situación inicial sin el establecimiento de un vínculo continuo con la exigencia del problema. Esto le permitirá buscar, ordenar, reordenar, acomodar, reacomodar, condicionar y reacondicionar los conceptos, proposiciones y procedimientos de la teoría que le posibiliten la búsqueda de una o varias vías

[1] Campistrous Pérez, Luis y Celia Rizo Cabrera: Aprende a resolver problemas aritméticos, Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana, 1996, p. 38

de solución que son probables para llegar a la exigencia planteada. En este proceso se tomarán en cuenta las siguientes acciones:

1. *<u>Precisión y explicación de los conceptos, proposiciones y procedimientos geométricos presentes en el problema.</u>*

Para ello, el estudiante deberá leer detenidamente el problema y precisar los conceptos de figuras planas o cuerpos geométricos explícitos en el texto del mismo y/o figura auxiliar (si la misma forma parte del texto) y de otras figuras planas o de otros cuerpos que se descubran o construyan por el propio estudiante para definirlos, buscar todas las proposiciones posibles vinculadas a estos y formularlas, así como los procedimientos probablemente necesarios y describirlos. Este es un momento sumamente imprescindible porque es el que da paso a la próxima acción.

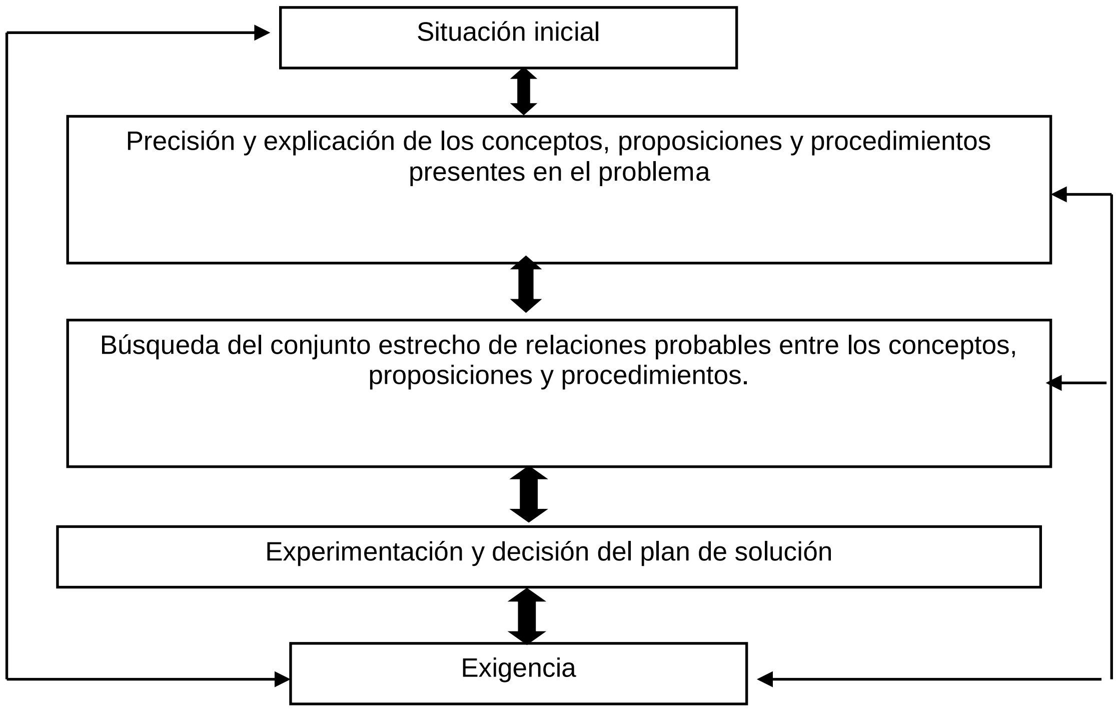
2. *<u>Búsqueda del conjunto estrecho de relaciones probables entre los conceptos, proposiciones y procedimientos.</u>*

Atendiendo a las exigencias del problema el estudiante comienza a deducir una serie de relaciones entre los conceptos, las proposiciones y los procedimientos ya precisados anteriormente, desechando aquellas que resultan casi improbables para la realización de la transformación de las otras relaciones que si tienen un mayor porcentaje de probabilidad. En este proceso el estudiante puede descubrir otros conceptos, proposiciones y procedimientos que son el resultado de esta búsqueda continua de relaciones y, por ende, tenga que definirlos, formularlas y describirlos, respectivamente, y buscar relaciones entre ellos hasta lograr que el conjunto de relaciones probables para la transformación que lo conduzcan a cumplir con la exigencia planteada se vaya reduciendo y obtener, de esta forma, un conjunto estrecho de relaciones probables con el que debe elaborar su plan de solución.

Se ha destacar que en la búsqueda de tales relaciones unas se van relacionando con las otras y de este proceso se deducen otras siendo este un proceso necesario que debe ser aprendido por los estudiantes ya que es donde más dificultades manifiestan por la falta de constancia, perseverancia y el insuficiente desarrollo de habilidades lógicas.

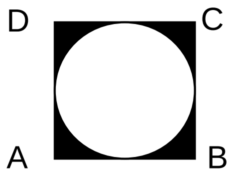
3. *<u>Experimentación y decisión del plan de solución definitivo.</u>*

Una vez que el estudiante tiene el conjunto estrecho de relaciones probables debe comenzar la experimentación, trazándose con dichas relaciones diversos planes de solución que le irán demostrando cuál o cuáles de estas puede todavía desechar e incluso retomar alguna o algunas de las desechadas anteriormente y que el propio experimento le arroja que son necesarias hasta decidir el plan de solución definitivo que irreversiblemente lo conlleve al cumplimiento de las exigencias del problema.



Veamos un ejemplo donde se evidencia esta lógica.

Ejemplo: En la figura se tiene un círculo inscrito en el cuadrado ABCD; $\overline{AC} = 5\sqrt{2}cm$. Calcula el área de la región sombreada.



La situación inicial del problema es que se tiene un círculo inscrito en un cuadrado y la longitud de una diagonal del cuadrado. Como exigencia se plantea el cálculo del área de la región sombreada.

1. *Precisión y explicación de los conceptos, proposiciones y procedimientos geométricos presentes en el problema.*

Del análisis del texto y de la figura dada se reconocen los siguientes conceptos, proposiciones y procedimientos:

Conceptos	**Proposiciones**	**Procedimientos**
1. Cuadrado: lados iguales y ángulos rectos.	1. Área del cuadrado: $A_1 = \overline{AB}^2$	1. Sustituir $\overline{AB}$, pero no lo conozco.
2. Círculo Inscrito: lados del cuadrado tangente a la circunferencia del círculo.	2. Área del círculo: $A_2 = \pi r^2$	2. Sustituir el radio r, pero no lo conozco.
3. Triángulos isorectángulos ABC o ACD (al trazar la diagonal $\overline{AC}$ cuya longitud está dada): catetos iguales ($\overline{AB} = \overline{BC}$ o $\overline{AD} = \overline{CD}$) y ángulos rectos en A o C, respectivamente.	3. Teorema de Pitágoras: $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$	3. Sustituir la longitud de los lados dados y calcular el otro (con los datos que tengo puedo proceder).

2. *Búsqueda del conjunto estrecho de relaciones probables entre los conceptos, proposiciones y procedimientos.*

Relaciones	**Conjunto de relaciones probables**	**Conjunto estrecho de relaciones probables**
Entre los conceptos, proposiciones y procedimientos 1 y 3	$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$ Como $\overline{AB} = \overline{BC}$ en el triángulo ABC entonces, $\overline{AC}^2 = 2\overline{AB}^2$	$\overline{AB}^2 = \frac{\overline{AC}^2}{2}$ (I) $r = \frac{\overline{AB}}{2}$ (II)
Entre los conceptos, proposiciones y procedimientos 1 y 2	Como el círculo está inscrito en el cuadrado la longitud del diámetro del círculo es igual a la longitud del lado del cuadrado. Entonces, $r = \frac{\overline{AB}}{2}$	

3. *Experimentación y decisión del plan de solución.*

Al experimentar con la relación (I) el estudiante llega a la fórmula para calcular el área del cuadrado: $A_1 = \left(\frac{\overline{AC}^2}{2}\right)^2 = \frac{\overline{AC}^4}{4}$, de la cual conoce a $\overline{AC}$, por lo tanto puede realizar el cálculo.

Al experimentar con la relación (II) el estudiante llega a la fórmula para calcular el área del círculo: $A_2 = \pi\frac{\overline{AB}^2}{4} = \pi\frac{\overline{AC}^4}{8}$, de la cual se conoce $\overline{AC}$, por lo tanto puede realizar el cálculo.

De esta forma decide el plan de solución definitivo:

1. Calcular el área del cuadrado mediante la fórmula $A_1 = \frac{\overline{AC}^4}{4}$.

2. Calcular el área del círculo mediante la fórmula $A_2 = \pi \frac{\overline{AC}^4}{8}$.

3. Calcular el área de la región sombreada utilizando la fórmula $A_{RS} = A_1 - A_2$; entonces, $A_{RS} = \frac{\overline{AC}^4}{4} - \pi \frac{\overline{AC}^4}{8} = \frac{\overline{AC}^4}{4}\left(1 - \frac{\pi}{2}\right)$.

A partir de esta lógica se realiza la siguiente propuesta metodológica que apoya la ejecución de las tareas principales de las fases de orientación hacia el problema y trabajo en el problema del programa heurístico general como instrumento metodológico para la dirección del aprendizaje de la resolución de problemas geométricos.

ORIENTACIÓN HACIA EL PROBLEMA

<u>Precisiones metodológicas.</u>

En la extracción de los datos del problema (tanto en las condiciones como en las exigencias) el profesor enseñará a los estudiantes a:

- Realizar el inventario de conceptos presentes tanto en el texto como en la figura que se da o construye como apoyo al texto.
- Definir cada uno de los conceptos del inventario, precisar de estos sus características esenciales, así como buscar el significado a palabras que no sean del vocabulario matemático para comprender mejor el problema geométrico.
- Determinar el inventario de proposiciones geométricas asociadas a esos conceptos.
- Precisar todos los procedimientos posibles que se puedan ejecutar a partir de cada uno de los conceptos y proposiciones geométricos inventariados, con el propósito de determinar si los datos son suficientes o sobran.

TRABAJO EN EL PROBLEMA

<u>Precisiones metodológicas.</u>

En la búsqueda de los medios matemáticos para determinar los datos que faltan para llegar a las exigencias del problema geométrico se les debe enseñar a los estudiantes a:

- Deducir todas las relaciones posibles que entre los conceptos, proposiciones y procedimientos geométricos se puedan establecer.
- Investigar a partir de todas esas relaciones esenciales si reaparecen otros conceptos a definir, otras proposiciones a formular u otros procedimientos a describir para volver a establecer nuevas relaciones posibles entre estos y los ya determinados en la fase de orientación hacia el problema.
- Precisar entre todas esas relaciones posibles las que consideran más esenciales para llegar a buscar los datos que faltan para cumplir las exigencias del problema.
- Elaborar un plan de solución posible para resolver el problema.
- Experimentar ese plan de solución con vistas a investigar si con él se resuelve el problema para, en caso negativo, volver a revisar todo el proceso realizado que le permita rectificar y precisar de nuevo las relaciones esenciales que conllevarán a perfeccionar el plan de solución que había sido elaborado o a elaborar uno nuevo.

Teniendo en cuenta esta propuesta se explicitan los impulsos que puede dar el profesor a sus educandos para resolver problemas de esta naturaleza.

I) <u>Para comprender el problema geométrico</u>:

- Lea detenidamente el problema.
- Pregúntese de ¿qué trata el problema? para saber si hay que realizar un cálculo, demostrar, probar o comprobar algo.
- Precise los datos que se dan en las condiciones del problema y en sus exigencias. Recuerde que si se da una figura de apoyo, esta también es parte de las condiciones del problema. En el caso que no se de una figura de apoyo, esbócela, atendiendo a esas condiciones y exigencias del problema.
- De cada dato literal, cuando se trate de determinado concepto (que son las propias figuras planas o relaciones entre figuras planas), defínalo y precise sus características esenciales, así como las proposiciones (teoremas, propiedades, criterios, leyes, fórmulas, etcétera) o procedimientos asociadas al

mismo (por ejemplo: cálculo de área o perímetro). Si hay determinadas palabras de las que desconoce sus significados, búsquelos en el diccionario y anótelos en su libreta.

- Como la figura de apoyo o la que usted esboce es también un dato importante, obsérvela y determine todas las figuras planas que en ella aparecen, defina sus conceptos y precise sus características esenciales, así como las proposiciones y procedimientos asociadas al mismo.
- Para trabajar de manera más organizada y como medio para tener visible toda la información extraída, vaya completando la siguiente tabla:
-

Datos	**Información que se extrae de los datos y de lo que se busca.**
Nota: se escriben todas las figuras planas y relaciones entre las figuras planas que aporten las condiciones y exigencias del problema.	Nota: se escriben las características esenciales de cada uno de los conceptos, se precisan todas las proposiciones y procedimientos asociados a estos.

II) **<u>Para la búsqueda de la vía de solución del problema geométrico</u>**:
<u>Hay dos formas de buscarla</u>:

La primera forma:

- Siempre y cuando sea posible analice lo que se pide en las exigencias del problema, con el objetivo de determinar a través de qué contenidos anteriores, es decir, de qué conceptos (de figuras y de relaciones entre figuras), proposiciones o procedimientos se puede asociar.
- Analice las informaciones recogidas en la tabla anterior para precisar a partir de cuáles de ellas o de cuáles relaciones entre algunas de ellas, se puede precisar cuál de los contenidos determinados en la sugerencia anterior es el más apropiado (en ocasiones esto conlleva a trazar o construir una figura auxiliar: segmentos, triángulos, paralelogramos, rectángulos, rombos, cuadrados, trapecios, rectas paralelas, rectas perpendiculares, prolongar lados de polígonos, etcétera). Esto generalmente conlleva a reducir el problema inicial a otro u otros problemas más sencillos, la resolución de los cuales conlleva a la resolución del inicial.
- Como la nueva figura construida aporta nuevos datos, obsérvela y determine todas las figuras planas que en ella aparecen, defina sus conceptos y precise sus características esenciales, así como las proposiciones y procedimientos asociadas al mismo (reflèjelos en la tabla anterior).
- De aquí en lo adelante se ejecutan las mismas acciones que para la segunda forma de búsqueda de la vía de solución se ilustran a continuación.

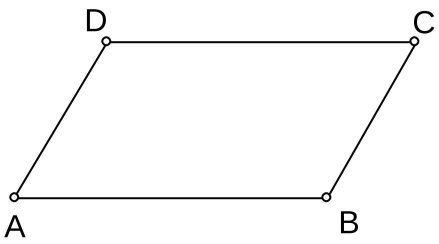
La segunda forma:

- De todas las informaciones recogidas en la tabla busque relaciones entre ellas que le permitan ir descubriendo los datos (la longitud de un lado, la amplitud de un ángulo, la igualdad entre ángulos, la igualdad entre lados, la fórmula para el cálculo de un área, de un perímetro, las relaciones entre lados, entre ángulos, etcétera) que le vayan permitiendo transitar de las condiciones a las exigencias del problema. En este proceso nunca pierda de vista las exigencias del problema con las relaciones nuevas que vaya descubriendo.
- Precise cuáles de esas relaciones cree usted sean esenciales para cumplir con las exigencias del problema.
- A partir de esas relaciones elabore un plan de solución, es decir, precise los pasos que ejecutará de manera ordenada para llegar a cumplir las exigencias del problema.

III) **<u>Para solucionar el problema</u>**:

- Pruebe que con el plan de solución elaborado por usted se llega a las exigencias del problema.
- En caso negativo vuelva a revisar todo el proceso realizado que le permita rectificar y precisar de nuevo las relaciones esenciales que conllevarán a perfeccionar el plan de solución que había sido elaborado o a elaborar uno nuevo.
- Vuelva a probar que con el plan de solución rectificado o el nuevo elaborado por usted se llega a las exigencias del problema.
- Cuando ya haya comprobado que el plan de solución es el determinante, entonces ejecútelo definitivamente y resuelva el problema.

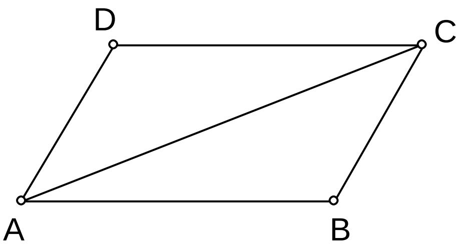
Veamos un ejemplo donde se evidencia la ejecución de esta propuesta.
En la figura ABCD es un paralelogramo. Demuestra que sus lados opuestos son iguales.



- Primeramente leo detenidamente el problema.
- Me pregunto, ¿de qué trata el problema?
- Bueno puedo interpretar que se trata de probar, comprobar que los lados opuestos de un paralelogramo son iguales.
- Para ello, debo conocer ¿qué datos me dan?, o sea, ¿cuáles son las condiciones del problema?
- En las condiciones me dicen que ABCD es un paralelogramo pero, además, me dan una figura de apoyo.
- También debo conocer ¿qué se busca, se pide?, o sea, ¿cuáles son las exigencias del problema?
- Entonces, ahora voy a analizar estas condiciones y exigencias y voy a extraer de ellas toda la información que me brindan. Para ello, voy a recoger esos datos y esas informaciones en la siguiente tabla:

Datos	**Información que se extrae de los datos y de lo que se busca.**
1.ABCD - paralelogramo	En primer lugar, debo definir qué es un paralelogramo: 1. Cuadrilátero convexo 2. Lados opuestos paralelos
	En segundo lugar, debo buscar todas los teoremas relacionados con este concepto: 3. Dos ángulos consecutivos suman 180^0. 4. Sus ángulos opuestos son iguales.
2. La figura de apoyo	5. Observo los siguientes pares de ángulos son consecutivos: $\angle A$ y $\angle B$; $\angle B$ y $\angle C$; $\angle C$ y $\angle D$; $\angle A$ y $\angle D$
	6. Observo los siguientes pares de ángulos conjugados entre dos rectas cortadas por una secante: $\angle A$ y $\angle D$; $\angle A$ y $\angle B$; $\angle C$ y $\angle D$; $\angle B$ y $\angle C$
3. Demostrar que los lados opuestos son iguales.	7. Esto quiere decir que deben tener la misma longitud.
	8. Si observo la figura, debo demostrar que $\overline{AB} = \overline{CD}$ y $\overline{AD} = \overline{BC}$

- Ahora, como debo demostrar que $\overline{AB} = \overline{CD}$ y $\overline{AD} = \overline{BC}$, me pregunto, ¿a través de cuáles de los contenidos estudiados se puede llegar a este resultado?
- En primer lugar, si se pudiera probar que estos son lados de un triángulo isósceles o de un triángulo equilátero, se resolvería el problema, pero si observo la segunda información de la tabla anterior, esto es imposible pues ellos son paralelos.
- En segundo lugar, si se pudiera probar que son lados homólogos de triángulos iguales, se resolvería el problema. Esta parece ser la vía más conveniente, pero debo, entonces, demostrar la igualdad de dos triángulos que en la figura de apoyo no me dan. ¿Cómo los puedo construir?
- Como puedo observar, debo demostrar que $\overline{AB} = \overline{CD}$ y $\overline{AD} = \overline{BC}$, por lo tanto, los triángulos deben ser: ABD y BCD o ABC y CDA. Si observo la figura estos se obtendrán trazando las diagonales, pero parece que con una basta. Trazaré la diagonal $\overline{AC}$.



- Entonces, voy a probar que los triángulos ABC y CDA son iguales, entonces el problema inicial se me ha reducido a este otro. Por ende, debo analizar las nuevas condiciones y las nuevas exigencias:

Datos	Información que se extrae de los datos y de lo que se busca.
4. Figura transformada.	9. Observo los siguientes pares de ángulos alternos entre dos rectas cortadas por la secante AC: $\angle CAB$ y $\angle DCA$; $\angle ACB$ y $\angle DAC$
5. Demostrar que los triángulos ABC y CDA son iguales.	10. Conozco que dos triángulos son iguales si sus tres lados y sus tres ángulos son respectivamente iguales.
	11. Conozco los criterios de igualdad de triángulos: a. l. a; l. l. a y l. l. l.

- ❖ Esta última información nos da la idea de que se debe probar que se cumple uno de estos criterios. Para ello, veamos cuáles de las informaciones extraídas de las condiciones y las exigencias del problema nos pueden servir.
- ❖ Al observar la figura, de la información número 4 (ángulos opuestos iguales), podemos precisar que $\angle ABC = \angle CDA$.
- ❖ De las informaciones 2 y 9 (lados opuestos paralelos y la presencia de ángulos alternos), se puede concluir que los pares de ángulos $\angle CAB$ y $\angle DCA$; $\angle ACB$ y $\angle DAC$ son alternos entre paralelas, por tanto, se cumple que $\angle CAB = \angle DCA$; $\angle ACB = \angle DAC$.
- ❖ Tengo, entonces, que los tres ángulos de estos triángulos son respectivamente iguales, por lo que de los tres criterios me quedan por comprobar solo dos: a. l. a y l. l. a.
- ❖ Si vuelvo a observar la figura me percato que la diagonal $\overline{AC}$ es un lado común para ambos triángulos, por lo que puedo probar que se cumple el criterio a. l. a. Como $\angle CAB = \angle DCA$; $\angle ACB = \angle DAC$ y $\overline{AC}$ es lado común, según este criterio los triángulos ABC y CDA son iguales.
- ❖ Queda resuelta parte del problema. Debo probar que $\overline{AB} = \overline{CD}$ y $\overline{AD} = \overline{BC}$.
- ❖ Conozco que en triángulos iguales a ángulos iguales se oponen lados iguales. Por ende, como $\overline{AB}$ se opone al ángulo ACB y $\overline{CD}$ se opone al ángulo DAC y $\angle ACB = \angle DAC$ entonces, $\overline{AB} = \overline{CD}$. Como $\overline{AD}$ se opone al ángulo DCA y $\overline{BC}$ se opone al ángulo CAB y $\angle CAB = \angle DCA$ entonces, $\overline{AD} = \overline{BC}$. Queda, de esta forma, resuelto el problema.

CONCLUSIONES

La propuesta metodológica para el tratamiento a los problemas geométricos presentada en este trabajo, requiere del dominio de los procedimientos heurísticos asociados a las fases y tareas principales del Programa Heurístico General por parte de los docentes que imparten Matemática, así como su sistematización tanto en las clases como fuera de ellas, de forma tal que el profesor constantemente le brinde a los educandos la instrucción heurística necesaria que le permita a estos ir perfeccionando sus estrategias de aprendizaje en la resolución de estos problemas.

BIBLIOGRAFÍA UTILIZADA

- ALMEIDA, B. A. y BORGES, J. T. (1999). Didáctica de la resolución de problemas en la escuela media. Editorial Academia. Revista Promet. La Habana. Cuba.
- COLECTIVO DE AUTORES (1991) Metodología de la enseñanza de la Matemática (Tomos 1 y 2). Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba.
- CAMPISTROUS, L. y RIZO, C. (2001). Aprende a resolver problemas aritméticos. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.
- GARCÍA, J. E. (2002): Sistema de habilidades profesionales para la disciplina Geometría de la carrera Matemática – Computación en función de la enseñanza y el aprendizaje de la resolución de problemas geométricos de la matemática escolar. Tesis doctoral. Santiago de Cuba. Cuba.
- GARCÍA, J. E. (2007): Aproximación a la lógica de la búsqueda de la vía de solución a los problemas geométricos: una vía para la dirección de su aprendizaje en la secundaria básica. Congreso Nacional de Matemática – Computación. Holguín. Cuba.
- JUNGK, W (1981) Conferencias sobre Metodología de la enseñanza de la Matemática (Tomos 1 y 2 primera parte). Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba.
- JUNGK, W (1981) Conferencias sobre Metodología de la enseñanza de la Matemática (Tomos 1 y 2 segunda parte). Editorial Libros para la Educación. La Habana. Cuba.
- ZILLMER, W (1981) Complementos de Metodología de la enseñanza de la Matemática. Editorial Libros para la Educación. La Habana. Cuba.