ATLANTE
Cuadernos de Educación y Desarrollo
(2º Época)

Noviembre 2016 - ISSN: 1989-4155

ANÁLISIS DE LOS ERRORES DE LOS ALUMNOS EN EL CONCEPTO DE RECTA Y PLANO EN ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Virginia Laura Bravo Barletta[1]
Docente auxiliar, Fundación Universidad Argentina de la Empresa, Argentina
vbravobarletta@uade.edu.ar
Juan Carlos Patiño Echeverría[2]
jpatino@uade.edu.ar
Docente auxiliar, Fundación Universidad Argentina de la Empresa, Argentina

Para citar este artículo puede utilizar el siguiente formato:

Virginia Laura Bravo Barletta y Juan Carlos Patiño Echeverría (2016): "Análisis de los errores de los alumnos en el concepto de recta y plano en álgebra y geometría analítica", Revista Atlante: Cuadernos de Educación y Desarrollo (noviembre 2016). En línea: http://www.eumed.net/rev/atlante/2016/11/recta.html

RESUMEN

El siguiente trabajo tiene por objetivo detectar cuáles son los errores más frecuentes cometidos por nuestros alumnos al abordar el estudio de rectas y planos y elaborar con ellos una taxonomía de errores. La oportunidad de elaborar una taxonomía de errores propia, basada en nuestras experiencias, permitirá la posterior elaboración de una propuesta didáctica que permita la superación de las dificultades encontradas. La importancia del estudio radica en la necesidad de contar con una herramienta que nos brinde información sobre las dificultades de los alumnos en la apropiación de estos conceptos. Centramos el estudio en la materia Álgebra y Geometría Analítica, correspondiente al primer año de carreras de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Exactas de Fundación Universidad Argentina de la Empresa, tomando como referencia y análisis para el estudio, una muestra de 310 exámenes, distribuidos en 16 grupos diferentes a lo largo de los años 2013, 2014 y 2015.

Palabras clave: Errores - taxonomía - matemática - rectas y planos - didáctica.

ABSTRACT

The following paper aims to identify what the most common mistakes made by our students to approach the study of lines and planes and develop with them a "taxonomy of errors". The whole project aims at the further elaboration of an educational proposal that allows overcoming the difficulties encountered. The importance of the study lies in the need for a tool that gives us information on the difficulties of the students in the appropriation of these concepts. The study focused on the subject Algebra and Analytical Geometry, in the first years at the Faculty of Engineering and Sciences at Fundación Universidad Argentina de la Empresa, with reference and analysis for the study, a sample of 310 tests, divided into 16 different groups throughout the years 2013, 2014 and 2015.

---

[1]Profesora de Enseñanza Media y Superior en Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires
[2]Licenciado en Matemáticas, Universidad de Cundinamarca

Keywords: Errors - taxonomy - mathematics - lines and planes - teaching.

1. INTRODUCCIÓN

Desde un punto de vista constructivista, el error es considerado como una herramienta fundamental para la construcción del conocimiento. Es por este motivo que se hace necesario reflexionar sobre el origen de estos errores, ya que en ellos se plasman las dificultades que tienen los alumnos para la apropiación de un concepto. Como expresa Rico (1995), “al cometer un error el alumno expresa el carácter incompleto de su conocimiento y permite a los compañeros o al profesor ayudarle a completar el conocimiento adicional o llevarlo a comprender por sí mismo aquello que estaba mal”.

De acuerdo con investigaciones anteriores (Rosso, Barros. 2013), realizar un análisis sobre los errores más comunes de nuestros alumnos, permitiría proponer en un siguiente trabajo, una propuesta didáctica acorde que tenga en cuenta las dificultades encontradas. Es por este motivo, y preocupados por la tasa de equivocaciones encontrada en los exámenes finales de Álgebra y Geometría Analítica en los temas referidos a rectas y planos, que nos propusimos analizar en detalle el tipo de errores cometido por nuestros alumnos; con la idea de que al realizar un estudio exhaustivo pudiésemos tener respuestas que nos permitan lograr una mejora en la apropiación de estos conceptos en la materia.

En estudios anteriores, como los de Abrate, Pochulu y Vargas (2006: 139), los errores realizados por los alumnos pueden resumirse en un 72% en el siguiente tipo de errores:

- Errores debidos a inferencias o asociaciones incorrectas, generados por la aplicación de reglas y propiedades justificadas en esquemas similares, o por inferirse que son válidas en contextos parecidos o relacionados.

- Errores debidos a dificultades para obtener información espacial, atribuidos a deficiencias en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales, que llevan a interpretaciones incorrectas de información o hechos matemáticos.

- Errores debidos a la ausencia de conocimientos previos, causados por la carencia de aprendizajes relativos a hechos, destrezas y conceptos, que inhiben totalmente el procesamiento de la información e impiden dar una respuesta a la situación.

Si bien esta clasificación general estudiada por Abrate et Al (2006), aborda de manera general el tipo de errores que se encuentran en el estudio de la matemática, sentíamos una necesidad de generar una clasificación mucho más particular y cercana a nuestro caso. Es decir, una clasificación que reflejara con mayor precisión el tipo de errores cometido por nuestros alumnos en los temas referidos a rectas y planos.

2. MARCO TEÓRICO

Con el objetivo de ofrecer una visión general sobre la problemática que se está tratando, empezaremos mostrando una revisión bibliográfica sobre aspectos generales del estudio de errores en matemática. Luego mostraremos algunas clasificaciones de errores realizadas por diversos autores, a lo largo de varios años, que nos servirán de guía para la elaboración de una taxonomía de errores propia que se adapte a nuestras necesidades o características particulares.

Popper (1979) sostiene que el conocimiento nunca encuentra un punto de partida totalmente cierto y pleno de certeza del cuál la verdad pueda emanar y podamos deducir el resto. Al no ocurrir esto, se deducen dos consecuencias importantes: en primer lugar, que es preciso realizar una revisión constante de los conocimientos y someterlos a crítica de forma periódica, y por otro lado, el error es parte inevitable de todo conocimiento científico y de toda práctica científica. Estos dos aspectos estarán íntimamente ligados según Popper. La ciencia avanza en el transcurso del camino del estudio y también en el de la depuración de los errores.

De forma similar, la ciencia para ser aprendida (incluso la matemática), resulta difícil que encuentre un punto de partida lo suficientemente sólido y firme a partir del cual avanzar. El progreso en el conocimiento de la ciencia de manera individual, depende no solamente de los aciertos, sino también del análisis y aprendizaje de los errores y de las causas de los mismos.

A partir de este paradigma teórico se analizarán las dificultades de la enseñanza de la matemática en la Universidad. Este tema de estudio ya ha sido abordado con anterioridad por otros autores, los cuales rescatamos más adelante, quienes con sus estudios nos inspiraron y nos dieron las bases para construir nuestra taxonomía de errores.

Al respecto, cabe señalarse el estudio de Rico (1995) el cuál concluye que existe una relación entre los tipos de errores que se presentan en el nivel medio y en el universitario. En efecto, según este autor las pruebas realizadas a estudiantes muestran errores recurrentes, y una característica común: no hubo evaluaciones de desempeño perfectas pero ninguna totalmente errada. Esto, junto al análisis de los tipos de errores, lo lleva a concluir que los problemas que tanto estudiantes de nivel medio como de nivel universitario presentan son dificultades de tipo sistémica. Es decir, hay problemas en el aprendizaje de los fundamentos de la matemática que derivan en generar insuficiencias en la concepción de nuevos conocimientos matemáticos más avanzados.

Ahora bien, no alcanza con conocer las causas de los errores, sino que es preciso, a partir de estos encontrar su relación con la forma de enseñanza para poder subsanarlos. Según Boooth (1984), Chamorro (1995) y Martínez (2002) entre otros, las razones de estos problemas se deben a deficiencias en la forma de enseñanza de la matemática que provienen de la escuela media. Estas deficiencias tienen las siguientes características según Abrate et Al. (2006: 141):

- Uso exacerbado de técnicas algorítmicas o rutinas sin fundamentos teóricos.

- Utilización de reglas poco trascendentes como requisitos indispensables en la ejecución de cálculos aritméticos o resolución de ecuaciones.

- Desarrollos muy apegados a lo algebraico y escasamente relacionados con la resolución de problemas.

- Abordaje de contenidos completamente descontextualizados y poco articulados con los restantes.

- Escasa importancia otorgada al desarrollo de competencias relacionadas con la lectura crítica de datos y análisis de gráficas.

- Abuso de prototipos visuales que inhiben la formación de imágenes conceptuales.

Además de esto, existe una insuficiencia de parte de los profesores a la hora de expresar o explicar los procesos de desarrollo de la resolución de problemas. En general, no hay herramientas intermedias que sirvan para la construcción de borradores para la resolución de problemas, por otro lado los estudiantes, como señalan los profesores según Rico (1995) no suelen realizar análisis de lo que pide la consigna y muchas veces no son conscientes de las implicaciones y definiciones de los conceptos que utilizan, esto los lleva a cometer errores como los antes señalados y por otro lado, la falta de explicaciones claras en la resolución de problemas –es decir, mediante herramientas intermedias, como el uso de borradores- hacen que los estudiantes persistan en el tipo de errores antes señalados.

Según se señaló al comienzo, es preciso fomentar una actitud crítica por parte de quién investiga como de quién aprende, en este caso, de quienes se acercan a las matemáticas. Coherentemente con esto, Mante (1992) plantea que no resulta una forma eficiente de evitar los errores que el maestro muestre cuál es el camino correcto, tampoco lo es corregir a partir de los errores, pues esto tiende a aumentar la inseguridad del estudiante, por el contrario, es preciso mostrar y señalar la diferencia entre un correcto razonamiento matemático y los errores más frecuentes. Cuando el estudiante puede apreciar claramente estas diferencias, es más probable que logre luego distinguir por sí mismo la forma más correcta de razonar matemáticamente.

Godino, Batanero & Font (2003) señalan como recomendación a los docentes de matemática el investigar y recopilar los errores más frecuentes que comenten sus estudiantes. A partir de la recopilación de estos datos, es que debería trabajarse en clase con el objetivo de subsanarlos. Estos autores señalan que en ocasiones, por ejemplo, hay errores que implican una aplicación errónea de una regla, es decir, en un momento que no corresponde. En este tipo de circunstancias, por ejemplo podría mostrarse la diferencia entre la aplicación correcta de la regla y por qué en este caso es errónea y la aplicación correcta que corresponde al caso analizado.

2.1 Clasificaciones de errores en matemática

Los primeros estudios realizados sobre el análisis de errores en matemática se remontan a las primeras décadas del siglo XX. Uno de los primeros trabajos es el de Smith, quien hace una recopilación de algunos errores en demostraciones de geometría de alumnos de escuela secundaria en los Estados Unidos (Cury, 1994). (Citado por Abrate et Al. 2006).

Por esta época, Weiner, quien es considerado el fundador de la investigación didáctica orientada al estudio de errores, muestra algunos de sus trabajos, como explica Rico (1995).

A partir de los años 50, ocurre una segunda fase en la investigación del análisis de errores, y viene de la mano con la nueva concepción del procesamiento de la información. Sobre esta concepción, muchos investigadores utilizaban técnicas en las cuales pedían a sus alumnos solucionar problemas en "voz alta" y, a través de ciertos protocolos, se analizaban las estrategias (erróneas o no) utilizadas por los estudiantes para hallar la solución al problema. Resulta bastante interesante este método, ya que al aplicarlo, se puede dar cuenta del proceso lógico que utiliza el alumno al momento de intentar solucionar un ejercicio, y también el momento justo en el que comete un error.

Hasta ese momento, todas las investigaciones relacionadas con el análisis de errores, tenían algo en común: actuar como diagnósticos. Los investigadores se preocupaban por dar al profesor una clasificación de los errores cometidos por los alumnos para que éste, luego, aplicara metodologías de enseñanza reparadoras y pudiera subsanar las fallas de los alumnos. Según Abrate et Al (2006), esto termina reforzando una visión absolutista de la matemática, en la cual existe una verdad absoluta a la que se debe llegar evitando los errores.

Cury, hace una crítica sobre esta forma de estudiar al error, en pos de la eficiencia y en detrimento de la comprensión.

A partir de los años 60 y debido al ingreso de Piaget en el panorama, el estudio del error tuvo una visión más constructivista, en tanto se estimula su ocurrencia puesto que brinda posibilidades para el sujeto constructor de conocimiento.

Rico (1995) hace cuenta que hasta ese momento, los estudios sobre errores consistían en recuentos sobre el número de soluciones correctas e incorrectas realizados por los alumnos ante algún cuestionario y un intento de clasificación de estos errores para luego proceder a determinar cómo surge el error o qué factores pudieron haber conducido a ellos.

Radatz (1980). (Citado por Abrate et Al. 2006), hace una importante revisión de todas las investigaciones realizadas tanto en Europa como en Estados Unidos sobre el análisis de errores hasta finales de los años 70. En ella se rescatan algunos datos importantes:

- La Aritmética constituye el área de contenidos dominante en la mayor parte de los estudios sobre errores.

- Los desarrollos teóricos en análisis de errores muestran cierta continuidad en Estados Unidos, mientras que en los países europeos las producciones han sido esporádicas y carecen de continuidad en el tiempo hasta fechas muy recientes.

- Existe una pluralidad de aproximaciones teóricas e intentos de explicación de las causas de los errores.

Luego viene un estudio mucho más amplio de Borasi, en el que no solamente considera el error en un entorno limitado a la clasificación, sino con el interés de ir un poco más allá, y utilizar el análisis de errores para entender el funcionamiento de la mente. Los errores son analizados entonces para dos propósitos fundamentales: para eliminarlos o para estudiar sus potencialidades.

Abrate et Al (2006) explican la posición de Borasi de la siguiente manera:

> Si el foco de interés es el contenido técnico-matemático del error y queremos eliminarlo, procuraremos diagnosticar sus causas pues representa una falla del proceso; si pretendemos explorarlo, el error será considerado un estadio necesario en el proceso de aprendizaje puesto que puede llevar a nuevos descubrimientos en Matemática.
> Si nos centramos en la naturaleza de la Matemática, la eliminación del error estará ligada al entendimiento de la incomprensión del alumno sobre el concepto presentado y en retomar el tema con nuevos enfoques; si pretendemos explorar el error, este nos puede llevar a la reflexión sobre los límites y características de la propia Matemática.
> Si estamos interesados en el proceso de aprendizaje de la Matemática, el error puede ser visto como instrumento de identificación de los problemas del currículo o de la metodología de enseñanza, y al analizarlos, podrán ser eliminados; si, por otro lado, queremos explorar el error, éste puede constituirse en un instrumento para la comprensión de los procesos cognitivos de los alumnos.

En esta medida Borasi, no sólo hace un recorrido y clasificación de los errores realizados por los alumnos, sino que lo usa como herramienta didáctica para la comprensión de contenidos matemáticos, utilizando una visión constructivista del error.

Lo que se puede apreciar luego de hacer una revisión bibliográfica sobre el análisis de errores en matemática, es que el tipo de estudios se divide principalmente en dos enfoques: por un lado, el enfoque diagnóstico/reparador, en el que se pretende eliminar los errores, enmarcado generalmente en un enfoque conductista y de procesamiento de información; y por otro lado, el enfoque constructivista en el que se exploran las potencialidades del error como herramienta generadora de conocimiento.

2.2 Algunas clasificaciones existentes

Dentro de las clasificaciones (o taxonomías) ya existentes realizadas por diferentes investigadores, queremos rescatar algunas que sirvieron de base a la elaboración de nuestra propia taxonomía y que además fueron significativas a lo largo de nuestra investigación. En particular, este trabajo está enfocado en la clasificación de errores y asienta las bases para una futura investigación en la que se le dé continuidad y se ahonde en el tratamiento de estos errores para su superación.

Rico (1995), quien es uno de los principales referentes en materia de estudios de clasificación de errores, presenta una recopilación de las características principales de las investigaciones realizadas en este campo, dentro de estas características se pueden agrupar la mayoría de trabajos realizados hasta la fecha.

Los tipos de investigación en el estudio de los errores según Rico son:

1) Estudios sobre análisis, causas, elementos, taxonomías de clasificación de los errores. Cada uno de estos estudios responde a una determinada teoría psicopedagógica y a un planteamiento epistemológico particular del conocimiento y de la Matemática.

2) Trabajos acerca del tratamiento curricular de los errores. Ejemplos de esta línea son las propuestas didácticas que parten del error para la construcción de los conocimientos matemáticos correctos.

3) Estudios relativos a la formación de los docentes en cuanto a la capacidad para detectar, analizar, interpretar y tratar los errores de sus alumnos.

4) Investigaciones psicométricas que incluyen técnicas estadísticas como contrastaciones de hipótesis, para el análisis de los errores.

Para nuestro caso, la investigación estuvo centrada en la búsqueda de estudios del primer tipo nombrado por Rico, es decir estudios sobre análisis, causas, elementos y elaboración de taxonomías de clasificación de errores. Entre estos estudios, rescatamos los más importantes:

Di Blasi Reigner y Otros autores (2003), hacen una categorización de errores como sigue a continuación.

- Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos. Conflicto de precisión involucrado en el lenguaje ordinario dentro del contexto matemático.

- Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático. El abandono de las demostraciones formales no debería implicar un abandono del pensamiento lógico.

- Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza. Vinculadas a la institución escolar, el currículo y los métodos de enseñanza.

- Dificultades asociadas al desarrollo cognitivo de los alumnos. Los profesores deberían contar con información sobre los estadios generales del desarrollo al momento de diseñar el material de enseñanza.

- Dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales. La ansiedad por terminar una tarea, el miedo al fracaso, a equivocarse, pueden tener repercusiones en la actividad matemática de los alumnos.

Rico (1995) presenta la siguiente categorización general de los errores de Radatz

- Dificultades del lenguaje. Para los alumnos el aprendizaje del lenguaje matemático es tan complejo como aprender una lengua extranjera.

- Dificultades para obtener información espacial. En algunos estudiantes la resolución de tareas matemáticas se ve limitada por las diferentes capacidades que poseen para pensar mediante imágenes visuales.

- Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. Esto incluye conocimiento inadecuado sobre contenidos y procedimientos específicos para la resolución de ejercicios.

- Asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento. El trabajo con problemas similares puede provocar una falta de flexibilidad a la hora de codificar y decodificar nueva información.
    - Por perseveración.
    - De asociación.
    - De interferencia.
    - De asimilación.

- Aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. Hace referencia a la aplicación exitosa de reglas o estrategias similares en áreas de contenidos diferentes.

También presentada por Rico (1995), la categorización de errores elaborada por Mavshovitz-Hadar, Zaslavksy e Invar es la que sigue

- Datos mal utilizados. Se incluyen los errores en los que el alumno utiliza de manera incorrecta datos dados.

- Interpretación incorrecta del lenguaje. Son errores causados por una traducción incorrecta de hechos matemáticos desde un lenguaje simbólico a otro.

- Inferencias no válidas lógicamente. Se trata de errores que no se deben al contenido específico sino a falacias de razonamiento.

- Teoremas o definiciones deformados. Por ejemplo, la aplicación de un teorema que no verifica todas las hipótesis.

- Falta de verificación en la solución. Cuando todos los pasos en la resolución son correctos pero la respuesta obtenida es incorrecta y es un error que podría evitarse contrastando esta respuesta con el enunciado.

- Errores técnicos. Incluye errores de cálculo, de lectura de tablas, entre otros.

Las categorizaciones mencionadas coinciden en que muchos de los errores incluyen dificultades con el lenguaje matemático y con el pensamiento lógico.

Abrate et Al (2006), resumen de una manera concisa la visión de Rico sobre los estudios de errores en matemática, poniendo en evidencia la dificultad y la necesidad de seguir investigando en el campo, para cerrar vacíos aún evidentes.

> […] Rico (1995) destaca que, si bien existe una cantidad considerable de categorizaciones de errores y se realizaron serios intentos por desarrollar un sistema de categorización de errores con base en una tipificación de obstáculos y del análisis derivado correspondiente, hasta el momento, no se han superado los niveles generales, meramente descriptivos, y no existe un desarrollo teórico sistemático que permita clasificar, interpretar, y predecir los errores en términos de obstáculos, es decir, en función de argumentos fundamentalmente epistemológicos y con exclusión de categorías cognitivas. No obstante, creemos importante hacer notar que los métodos descriptivos desempeñan un papel fundamental en la investigación educativa dado que pueden proporcionar hechos, datos, etc., y preparan el camino para la configuración de nuevas teorías o nuevas investigaciones. […]
> (Abrate et Al. 2006)

3. DESARROLLO DEL TRABAJO

El estudio realizado es de tipo diagnóstico-descriptivo, se pretendió hacer un análisis y una categorización de los errores cometidos en los exámenes finales (previos y regulares) por los alumnos de la materia Álgebra y Geometría Analítica particularmente referidos al tema de rectas y planos.

El análisis fue realizado a partir de 16 exámenes tomados a lo largo de los años 2013, 2014 y 2015 a 310 alumnos, de la materia Álgebra y Geometría Analítica que se ubica en los primeros años de todas las carreras de ingeniería o licenciatura de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Exactas de la Fundación Universidad Argentina de la Empresa (UADE).

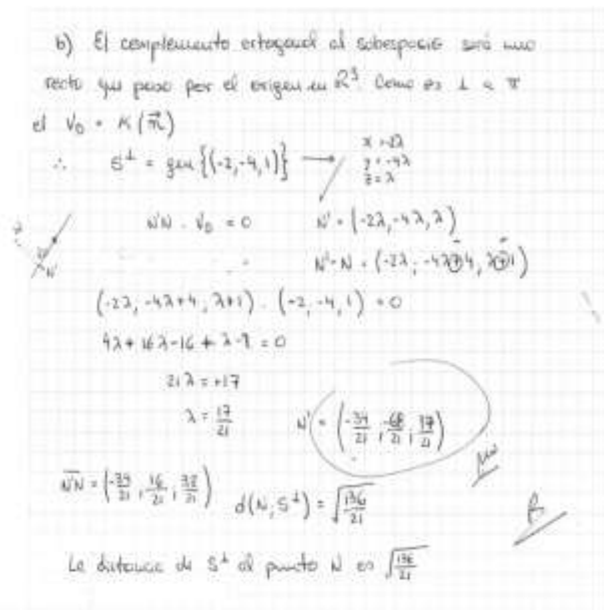
En un principio, se hizo una selección sobre los ejercicios referidos específicamente al tema de nuestro interés (rectas y planos), y una vez seleccionados, revisamos las respuestas de los alumnos. Luego de recopilar todas las respuestas, de hacer una revisión bibliográfica de las taxonomías de errores existentes y de una puesta en común sobre las percepciones propias que notábamos en la corrección de los exámenes, elaboramos una tabla que nos permitía de manera práctica agrupar los errores que cumplían determinada característica, lo cual nos llevó a la realización de la siguiente categorización de errores.

3.1. *Errores vinculados a errores de cuentas. (E1).*

Dentro de este grupo, se encuentran errores cometidos por el olvido de algún signo en alguna expresión, de transcribir mal el enunciado a la resolución, y de todos los errores que estos descuidos podrían causar en la resolución de un ejercicio. Estos errores fueron muy frecuentes, en particular generaron ciertos conflictos al momento del análisis de los resultados, porque si bien su frecuencia es alta, no son tan relevantes para nosotros en cuanto a los objetivos del presente trabajo, dado que consideramos más importantes los errores vinculados a los conceptos de rectas y planos. En especial cuando este tipo de errores no modifica lo central del ejercicio y la resolución presentada fue coherente.

Hallar la distancia entre el punto $N = (0,4,1)$ *y el complemento ortogonal del subespacio* $S = gen\{(1,0,2),(1,1,6)\}$

Figura 1. Error de cuenta.


b) El complemento ortogonal al subespacio será una recta que pasa por el origen en R^3. Como es $\perp$ a π el $V_0 = K(\vec{n})$

$\therefore \quad S^\perp = gen\{(-2,-4,1)\} \rightarrow x=-2\lambda,\ y=-4\lambda,\ z=\lambda$

$\vec{N'N} \cdot V_0 = 0 \qquad N' = (-2\lambda,-4\lambda,\lambda)$

$N'-N = (-2\lambda, -4\lambda-4, \lambda-1)$

$(-2\lambda,-4\lambda+4,\lambda+1)\cdot(-2,-4,1)=0$

$4\lambda+16\lambda-16+\lambda-1=0$

$21\lambda=+17$

$\lambda=\frac{17}{21} \qquad N'=\left(-\frac{34}{21},-\frac{68}{21},\frac{17}{21}\right)$

$\vec{N'N}=\left(-\frac{34}{21},\frac{16}{21},\frac{38}{21}\right) \qquad d(N,S^\perp)=\sqrt{\frac{136}{21}}$

La distancia de $S^\perp$ al punto N es $\sqrt{\frac{136}{21}}$

Fuente: Ejemplo tomado de examen

3.2. *Errores vinculados a ejercicios incompletos, desarrollados a la mitad o hasta cierto instante. (E2).*

En este grupo se encuentran los errores en los que el alumno no culmina un ejercicio y por lo tanto no contesta a la consigna pedida, pero durante el procedimiento realizado no comete otro tipo de error. Esto podría deberse, por ejemplo, al desconocimiento de cómo proceder para completar el ejercicio o a la falta de atención a lo que concretamente se pide en el enunciado, a qué se espera como respuesta a la consigna. Es decir, el hecho de no haber completado el ejercicio no implica que no sepa cómo hacerlo.

Hallar la distancia entre el punto $N = (0,4,1)$ *y el complemento ortogonal del subespacio* $S = gen\{(1,0,2),(1,1,6)\}$

Figura 2. Error asociado a la falta de abstracción de información del enunciado.

Encuentra la proyección, pero no calcula la distancia.
Fuente: Ejemplo tomado de examen

3.3. Errores vinculados a resolución correcta de procedimientos, pero con información no correcta (no tiene lógica de dónde sacan cierta información). (E3).

En este grupo se engloban los errores en los que el alumno manifiesta capacidad de aplicar procedimientos algebraicos (factorización, resolución de sistemas, producto vectorial o escalar entre vectores, etc.), pero los aplica en datos no relevantes a los solicitados. Conocen algunos procedimientos, pero no necesariamente son pertinentes para la resolución del ejercicio.

> *Dada la recta r de ecuación vectorial* $\bar{X} = (2,1,1) + t(1,2,-3), t \in \mathbb{R}$, *y los puntos* $M = (2,0,2)$ *y* $N = (4,0,1)$.
>
> *(a) Hallar la ecuación cartesiana del plano π que contiene a la recta r y al punto* M. *Graficar.*

Figura 3. Error al utilizar información no pertinente

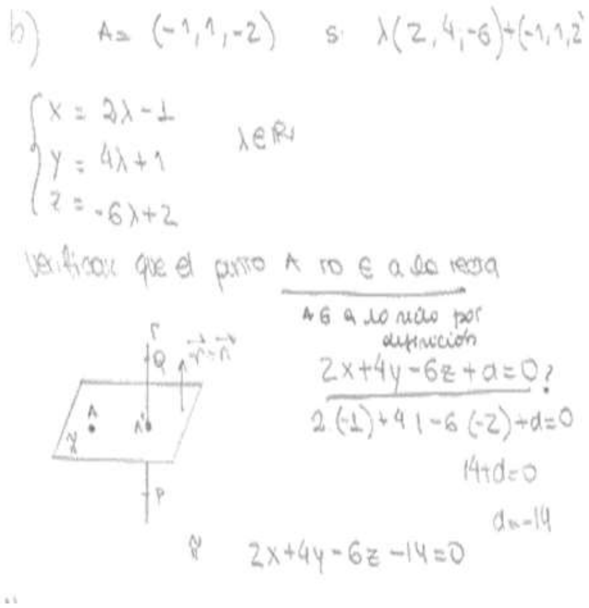
Fuente: Ejemplo tomado de examen

3.4. Errores vinculados a la falta de conocimiento para abstraer información o buscar información de los enunciados. (E4).

Estos errores aparecen cuando el alumno es consciente de los procedimientos que tiene que desarrollar, pero no logra obtener los datos del enunciado o de otra fuente para solucionar el ejercicio.

Dada la recta: r, determinada por la intersección de los planos $\alpha: -x + 2y = 0$ *y* $\beta: x - 2y + 2z = 2$ *. Y la recta s, que pasa por los puntos* $A = (-1,1,-2)$ *y* $B = (-3,-3,4)$*. Hallar la distancia del punto A a la recta s.*

Figura 4. Error asociado a la falta de abstracción de información del enunciado.



El alumno no interpreta que el punto A está sobre la recta s,
por lo tanto, la distancia entre ellos es cero.
Fuente: Ejemplo tomado de examen

3.5. Errores vinculados a desconocimiento del tema. (E5).

Son errores en los que se manifiesta pleno desconocimiento de los procedimientos, o de los conceptos para solucionar el ejercicio. A su vez incluye errores en los que la respuesta del alumno manifiesta claramente una incoherencia con los aspectos teóricos del tema.

Hallar la distancia entre el punto M = (3,4, 1) y el subespacio S = gen {(1,0,2), (1,1,6)}

Figura 5. Error asociado al desconocimiento del tema.

No vincula el resultado obtenido con el concepto de distancia.
Fuente: Ejemplo tomado de examen

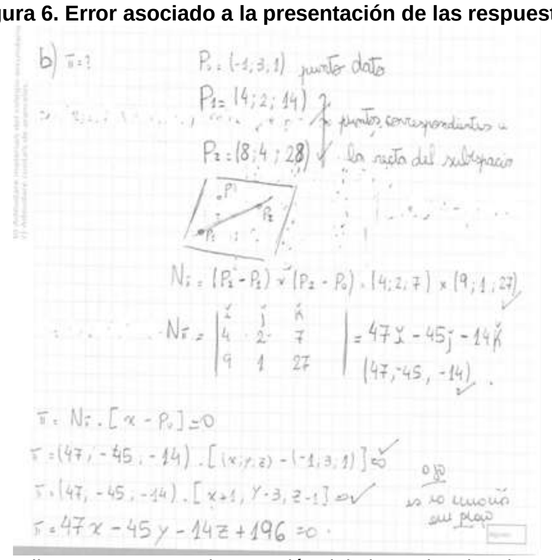
3.6. Errores vinculados a la forma de presentar las respuestas. (E6).

Dentro de este grupo se encuentran los errores en los que el alumno presenta incorrectamente la respuesta en términos de notación.

Sea el subespacio dado por $S = \{(x; y; z) \in R^3 / 2x + 3y - z = 0, x - 2y = 0\}$

Hallar la ecuación del plano π que contiene al subespacio S y pasa por el punto (-1; 3; 1).

Figura 6. Error asociado a la presentación de las respuestas.



No escribe correctamente la ecuación del plano al no igualar a cero.
Fuente: Ejemplo tomado de examen

3.7. *Errores vinculados a incoherencias o mezcla de conceptos sin sentido. (E7).*

Estos son aquellos errores en los que el alumno muestra conocimiento de algunos conceptos, pero no el vínculo entre sí, generando una mezcla de conceptos sin sentido para la realización del ejercicio.

Sea S el subespacio dado por S = gen {(1,1,0), (2,2,2)}.
Hallar una base del complemento ortogonal de S y su dimensión.

Figura 7. Error asociado a incoherencias entre conceptos.

Aparece el término "LI" para buscar la normal al plano.
Fuente: Ejemplo tomado de examen

3.8. *Errores vinculados a falta de conocimientos sobre procedimientos algebraicos para desarrollar ejercicios. (E8).*

Se incluyen en este grupo los errores en los que el alumno manifiesta el conocimiento sobre la forma de proceder para solucionar un ejercicio, pero queda limitado ante la necesidad de aplicar un procedimiento algebraico más básico (factorización, resolución de sistemas lineales, etc.).

> *Dadas las rectas*
> *r: determinada por la intersección de los planos α: -x + 2y = 0 y β: x – 2y + 2z = 2*
> *s: recta que pasa por los puntos A = (-1,1,-2) y B = (-3,-3,4)*
> *Halle el punto intersección entre r y s, si existe.*

Figura 8. Error asociado al desconocimiento de procedimientos algebraicos.


S: $\vec{AB}$ = B-A
= (-3,-3,4) - (-1,1,-2)
= (-2,-4,6)
No hay intersección entre las dos rectas porque no hay ningún número
λ, t ∈ R³ que las iguale

Iguala cada ecuación del plano a cero y luego las iguala entre sí, pero no hace nada más.
Fuente: Ejemplo tomado de examen

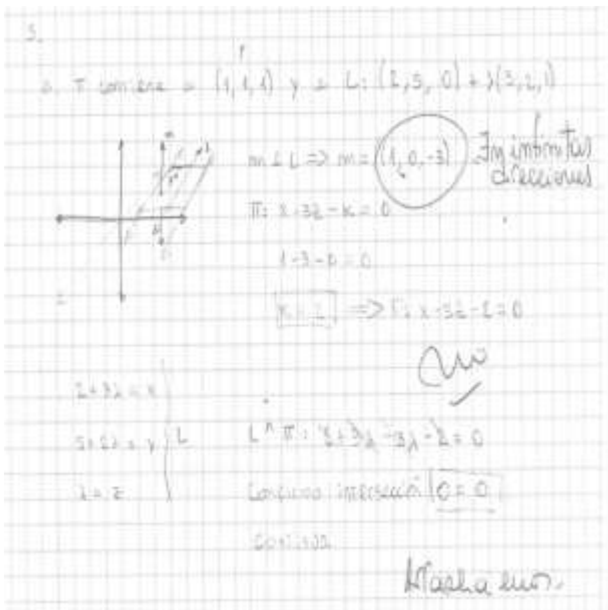
3.9. Errores vinculados a la afirmación (o asimilación como verdaderas) de conceptos erróneos. (E9).

Dentro de este grupo se encuentran aquellos errores en los que los alumnos dan como verdaderas propiedades que son falsas. Por ejemplo en algunos casos extrapolan conceptos previos y los dan por verdaderos en otros conceptos. No vinculan o renuevan con los nuevos conceptos adquiridos.

Un caso típico de este tipo de error encontrado en los exámenes es que al preguntárseles sobre la intersección entre dos rectas en el espacio y al obtener que no existe intersección entre éstas, afirman que las rectas son paralelas, sin considerar que podrían ser alabeadas. Intentan resolver un problema de intersección de rectas en el espacio con el marco de aquello que conocen en el plano.

Hallar la ecuación del plano π, sabiendo que pasa por el punto (1;1;1) y contiene a la recta:
r: $\frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{2} = z$

Figura 9. Error asociado a la afirmación de conceptos erróneos.



Al arrastrar error de signo y obtener que no hay intersección entre las rectas, afirma que las rectas son paralelas, sin considerar que podrían ser alabeadas.
Fuente: Ejemplo tomado de examen

4. GRADO DE IMPORTANCIA DE ERROR

De manera de poder analizar con más detalle el tipo de errores cometido por los alumnos, se decidió otorgar un grado de importancia a cada tipo de error cometido. Este grado, está vinculado con la importancia (o el nivel de severidad) que el docente considera respecto de algún error.

G1 - Grado 1 (Importancia baja), este tipo de error puede ser fácilmente superado mediante una auto reflexión por parte del alumno. Un trabajo consciente sobre el desarrollo de los ejercicios debería ser suficiente para solventarlo.

G2 - Grado 2 (Importancia media), la superación de este tipo de error, requiere por parte del alumno, un aumento de ejercitación y asimilación de ciertos conceptos. Además de esto, requiere una revisión de ciertos conceptos teóricos.

G3 - Grado 3 (Importancia alta), para lograr una mejora del error se requiere una intervención más alta por parte del profesor. En este tipo de errores se manifiesta una ausencia de contenidos teóricos y conceptuales alta. Y es por tanto el error que puede llevar a generar fracaso en el alumno.

Teniendo en cuenta lo anterior, se ha pensado para investigaciones similares futuras, otorgar una ponderación determinada a cada tipo de error, para poder analizar entonces la vinculación que existe entre la cantidad de veces que se comete determinado error y el peso de importancia que tiene este error.

Luego de estudiar y definir los grupos de errores cometidos por los alumnos, se recopiló la información en la siguiente tabla, en la que se relaciona el error con la cantidad de veces en la que apareció al menos una vez en un parcial, es decir un 1 indica que, en determinado examen, el error correspondiente se manifestó (aunque haya aparecido una o más veces en ese examen). De esta manera, la tabla nos permitió recolectar y analizar la información de una manera más sencilla.

Tabla 1.

Tipo de error	Manifestación del error
E1	15
E2	9
E3	45
E4	4
E5	67
E6	5
E7	5
E8	9
E9	4

Fuente: Elaboración propia.

5. DISCUSIÓN

En cuanto a los errores más frecuentes que fueron los de tipo E1, E3 y E5 (ver Tabla 1), queremos realizar algunas observaciones:

Los errores de tipo E1 (errores vinculados a errores de cuentas) podríamos considerarlos de Importancia baja, dado que pueden ser superados mediante un trabajo consciente por parte del alumno. Si bien su frecuencia es alta, no son tan relevantes para nosotros en cuanto a los objetivos del presente trabajo, dado que consideramos más importantes los errores vinculados a los conceptos de rectas y planos. En especial cuando este tipo de errores no conlleva una modificación de aquello que era central en el ejercicio y la resolución fue coherente.

Adjudicamos a los errores de tipo E3 y E5 una importancia alta ya que para lograr la superación del error se requiere una intervención más alta por parte del profesor y un trabajo conjunto entre éste y el alumno.

Aunque menos frecuentes, atribuimos a los errores de tipo E4, E7, E8 y E9 una importancia alta ya que la tarea de obtener la información necesaria y pertinente del enunciado para la resolución del ejercicio, la vinculación entre conceptos, la falta de herramientas algebraicas y extrapolación de propiedades válidas en ciertos contextos a los nuevos contextos en estudio donde no necesariamente son válidas, requieren de una intervención más activa por parte del docente.

Los errores de tipo E2 y E6 tienen una importancia media dado que su superación requiere por parte del alumno una mayor cantidad de resolución de ejercicios, una revisión de ciertos conceptos teóricos, una lectura profunda de las consignas y especial atención a la presentación de las respuestas. Este trabajo no descarta la intervención del docente.

La categorización de errores elaborada nos brinda información relevante sobre los errores más frecuentes cometidos por nuestros alumnos para la elaboración, en una segunda etapa, de una propuesta didáctica que los tome como punto de apoyo/partida. Además, como puede observarse, la mayor parte de los errores detectados tienen un grado de importancia alta lo que nos muestra la necesidad de un trabajo consciente y comprometido entre docentes y alumnos. Éste debería incluir, según los errores encontrados, un trabajo del docente con los alumnos en la lectura y compresión de enunciados, atendiendo a qué se espera como una respuesta aceptable, poniendo énfasis en la notación (en especial cuando un pequeño cambio en la notación implique un cambio conceptual importante) y en la vinculación entre lo analítico y lo geométrico.

Las dificultades para obtener información espacial tienen particular importancia en el estudio de errores del presente trabajo ya que las dificultades para pensar a través de imágenes espaciales, sumado a la extrapolación a R^3 de propiedades válidas en R^2, pueden hacer que resulte complejo visualizar las rectas y planos en el espacio, además de las posiciones relativas entre ellos.

6. CONCLUSIÓN

El estudio realizado sobre los errores referentes al tema de rectas y planos cometidos por los alumnos en los exámenes finales, nos permitió la elaboración de una taxonomía propia con la que hasta el momento no se contaba para nuestra institución. Es de gran importancia para nosotros contar con una herramienta que nos permita analizar la forma en que se equivocan nuestros estudiantes para de esta manera crear propuestas didácticas acordes a las dificultades encontradas. La elaboración de la taxonomía, nos permite también abrir la puerta a futuras investigaciones sobre errores en otras áreas de la matemática y la posible vinculación o semejanza que puedan existir entre ellas.

Encontramos también dificultades a lo largo del estudio realizado dada la complejidad de clasificar algunos errores en ciertas categorías, si bien la clasificación se realizó basándonos en la experiencia propia como docentes y en algunas investigaciones ya realizadas, la discusión sobre la pertinencia o no de algunas categorías de errores queda abierta a futuras investigaciones.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRATE, R.; POCHULU, M. y VARGAS, J. (2006): Errores y dificultades en Matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo 1ª ed. Editorial Universidad Nacional de Villa María, Buenos Aires.

BATANERO, C.; GODINO, J. D.; GREEN, D. R.; HOLMES, P. y VALLECILLOS, A. (1994). “Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales”. En *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25(4), 1994, p. 527 – 547.

BOOOTH, L. (1984). “Algebra: Children’s Strategies and Errors. A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project”. Editorial NFER-Nelson Publishing Co, New Windsor, Berkshire, England.

CHAMORRO, M. (1995). “Aproximación a la medida de magnitudes en la enseñanza primaria”. En *UNO (Revista de Didáctica de las Matemáticas)*. No 3, pp. 31 – 53.

CURY, H. (1994). “As concepções de matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos”. Tesis de Doctorado en Educación. Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Di BLASI REGNER, M. y Otros (2003). “Dificultades y Errores: Un estudio de caso”.

Comunicación breve presentada en el II Congreso Internacional de Matemática Aplicada a la Ingeniería y Enseñanza de la Matemática en Ingeniería , Buenos Aires, Diciembre 2003.

MANTE, M. (1992). "La concepción del aprendizaje e investigación en didáctica de la Matemática". En *Revue Reperes*. IREM No 35, 1992.

MARTÍNEZ, G. (2002). "Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las Convenciones matemáticas de los exponentes". En *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Vol. 5, No 1, 2002, p. 45 – 78.

POPPER, K. (1979). "El desarrollo del conocimiento científico". Editorial Siglo XXI, México.

RADATZ, H. (1980). "Student's errors in the mathematics learning process: A Survey". *For the Learning of Mathematics*. Vol 1 (1), 1980, p.16-20. Disponible en http://www.jstor.org/stable/40247696

RICO, L. (1995). "Errores en el aprendizaje de las Matemáticas". En Kilpatrick, J.; Rico, L. y Gómez, P. *Educación Matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica, México, pp. 69-108.

ROSSO, A.; BARROS, J. (2013) "Una taxonomía de errores en el aprendizaje de espacios Vectoriales". En *Revista Iberoamericana de Educación*. Boletín 63/2, 2013. Disponible en http://rieoei.org/rie_contenedor.php?numero=boletin63_2&titulo=Boletin%2063/2%2015-11-13