Cuadernos de Educación y Desarrollo
Vol 2, Nº 15 (mayo 2010)
http://www.eumed.net/rev/ced/index.htm

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN MATEMÁTICAS

José Antonio Martínez Pérez
Profesor en el CES Vega Media de Alguazas (Murcia)
josianmp@msn.com

Resumen

Sin duda, una de las actividades fundamentales en Matemáticas es la resolución de problemas. A lo largo de la historia, la aparición de problemas ha provocado que grandes matemáticos dieran con teorías que han supuesto importantes avances, siendo por tanto la resolución de problemas un verdadero motor en el desarrollo de las matemáticas.

Por otro lado, y desde un punto de vista más pedagógico, la resolución de problemas ha sido, es y seguirá siendo un verdadero muro contra el cual muchos hemos chocado. En este artículo veremos las conclusiones que autores como Polya o Schoenfeld han obtenido en el estudio de los métodos de resolución de problemas. También y a modo de ejemplo se expondrán algunos de los problemas más famosos que a lo largo de la historia han interesado a grandes matemáticos.

Palabras clave: problema, polya, heurística, recursos, cognitivos, schoenfeld.

ARTÍCULO

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN MATEMÁTICAS

INTRODUCCIÓN

Una de las actividades fundamentales en Matemáticas es la resolución de problemas. Conviene que distingamos entre ejercicio y problema. Cuando se plantea un ejercicio, se identifica de inmediato la técnica que se precisa para resolverlo. En cambio, un problema es una tarea cuyos términos y propósitos son comprensibles por la persona, pero no se sabe de momento como abordar.

La resolución de problemas ayuda a la construcción de conceptos y a establecer relaciones entre ellos. Pero no se aprende a resolver problemas por el hecho de haber aprendido determinados conceptos y algunos algoritmos de cálculo. Hemos de disponer de herramientas, técnicas específicas y pautas generales, que nos permitan enfrentarnos a ellos sin miedo. La mejor manera de aprender a resolver problemas eficazmente es resolver una cantidad suficiente. Este aprendizaje, como cualquier otro, lleva mucho tiempo.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. ESTRATEGIAS

La heurística tenía por objeto el estudio de las reglas y de los métodos de descubrimiento y de la invención. La heurística moderna, inaugurada por Polya trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas.

¿Qué es un problema?

Polya definió problema de la siguiente manera, "*Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata*."

Otra definición, parecida a la de Polya es la de Krulik y Rudnik, "*Un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma".*

De ambas definiciones se infiere que un problema debe satisfacer los tres requisitos siguientes:

1) Aceptación. El individuo o grupo, debe aceptar el problema.
2) Bloqueo. Los intentos iniciales no dan fruto, las técnicas habituales no funcionan.
3) Exploración. El compromiso personal o del grupo fuerzan la exploración de nuevos métodos para atacar el problema.

Borasi, en uno de los primeros intentos en clarificar la noción de problema utiliza los siguientes elementos estructurales:

- El contexto del problema.
- La formulación del problema. Definición.
- El conjunto de soluciones que pueden considerarse como aceptables para el problema.
- El método de aproximación que podría usarse para alcanzar la solución.

El proceso de resolución de un problema.

Para Polya, la resolución de un problema consiste en cuatro fases bien definidas:

Comprender el problema.

¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos?

Concebir un plan.

¿Se ha encontrado con un problema semejante?
¿Conoce un problema relacionado con este?
¿Podría enunciar el problema de otra forma?

Ejecutar el plan.

¿Son correctos los pasos dados?

Examinar la solución obtenida.

¿Puede verificar el resultado?
¿Puede verificar el razonamiento?

Las fases anteriores caracterizan claramente al resolutor ideal, competente. Cada fase se acompaña de una serie de preguntas cuya intención clara es actuar como guía para la acción.

Una pregunta, ¿Por qué es tan difícil entonces, para la mayoría de los humanos, la resolución de problemas en matemáticas?

Los trabajos de Schoenfeld, son por otro lado, la búsqueda inagotable de explicaciones para la conducta de los resolutores reales de problemas. Propone un marco con cuatro componentes en la resolución de problemas.

Recursos congnitivos: conjunto de hechos y procedimientos a disposición del resolutor.

Heurísticas: reglas para progresar en situaciones dificultosas.

Control: Aquello que permite un uso eficiente de los recursos disponibles.

Sistema de creencias: Nuestra perspectiva con respecto a la naturaleza de la matemática y como trabajar en ella.

Cada uno de los componentes explica las carencias en la resolución de problemas de los resolutores reales. Así, cuando a pesar de conocer las heurísticas no se sabe cuál utilizar señala la ausencia de un buen *control*. Pero las heurísticas y un buen control no son suficientes, pues puede que el resolutor no conozca un hecho, algoritmo o procedimiento del problema en cuestión. En este caso se señala la carencia de *recursos cognitivos*.

Existe una amplia, posiblemente incompleta, lista de heurísticas. Entre las más importantes cabría citar:

- Buscar un problema relacionado o más sencillo.
- Dividir el problema en partes.
- Considerar un caso particular.
- Hacer una tabla.
- Empezar el problema desde atrás.
- Variar las condiciones del problema.

La característica más importante del proceso de resolución de un problema es que, por lo general, no es un proceso paso-a-paso sino más bien un proceso titubeante.

En el proceso de resolución, Schoenfeld ha señalado que tan importante como las heurísticas es el control de tal proceso, a través de *decisiones ejecutivas* (*qué hacer* en un problema).

Son decisiones ejecutivas:

- Hacer un plan.
- Seleccionar objetivos.
- Buscar los recursos conceptuales y heurísticos.
- Evaluar el proceso de resolución a medida que evoluciona.
- Revisar o abandonar planes cuando su evaluación indica que hay que hacerlo.

Son por tanto, decisiones acerca de qué caminos tomar, pero también acerca de qué caminos no tomar.

Cuanto más precisas sean las respuestas a las preguntas: ¿Qué estoy haciendo?, ¿Por qué lo hago?, ¿Para qué lo hago?, ¿Cómo lo usaré después?, mejor será el control global que se tenga sobre el problema.

La ausencia de decisiones ejecutivas suele tener efectos desastrosos en el proceso de resolución de un problema. La mayor parte de las veces que se fracasa en la resolución de un problema es debido a esto.

Pero hay otras actitudes que imposibilitan la toma de buenas decisiones durante la fase de resolución. Entre ellas cabe destacar:

- Inflexibilidad para considerar alternativas.
- Rigidez en la ejecución de procedimientos.
- Incapacidad de anticipar las consecuencias de una acción.
- El efecto "túnel". Se produce cuando la ejecución de una tarea es tan absorbente que no hay energías disponibles para la evaluación de lo que se está realizando.

Miguel de Guzmán partiendo de las ideas de Polya y de los trabajos de Schoenfeld ha elaborado un modelo, donde se incluyen tanto las decisiones ejecutivas y de control como las heurísticas. La finalidad es que la persona examine y remodele sus propios métodos de pensamiento a fin de eliminar obstáculos y de llegar a establecer hábitos mentales eficaces.

Este modelo consiste en:

Familiarízate con el problema

- Trata de entender a fondo la situación.

Búsqueda de estrategias

- Empieza por lo fácil.
- Experimenta.
- Hazte un esquema.
- Busca un problema semejante.

Lleva adelante tu estrategia

- Selecciona y lleva adelante las mejores ideas que se te han ocurrido en la fase anterior.
- Actúa con flexibilidad.

Revisa el proceso y saca consecuencias de él.

- Examina a fondo el camino que has seguido. ¿Cómo has llegado a la solución?
- Reflexiona sobre tu propio proceso de pensamiento y saca consecuencias.

La resolución de problemas como propuesta didáctica

El National Council of Teachers of Mathematics propuso para la década de los ochenta el eslogan educativo: "*En la enseñanza de las matemáticas escolares se debe poner el enfoque en la resolución de problemas"*.

¿Qué significa poner el enfoque en la resolución de problemas? Cabe, al menos, tres interpretaciones:

Enseñar para resolver problemas

- Proponer a los alumnos más problemas.
- Emplear aplicaciones de los problemas a la vida diaria y a las ciencias.

Enseñar sobre la resolución de problemas

- Enseñanza de la heurística. El objetivo es que los alumnos lleguen a aprender y a utilizar estrategias para la resolución de problemas.

Enseñar vía la resolución de problemas

- Enseñar la matemática a través de problemas.

En un seminario celebrado en La Laguna en 1982, al ser preguntados por objetivos de la resolución de problemas, los profesores asistentes enumeran los siguientes:

- Desarrollo de la capacidad de razonamiento
- Aplicación de la teoría previamente expuesta.
- Resolución de cuestiones que la vida diaria plantea.

La primera propuesta, aunque durante mucho tiempo fue un argumento aceptado, con el paso del tiempo se ha convertido en un mito, y las dos últimas caen dentro de la primera interpretación.

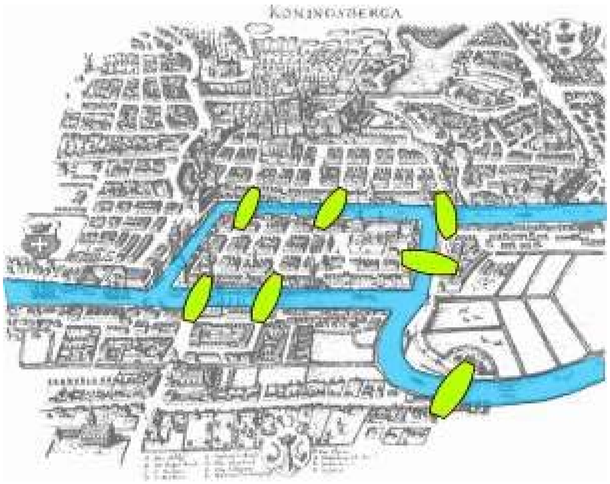
IMPORTANCIA HISTÓRICA. ALGUNOS PROBLEMAS CLÁSICOS

La resolución de problemas ha sido, es y será, el auténtico motor de las matemáticas. Podemos encontrar en la historia de las matemáticas unos cuantos problemas que se pueden considerar universales. Muchos de ellos fascinaron en su infancia a muchos grandes matemáticos.

Problemas Famosos

Los puentes de Köninsberg.

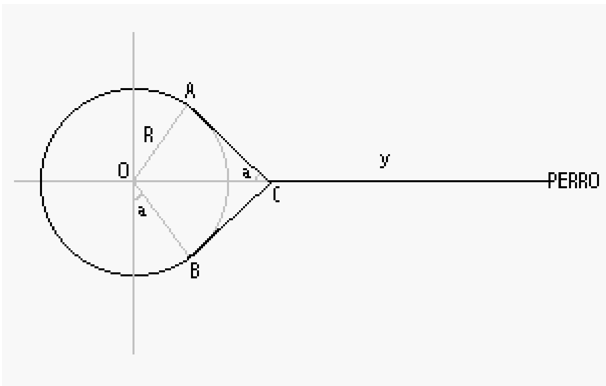
En la ciudad de Köninsberg hay una isla rodeada por dos brazos de un río. Hay siete puentes que lo cruzan. ¿Puede una persona realizar un paseo de modo que cruce cada uno de los puentes una sola vez? Solución: Euler demostró que no se puede hacer.



Problema de Teofrasto

Teofrasto fue a ver a Aristoteles. Llevaba a su perro, atado con una cuerda de longitud L. Cuando llegó, ató la cuerda con un nudo corredizo, alrededor de una columna de radio R.

El perro, al que no le gustaba estar atado, tensionó la cuerda, y la cuerda se rompió. Hallar a qué distancia del perro estaba el nudo corredizo cuando se rompió la cuerda.



Solución: La longitud de la cuerda es L = y + AC + AB + BC. Obtendremos una función que hay que maximizar.

Coloreando los mapas

Demostrar que para colorear un mapa, de forma que países con frontera común se pinten con colores distintos, sólo se necesitan cuatro colores.

El problema ha resistido los embates de muchos matemáticos. En la Universidad de Illinois dieron una demostración con ordenador pero no existe ninguna demostración matemática.

Problemas sin Solución

Problema Délico o Duplicación del Cubo

Dado un cubo cuya arista tiene longitud 1 se pide construir un cubo de volumen doble, utilizando regla sin marcas y compás.

El nombre del problema se debe a que en Delfos había un templo que era famoso por sus oráculos. Un rey acudió al templo para que le hiciesen un oráculo (adivinar el porvenir) y después de hacérselo le dijo a la sacerdotisa que le pidiese lo que quisiera. La sacerdotisa le pidió que construyese un altar del doble de volumen que el que tenía.

Tendríamos que resolver la ecuación $x^3 = 2$. No existe ningún número fraccionario que elevado al cubo dé 2.

Trisección de un ángulo

Dado un ángulo alfa, se trata de dividirlo en tres partes iguales, utilizando regla y compás.
Descartes resolvió este problema utilizando un compás.

Rectificación de una circunferencia

Dada una circunferencia de radio R, se trata de construir, con regla y compás, un segmento de longitud igual a la circunferencia.

Construcción de n-ágonos regulares

Dado un círculo de radio R, se pide construir un n-ágono (un polígono de n lados) regular inscrito en él.

Este problema sólo tiene solución si n tiene la forma $2^k + 1$.

Problemas de Números

a) ¿Existe una cantidad infinita de números perfectos? Números perfectos son números cuya suma de divisores suman el número (p.e 6).
b) ¿Existe una cantidad infinita de números primos gemelos? Los primos gemelos son parejas de números primos que están separados por un solo número (p.e 5,7, 17 y 19)
c) Demostrar que todos los números pares > 4 se pueden obtener como suma de dos primos. Euler no fue capaz de resolverlo.
d) Demostrar que todos los números impares > 9 se pueden obtener como suma de tres primos. Euler no fue capaz de resolverlo.

Problemas del Milenio.

P contra NP

Cook lo explicó con un ejemplo semejante a éste. Usted llega a una fiesta, el salón está lleno de gente y se pregunta si conoce a alguna persona de la fiesta. Se lo pregunta al anfitrión y este le dice que usted conoce a la persona que está en la ventana.
Inmediatamente usted ratifica lo dicho por el anfitrión (es fácil comprobarlo). Sin embargo, si no tuviese esta ayuda, tendría que examinar una a una a toda la gente y determinar si la conoce. Tardaría mucho tiempo en hacer esta operación.

La explicación de las siglas P y NP se refieren a los tiempos "polinómico" y "polinómico no determinista".

La conjetura de Poincaré

Poincaré llegó a unas conclusiones sobre las esferas en el espacio de tres dimensiones que, posteriormente, han resultado imposibles trasladar al espacio de cuatro dimensiones.

La hipótesis de Riemann

Los números primos han traído de cabeza a los matemáticos desde los inicios de las matemáticas.

Uno de los temas que se resiste es la distribución de los números primos. Riemann propuso que su frecuencia está íntimamente relacionada con el comportamiento de una función matemática llamada función Zeta. La hipótesis de Riemann se ha confirmado en muchos casos, pero todavía no existe una demostración general.

Las ecuaciones de Navier-Stokes

Describen el comportamiento de los fluidos, cuando se mueven en movimiento turbulento. Aún nadie ha sabido resolverlas.

La conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer

Planteaba si existía algún método para saber si las ecuaciones $x^n + y^n = z^n$ tienen soluciones que sean números enteros. Birch y Swinnerton-Dyer propusieron algunos métodos parciales que, todavía hoy, no se han demostrado.

BIBLIOGRAFÍA

- Cómo plantear y resolver problemas. Aut.: Polya. Edit.:Trillas, Mexico
- Elementos de Resolución de Problemas. Aut.: L. Puig. Edit.: Comares