Manual introductorio a las teorías del Crecimiento Económico

Chavarría, Germán
Fonseca, María Haydée
Martínez, Octavio
Morales, Deybi

ÍNDICE GENERAL

PREFACIO

Nicaragua es un país con escaso capital humano, en gran parte debido a la limitada calidad educativa tanto pública como privada. En este sentido, son pocos los aportes realizados a la academia por los propios estudiantes, sobre todo en disciplinas en donde la información más importante está en su mayoría en el idioma inglés y en donde la complejidad matemática sobrepasa la enseñanza de las universidades. Esto a su vez provoca que la siguiente generación de estudiantado no cuente con recursos académicos claros y concretos que ayuden al entendimiento de importantes temas dentro de las diferentes disciplinas, convirtiéndose todo esto en un ciclo de pobreza educativa y bajo nivel de competitividad de nuestro estudiantado frente al extranjero, lo cual al final de cuenta redunda en atraso económico.

Con la ilusión de contribuir al rompimiento de dicho ciclo; introduciendo a los alumnos de pre grado a temas económicos importantes sobre crecimiento y ofreciendo las herramientas teóricas necesarias para el estudio de los mismos, nosotros, estudiantes de cuarto año de Economía de la Universidad Centroamericana realizamos el presente manual en donde se abarca paso a paso dos de los principales modelos clásicos de crecimiento económico, que retomaron el modelo de Solow, nos referimos al modelo de N. Gregory Mankiw, David Romer, y David N. Weil (*A Contribution to the Empirics of Economic Growt*h); y al modelo de Robert J. Barro (*Notes on Growth Accounting*).

En el presente manual, el desarrollo de cada modelo inicia con la traducción intacta del paper original, seguido de una explicación detallada elaborada por nosotros mismos, es importante aclarar que en la medida en que se avanza dicha explicación es menos detallada ya que se da por hecho que el lector ha venido absorbiendo los conocimientos previamente planteados.

Cabe mencionar que este manual fue inspirado por las orientaciones de nuestro profesor de Política Económica II: Msc. Oscar Neira, a quien agradecemos por sus valiosas enseñanzas, adicionalmente agradecemos a Galileo Flores por su colaboración en la traducción parcial del segundo paper (NOTAS SOBRE LA CONTABILIDAD DEL CRECIMIENTO). Dejamos pues en manos del lector esta pequeña contribución a la academia, esperando sea de su utilidad este esfuerzo por proporcionar al estudiante una experiencia en el análisis económico dinámico. Además esperamos que dicho trabajo incentive tanto en estudiantes como profesionales, a realizar documentos semejantes, para entre todos poder crear esa base de información accesible tan necesaria para el desarrollo del conocimiento. Por nuestra parte prometemos seguir esta línea de contribución con nuevos manuales posteriores.

Chavarría, Germán
Fonseca, María Haydée
Martínez, Octavio
Morales, Deybi

I. INTRODUCCIÓN

Primeramente recordemos que el *Crecimiento Económico* no es más que el aumento de la renta o de la producción de bienes y servicios finales, es decir aumentos del *Producto Interno Bruto (PIB)*. Lo que involucra el crecimiento de las principales variables macroeconómicas como son: el consumo de las familias, la inversión, el gasto del gobierno y las exportaciones netas (exportaciones menos importaciones).

Cabe mencionar que el PIB es necesario tratarlo en términos reales, es decir, sin el efecto de la inflación. Además para que el *PIB real*, como indicador del crecimiento económico, sea más acertado, se opta por dividirlo entre el número de habitantes del país, a lo que denominamos *PIB real per cápita.*

La importancia de incentivar el crecimiento económico es que, en teoría, éste redunda en mejoría del bienestar de las familias. Ante lo cual se ha demostrado que efectivamente los habitantes de los países con mayores volúmenes de PIB real per cápita son los que cuentan con mejor calidad de vida. Sin embargo no en todos los casos es así, y de hecho a nivel internacional se observa un crecimiento económico acompañado de crecimiento en la desigualdad.

Sin embargo, como se mencionó, el crecimiento económico, en teoría, viene acompañado de mejora en el bienestar de las personas, en este sentido, es de suma importancia identificar esos factores que explican mejor el crecimiento para orientar de forma adecuada las políticas públicas, es decir ¿qué provoca este crecimiento ininterrumpido a pesar de los vaivenes de las fluctuaciones de corto plazo? es la pregunta principal que los estudiosos del crecimiento económico han buscado responder. Y es que es importante diferenciar entre el crecimiento económico en el corto plazo y crecimiento económico en el largo plazo. El que principalmente interesa a la macroeconomía es el crecimiento en el largo plazo, ya que en el corto plazo la economía únicamente fluctúa con subidas (crecimiento) y bajas (recesión) momentáneas.

En el afán de mostrar la receta mágica para el crecimiento económico en el largo plazo, los economistas han intentado revelar cuáles son las principales variables que incentiva dicho crecimiento a través de modelos. Un *modelo de crecimiento económico* no es más que una representación matemática de la producción en función de una serie de variables.

Y es que la historia cuenta que los países con mayores índices de crecimiento suelen haber sufrido cambios similares tales como disminución en el peso del sector agrario, concentración de la población y menores tasas de crecimiento demográfico, es por ello que dichas similitudes ofrecen a los economistas esperanzas de identificar qué provoca en mayor medida el crecimiento.

La explicación de la naturaleza y causa del crecimiento de las naciones la proporcionaron grandes clásicos económicos tales como: Adam Smith, David Ricardo, Carlos Marx, entre otros. Sin embargo y a pesar de ser un fenómeno existente también en la época de estos grandes, la modelización del crecimiento económico es una temática recientemente abordada, específicamente debió de esperar hasta finales de la década de 1930.

Los primeros trabajos de Harrod (1939) y Domar (1946) ampliaban en el tiempo la dinámica a corto plazo introducida por Keynes (1936), llegando a conclusiones desalentadoras sobre la estabilidad del crecimiento. La recuperación del optimismo se debe a Solow (1956) y Swan (1956), que elaboraron el modelo básico de una economía dinámica. Lo que distingue a su aportación es una función de producción neoclásica, con rendimientos constantes a escala, rendimientos decrecientes de los factores y una elasticidad de sustitución positiva entre ellos.

Solow surge como una oposición al pesimismo del modelo Harrod-Domar en lo concerniente, principalmente, a los coeficientes fijos de la tecnología. Con respecto a su artículo, Solow afirma: "...La mayor parte de este ensayo se ocupa de un modelo de crecimiento a largo plazo que acepta todos los supuestos de Harrod-Domar, excepto el de las proporciones fijas" (Solow 1956). De esta manera, en el modelo de crecimiento de Solow se permite la sustitución de un factor por otro (capital por trabajo) en la producción, es así como se admite la posibilidad de progreso técnico y, por lo tanto, la movilidad de la función de producción.

Puesto que ambos modelos expuestos en el presente manual se basan en el modelo de Solow, resulta conveniente a nivel introductorio señalar a continuación los principales supuestos del modelo de crecimiento de Solow, sin embargo, cabe mencionar que dichos supuestos serán abordados de forma más amplia en el desarrollo del trabajo, principalmente en la sección de la explicación matemática detallada.

1. $Yt = F(Kt, Lt)$ Una función de producción mide el volumen máximo de producción que puede obtenerse con una cantidad dada de factores. Si se utilizan dos factores en la producción (como K y L) las relaciones de producción pueden ser representadas gráficamente por medio de una isocuanta, que no es más que el conjunto de diferentes combinaciones de K y L con los que se puede obtener un nivel de producción determinado. De esta manera se establece que se puede obtener el mismo nivel de producción utilizando diversas técnicas. Además, para medir la relación a la que se tendrá que sustituir un factor por otro para mantener constante el nivel de producción se utiliza la relación técnica de sustitución (RTS).
2. Existen dos factores productivos, el capital (Kt) y el trabajo (Lt), por lo que la función de producción es: $Yt = Af(K, L)$
3. La fracción ahorrada de la producción es una constante s, de forma que el volumen de ahorro es: $S = sY$

4. El stock de capital de un período es el stock de capital del período anterior más el aumento de la inversión del período anterior. $K = (1-\delta)K_{t-1} + I$
5. La variación del stock de capital (la inversión neta) es igual al ahorro: $Y_t = A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$ En donde el parámetro A representa el factor tecnológico. Además, los parámetros α y 1-α miden la respuesta de la cantidad de producción a las variaciones de los factores.
6. La función de producción es del tipo Cobb-Douglas.
7. La producción presenta rendimientos constantes de escala.
8. Los factores productivos capital (K) y trabajo (L) están sujetos a la ley de rendimientos decrecientes.
9. El pago al factor trabajo y capital está determinado por la productividad marginal de éstos (PML=W; PMK=R); o sea hay competencia perfecta.

En las dos décadas siguientes, el desarrollo de esta rama teórica fue considerable. Cass (1965) y Koopmans (1965), a partir de un modelo elaborado por Ramsey (1928), completaron la teoría neoclásica bajo el supuesto de que los consumidores son optimizadores racionales. De este modo enriquecieron la dinámica de la transición de un estado estacionario a otro, aunque respetando casi todas las conclusiones del modelo neoclásico de Solow.

En este marco de la investigación neoclásica, surge el modelo de N. Gregory Mankiw, David Romer y David N. Weil (1992). Dicho modelo se formó hasta hoy en día en uno de los modelos de crecimiento empíricos más notables para explicar analíticamente los hechos estilizados del crecimiento de una economía y de convergencia. Por lo tanto este modelo representa una piedra angular del resurgimiento del modelo neoclásico en los noventa, y es en este sentido un marco de referencia necesario en los estudios sobre crecimiento económico y convergencia económica. Por ello, es importante entender sus características, sus predicciones, desarrollo matemático y aplicación.

Posteriormente, Robert Barro (1998) retomó nuevamente el modelo de Solow para identificar los factores productivos y su aportación en el crecimiento económico, e identifica el residuo de Solow o la productividad total de los factores como principal factor explicativo del crecimiento, a esto se conoce como la Contabilidad del Crecimiento y significa hasta nuestros días un importante aporte al entendimiento de qué explica el crecimiento económico y orientar hacia estas variables las políticas macroeconómicas. Además Barro en la última parte de su famoso paper: *Notes on Growth Accounting*, decide inclinarse hacia nuevos enfoques de modelos de crecimiento endógeno.

Ésta línea continuó y recientemente han surgidos muchos nuevos modelos de crecimiento económico orientados más hacia el enfoque endógeno y la institucionalidad. Así como el cada vez más intenso debate sobre el crecimiento económico v/s el desarrollo económico.

A continuación se muestra de forma esquemática lo anteriormente expuesto sobre la evolución histórica de los principales modelos de crecimiento, esto con el objetivo de esclarecer el contexto histórico de los modelos aquí desarrollados.

Neoclásicos (últimos tercio de S. XIX). Enfoque microeconómico, eficiencia del mercado, marginalismo.

J.M Keynes (1936). Enfoque macroeconómico. Modelo de corto plazo y cerrado. Economía dirigida por demanda, con desempleo y en desequilibrio.

Harrod-Domar (1939-1945). Se hace dinámico el modelo de Keynes. El modelo es estable.

Robert Solow (1956). Fundamento neoclásico. Crecimiento con rendimientos decrecientes, PTF exógena, tendencia a la convergencia.

Escuela de Cambridge: Joan Robinson Piero Sfraffa, Luigi Passinetti, Nicholas Kaldor. Crítica persistente a la ortodoxia neoclásica en problemas fundamentales de las teorías del capital y del crecimiento.

Modelo de crecimiento limitado por balanza de pagos. Fundamente teórico relevante: N.Kaldor. Thirlwall, McCombie y otros (1979 en adelante).

Teoría del crecimiento endógeno. Romer, **Barro**, Lucas y otros (1986 en adelante)

II. UNA CONTRIBUCIÓN A LA INVESTIGACIÓN EMPÍRICA DEL CRECIMIENTO ECONÓMICO

A. Traducción intacta del documento original

Este paper examina si el modelo de crecimiento de Solow es consistente con la variación internacional en la calidad de vida. Para esto se aumenta el modelo de Solow incluyendo la acumulación de capital humano así como el capital físico, los cuales proveen una excelente descripción de los datos entre los países. Este paper también examina la implicación del modelo de Solow en la convergencia en el nivel de vida, que se da porque los países pobres tienden a crecer más rápido que los países ricos. La evidencia indica que, el crecimiento constante de la población y la acumulación de capital, convergen a los países a una tasa que el modelo de Solow aumentado predice.

Introducción

Este paper toma seriamente a Robert Solow. En su clásico artículo de 1956, Solow propone empezar a estudiar el crecimiento económico asumiendo una función de producción neoclásica estándar con rendimientos decrecientes del capital. Tomando como exógenas las tasas de ahorro y crecimiento de la población, él muestra que estas dos variables determinan el nivel del ingreso per cápita en el estado estacionario. Las tasas de ahorro y crecimiento de la población varían entre los países, por lo que diferentes países tendrán diferentes estados estacionarios. El modelo de Solow da una simple predicción comprobable acerca de cómo estas variables influyen en el nivel de ingreso del estado estacionario.

Este paper argumenta que las predicciones del modelo de Solow son una primera aproximación consistente con la evidencia. Examinando recientemente los datos disponibles para una larga lista de países, nosotros notamos que el ahorro y el crecimiento de la población afectan el ingreso en la dirección que predice el modelo de Solow. Además, más de la mitad de la variación del ingreso per cápita, entre los países, puede ser explicada por estas dos variables únicamente.

Sin embargo, no todo es correcto en el modelo de Solow. A pesar de que el modelo predice correctamente la dirección del efecto del ahorro y el crecimiento de la población, no predice correctamente las magnitudes. En los datos el efecto del ahorro y el crecimiento de la población en el ingreso están muy largos de lo que predice el modelo. Para entender la relación entre el ahorro, el crecimiento de la población y el ingreso, uno debe ir más allá del modelo de Solow.

Nosotros aumentamos el modelo de Solow incluyendo la acumulación de capital humano así como la de capital físico. La exclusión de capital humano podría potencialmente explicar por qué en el modelo de Solow la estimación de la influencia del ahorro y el crecimiento de la población aparecen tan largo de las cifras reales. La primera razón es que para una determinada tasa de acumulación de capital humano, mayor ahorro o menor crecimiento de la población conduce a mayores niveles de ingreso y así a mayores niveles de capital humano. Por lo tanto, la acumulación de capital físico y el crecimiento de la población tienen grandiosos impactos en el ingreso cuando la acumulación de capital humano es tomada en cuenta. Segundo, la acumulación de capital humano podría estar correlacionada con las tasas de ahorro y crecimiento de la población; esto podría implicar que omitiendo la acumulación de capital humano se perjudica la estimación de los coeficientes de ahorro y crecimiento de la población.

La prueba de lo favorable del aumento del modelo de Solow es que cuando se incluye un aproximado de la acumulación de capital, que es una variable explicativa en la regresión entre los países, nosotros encontramos que la acumulación de capital es un hecho correlacionado con el ahorro y el crecimiento de la población. Por lo que incluyendo la acumulación de capital humano se disminuye el efecto de la estimación del ahorro y el crecimiento de la población a aproximadamente los valores predichos por el modelo aumentado de Solow. Además, el modelo aumentado explica el 80% de variación del ingreso entre los países. Dado la inevitable imperfección en los datos entre los países, se considera dicho ajuste como extraordinario. Al parecer, este modelo aumentado de Solow provee casi completamente una explicación de porqué algunos países son ricos y otros pobres.

Después de desarrollado y probado el modelo aumentado de Solow, nosotros examinamos un tema que ha venido captando la atención en los años recientes: el fracaso de la convergencia en el ingreso per cápita de los países. Mankiw, Romer y Weil, argumentan que uno no debería esperar convergencia porque el modelo de Solow predice que los países generalmente llegan a diferentes estados estacionarios. Nosotros examinamos empíricamente al conjunto de países que no convergen y hemos venido ampliando la documentación en trabajos anteriores. Así pues, nosotros encontramos que una vez que las diferencias en las tasas de ahorro y crecimiento de la población se contabilizan, hay una tasa aproximada de convergencia como predice el modelo.

Finalmente, nosotros discutimos las predicciones del modelo de Solow para las variaciones internacionales de tasa de retorno del capital. El modelo predice que los países pobres deberían tender a tener mayores tasas de retorno de capital físico y humano. Nosotros discutimos varia evidencia que podría usarse para evaluar esta predicción. En contraste con muchos otros autores, nosotros interpretamos la evidencia disponible sobre tasas de retorno como consistentes con el modelo de Solow.

Total, los descubrimientos que se reportan en este paper ponen en duda la tendencia de los economistas por rechazar el modelo de crecimiento de Solow a favor de los modelos de crecimiento endógeno, donde se asumen constantes o crecientes retornos a escala del capital. Esto no implica, sin embargo, que el modelo de Solow es una teoría completa del crecimiento: es interesante entender también los determinantes del ahorro, el crecimiento de la población y los cambios tecnológicos mundiales, todo lo que el modelo de Solow trata como exógeno. Ni esto implica que los modelos de crecimiento endógeno no son importantes, para brindar la correcta explicación de los cambios tecnológicos. La conclusión de los autores es que, sin embargo, esto implica que el modelo de Solow da las correctas respuestas a las preguntas para las que está diseñado hacer frente.

1. El modelo de Solow

Se considera una función de producción del tipo Cobb-Douglas:

1. $Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha}$

En donde Y es la producción, K capital, L trabajo y A el nivel de tecnología. Además en el modelo de Solow las tasas de: ahorro, crecimiento de la población y progreso tecnológico son exógenas. Hay dos insumos: capital y trabajo, los cuales pagan marginalmente sus productos.

L y A crecen exógenamente a tasas: n y g respectivamente.

2. $L_t = L(0)e^{nt}$
3. $A_t = A(0)e^{gt}$

El número efectivo de unidades de trabajo, $A_t L_t$, crece a una tasa n+g.

El modelo asume que una fracción constante de la producción s, es invertida. Definiendo “k” como el stock de capital por unidad de trabajo efectivo, k=K/AL y “y” como el nivel de producción por unidad de trabajo efectivo y=Y/AL, la evolución de “k” se rige por:

4. $\dot{k}_{t=}\mathrm{sy_t} - (\mathrm{n} + \mathrm{g} + \delta)\mathrm{k_t}$

$$\dot{k}_t = \frac{\mathrm{s}K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha}}{(A_t L_t)} - (\mathrm{n} + \mathrm{g} + \delta)\mathrm{k_t}$$

$$\dot{k}_t = sk_t^{\alpha} - (n + g + \delta)k_t$$

Donde δ es la tasa de depreciación. La ecuación 4 implica que k converge para un estado estacionario valorado k* y definido por $sk^{*\alpha} = (n + g + \delta)k^*$, o:

5. $k^* = \left[\frac{s}{(n+g+\delta)}\right]^{\frac{1}{(1-\alpha)}}$

En el estado estacionario, la tasa de capital-trabajo está relacionada positivamente con la tasa de ahorro y negativamente con la tasa de crecimiento de la población. En este sentido, la predicción central del modelo de Solow se preocupa por el impacto del ahorro y el crecimiento de la población en el crecimiento del ingreso real. Sustituyendo (5) en la función de producción, nosotros encontramos que el ingreso per cápita en el estado estacionario es:

6. $$\ln\left[\frac{Y_t}{L_t}\right] = \ln A(0) + g_t + \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(s) - \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(n+g+\delta)$$

Porque el modelo asume que los factores son pagados por su producto marginal, esto no solo predice los signos sino también las magnitudes de los coeficientes de ahorro y crecimiento de la población. Específicamente porque la cuota del capital en ingresos (α) es aproximadamente una tercera parte, el modelo implica una elasticidad del ingreso per cápita con respecto a la tasa de ahorro de aproximadamente 0.5 y una elasticidad con respecto a (n+g+δ) de aproximadamente -0.5.

1.1 Especificación

La pregunta natural a considerar es si los datos soportan las predicciones del modelo de Solow. En otras palabras, se pretende investigar si el ingreso real es más alto en los países con mayor tasa de ahorro y más bajo en los países con mayores niveles de (n+g+δ).

Se asume que g y δ son constantes en los países. Además g refleja primeramente el adelanto de conocimiento, el cual no está especificado en los países. Asimismo no hay ninguna fuerte razón para esperar que la tasa de depreciación varíe mucho en los países, ni hay ningún dato que pueda permitirnos estimar la tasa de depreciación. Por otra parte, el término A(0) no refleja únicamente la tecnología, sino también las dotaciones de recursos, el clima, las instituciones y todo eso. Esto podría por lo tanto diferir en los países. Se asume que: $\ln A(0) = a + \epsilon$

Donde a es una constante y ϵ es un choque entre los países. Así el registro de ingreso per cápita en un tiempo dado-tiempo 0 para simplificar- es:

7. $$\ln\left[\frac{Y}{L}\right] = a + \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(s) - \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(n+g+\delta) + \epsilon$$

La ecuación 7 es la especificación básica en esta sección.

Se asume que las tasas de ahorro y crecimiento poblacional son factores independientes entre los países desplazando la función de producción. Además se asume que s y n son independientes de ϵ. Esto suposición implica que se puede estimar la ecuación 7 con mínimos cuadrados ordinarios (MCO)[1].

---

[1] Si s y n son endógenas y están influenciadas por el nivel de ingreso, entonces estimar la ecuación 7 usando MCO es inconsistente. En este caso, para obtener estimaciones consistentes uno necesita

Hay tres razones para hacer esta suposición de independencia. Primero, esta suposición se hace no solamente en el modelo de Solow, sino también en cada modelo estándar de crecimiento económico. Además en los modelo en donde el ahorro y el crecimiento de la población son endógenas, pero las preferencias son inelásticas, s y n no son afectadas por ϵ. En otras palabras, bajo la utilidad inelástica, permanentes diferencias en el nivel de tecnología no afectan a las tasas de ahorro ni de crecimiento de la población.

Segundo, muchos trabajos teóricos recientes de crecimiento han sido motivados por la exanimación informal de las relaciones entre el ahorro, el crecimiento de la población y el ingreso. Muchos economistas tienen la certeza de que el modelo de Solow no puede explicar las diferencias internacionales de ingreso y esto presunta el fracaso del modelo de Solow, estimulando el trabajo de las teorías de crecimiento endógeno.

Tercero, porque el modelo predice no solo los signos si no también las magnitudes de los coeficientes del ahorro y crecimiento de la población, se puede calcular si hay una importante favoritismo en las estimaciones obtenidas con MCO. Como se describe abajo, los datos en factor implican por una parte que, si el modelo es correcto, las elasticidades de Y/L con respecto a s y n+g+δ son aproximadamente 0.5 y -0.5. Si el MCO proporciona coeficientes que son sustancialmente diferentes de estos valores, entonces se puede rechazar el conjunto de hipótesis del modelo de Solow y el indefinido aumento es correcto.

Usando una analogía aproximada para "contabilizar el crecimiento" se puede computar la fracción de la varianza en el nivel de vida que es explicado por la identificación mecánica del modelo de Solow.[2] En la práctica, porque no tenemos las exactas estimaciones de unas partes del factor, no se enfatiza esta aproximación de la contabilidad del crecimiento. Por lo que se prefiere estimar la ecuación 7 por MCO. La forma de esta regresión muestra el resultado de una contabilidad del crecimiento con la estimación del valor de α. Si esta estimación α difiere del valor obtenido a priori de los factores compartidos, se puede comparar la forma de estimación de la regresión con la forma de obtención por imposición del valor a priori.

1.2 Datos y muestra

Los datos son del "Real National Accounts" construidos por Summers y Heston (1988). El conjunto de datos incluye el ingreso real, consumo público y privado, inversión y población de

---

encontrar variables instrumentales que estén relacionadas con s y n, pero no correlacionadas con el country-specific eliminando ϵ en la función de producción. Sin embargo encontrar tales variables instrumentales es una formidable tarea.

[2] En la contabilidad del crecimiento estándar, el factor compartido es usado para descomponer el crecimiento sobre el tiempo en un país singular dentro de una parte explicada por el crecimiento de un factor insumo y una parte inexplicada-el residuo de Solow- el cual es usualmente atribuido a los cambios tecnológicos. En esta analogía entre los países, unas partes del factor son usadas para descomponer la variación de los ingresos entre los países dentro de una parte explicada por la variación de las tasas de ahorro y el crecimiento de la población y una parte inexplicada, el cual podría ser atribuida a las diferencias internacionales en el nivel de tecnología.

casi todo el mundo. Los datos son anuales y abarcan el período 1960-1985. Se asume n como la tasa media de crecimiento de la clase trabajadora de la población, donde la edad para trabajar es entre 15 a 64 años.[3] Se asume como s la media de la inversión real (incluyendo la pública) en el PIB real y Y/L como el PIB real en 1985 dividido por la población económicamente activa (PEA) en ese año.

Se consideran tres muestras de países. La más completa se compone de todos los países para los cuales se dispone de datos que no sean aquellos para los que la producción de petróleo es la industria dominante[4]. Esta muestra se compone de 98 países. Excluimos los productores de petróleo porque la mayor parte del PIB de estos países representa la extracción de los recursos existentes y no el valor añadido[5].

La segunda muestra excluye a los países cuyos datos reciben una calificación “D” por Summers y Heston o en donde la población en 1960 era menos de un millón. Summers y Heston usan la clasificación “D” para identificar a los países cuyo ingreso real figuran en base a muy pocos datos primarios, el error medio probablemente sea un problema mayor para estos países. Se omiten los países pequeños porque la determinación real de su ingreso puede estar dominada por factores idiosincráticos. Esta muestra consiste en 75 países.

La tercera muestra consiste en los 22 países de la OCDE donde la población es mayor a un millón. Esta muestra tiene la ventaja de que los datos parecen tener un nivel uniforme de alta calidad y que la variación de omitir los factores específicos de cada país es probable pequeña. Pero también tiene una desventaja: ser pequeña, y esto descarta gran parte de la variación en las variables de interés.

En el apéndice se puede ver los datos de cada muestra.

1.3Resultados

Se estima la ecuación 7, con y sin imponer la restricción de que los coeficientes de ln (s) y ln (n+g+δ) son iguales en magnitud y de signo contrario. Suponemos que g + δ es de 0,05; cambios razonables en este supuesto tienen poco efecto sobre las estimaciones[6]. Cuadros I informa de los resultados.

---

[3] La fracción de los datos de la población económicamente activa son de World Bank´s World Tables y el 1988 de World Development Report.

[4] Con el propósito de comparar, se restringe la muestra de países que tienen solo los datos usados en esta sección, pero también los datos de capital humano se describen en la sección II.

[5] Los países que fueron excluidos básicamente son Bahréin, Gabón, Irán, Iraq, Kuwait, Omán, Arabia Saudita, y los Emiratos Árabes Unidos. Además Lesoto es excluida porque la suma del consumo público y privado excede el PIB en todos los años de la muestra, indicando que el crecimiento del trabajo desde el extranjero constituye una extremadamente larga fracción del PNB.

[6] Se eligió este valor de g+δ para que coincida con los datos disponibles. En los datos de EEUU el consumo de capital indemnizado es cerca del 10% de PNB y el la tasa de capital-producción es cerca de 3

TABLA I

Estimación del Modelo de Solow del texto

Variable dependiente: PIB por personas en edad de trabajar en 1985			
Muestra	No petroleros	Intermedios	OCDE
Observaciones	98	75	22
CONSTANTE	5.43	5.35	8.02
	(1.58)	(1.54)	(2.52)
ln(I/PIB)	1.42	1.32	0.50
	(0.14)	(0.17)	(0.43)
ln(n+g+δ)	-1.99	-2.02	-0.74
	0.56	(0.53)	(0.85)
R^2 ajustada	0.59	0.59	0.01
S.E.E	0.69	0.61	0.38
Restricción			
CONSTANTE	6.87	7.09	8.62
	(0.12)	(0.15)	(0.53)
ln(I/PIB)-ln(n+g+δ	1.49	1.43	0.55
	(0.12)	(0.14)	(0.37)
R^2 ajustada	0.59	0.59	0.06
S.E.E	0.69	0.61	0.37
Test de Restrición			
p-value			
Implícito α	0.60	0.59	0.36

Nota. Los errores estándar están entre paréntesis. La inversión y las tasas de crecimiento de la población son promedios del el período 1960-1985. (g+δ) se supone 0.05.

Tres aspectos básicos de los resultados del modelo de Solow. Primero, los coeficientes de ahorro y crecimiento de la población tienen los signos predichos y, para dos de las tres muestras, son altamente significativos. Segundo, la restricción de que los coeficientes en ln(s) y ln(n+g+δ) son igual en magnitud y el signo opuesto no es rechazado en ninguna de las muestras. Tercero, en y quizás el más importante, diferencias en el ahorro y el crecimiento demográfico describe una larga facción de la variación en el ingreso per cápita entre los países. En esta regresión para una muestra intermedia, por ejemplo, el ajuste R^2 es 0.59. En contraste con lo común afirmado por el modelo de Solow "explica" la variación en la productividad del trabajo largamente por lo que apela a las variaciones tecnológicas, dos variables observables en

lo cual implica que δ es cerca de 0.03; Romer (1989a, p.60) presenta un cálculo para un más amplia muestra de países y concluye que δ es cerca de 0.03 o 0.04. Además, el crecimiento del ingreso percápita tienen en promedio 1.7% por año en EEUU y 2.2% por año en la muestra señalada; esto sugiere que g es cerca de 0.02.

este modelo de Solow se focalizan en el hecho de describir las variaciones en el ingreso per cápita.

No obstante, el modelo no es completamente exitoso. En particular la estimación del impacto del ahorro y del crecimiento de la fuerza de trabajo es mucho a lo que predice el modelo. El valor de α implica que los coeficientes podrían ser igual a una parte del ingreso, en aproximadamente un tercio. Esta estimación, sin embargo, implica que α es mucho mayor. Por ejemplo, el α implícita por el coeficiente de la regresión restringida para la muestra intermedia es de 0.59 (con un grado de error estándar de 0.02) así los datos rotundamente contradicen la predicción del modelo, en donde α= 1/3.

Porque la estimación implica que dicha cuota de capital es alta, esto es inapropiado concluirlo pues es el modelo de Solow es exitoso solo porque la regresión en la tabla I se puede explicar una alta fracción de la variación en el ingreso. Para la muestra intermedia, por ejemplo, cuando empleamos el "crecimiento contable" enfoque descrito anteriormente y restringir los coeficientes de ser coherentes con un α de un tercio, el R^2 ajustado cae 0,59 hasta 0,28. Aunque el excelente ajuste de las regresiones simples en el cuadro I se prometedor para la teoría del crecimiento en general-que implica que las teorías basadas en variables fácilmente observables pueden dar cuenta de la mayor parte de la variación en la renta real entre países.

2. Adición de acumulación de capital humano al modelo de Solow

Los economistas desde hace mucho tiempo han hecho hincapié en la importancia del capital humano al proceso de crecimiento. Se podría esperar que hacer caso omiso del capital humano conducirá conclusiones erróneas: Kendrick (1976) estima que más de la mitad del capital social total de EE.UU. en 1969 fue capital humano. En esta sección se explora el efecto de la adición de acumulación de capital humano al modelo de crecimiento de Solow.

Incluir el capital humano puede potencialmente alterar cualquier modelo teóricamente o el análisis empírico del crecimiento económico. En el plano teórico, la presentación adecuada del capital humano puede cambiar de visión de la naturaleza en el proceso de crecimiento. Lucas (1988), por el ejemplo, asume que, aunque hay rendimientos decrecientes en la acumulación de capital físico-capital humano, además, la rentabilidad de todo el capital reproducible (humanos, más física) es constante. Se discute esta posibilidad en la Sección III.

En el plano empírico, la existencia de capital humano puede alterar el análisis de las diferencias entre países, en las regresiones en el Cuadro I el capital humano es una variable omitida. Este es el problema empírico que perseguimos en esta sección. En primer lugar, ampliar el modelo de Solow de la sección I para incluir el capital humano. Mostramos cómo dejar de lado el capital humano afecta a los coeficientes de inversión en capital físico y el crecimiento demográfico. Corremos regresiones análogas a las del cuadro I para ver si los aproximados de capital humano pueden resolver las anomalías encontradas en la primera sección[7].

2.1 El modelo

La función de producción es

8. $Y_t = K_t^{\alpha} H_t^{\beta} (A_t L_t)^{1-\alpha-\beta}$

Donde H es el stock de capital humano, y todas las demás variables se definen como antes. Además s_K la fracción de los ingresos invertidos en capital físico y s_h la fracción invertida en capital humano. La evolución de la economía es determinado por:

9.

a. $\dot{k}_{t=} s_k y_t - (n + g + \delta) k_t$

b. $\dot{h}_{t=} s_h y_t - (n + g + \delta) h_t$

Donde y= Y/AL, k= K/AL, y h=H/AL son cantidades por unidad efectiva del trabajo. Se supone que se aplica la misma función de producción al capital humano, capital físico y el consumo. En otras palabras, una unidad de consumo puede ser transformada sin costo en cualquiera de las unidades de un capital físico o una unidad de capital humano. Además, se supone que el capital humano se deprecia a la misma tasa que el capital físico. En Luca (1988) los modelos de la función de producción para el capital humano como fundamentalmente diferentes de la de otros bienes. Creemos que, al menos para un primer examen, es natural suponer que los dos tipos de funciones de producción son similares

Suponemos que α+β<1, lo que implica que hay rendimientos decrecientes para todo el capital. (Si α+β=1, entonces hay rendimientos constantes a escala en los factores reproducibles. En este caso no existe el estado de equilibrio para este modelo. Se discute esta posibilidad en la Sección III) Las ecuaciones 9a 9b implican que la economía converge a un estado de equilibrio (estado estacionario) definido por:

---

[7] Autores anteriores han aportado pruebas de la importancia del capital humano para el crecimiento del ingreso. Azariadis y Drazen (1990) encuentra que ningún país fue capaz de crecer rápidamente durante el período de posguerra, sin una fuerza laboral altamente educada. Nosotros interpretamos esto como evidencia de que hay un umbral de externalidad asociada con la acumulación de capital humano. Del mismo modo, Rauch (1988) considera que entre los países que habían logrado la alfabetización de adultos en un 95 por ciento en 1960, hubo una fuerte tendencia para la renta per cápita a converger en el período 1950-1985. Romer (1989b) considera que la alfabetización en el año 1960 ayuda a explicar inversiones posteriores y que, si uno corrige el error de medición, la alfabetización no tiene ningún impacto en el crecimiento más allá de su efecto sobre la inversión. También hay mayores palabra destacando el papel del capital humano en el desarrollo, por ejemplo, véase Krueger (1968) y de Easterlin (1981)

10. $k^* = \left(\frac{s_k^{1-\beta} s_h^{\beta}}{n+g+\delta}\right)^{1/(1-\alpha-\beta)}$

$$h^* = \left(\frac{s_k^{\alpha} s_h^{1-\alpha}}{n+g+\delta}\right)^{1/(1-\alpha-\beta)}$$

Sustituyendo (10) en la función de producción y tomando registros dados en la ecuación de la renta per cápita similar a la ecuación (6):

11. $\ln\left[\frac{Y_t}{L_t}\right] = \ln A(0) + g_t - \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}\ln(n+g+\delta) + \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}\ln(s_k) + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\ln(s_h)$

Esta ecuación muestra como el ingreso per cápita depende del crecimiento demográfico y la acumulación de capital físico y humano.

Al igual que el modelo de libro de texto de Solow, el modelo aumentado predice coeficientes en la ecuación (11) que son funciones de las acciones de hecho. Al igual que antes, α es la parte de capital físico en los ingresos, así que esperamos un valor de α de alrededor de un tercio. Medición de un valor razonable de β la cuota de capital humano, es más difícil. En los Estados Unidos el salario mínimo-aproximadamente el retorno del trabajo sin el capital humano-ha promediado cerca de 30 a 50 por ciento del salario medio en manufactura. Este hecho sugiere que del 50 al 70 por ciento de las rentas del trabajo total representa el retorno al capital humano, o que β es entre un tercio y medio.

La ecuación (11) hace dos predicciones sobre las regresiones corridas en la sección I, en la que fue ignorado el capital humano. En primer lugar, aun cuando ln (s_h) es independiente de las variables del otro lado de la derecha, el coeficiente de ln(s_k) es mayor que α/(1-α) Por ejemplo, si α=β=1/3, entonces el coeficiente de ln(s_k) sería de 1. Debido a que un mayor ahorro genera un aumento de los ingresos, y esto conduce a un mayor nivel de estado estacionario del capital humano, aunque el porcentaje de la renta dedicada a la acumulación de capital humano no se modifica. Por lo tanto, la presencia de acumulación de capital humano aumenta el impacto de la acumulación de capital físico-sobre la renta.

En segundo lugar, el coeficiente de ln(n+g+δ) es mayor en valor absoluto que el coeficiente de ln(s_k). Si α=β=1/3, por ejemplo, el coeficiente de ln(n+g+δ) sería -2. En este modelo un alto nivel de crecimiento de la población disminuye el ingreso per cápita.

Hay una forma alternativa de expresar el papel del capital humano en la determinación de la renta en este modelo. Combinando (11) con la ecuación para el nivel de estado estacionario del capital humano dada en (10) se obtiene una ecuación para la renta en función de la tasa de inversión en capital físico, la tasa de crecimiento de la población, y el nivel de capital humano:

12. $\ln\left[\frac{Y_t}{L_t}\right] = \ln A(0) + g_t + \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(s_k) - \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(n+g+\delta) + \frac{\beta}{1-\alpha}\ln(h^*)$

La ecuación (12) es casi idéntica a la ecuación (6) de la sección I. En ese modelo el nivel de capital humano es un componente del término de error. Debido a que el ahorro y las tasas de crecimiento de la población influyen en h*, se debe esperar que el capital humano tenga correlación positiva con la tasa de ahorro y esté negativamente correlacionada con el crecimiento de la población.

El modelo con el capital humano sugiere dos posibles maneras de modificar nuestras regresiones anteriores. Una forma es estimar la forma reducida del modelo aumentado, es decir, la ecuación (11), en el que la tasa de $\ln(s_h)$ acumulación de capital humano se añade a la parte derecha. La segunda forma consiste en estimar la ecuación (12), en el que el nivel de capital humano $\ln(h^*)$ se agrega a la parte derecha. Tenga en cuenta que estas regresiones alternativas predicen distintos coeficientes de ahorro y términos de crecimiento demográfico. Al probar el modelo de Solow ampliado, una pregunta principal es si los datos disponibles sobre el capital humano están cercanos a la tasa de acumulación (s_h) o al nivel del capital humano (h).

2.2 Datos

Para implementar el modelo, restringimos nuestra atención a la inversión de capital humano en la forma de enseñanza, ignorando así la inversión en salud, entre otras cosas. A pesar de este enfoque reducido, la medición del capital humano presenta grandes dificultades prácticas. Lo más importante, es que una gran parte de la inversión en educación se traduce en pérdidas de ingresos laborales por parte de los estudiantes[8]. Este problema es difícil de superar, porque los ingresos no percibidos varían con el nivel de inversión de capital humano: un trabajador con poco capital humano renuncia a un salario bajo para acumular más capital humano, mientras que un trabajador con mucho capital humano renuncia a un salario más alto. Asimismo, la asignación explícita de la enseñanza se imparte en todos los niveles de gobierno, así como por la familia, lo que hace que el gasto en educación sea difícil de medir. Por último, no todo el gasto en educación está destinada a conseguir el capital humano productivo: la filosofía, la religión y la literatura, por ejemplo, a pesar de que sirven en parte para entrenar la mente, también podría ser una forma de consumo[9].

---

[8] Kendrick (1976) calcula que para los Estados Unidos en 1969 la inversión bruta total en la educación y la formación fue 192,3 mil millones dólares, de los cuales 92,3 mil millones dólares tomó la forma de compensación imputados a los estudiantes (los cuadros A-1 y B-2).

[9] Un problema adicional con la implementación del modelo aumentado es que "de salida" en el modelo no es el mismo que se mide en las cuentas del ingreso nacional. Gran parte del gasto en capital humano se condonen los salarios, los salarios no percibidos y estos deben incluirse en Y. Sin embargo, mide el PIB no incluye este componente del gasto de inversión. Sin embargo los cálculos del dorso de la de la dotación, sugieren que este problema no es cuantitativamente importante. Si la acumulación de capital humano es totalmente desmedida, el cálculo del PIB es $(1-s_h)$ Y. Se puede demostrar que este problema de medición no afecta a la elasticidad del PIB con respecto a la inversión física o crecimiento de la población. La elasticidad de la medida del PIB con respecto a la acumulación de capital humano se reduce en un $s_h/(1-s_h)$ en comparación con la elasticidad verdad del PIB con respecto a la acumulación de capital humano. Debido a que la fracción de los recursos de una nación dedicada a la acumulación de

Nosotros usamos un aproximado para la tasa de acumulación de capital humano (s_h), que mide aproximadamente el porcentaje de la población en edad de trabajar que está en la escuela secundaria. Comenzamos con los datos sobre la fracción de la población elegible (de 12 a 17) matriculados en la escuela secundaria, que se obtuvo de los Anuarios de la UNESCO. A continuación, se multiplica este tipo de matrícula por la fracción de la población en edad de trabajar que está en edad escolar (de 15 a 19). Esta variable, que llamamos SCHOOL, es claramente imperfecta: los rangos de edad en las dos series de datos no son exactamente los mismos, la variable no incluye la entrada de los profesores, y se ignora por completo primaria y la educación superior. Sin embargo, si SCHOOL es proporcional al s_h entonces podemos utilizarla para estimar la ecuación (11), en este caso el factor de proporcionalidad sólo afectaría al término constante[10].

capital humanos es pequeña, este efecto es pequeño. Por ejemplo, si $\alpha=\beta=1/3$ y $s_h=0.1$ entonces la elasticidad será 0.9 en lugar de 1.0.

[10] Incluso en el supuesto más débil de que $\ln(s_h)$ es lineal en Ln(SCHOOL), podemos utilizar los coeficientes en $\ln(s_k)$y $\ln(n+g+\delta)$ para inferir los valores de α y β, en este caso, el coeficiente estimado de ln(SCHOOL) no tiene una interpretación.

Esta medida indica que la inversión en capital físico y crecimiento de la población puede ser proxy para la acumulación de capital humano en las regresiones en el Cuadro I. La correlación entre SCHOOL y PIB es de 0,59 para la muestra intermedia, y la correlación entre SCHOOL y la tasa de crecimiento de la población es de -0,38. Por lo tanto, incluir la acumulación de capital humano podría alterar sustancialmente el impacto estimado de la acumulación de capital físico y crecimiento de la población sobre el ingreso per cápita.

TABLA II

Estimación del Modelo de Solow Aumentado

Variable dependiente: logPIB por persona en edad de trabajar en 1985

Muestra	No petroleros	Intermedios	OCDE
Observaciones	98	75	22
CONSTANTE	6.84	7.79	8.64
	(1.18)	(1.19)	(2.21)
ln(I/PIB)	0.70	0.70	0.28
	(0.13)	(0.15)	(0.39)
ln(n+g+δ)	-1.75	-1.50	-1.08
	(0.42)	(0.40)	(0.76)
ln(SCHOOL)	0.65	0.73	0.77
	(0.07)	(0.10)	(0.29)
R^2 ajustada	0.78	0.77	0.24
S.E.E	0.51	0.45	0.33
Restricción			
CONSTANTE	7.85	7.97	8.72
	(0.14)	(0.15)	(0.47)
ln(I/PIB)-ln(n+g+δ	0.74	0.71	0.28
	(0.12)	(0.14)	(0.33)
ln(SCHOOL)-ln(n+	0.66	0.73	0.77
	(0.07)	(0.09)	(0.28)
R^2 ajustada	0.77939	0.77	0.28
S.E.E	0.506981	0.45	0.32
Test de Restrición			
p-value			
Implícito α	0.421965318	0.414889198	
Implícito β			

Nota. Los errores estándar están entre paréntesis. La inversión y las tasas de crecimiento de la población son promedios para el período 1960-1985. La suma de (g+δ) se supone que es 0,05. SCHOOL es el porcentaje promedio de la población en la escuela secundaria en edad de trabajar para el período 1960-1985.

2.3 Resultados

En la Tabla II se presentan las regresiones del logaritmo del ingreso per cápita en el registro de la tasa de inversión, el registro de n+g+δ y el registro del porcentaje de la población en la escuela secundaria. La medida entra en el capital humano de manera significativa en las tres muestras. También reduce el tamaño del coeficiente de inversión en capital físico y mejora el ajuste de la regresión en comparación con el cuadro I. Estas tres variables explican casi el 80 por ciento de la variación en el ingreso per cápita entre países no petrolero y las muestras intermedias.

Los resultados del Cuadro II apoyan fuertemente el modelo de Solow aumentado. La ecuación (11) muestra que el modelo aumentado predice que los coeficientes de (I/Y), ln(SCHOOL), y ln(n+g+δ) suman a cero. La mitad inferior de la Tabla II muestra que, para las tres muestras, esta restricción no es rechazada. En las últimas líneas del cuadro se presentan los valores de α y β implícitos en los coeficientes de la regresión restringida. Para los países no petroleros y muestras intermedias, α y β son alrededor de un tercio y muy significativo. Las estimaciones de la OCDE sólo son menos precisas. En esta muestra los coeficientes de inversión y crecimiento de la población no son estadísticamente significativos, pero tampoco son significativamente diferentes de las estimaciones obtenidas en las muestras más grandes[11].

Se concluye que añadiendo el capital humano al modelo de Solow mejora su rendimiento. Teniendo en cuenta el capital humano elimina las anomalías preocupantes-los altos coeficientes de la inversión y el crecimiento de la población en las regresiones del cuadro I- que se plantean cuando el modelo de Solow se enfrenta a los datos. Las estimaciones de los parámetros parecen razonables. E incluso usando un proxy impreciso de capital humano, somos capaces de disponer de una parte bastante grande de varianza residual del modelo.

3. Crecimiento endógeno y convergencia

En los últimos años los economistas estudiosos del crecimiento se han enfocado enérgicamente en los modelos de crecimiento endógeno. Estos modelos están caracterizados por el hecho de asumir rendimientos no decrecientes para el grupo de factores reproducibles de producción. Por ejemplo nuestro modelo con capital humano y físico se convertiría en un modelo endógeno si α+β=1. Entre las implicaciones de este supuesto, es que los países que poseen más altas tasas de ahorro crecen más rápido e indefinidamente y también que los países no necesariamente convergen en el ingreso per cápita, inclusive si tienen las mismas preferencias y tecnologías.

[11] Como describimos en la nota anterior, bajo el supuesto más débil de que $\ln(s_h)$ es lineal en ln(SCHOOL), las estimaciones de α y β pueden deducirse de los coeficientes de ln(I/PIB) en la regresión sin restricciones. Cuando hacemos esto, obtenemos estimaciones de α y β un poco diferente a los reportados en la Tabla II.

Argumentos de los modelos de crecimiento endógeno, se presentan como alternativas a los modelos de Solow, motivados en alegaciones de fallas empíricas en dicho modelo para explicar las diferencias entre los países. Barro (1989) presenta el breve argumento:

En los modelos de crecimiento neoclásico, con rendimientos decrecientes, como el de Solow (1956), Cass (1965) y Koopmans (1965) la tasa de crecimiento per cápita tiende a estar inversamente relacionada al nivel e ingreso per cápita inicial. Por lo tanto en la ausencia de choques, los países pobres y ricos tienden a converger en términos de ingreso per cápita. Sin embargo, esta hipótesis de convergencia parece ser inconsistente con la evidencia entre países, la cual indica que la tasa de crecimiento per cápita no está correlacionada con el nivel inicial de producto per cápita.

Nuestra primera meta en esta sección es re examinar la evidencia en la convergencia para valorar si esta se contradice con el modelo de Solow. Nuestra segunda meta es generalizar nuestros resultados previos. Para implementar el modelo de Solow, hemos asumido que los países en 1985 estaban en su estado estacionario (o, más generalmente, que la desviación del estado estacionario era aleatoria). Todavía este supuesto es cuestionable. Por lo tanto nosotros examinamos la predicción del modelo de Solow aumentado para el comportamiento fuera del estado estacionario.

3.1 Teoría

El modelo de Solow predice que los países llegan a diferentes estados estacionarios. En la sección II argumentamos que muchas de las diferencias entre países, respecto al ingreso per cápita pueden encontrarse al diferenciar los determinantes del estado estacionario en el modelo de Solow: acumulación de capital físico y humano, y el crecimiento poblacional. Así, el modelo de Solow, no predice convergencia, predice únicamente que el ingreso per cápita, en un país dado, converge a su respectivo estado estacionario, un fenómeno que puede ser llamado, convergencia condicional.

Adicionalmente, el modelo e Solow hace predicciones cuantitativas, acerca de la velocidad de convergencia al estado estacionario. Digamos que y^* representa el ingreso en el estado estacionario, por el trabajo efectivo dado por la ecuación 11, y digamos que *y*(*t*) representa el actual valor en función del tiempo *t*. Aproximándose al estado estacionario, la velocidad de convergencia estará dado por:

13. $\frac{d\ln\left(y(t)\right)}{dt} = \lambda[\ln(y*) - \ln\left(y(t)\right)]$,

Done

$\lambda = (n + g + \delta)(1 - \alpha - \beta)$

Por ejemplo si α=β=1/3 y *n+g+δ*=0.06, entonces la tasa de convergencia (λ) sería igual a 0.02. Esto implica que la economía avanza hacia el estado estacionario en aproximadamente 35 años, es decir esta es su velocidad de convergencia. Nótese que el modelo de Solow original, el cual excluye el capital humano, implica una convergencia más rápida. Si β = 0, entonces λ se convierte en 0.04 y la economía avanza al estado estacionario en aproximadamente 17 años.

El modelo sugiere una regresión natural para estudiar la tasa de convergencia. La ecuación (13) implica que:

14. $\ln\big(y(t)\big) = \big(1 - e^{-\lambda t}\big)\ln(y*) + e^{-\lambda t}\ln(y(0)),$

Donde $y(0)$ es el ingreso por trabajador efectivo en una fecha inicial. Substrayendo ln $y(0)$ de ambos lados de la ecuación,

15. $\ln\big(y(t)\big) - \ln\big(y(0)\big) = \big(1 - e^{-\lambda t}\big)\ln(y*) - \big(1 - e^{-\lambda t}\big)\ln(y(o)).$

Finalmente sustituimos por y^*:

16. $\ln\big(y(t)\big) - \ln\big(y(0)\big) = \big(1 - e^{-\lambda t}\big)\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}\ln(s_k) + \big(1 - e^{-\lambda t}\big) + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\ln(s_h) - \big(1 - e^{-\lambda t}\big)\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}\ln(n+g+\delta) - \big(1 - e^{-\lambda t}\big)\ln(y(0)).$

Así en el modelo de Solow el crecimiento del ingreso es una función de los determinantes del estado estacionario final y del nivel de ingreso inicial.

Los modelos de crecimiento endógeno hacen predicciones muy diferentes del modelo de Solow tomando la convergencia entre países. En los modelos de crecimiento endógenos no existe un estado estacionario del nivel de ingreso; diferencias entre países en relación al nivel de ingreso per cápita pueden persistir de manera indefinida, incluso si los países tienen tasas de ahorro y crecimiento poblacional iguales[12]. Modelos de crecimiento endógeno con un solo

[12] Aunque si bien nosotros no exploramos el fenómeno presentado, los modelos de crecimiento endógenos también hacen predicciones cuantitativas acerca del impacto del ahorro en el crecimiento. Estos modelos están típicamente caracterizados por rendimientos constantes de los factores de producción reproducibles, llamados capital físico y humano. Nuestro modelo en la sección II con α + β = 1 y g = 0, provee una manera simple de analizar las predicciones e los modelos de crecimiento endógeno. Con estas modificaciones al modelo de la sección II, la función de producción e $Y = AK^{\alpha}H^{1-\alpha}$. En esta forma el modelo predice que la relación de capital humano y físico K/H, convergerá a S_k/S_h, y que K,H y Y crecerán entonces a una tasa $A(S_k)^{\alpha}(S_h)^{1-\alpha}$. La derivación de la tasa de crecimiento de este estado estacionario respecto a S_k es entonces $\alpha A(\frac{s_h}{s_k})^{1-\alpha} = \alpha/(\frac{K}{Y})$. El impacto del ahorro en el crecimiento depende del exponente del capital en la función de producción, α, y de la relación capital-producto. En los modelos en los cuales el crecimiento endógeno surge principalmente en las externalidades del capital físico, α es cercano a 1, y la derivación de la tasa de crecimiento con respecto a S_k es aproximadamente 1/(K/Y), o cercano a 0.2. in modelos en los cuales el crecimiento endógeno surge distante de la

sector, aquellos con una función de producción Y=AK, predicen que no existe convergencia de ningún tipo. De hecho, este modelo de crecimiento endógeno simple predice un coeficiente de cero en *y(0)*, en la regresión en (16). No como Barro (1989), como sea, los modelos de crecimiento endógeno con más de un sector puede implicar convergencia si el ingreso inicial de un país esta correlacionado con el grado de balance entre los sectores.

Antes de presentar los resultados de convergencia, debemos notar diferencias entre las regresiones basadas en la ecuación (16) y aquellos que presentamos antes. La regresión en tablas I y II son validas solo si los países están en sus estados estacionarios o si las desviaciones del estado estacionarios son aleatorias. La ecuación (16) tiene la ventaja de explícitamente tomar dentro de la contabilización dinámica fuera del estado estacionario. Todavía, implementando la ecuación (16) se introduce un nuevo problema. Si los países tienen diferencias permanentes en sus funciones de producción, que es diferente A(0), entonces este A(0) entraría como parte del término de error y podría estar positivamente correlacionado con el ingreso inicial. Por lo tanto variaciones en A(0) sesgaría en coeficiente en el ingreso inicial hacia cero (y también podría potencialmente influir los otros coeficientes). En otras palabras, las diferencias permanentes en la función de producción llevara a diferencias en el ingreso inicial no correlacionado con las tasas de crecimiento subsecuentes y, así mismo, sesgaría los resultados contra la convergencia encontrada.

3.2 Resultados

Ahora probamos la predicción de convergencia del modelo de Solow. Reportamos regresiones del cambio en el logaritmo del ingreso per cápita en el periodo de 1960 a 1985 en el logaritmo per cápita en 1960, con y sin control sobre la inversión, crecimiento de la edad para trabajar, y la edad de inscripción escolar.

En la tabla III el logaritmo del ingreso per cápita aparece solo en el lado derecho. Esta tabla reproduce los resultados de muchos autores previos en la falla de convergencia del ingreso [De Long 1988; Romer 1987]. El coeficiente en el nivel inicial de ingreso per cápita es ligeramente positivo para la muestra de no petroleros y cero para la muestra intermedia, y para ambas regresiones el R^2 es esencialmente cero. No hay tenencia de que los países pobres crecen más rápido en promedio que los países ricos.

---

acumulación de capital humano y no hay externalidades provenientes el capital físico, la derivada seria entonces cerca de 0.3/(K/Y), o 0.12.

TABLA III

Test de Convergencia Incondicional

Variable dependiente: log de la diferencia entre PIB percápita 1960-1985			
Muestra	No petroleros	Intermedios	OCDE
Observaciones	98	75	22
CONSTANTE	-0.27	0.59	3.69
	(0.38)	(0.43)	(0.68)
ln(Y60)	0.09	-0.004	-0.34
	(0.05)	(0.05)	(0.08)
R^2 ajustada	0.03	-0.01	0.46
S.E.E	0.44	0.41	0.18
Implied λ			

Nota: Los errores estándar están entre paréntesis. Y60 es el PIB por persona en edad de trabajar en 1960.

La tabla III muestra, sin embargo, que existe una tendencia significativa hacia la convergencia en la muestra de la OECD. El coeficientes en el nivel inicial de ingreso per cápita es significativamente negativo, y el R^2 ajustado e la regresión es 0.46. Este resultado confirma los hallazgos de Dowrick y Nguyen (1989), entre otros.

La tabla IV adiciona nuestras mediciones de las tasas de inversión y crecimiento poblacional en la parte derecha de la regresión. En las tres muestras el coeficiente en el nivel de ingreso inicial es ahora significativamente negativo, eso es, que existe una fuerte evidencia de convergencia. Más aun, la inclusión de la inversión y el crecimiento poblacional mejora substancialmente el ajuste de la regresión. La tabla V adiciona nuestras medidas del capital humano en la parte derecha de la regresión en la tabla IV. Esta nueva variable además disminuye el coeficiente del nivel de ingreso inicial y también nuevamente mejora el ajuste de la regresión.

La figura 1 representa una demostración grafica del efecto de agregar medidas del crecimiento poblacional y acumulación de capital humano y físico a la típica grafica de convergencia, primero presentada por Romer (1987). La parte superior del panel presenta un grafico de dispersión para nuestra muestra intermedia del promedio anual de tasa de crecimiento del ingreso per cápita en 1960. Claramente, no hay evidencia de que los países con puntos iníciales pobres tiendan a crecer más rápido. El segundo panel de la figura parcializa los logaritmos de la tasa de inversión y $(n + g + \delta)$ de ambas variables el nivel de ingreso y la tasa de crecimiento. Esta figura muestras que si los países no varian sus tasas de inversión y crecimiento, podría haber una fuerte tendencia a que los países pobres crescan mas rápido que los países ricos. El tercer panel de la figura I parcializa nuestro variable de capital humano en adición a la inversión y el crecimiento poblacional; la tendencia hacia la convergencia es ahora aun más fuerte.

TABLA IV

Test de Convergencia Condicional

Variable dependiente: log de la diferencia entre PIB percápita 1960-1985			
Muestra	No petroleros	Intermedios	OCDE
Observaciones	98	75	22
CONSTANTE	1.92	2.25	2.14
	(0.83)	(0.85)	(1.18)
ln(Y60)	-0.14	-0.23	-0.35
	(0.05)	(0.06)	(0.07)
ln(I/PIB)	0.65	0.65	0.39
	(0.09)	(0.10)	(0.18)
ln(n+g+δ)	-0.30	-0.46	-0.77
	(0.30)	(0.31)	(0.35)
R^2 ajustada	0.38	0.35	0.62
S.E.E	0.35	0.33	0.15
Implied λ			

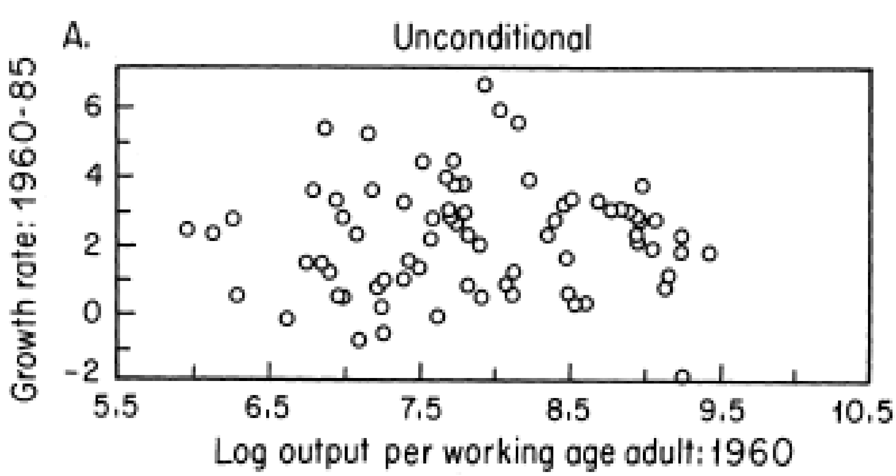
Nota. Los errores estándar están entre paréntesis. Y60 es el PIB por persona en edad de trabajar en 1960. La inversión y las tasas de crecimiento de la población son promedios del período 1960-1985. La suma de (g+δ) se supone que es 0.05.

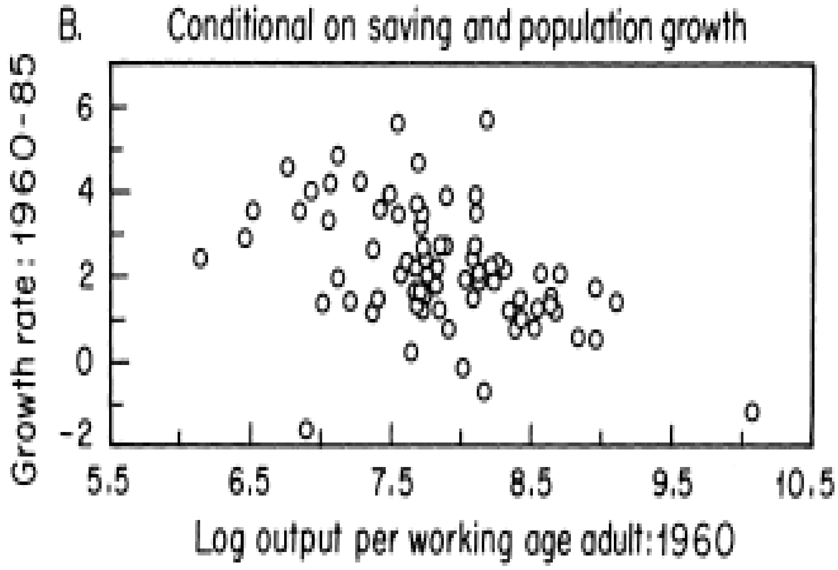
TABLA V

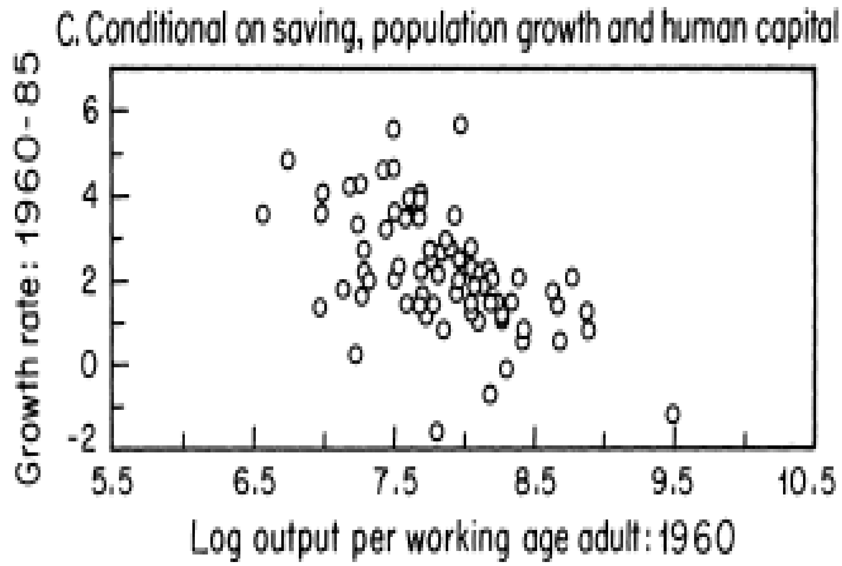
Test de Convergencia Condicional

Variable dependiente: log de la diferencia entre PIB percápita 1960-1985			
Muestra	No petroleros	Intermedios	OCDE
Observaciones	98	75	22
CONSTANTE	2.46	3.09	3.55
	(0.47)	(0.53)	(0.63)
ln(Y60)	-0.30	-0.37	-0.40
	(0.06)	(0.07)	(0.07)
ln(I/PIB)-ln(n+g+δ)	0.50	0.51	0.40
	(0.08)	(0.10)	(0.15)
ln(SCHOOL)-ln(n+g+δ)	0.24	0.27	0.24
	(0.06)	(0.08)	(0.14)
R^2 ajustada	0.47	0.44	0.66
S.E.E	0.33	0.30	0.15
Implied λ			

Nota. Los errores estándar están entre paréntesis. Por Y60 es el PIB por persona en edad de trabajar en 1960. La inversión y las tasas de crecimiento de la población son promedios del período 1960-1985. La suma de (g+δ) se supone que es 0.05. SCHOOL es el porcentaje promedio de la población en en la escuela secundaria edad de trabajar para el período 1960-1985.







Los resultados en las tablas IV y V son notables no solamente para los hallazgos de convergencia, sino también para las tasas a las cuales la convergencia ocurre. Los valores implicados de λ, el parámetro que determina la velocidad de convergencia, son derivados del coeficiente en ln(Y60). Los valores en la tabla IV son mucho más pequeños que en las predicciones del modelo de Solow. Todavía las estimaciones en la tabla V son más cercanas a lo que el modelo de Solow aumentado predice, por 2 razones. Primero, el modelo de Solow aumentado predice a una tasa de convergencia más lenta que el modelo sin capital humano. Segundo, los resultados empíricos incluyendo el capital humano implican una más rápida tasa de convergencia que los resultados empíricos sin el capital humano. Por esto, una vez más, la inclusión el capital humano puede ayudar a explicar algunos resultados que parecen anómalos desde el punto de vista del texto del modelo de Solow.

La tabla IV presenta las ecuaciones estimadas (16) con una restricción impuesta, que los coeficientes en $\ln(s_k)$, $\ln(s_h)$ y $\ln(n+g+\delta)$ suman cero. Encontramos que esta restricción no es rechazada y que su imposición tiene un pequeño efecto sobre los coeficientes. Las últimas líneas en la tabla IV presentan los valores implícitos de α y β. La estimaciones de α posee un rango de 0.38 a 0.48, y las estimaciones e β son 0.23 en las 3 muestras. Comparad con los resultados de la tabla II, estas regresiones dan un tanto más peso al capital físico y un tanto menos peso al capital humano.

En contraste a los resultaos en tabla I hasta la tabla IV, los resultados para los países de la OECD en tablas IV y V son similares para otras muestras. Una interpretación que concilie la similitud entre las muestras aquí y la disimilitud en las especificaciones anteriores es que las salidas desde el estado estacionario, representan una mayor proporción de la variación entre países en la renta per cápita para la muestra de la OCDE, que en muestras más amplias. Si los países de la OCDE están muy lejos de su estado estacionario forma, entonces el crecimiento de la población y la acumulación de capital no han tenido todavía su impacto total sobre estándares de vida, por lo que se obtiene el menor coeficiente estimado e inferior de R^2 para la OCDE en las especificaciones o que no consideran la dinámica fuera del estado estacionario.

Del mismo modo, la mayor importancia de las diferencias respecto al estado estacionario para la OCDE podría explicar el hallazgo de una mayor convergencia incondicional. Nos encontramos con esta interpretación plausible: la Segunda Guerra Mundial sin duda provocaba el abandono más grande del estado estacionario, y seguramente tenía más grandes efectos en la OCDE, que en el resto del mundo. Con un valor λ de 0,02, casi la mitad de las salidas en el estado estacionario en 1945 se habría mantenido para el final de la muestra en 1985.

En general, nuestra interpretación de la evidencia sobre la convergencia contrasta marcadamente con la de los defensores del crecimiento endógeno. En particular, creemos que el estudio de la convergencia no muestra un fracaso del modelo de Solow. Después de controlar las variables que el modelo de Solow dice determinar el estado estacionario, existe una convergencia sustancial en los ingresos per cápita. Por otra parte, la convergencia se produce en aproximadamente la velocidad que el modelo predice.

Recientemente, varios economistas, incluyendo Lucas (1988), Barro (1989), y King y Rebelo (1989), han puesto de relieve y se oponen a la modelo Solow, además de las que hemos abordado hasta ahora: argumentan que el modelo no explica ya sea por diferencias en las tasas de retorno o los flujos internacionales de capital. En los modelos de las secciones I y II, el producto marginal del capital del estado estacionario, neto de las amortizaciones, es:

17. $MPK - \delta = \frac{\alpha(n+g+\delta)}{s_k} - \delta$

Por lo tanto, el producto marginal del capital varía positivamente con la tasa de crecimiento de la población y negativamente con la tasa de ahorro. Esto porque las diferencias entre países en el ahorro y las tasas de crecimiento de la población son grandes, las diferencias en las tasas de retorno también deberán ser grandes. Por ejemplo, si $\alpha = 1/3$, $\delta=0{,}03$ y $g=0{,}02$, entonces la media marginal neta del producto en el estado estacionario es de 0,12 en la muestra intermedia, y la desviación estándar es de 0,08[13].

Dos hechos relacionados parecen incompatibles con estas predicciones. En primer lugar, las diferencias observadas en las tasas de interés reales parecen más pequeñas que las diferencias predichas en el producto neto marginal del capital. Segundo, como Feldstein y Horioka (1980) afirman en su primer documento, los países con altas tasas de ahorro tienen altas tasas de inversión nacional en lugar de grandes superávit de cuenta corriente: el capital no fluye de los países de alto ahorro hacia los países de bajo ahorro.

Aunque estos dos hechos representan rompecabezas por resolver, es prematuro considerarlos como una base para rechazar el modelo de Solow. El modelo de Solow predice que el producto marginal del capital será elevado en los países de bajo ahorro, pero no necesariamente predice que los tipos de interés reales también serán altos. Se puede inferir que el producto marginal del capital, proveniente del tipo de interés real sobre los activos financieros, sólo si los inversores persiguen la optimización y los mercados de capitales, son perfectos. Ambos supuestos son cuestionables. Es posible que algunas de las inversiones más productivas en los países pobres sean de capital público, y que el comportamiento de los gobiernos de los países pobres no es socialmente óptimo. Además, es posible que el producto marginal del capital privado sea también alto en los países pobres, pero los agentes económicos que podía realizar las inversiones productivas no lo hacen porque se enfrentan a limitaciones de financiación o porque temen las expropiaciones en el futuro.

Algunas pruebas para esta interpretación proceden del estudio de la variación internacional en la tasa de ganancia. Si el capital gana su producto marginal, entonces se puede medir el producto marginal del capital como:

$$MPK = \frac{\alpha}{K/Y}$$

[13] existe una forma alternativa de obtener el producto marginal del capital, que se aplica incluso fuera del estado estacionario, pero que requiere una estimación de β y la asunción de que no sufre cambios específicos de cada país a la función de producción. Si se supone que los retornos sobre el capital humano y físico, se igualan dentro de cada país, entonces se puede demostrar que MPK es proporcional a $y^{(\alpha+\beta-1)/(\alpha+\beta)}$. Por tanto, el libro de texto del Modelo de Solow en el que $\alpha = 1/3$ y $\beta = 0$, MPK es inversamente proporcional al cuadrado de la producción. Como otros, King y Rebelo (1989) y han señalado, las diferencias implícitas en las tasas de retorno en los países son increíblemente grandes. sin embargo, si $\alpha = \beta = 1/3$, entonces el MPK es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la producción. en este caso, las diferencias entre los países implicados en el MPK son mucho más pequeños y son similares a los obtenidos con la ecuación (17).

Es decir, el rendimiento del capital es igual a la participación del capital en el ingreso (α) dividido por la relación capital-producto (K/Y). La evidencia disponible indica que la cuota del capital es más o menos constante a través de los países. Sachs (1979, cuadro 3) presenta participación de los factores para el G-7. Sus cifras indican que la variación en estas acciones en todos los países y con el tiempo es pequeña[14]. Por el contrario, relación capital-producto varían sustancialmente entre los países: la acumulación de los datos de inversión de Sumer y Heston (1988) para producir las estimaciones del stock de capital, encuentra que los países de bajo ahorro tienen coeficientes de capital-producto cercano a uno y los países de gran ahorro tienen coeficientes de capital-producto cercano a tres. Por lo tanto, la medición directa de la tasa de ganancia sugiere que hay una gran variación internacional en el rendimiento del capital.

La evidencia disponible indica también que el riesgo de expropiación es una de las razones de que el capital no se mueve para eliminar estas diferencias en la tasa de ganancia. Williams (1975) examina las experiencias de la inversión extranjera en los países en desarrollo desde 1956 hasta 1972. Se informa que durante este período, los gobiernos nacionalizaron cerca del 19% de capital extranjero, y este promedio de compensación es de alrededor del 41% del valor en libros. Es difícil decir con precisión cuánto de la diferencia observada en las tasas de ganancia, este riesgo de expropiación puede explicar. Sin embargo, en vista del riesgo, sería sorprendente si las tasas de los beneficios no eran por lo menos algo mayor en los países en desarrollo.

Pruebas sobre las tasas de rendimiento proviene de la extensa literatura sobre diferencias internacionales en el retorno a la educación. Psacharopoulos (1985) resume los resultados de los estudios por más de 60 países que analizan los determinantes de los ingresos laborales utilizando datos micro. Porque los salarios no percibidos son el costo de la educación primaria, la tasa de rendimiento en aproximadamente el porcentaje de incremento en el salario resultante de un año adicional de escolaridad. Informa que en el país pobre, mayor será el retorno de la educación.

Total, la evidencia sobre el rendimiento del capital parece consistente con el modelo de Solow. De hecho, uno podría argumentar que apoya el modelo de Solow frente a la alternativa de los modelos endógenos de crecimiento. Muchos modelos endógenos asumen rendimientos constantes a escala en los factores reproducibles de la producción; por lo tanto, implica que la tasa de retorno no debe variar con el nivel de desarrollo. Sin embargo, la medición directa de

[14] En particular, no hay evidencia de que la rápida acumulación de capital aumenta la participación del capital sobre el producto. Sachs (1979) informa de que la rápida acumulación de Japón en el 1960 y 1970, por ejemplo, estaba asociado con un aumento de la participación del trabajo del 69% en 1962-1964 al 77% en 1975-1978. Véase también Atkinson (1975, p 167)

las tasas de ganancia y el retorno de la educación, indica que la tasa de rendimiento es mucho mayor en los países pobres.

3.3 Conclusiones

Hemos sugerido que las diferencias internacionales en la renta per cápita se comprenden mejor mediante un modelo aumentado de crecimiento de Solow. En este modelo, la producción se produce a partir del capital físico, capital humano y trabajo, y se utiliza para la inversión en capital físico, la inversión en capital humano, y el consumo. Una función de producción que sea consistente con nuestros resultados empíricos es $y = K^{1/3}H^{1/3}L^{1/3}$

Este modelo de crecimiento económico tiene varias implicaciones. En primer lugar, la elasticidad del ingreso con respecto al stock de capital físico no es sustancialmente diferente de la participación del capital en el ingreso. Esta conclusión indica, en contraste con la sugerencia de Romer, que el capital recibe aproximadamente su rendimiento social. En otras palabras, no hay externalidades sustanciales a la acumulación de capital físico.

En segundo lugar, a pesar de la ausencia de externalidades, la acumulación de capital físico tiene un impacto mayor sobre el ingreso per cápita que el texto del modelo de Solow implica. Una tasa de ahorro más alta conduce a mayores ingresos en el estado estacionario, que a su vez conduce a un mayor nivel de capital humano, incluso si la tasa de acumulación de capital humano no se modifica. Mayor nivel de ahorro por lo tanto aumenta la productividad total de los factores que se mide normalmente. La diferencia que hay entre el modelo básico de Solow y el modelo aumentado, es cuantitativamente importante. El modelo de Solow básico con una aportación del capital de la tercera parte, indica que la elasticidad de los ingresos con respecto a la tasa de ahorro es un medio. Nuestro modelo de Solow aumentado indica que esta elasticidad es 1.

Tercero, el crecimiento de la población también tiene un impacto mayor sobre el ingreso per cápita que el modelo básico indica. En el modelo básico a mayor crecimiento de la población más se reduce la renta, debido a que el capital disponible se repartirá más finamente sobre los trabajadores. En el modelo ampliado el capital humano también debe extenderse más finamente, lo que implica que un mayor crecimiento de la población disminuye la productividad total de factores. De nuevo, en este efecto es importante cuantitativamente. En el modelo básico con una participación del capital de la tercera parte, la elasticidad es de -2.

En cuarto lugar, nuestro modelo tiene implicaciones para la dinámica de la economía cuando la economía no está en el estado estacionario. En contraste con los modelos de crecimiento endógeno, este modelo predice que los países con tecnologías similares y tasas de acumulación y crecimiento de las poblaciones también similares, deben converger en renta per cápita. Sin embargo, esta convergencia se produce más lentamente que en el modelo básico. El modelo básico implica que la economía llegue a mitad de camino hacia el estado estacionario en aproximadamente 17 años, mientras que nuestro modelo de Solow aumentado implica que la economía llegue a la mitad en unos 35 años.

Más en general, nuestros resultados indican que el modelo de Solow es consistente con la evidencia internacional, si uno reconoce la importancia del capital humano, así como el capital físico. El modelo de Solow aumentado dice que las diferencias en el ahorro, la educación y crecimiento de la población debe explicar las diferencias entre los países en renta per cápita. Nuestro examen de los datos indica que estas tres variables lo explican la mayor parte de las variaciones internacionales.

Las futuras investigaciones deben ser dirigidas a explicar por qué las variables que se toman como exógenas en el modelo de Solow, varían tanto de un país a otro. Esperamos que las diferencias en las políticas fiscales, políticas de educación, preferencias por la infancia, y la estabilidad política acabarán entre los factores determinantes de la última de las diferencias entre países. También esperamos que el modelo de Solow proporcione el mejor marco para la comprensión de cómo estos factores determinantes influencian el nivel de bienestar económico de un país.

B. Desarrollo.

1. El modelo de Solow

El modelo a examinar gira en torno a cuatro variables: la producción (Y), la tecnología (A), el capital (K) y el trabajo (L). La economía cuenta con una cierta dotación de estos factores.

$$Y(t) = f(K(t), A(t)L(t))$$

En la función anterior el tiempo no aparece directamente[15], sino que lo hace a través de sus variables, lo que quiere decir que el nivel de producción varía en el tiempo sólo si lo hace a través de los factores que lo determinan (Romer, D. 2006)

Es importante observar que el progreso técnico y el trabajo aparecen en forma de producto. AL se denomina trabajo efectivo, y el progreso técnico en este caso es incorporado a la función de forma neutral en el sentido de Harrod[16]. Esta manera de trabajar con la función de producción junto con los supuestos del modelo[17], implican que la relación capital-producto,

PRINCIPALES SUPUESTOS DEL MODELO DE SOLOW

Primero: El modelo se desenvuelve en un contexto en que solo se produce un bien, en consecuencia dicho bien es utilizado tanto para consumo como para inversión.

Segundo: Se supone la existencia de una función de ahorro de la forma: $S = sY$, donde 0<s<1.

Tercero: La fuerza de trabajo crece a una tasa constante y exógena, n.

$$\frac{\dot{L}}{L} = n$$

(K/Y), se estabiliza en el largo plazo[18].

[15] Si es tiempo apareciera de forma directa en la función sería: $Y = f(K, AL, t)$

[16] Si el progreso tecnológico se presenta de la forma $Y = F(AK, L)$, el progreso técnico es aumentador del capital. Si se presenta de la forma $Y = F(K, AL)$ se dice que es aumentador del trabajo o neutral en el sentido de Harrod. Si se presenta de la siguiente forma $Y = AF(K, L)$ se dice que es neutral en el sentido de Hicks.

[17] Se recomienda leer el recuadro titulado: *Principales supuestos del modelo de Solow*.

[18] Posteriormente se observará que en este modelo, tanto el capital como el producto, en el largo plazo, crecen a la misma tasa, que a su vez es la tasa de crecimiento de la tecnología. En otras palabras, puesto

SUPUESTOS DEL MODELO DE SOLOW

Cuarto: La tecnología crece a una tasa constate y exógena, g.

$$\frac{\dot{A}}{A} = g$$

Quinto: Las posibilidades técnicas de la economía se representan por una función de producción agregada continua y con rendimientos constantes a escala (es decir, en el modelo, la sumatoria de los coeficientes de cada variable debe dar igual a 1)

$$Y = f(A, K, L)$$

Fuente: Jones, Hywell (1988)

El modelo utiliza una función de producción que exhibe rendimientos constantes a escala en sus dos factores: capital y trabajo efectivo[19], y decreciente en cada uno. Esto significa que si duplicamos la cantidad de capital y trabajo efectivo, el nivel de producción también se duplicará. Es decir, si multiplicamos los factores productivos por una constante "c", el nivel de producción también se multiplicará por dicha constante.

$$f(cK\ c\ AL) = cf(K\ AL) \qquad \text{para todo } c \geq 0$$

Por otra parte, se dice que la función es decreciente en cada factor ya que una unidad adicional de K o L, manteniendo todo lo demás constante, aportará menos a la producción que la unidad precedente.

El supuesto de rendimientos constantes a escala permite operar con una función en forma intensiva $c = \frac{1}{AL}$, es decir, cada coeficiente es dividido por AL, que se refiere a trabajo efectivo (trabajo multiplicado por tecnología)

$$f\left(\frac{f}{AL}, 1\right) = \frac{1}{AL} f(K, AL)$$

Por lo tanto:

$$\frac{K}{AL} = Capital\ por\ unidad\ de\ trabajo\ efectivo$$

$$\frac{f(K, AL)}{AL} = \frac{Y}{AL} = El\ producto\ por\ unidad\ de\ trabajo\ efectivo$$

---

que tanto el numerador como el denominador, en la división K/Y, crecen a la misma tasa, el resultado siempre será el mismo.

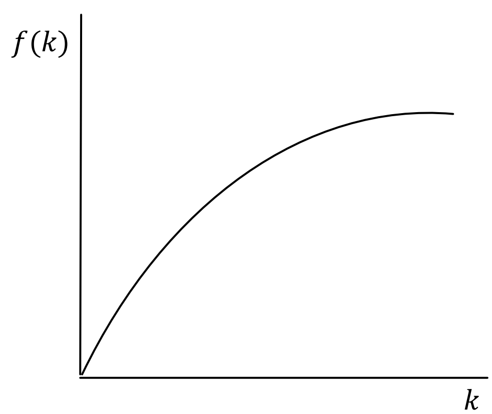
[19] Recuérdese que se puede saber que la función de producción tiene rendimientos constantes a escala si la sumatoria de sus exponentes da igual a 1. Además recuerde que cuando se habla de rendimientos constantes a escala, se habla de aumento de todos los factores productivos juntos.

$$k = \frac{K}{AL}, \qquad y = \frac{Y}{AL}, \qquad f(K) = f(K, 1)$$

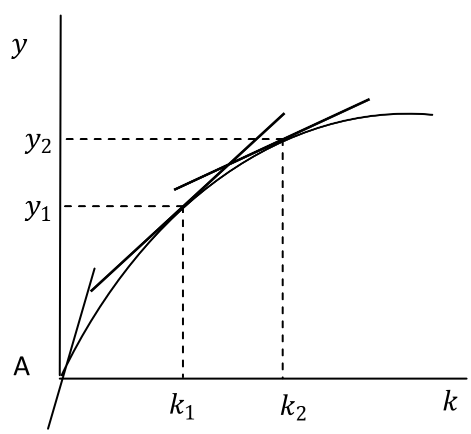
$$y = f(K)$$

Esta función de producción debe cumplir ciertos requisitos para representar correctamente los ya antes mencionados, rendimientos constante a escala.

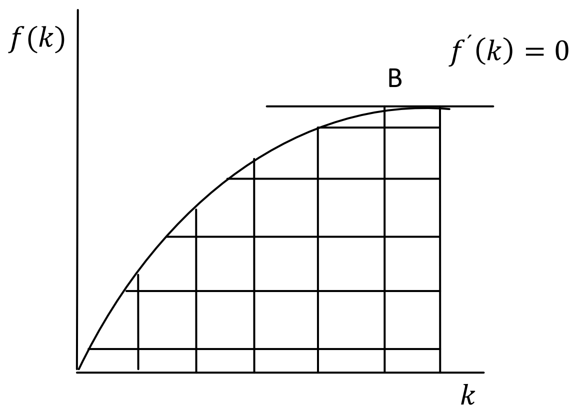
$$y = f(K)$$



Como se aprecia la función de producción de forma intensiva satisface las condiciones de Inadas. Dichas condiciones son: la primera derivada de la función debe ser positiva. $f^{'}(k) > 0$



Como se observa, entre mayor es el capital por unidad de trabajo efectivo, menor es su producto marginal, $f^{'}$ (o primera derivada)



La segunda derivada debe ser negativa (*f´´(k)<0*). Esto significa que la función de producción es cócava hacia abajo, por tanto después de un cierto punto el aumento de k causará decrementos en f(k) y el punto en el que se maximice la producción será en el que la primera derivada sea igual a 0 (f´(k)=0).

Adicionalmente la función de producción muestra las condiciones dinadas: $\lim_{k\to 0} f'(k) = \infty$ y $\lim_{k\to\infty} f'(k) = 0$. La primera condición significa que a medida en que k se acerca a 0 la pendiente tiende al infinto (la pendiente se vuelve vertical), esto se observa en el punto A del gráfico anterior. Asimismo, la segunda condición significa que a medida en que k se acerca al infinito, la pendiente se vuelve 0, esto ultimo lo representa el punto B en el gráfico anterior.

La funcion de produccion cobb-douglas cumple todas las condiciones necesarias (todas las antes expuestas en los gráficos respecto a las derivadas), por tanto será correctamente utilizada ya que dichas condiciones nos dice que a medida de que el capital tiende a 0, su productividad marginal tiende al infinito, mientras que cuando el capital se hace más grande, su productividad marginal tiende a 0, y esto es posible gracias a la concavidad que antes mostramos que posee la gráfica.

Las condiciones de Inada junto con los supuestos del modelo, garantizan que la evolución de la economía no sea divergente en los países, ya que la cantidad de capital por unidad de trabajo efectivo no crece indefinidamente sino que al llegar al momento en que su productividad es cero deja de crecer.

Además puesto que como nos indica uno de los supuesto; la productividad marginal de cada factor es igual a su remuneración, y dada la ley de la oferta y la demanda; en países donde existe abundancia de capital su productividad marginal, y por tanto su remuneración, es baja, mientras en países en donde existe poco capital ocurre lo contrario, por lo que el capital tiende a irse a donde más remuneración obtienes, es decir a los países pobres[20]; esto garantiza la no divergencia entre los países.

Entonces, ya hemos demostrado que la función Cobb Douglas, cumple con todas las condiciones necesarias y suficientes para poder ser utilizada en este modelo.

$$\boldsymbol{Y\ (t) = K(t)^{\alpha}(A(t)L(t))^{1-\alpha}} \qquad\qquad \boldsymbol{0 < \alpha <} 1$$

Con el objetivo defacilitar los procedimientos dividimos entre las unidades de trabajo efectivo (AL) la función de producción, para obtener que la produción por unidad de trabajo efectivo depende del capital por trabajo efectivo.

$$\frac{Y\ (t)}{A(t)L(t)} = \frac{K(t)^{\alpha}\left(A(t)L(t)\right)^{1-\alpha}}{A(t)L(t)}$$

$$y(t) = k(t)^{\alpha}$$

En donde $y(t) = \frac{Y\ (t)}{A(t)L(t)}$; y $k(t)^{\alpha} = \left(\frac{K(t)}{AL}\right)^{\alpha}$

El trabajo y el tecnología crecen a tasas de crecimiento constantes y exógenas (n y g respectivamente), es decir no se determinan en el modelo.

$$\boldsymbol{L(t) = L(0)e^{nt}} \qquad (\boldsymbol{2})$$

$$\boldsymbol{A(t) = A(0)e^{gt}} \qquad (\boldsymbol{3})$$

$$\dot{L}(t) = nL(t)$$

$$\dot{A}(t) = gA(t)$$

En donde $\dot{L}$ denota la derivada de L respecto al tiempo o variación en el tiempo, que al ser dicidida entre ella misma (L) da como resultado la tasa de crecimiento de L. Ocurre lo mismo con $\dot{A}$.

[20] Una de las mayores críticas a este tipo de modelos es la completa exclusión del papel que juegan las instituciones, las cuales explican el por qué esta tendencia del capital hacia los países pobres no se da.

Además la tasa de crecimiento de una variable es igual a la tasa de crecimiento de su logaritmo natural[21]. Es por ello que si en 2 y 3 se toman ogaritmos naturales y se derivan con respecto al tiempo nos queda igual a n y g respectivamente.

Por otra parte, la proporción del consumo destinada a la inversion, s, es exogena y constante. Además: Horro=Inversión.

$$S(t) = sY(t) = I(t) \qquad \text{(a)}$$

Una unidad de ahorro genera una unidad de inversión, ademas existe depreciación a una tasa δ. Por lo que la inversión neta en cada periodo o la derivada de K respecto al tiempo es igual a la inversion (o ahorro en el periodo actual) menos la depreciación del acervo de capital.

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t) = Inversión\ neta \qquad \text{(b)}$$

Las empresas necesitan maximizar sus beneficios, esto se logra cuando la variación en el tiempo (o derivada con respecto al tiempo), es igula a 0. Para llegar a este punto primero tenemos que plantear que el capital por unidad de trabajo efectivo es igual a:

$$k = \frac{K}{AL} \qquad (c)$$

A continuación se debe igualar a 0. Para derivar (c) se aplica la regla de la cadena[22]. Es decir sustituir el producto del denominador (AL) por una U[23]. Es decir la ecuación (c) queda:

$$k(t) = \frac{K}{U} \qquad U = AL$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$\dot{k}(t) = \frac{U\dot{K} - KU^{\prime}}{U^2} \qquad \text{(d)}$$

$$\text{en donde:} \quad U^{\prime} = A(t)\dot{L}(t) + L(t)\dot{A}(t) \qquad \text{(e)}$$

Sustituyendo (e) en (d):

---

21 $\frac{\dot{x}}{x(t)} = \frac{dlnx\ (t)}{dt}$

$\frac{dlnx(t)}{dt} = \frac{dlnx(t)}{dx(t)} \cdot \frac{dx(t)}{d(t)} = \frac{\dot{x}}{x(t)}$

22 $\frac{dK}{dt} = \frac{dK}{du} \cdot \frac{du}{dt}$

23 Todo esto se hace porque no se puede derivar k directamente.

$$\dot{k}(t) = \frac{(AL)\dot{K} - K\left(A\dot{L} + L\dot{A}\right)}{(AL)^2}$$

$$\dot{k}(t) = \frac{AL\dot{K}}{(AL)^2} - \frac{K\left(A\dot{L} + L\dot{A}\right)}{(AL)^2}$$

$$\dot{k}(t) = \frac{\dot{K}}{AL} - \frac{KA\dot{L}}{A^2L^2} - \frac{KL\dot{A}}{A^2L^2}$$

$$\dot{k}(t) = \frac{\dot{K}}{AL} - \left(\frac{K}{AL} * \frac{\dot{L}}{L}\right) - \left(\frac{K}{AL} * \frac{\dot{A}}{A}\right)$$

Aplicando lo expuesto en (2) y (3)[24]:

$$\dot{k}(t) = \frac{\dot{K}(t)}{A(t)L(t)} - n\frac{K(t)}{A(t)L(t)} - g\frac{K(t)}{A(t)L(t)}$$

Sustituyendo las ecuaciones (b) y (c) en la ecuación anterior:

$$\dot{k}(t) = \frac{sY(t) - \delta K(t)}{A(t)L(t)} - nk(t) - gk(t)$$

$$\dot{k}(t) = \frac{sY(t)}{A(t)L(t)} - \frac{\delta K(t)}{A(t)L(t)} - nk(t) - gk(t)$$

$$\dot{k}(t) = s\frac{Y(t)}{A(t)L(t)} - \delta\frac{K(t)}{A(t)L(t)} - nk(t) - gk(t)$$

$$\dot{k}(t) = sy(t) - \delta k(t) - nk(t) - gk(t)$$

$$\dot{k}(t) = sy(t) - k(t)(\delta + n + g)$$

Finalmente, recordando que: $y(t) = k(t)^{\alpha}$,

$$\boldsymbol{\dot{k}(t) = s(k(t)^{\alpha}) - k(t)(\delta + n + g)} \qquad \boldsymbol{(4)}$$

En el estado estacionario $\dot{k}(t) = 0$ [25], por lo que igualando la ecuación (4) a 0:

$$0 = s(k(t)^{\alpha}) - k(t)(\delta + n + g)$$

Despejando y eliminado términos:

---

[24] $\frac{\dot{L}}{L} = n;\ \frac{\dot{A}}{A} = g$

[25] El k per capíta se mantiene constante. Esto no quiere decir que el capital no crezca, sino que el capital crece a la misma proporción que el trabajo efectivo, por lo que si bien el capital per cápita se mantiene constate, la cantidad de capital total no.

$$sk^{\alpha}(t) = k^{*}(t)(\delta + n + g)$$

$$k^{*}(t) = \frac{s}{(\delta + n + g)} k^{\alpha}(t)$$

$$\frac{k^{*}(t)}{k^{\alpha}(t)} = \frac{s}{(\delta + n + g)}$$

$$k^{*1-\alpha}(t) = \frac{s}{\delta + n + g}$$

$$\sqrt[1-\alpha]{k^{*1-\alpha}(t)} = \sqrt[1-\alpha]{\frac{s}{\delta + n + g}}$$

$$\boldsymbol{k^{*}(t) = \left(\frac{s}{(\delta + n + g)}\right)^{1/(1-\alpha)}} \qquad \mathbf{(5)}$$

Para llegar a la funcion a estimar debemos utilizar los datos observados en la realidad, los cuales no se encuentran en unidades por trabajo efectivo, es por ello que com vertiremos la ecuacion para que quede en unidades per capita. Para ello dividimos la funcion de produccion entre el trabajo.

$$Y(t) = A(t)K(t)^{\alpha}L(t)^{1-\alpha}$$

$$\frac{Y(t)}{L(t)^{1-\alpha}} = \frac{A(t)K(t)^{\alpha}L(t)^{1-\alpha}}{L(t)^{1-\alpha}}$$

$$\left(\frac{Y(t)}{L(t)}\right) = A(t)K(t)^{\alpha}$$

Sustituyendo la ecuacion 5 en la ecuación anterior obtenemos:

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = A\left[\left(\frac{s}{(\delta + n + g)}\right)^{1/1-\alpha}\right]^{\alpha}$$

Sustituyendo la ecuación 3 en la ecuación anterior obtenemos:

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = \left(A(0)e^{g(t)}\right)\left(\frac{s}{(\delta + n + g)}\right)^{\alpha/1-\alpha}$$

Tomando logaritmos obtenemos:

$$\ln\left(\frac{Y(t)}{L(t)}\right) = lnA(0) + gt + \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(s) - \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(\delta + n + g) \qquad (6)$$

Recuérdese que el término A(0) no refleja únicamente la tecnología, sino también las dotaciones de recursos, el clima, las instituciones, etc. Esto podría por lo tanto diferir en los países. Se asume que: $\ln A(0) = a + \epsilon$

Donde a es una constante y ϵ es un choque entre los países. Así el registro de ingreso per cápita en un tiempo dado-tiempo 0 para simplificar- es:

$$\ln\left(\frac{\boldsymbol{Y(t)}}{\boldsymbol{L(t)}}\right) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{gt} + \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{1-\alpha}}\ln(\boldsymbol{s}) - \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{1-\alpha}}\ln(\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{n} + \boldsymbol{g}) + \boldsymbol{\epsilon} \qquad (7)$$

2. Adición de acumulación de capital humano al modelo de Solow

El modelo visto hasta este momento es el llamado modelo de Solow, pero lo que se quiere es ampliar dicho modelo, para ello se incorpora una variable adicional al modelo.

$$\boldsymbol{Y(t) = K(t)^{\alpha} H(t)^{\beta} (A(t)L(t))^{1-\alpha-\beta}} \qquad (8)$$

Primeramente recuerde el supuesto de retornos constantes, por lo cual la sumatoria de los parámetros debe ser igual a cero, es por ello que además de acompañar a la nueva variable H (stock de capital humano), el parámetro β, se encuentra junto con α restando a 1 en la últimas variables (AL). Además α la fracción de los ingresos invertidos en capital físico y β la fracción invertida en capital humano. Como en el modelo anterior, la función de producción se debe dividir entre las unidades de trabajo efectivo.

$$c = \frac{1}{AL} \qquad Y = K^{\alpha} H^{\beta} \qquad \text{(f)}$$

Tanto el trabajo como la tecnología siguen creciendo a tasas constantes y exógenas.

$$\dot{L}(t) = nL(t)$$

$$\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n \qquad \text{(g)}$$

$$\dot{A}(t) = gA(t)$$

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = g \qquad \text{(h)}$$

$$L(t) = L(0)e^{nt}$$

$$A(t) = A(0)e^{gt}$$

Ya que en este momento se han definido dos tipos de capitales (físico y humano), los dos se deprecian de las formas:

$$\dot{K}(t) = s_k Y - \delta K \qquad Inversión\ neta\ en\ capital\ físico\ .$$

$$\dot{H}(t) = s_h Y - \delta H \quad Inversión\ \ neta\ en\ capital\ humano.$$

Es decir, la variacion del acervo de capital (humano o fisico) es igual a la proporcion de la renta que se ahorra y se invierte en cada uno (s_k y s_h) en el periodo t menos la depreciacion que experienta el capital acumulado previamente.

Las empresas necesitan maximizar sus beneficios, esto se logra cuando la variación en el tiempo (o derivada con respecto al tiempo), es igula a 0. Para llegar a este punto primero tenemos que plantear que el capital por unidad de trabajo efectivo es igual a:

$$k(t) = \frac{K}{AL}$$

Una vez más, considerande AL =U, la ecuación anterior queda:

$$k(t) = \frac{K}{U}$$

Aplicando la regla de la cadena y simplificando.

$$\dot{k}(t) = \frac{U\dot{K} - KU'}{U^2} \qquad Donde\ \ U' =\ A(t)\dot{L}(t) + L(t)\dot{A}(t)$$

$$\dot{k}(t) = \frac{(AL)\dot{K} - K\big(A(t)\dot{L}(t) + L(t)\dot{A}(t)\big)}{(AL)^2}$$

$$\dot{k}(t) = \frac{AL\dot{K}}{(AL)^2} - \frac{K\big(A\dot{L} + L\dot{A}\big)}{(AL)^2}$$

$$\dot{k}(t) = \frac{\dot{K}}{AL} - \frac{KA\dot{L}}{(AL)^2} - \frac{KL\dot{A}}{(AL)^2}$$

$$\dot{k}(t) = \frac{\dot{K}}{AL} - \frac{KA\dot{L}}{A^2L^2} - \frac{KL\dot{A}}{A^2L^2}$$

$$\dot{k}(t) = \frac{\dot{K}}{AL} - \frac{K\dot{L}}{AL^2} - \frac{K\dot{A}}{A^2L}$$

$$\dot{k}(t) = \frac{\dot{K}}{AL} - \frac{K}{AL}\frac{\dot{L}}{L} - \frac{K}{AL}\frac{\dot{A}}{A}$$

Sustituyendo los resultados de (g) y(h)

$$\dot{k}(t) = \frac{\dot{K}}{AL} - kh - kg$$

Recuerde que: $\dot{K}(t) = s_k Y(t) - \delta K(t)$

$$\dot{k}(t) = \frac{s_k Y(t) - \delta K(t)}{A(t)L(t)} - kn + kg$$

$$\dot{k}(t) = \frac{s_K Y(t)}{A(t)L(t)} - \delta \frac{K(t)}{A(t)L(t)} - kn(t) - kg(t)$$

$$\dot{k}(t) = s_k y(t) - \delta k(t) - hk(t) - gk(t)$$

$$\boldsymbol{\dot{k}(t) = s_k y(t) - (n + g + \delta) k(t)} \qquad \mathbf{(9.a)}$$

En el segundo caso observamos que:

$$h(t) = \frac{H(t)}{A(t)L(t)}$$

Considerando U=AL

$$h(t) = \frac{H}{U} \qquad U = AL$$

Aplicando la regla de la cadena

$$\dot{h}(t) = \frac{U\dot{H} - HU^{\prime}}{U^2} \qquad Donde\text{:} \ \ U^{\prime} = A(t)\dot{L}(t) + L(t)\dot{A}(t)$$

$$\dot{h}(t) = \frac{(AL)\dot{H} - H\left(A(t)L\dot{(t)} + L(t)A\dot{(t)}\right)}{(AL)^2}$$

$$\dot{h}(t) = \frac{AL\dot{H}}{(AL)^2} - \frac{H\left(A\dot{L} + L\dot{A}\right)}{(AL)^2}$$

$$\dot{h}(t) = \frac{\dot{H}}{AL} - \frac{HA\dot{L}}{(AL)^2} - \frac{HL\dot{A}}{(AL)^2}$$

$$\dot{h}(t) = \frac{\dot{H}}{AL} - \frac{HA\dot{L}}{A^2L^2} - \frac{HL\dot{A}}{A^2L^2}$$

$$\dot{h}(t) = \frac{\dot{H}}{AL} - \frac{H\dot{L}}{AL^2} - \frac{H\dot{A}}{A^2L}$$

$$\dot{h}(t) = \frac{\dot{H}}{AL} - \frac{H}{AL}\frac{\dot{L}}{L} - \frac{H}{AL}\frac{\dot{A}}{A}$$

$$\dot{h}(t) = \frac{\dot{H}}{AL} - hn - hg$$

Recuerde que: $\dot{K}(t) = \ s_hY(t) - \delta K(t)$

$$\dot{h}(t) = \frac{s_hY - \delta H}{AL} - hn + hg$$

$$\dot{h}(t) = \frac{s_hY(t)}{A(t)L(t)} - \delta\frac{H(t)}{A(t)L(t)} - hn(t) - hg(t)$$

$$\dot{h}(t) = \ s_hy(t) - \delta h(t) - \ nh(t) - gh(t)$$

$$\boldsymbol{\dot{h}(t) = \ s_hy(t) - (n + g + \delta)h(t) \qquad (9.b)}$$

Resumiendo:

$$\boldsymbol{\dot{k}(t) = \ s_ky(t) - (n + g + \delta)k(t) \qquad (9.a)}$$

$$\boldsymbol{\dot{h}(t) = \ s_hy(t) - (n + g + \delta)h(t) \qquad (9.b)}$$

En el estado estacionario $\dot{k}(t) = 0$ y $\dot{h}(t) = 0$[26]

$$\dot{k}(t) = \ s_ky(t) - (n + g + \delta)k(t)$$

$$s_ky(t) - (n + g + \delta)k(t) = 0$$

$$s_ky(t) = (n + g + \delta)k(t)$$

Tomando en cuenta que $y(t) = k(t)^{\alpha}h(t)^{\beta}$:

$$s_k\left(k^{\alpha}h^{\beta}\right) = (n + g + \delta)k(t)$$

[26] Los capitales per cápita permanecen constantes.

El ahorro es una proporción fija de la renta y una parte de ese ahorro se dedica a capital fisico y otra a capital humano.

$$s_K = s_k^{1-\beta} s_h^{\beta}$$

Del total de ahorro β es para s_h y $1-\beta$ es para s_k

$$1) \qquad y(t) = Ak(t)^{\alpha} H(t)^{\beta} \left(L(t)\right)^{1-\alpha-\beta}$$

$$2) \qquad y(t) = k(t)^{\alpha} h(t)^{\beta}$$

La tasa de ahorro se supone constante en el modelo y es igual a "s". Por lo tanto la acumulación estará dada por

$$3) \qquad k + h = sA\, k(t)^{\alpha} h(t)^{\beta} - (n + g + \delta)(k + h)$$

Aquí se supone que los bienes de capital (físico y humano) se deprecian a una misma tasa constante.

Dado que el ahorro se distribuye entre capital físico y humano, es razonable pensar que las familias invertirán en el bien de Inversión que ofrece el rendimiento más alto, de modo que las dos tasas de rendimiento y los dos productos marginales del capital (humano y físico) tendrán que ser asimilados si ambas formas de Inversión están teniendo lugar por lo tanto:

$$PMk = PMh$$

$$4) \quad \alpha - \frac{y}{k} - \alpha = n\frac{y}{k} - \alpha$$

La igualdad del producto marginal implica una relación uno a uno entre el capital físico y humano.

$$5) \qquad h = \frac{\beta}{\alpha} . k$$

Sustituyendo en 3

$$\dot{k}(t) = sA\, k(t)^{\alpha+\beta} - (n + g + \delta). k$$

Para simplificar el análisis se supone que los capitales tienen la misma unidad de medida por lo tanto directamente podemos establecer 13.2, la manera adecuada de proceder es esta, pero los resultados son los mismos.

$$s_h^{1-\beta} s_h^{\beta} \left(K^{\alpha} H^{\beta}\right) = (n + g + \delta) k(t)$$

$$s_h^{1-\beta} s_h^{\beta} K^{\alpha} H^{\beta} = (n+g+\delta)k(t)$$

$$\frac{s_h^{1-\beta} s_h^{\beta}}{(n+g+\delta)} = \frac{K(t)}{K^{\alpha} H^{\beta}}$$

$$\left(\frac{s_h^{1-\beta} s_h^{\beta}}{(n+g+\delta)}\right)^{1/_{1-\alpha-\beta}} = \left(\frac{K(t)}{K^{\alpha} H^{\beta}}\right)^{1/_{1-\alpha-\beta}}$$

$$\boldsymbol{K = \left(\frac{s_h^{1-\beta} s_h^{\beta}}{(n+g+\delta)}\right)^{1/_{1-\alpha-\beta}}} \qquad \textbf{10.a}$$

Asimismo

$$s_h^{1-\beta} s_h^{\beta} \left(K^{\alpha} H^{\beta}\right) = (n+g+\delta)k(t)$$

$$s_h^{1-\beta} s_h^{\beta} K^{\alpha} H^{\beta} = (n+g+\delta)k(t)$$

$$\frac{s_h^{1-\beta} s_h^{\beta}}{(n+g+\delta)} = \frac{H(t)}{H^{\alpha} H^{\beta}}$$

$$\left(\frac{s_h^{1-\beta} s_h^{\beta}}{(n+g+\delta)}\right)^{1/_{1-\propto-\beta}} = \left(\frac{H(t)}{H^{\alpha} H^{\beta}}\right)^{1/_{1-\propto-\beta}}$$

$$\boldsymbol{H = \left(\frac{s_h^{1-\beta} s_h^{\beta}}{(n+g+\delta)}\right)^{1/_{1-\alpha-\beta}}} \qquad \boldsymbol{10.b}$$

Haciendo el procedimiento ya utilizado para obtener la ecuacion 6 pero aplicado a 10.a

$$\boldsymbol{ln\left[\frac{Y_t}{L_t}\right] = ln\,A(0) + g_t - \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta} ln(n+g+\delta) + \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta} ln(s_k) + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta} ln(s_h)} \qquad \textit{\textbf{(11)}}$$

Haciendo el procedimiento ya utilizado para obtener la ecuacion 6 pero aplicado a 10.b

$$\mathbf{ln\left[\frac{Y_t}{L_t}\right] = ln\,A(0) + g_t - \frac{\alpha}{1-\alpha} ln\,s_k - \frac{\alpha}{1-\alpha} ln(n+g+\delta) + \frac{\beta}{1-\alpha} ln(h^*)} \qquad \textbf{(12)}$$

3. Crecimiento endógeno y convergencia

La convergencia llegará cuando la tasa de crecimiento $k(t)$ sea igual a cero por lo que la velocidad de convergencia es medida por como las tasas de crecimiento declinan hasta que el stock de capital aumenta en sentido proporcional, ese punto se obtiene por:

$$\lambda = -\frac{\frac{\lambda \dot{k}(t)}{k(t)}}{\lambda logk(t)} \qquad (13.5)$$

Siguiendo con 13.4

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = sk(t)^{\alpha+\beta} k(t)^{-1} - (n+g+\delta)$$

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = s\left(k(t)^{\alpha+\beta-1}\right) - (n+g+\delta)$$

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = s\left(k(t)^{-(1-\alpha-\beta)}\right) - (n+g+\delta)$$

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = sk(t)^{-(1-\alpha-\beta)} - (n+g+\delta) \quad (13.6)$$

Para poder calcular las tasas de crecimiento se debe expresar en 13.6 $k(t)^{-(1-\propto-\beta)}$ en $\ln k(t)$

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = s. lnk(t)^{-(1-\alpha-\beta)} - (n+g+\delta)$$

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = s[-(1-\alpha-\beta)]lnk - (n+g+\delta) \qquad (13.7)$$

Tomando exponencial en 13.7 llegamos a

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = s. e^{-(1-\alpha-\beta)lnk} - (n+g+\delta) \quad (13.8)$$

Recuerde la definición de velocidad de convergencia expresada en 13.5, con base a ello sabemos que en este momento se debe derivar con respecto a la exponencial anterior.

$$\frac{d\dot{k}(t)}{dlnk(t)} = -(1-\alpha-\beta). s(k(t))^{-(1-\alpha-\beta)}$$

$$\lambda = -\frac{d\dot{k}(t)}{dlnk(t)}$$

El signo negativo de la ecuación anula el signo negativo de la ecuación que le antecede, quedando

$$\lambda = (1-\alpha-\beta).s\big(k(t)\big)^{-(1-\alpha-\beta)} \qquad (13.9)$$

Dado que en el estado estacionario $\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = 0$, es decir, el capital per cápita se mantiene constante a partir de 13.6 podemos deducir que

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = s.k^{-(1-\alpha-\beta)} - (n+g+\delta)$$

$$s.k^{-(1-\alpha-\beta)} - (n+g+\delta) = 0$$

$$s.k^{-(1-\alpha-\beta)} = (n+g+\delta) \qquad (13.10)$$

Sustituyendo 13.10 en 13.9 obtenemos

$$\lambda = (1-\alpha-\beta).(n+g+\delta) \qquad (13.11)$$

λ Es la velocidad de convergencia que puede ser usada también de la forma[27] :

$$\frac{\dot{y}}{y} \approx \lambda\left[ln\left({}^{\hat{y}}/_{y^*}\right)\right] \qquad (13.12)$$

La tasa de crecimiento del producto obtenido converge al estado estacionario "y^*" a una velocidad "λ".

Recuerde que

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\mathrm{dln}(y)}{dt}$$

Sustituyendo en 13.12 obtenemos

$$\frac{\mathrm{dln}\big(y(t)\big)}{dt} = \lambda(ln\hat{y} - lny^*)$$

[27] El propósito de es determinar a qué ritmo se acerca k a k^*, para llegar a este punto una forma es hacer una aproximación de Taylor de primer orden de $\dot{k}(t)$ alterna $k = k^*$:

$$\dot{k}(t) = \left(\frac{d\dot{k}(k)}{dk}\bigg| k = k^*\right) = (k-k^*)$$

$$\boldsymbol{\lambda = (n + g + \delta)(1 - \alpha - \beta)}$$

El modelo sugiere una regresión natural para estudiar la tasa de convergencia. La ecuación (13) implica que:

(14) $$\ln(y(t)) = (1 - e^{-\lambda t})\ln(y*) + e^{-\lambda t}\ln(y(0))$$

Donde $y(0)$ es el ingreso por trabajador efectivo en una fecha inicial. Substrayendo ln $y(0)$ de ambos lados de la ecuación,

(15) $$\ln(y(t)) - \ln(y(o)) = (1 - e^{-\lambda t})\ln(y*) - (1 - e^{-\lambda t})\ln(y(o))$$

Finalmente sustituimos por y^*:

(16) $$\ln(y(t)) - \ln(y(o)) = (1 - e^{-\lambda t}) * \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}\ln(s_k) + (1 - e^{-\lambda t}) + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\ln(s_h) - (1 - e^{-\lambda t})\alpha + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\ln(n + g + \delta) - (1 - e^{-\lambda t})\ln(y(o))$$

Así en el modelo de Solow el crecimiento del ingreso es una función de los determinantes del estado estacionario final y del nivel e ingreso inicial.

En los modelos de las secciones I y II, el producto marginal del capital en el estado estacionario, neto de las amortizaciones, es:

$$Y = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha} \qquad (1)$$

$$y = k(t)^{\alpha} \qquad (2)$$

El producto marginal del capital es la variación que experimenta la producción cuando varía la cantidad del capital adicional, es decir, el producto marginal es la demanda de "y" con respecto a "k".

$$PMk = \frac{dy}{dk} \qquad (3)$$

$$\frac{dy}{dk} = \alpha k(t)^{\alpha-1} \qquad (4)$$

$$\dot{k} = sk(t)^{\alpha} - (n + g + \delta)k(t)$$

En el estado estacionario $\dot{k} = 0$

$$sk(t)^{\alpha} - (n + g + \delta)k(t) = 0$$

Dividiendo entre “$sk(t)$”

$$\frac{sk(t)^{\propto} - (n+g+\delta)k(t)}{sk(t)^{\alpha}} = 0$$

$$ss^{-1}k(t)^{\alpha}k(t)^{-1} - \frac{(n+g+\delta)k(t)}{sk(t)^{\alpha}} = 0$$

$$k^{\alpha-1} = \frac{(n+g+\delta)}{s} \qquad (5)$$

Sustituyendo (4) en la ecuación (5)

$$PMk = \propto \left[\frac{(n+g+\delta)}{s}\right]$$

$$PMk = \frac{\alpha(n+g+\delta)}{s}$$

Restando depreciación δ ambos lados

$$PMk - \delta = \frac{\alpha(n+g+\delta)}{s} - \delta$$

Algunas pruebas para esta interpretación proceden del estudio de la variación internacional en la tasa de ganancia. Si el capital gana su producto marginal, entonces se puede medir el producto marginal del capital como:

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

$$\frac{dY}{dK} = AL^{1-\alpha}(\alpha K^{\alpha-1})$$

$$\frac{dY}{dK} = \alpha\frac{AL^{1-\alpha}}{K^{1-\alpha}}$$

$$\frac{dY}{dK} = \alpha\frac{AL^{1-\alpha}}{K^{1-\alpha}}\left(\frac{K^{\alpha}}{K^{\alpha}}\right)$$

$$\frac{dY}{dK} = \alpha\frac{AL^{1-\alpha}K^{\alpha}}{K^{1-\alpha}K^{\alpha}}$$

El numerador de esta última expresión es igual al lado derecho de la primera ecuación, por tanto.

$$\frac{dY}{dK} = \alpha \frac{Y}{K}$$

$$\frac{dY}{dK} = \frac{\alpha}{K/Y}$$

$$MPK = \frac{\alpha}{K/Y}$$

III - NOTAS SOBRE LA CONTABILIDAD DEL CRECIMIENTO

A. Traducción intacta del documento original

Resumen

La contabilidad del crecimiento descompone el crecimiento económico en los componentes asociados a los cambios en los insumos de los factores y el residuo de Solow, con el progreso tecnológico y además refleja otros elementos. Este ejercicio es generalmente visto como un paso preliminar para el análisis de los determinantes fundamentales del crecimiento y es especialmente útil si los factores determinantes del crecimiento son sustancialmente tasas independientes como los cambios tecnológicos. El presente documento, comienza con una breve presentación de los fundamentos de la contabilidad del crecimiento. El análisis a continuación, considera los enfoques duales para la contabilidad del crecimiento (que considera cambios en los precios de los factores en vez de cantidades), efectos secundarios y los rendimientos crecientes, los impuestos y múltiples tipos de insumos de los factores. Más tarde, en los últimos dos capítulos se da lugar al ejercicio de contabilidad del crecimiento en el contexto de las teoría del crecimiento endógeno.

Dentro de este contexto, el residuo de Solow se puede interpretar en términos de medidas de la evolución endógena del nivel de tecnología. Esta tecnología corresponde, en un caso, a una serie de tipos de productos intermedios que se han inventado y, en el otro caso, a un índice de la calidad total de los insumos intermedios. Los modelos tienen implicaciones para la relación del residuo de Solow con los gastos en investigación y desarrollo (I+D), y también proporcionan una interpretación clara del "stock de capital de I+D".

La contabilidad del crecimiento presenta un desglose del crecimiento económico observado en los componentes asociados a los cambios en los insumos de los factores y un residual que refleja el progreso tecnológico y otros elementos. En general, el ejercicio contable se ve como un paso preliminar para el análisis de los determinantes fundamentales del crecimiento económico. El paso final consiste en las relaciones de los tipos de factores de crecimiento, participación de los factores y el cambio tecnológico (el residuo) con elementos tales como las políticas gubernamentales, las preferencias de los hogares, los recursos naturales, los niveles iniciales de capital físico y humano, y así sucesivamente.

El ejercicio de contabilidad de crecimiento puede ser especialmente útil si los factores determinantes fundamentales de las tasas de crecimiento son sustancialmente independientes de los del cambio tecnológico. La base de la contabilidad del crecimiento fue presentada sobre todo por Solow (1957), Kendrick (1961), Denison (1962) y Jorgenson y Griliches (1967).

Griliches (1997, parte 1) proporciona una visión general de esta historia intelectual, con especial hincapié en el desarrollo del residuo de Solow. El presente trabajo comienza con una breve presentación de estos elementos básicos en la forma de un modelo estándar, primordial de la contabilidad del crecimiento.

El análisis a continuación, se convierte en una serie de cuestiones que afectan la interpretación del residuo de Solow como una medida del cambio tecnológico. Los temas cubiertos incluyen enfoques duales para la contabilidad del crecimiento (que consideran los cambios en precios de los factores en vez de cantidades), efectos indirectos y de los rendimientos crecientes, los impuestos, y múltiples tipos de factores de insumos.

Las secciones posteriores tratan el ejercicio de la contabilidad del crecimiento en el contexto de los últimos dos capítulos sobre la teoría del crecimiento endógeno- modelos de variedad de productos y modelos de “escaleras de calidad” (“quality ladders”). Dentro de estos contextos, el residuo de Solow se puede interpretar en términos de medidas de la evolución endógena del nivel de tecnología. Esta tecnología se corresponde, en un caso, al número de tipos de productos intermedios que se han inventado y, en el otro caso, a un índice de la calidad total de los insumos intermedios. Los modelos también pueden utilizarse para evaluar y ampliar los análisis anteriores en los que la Solow se relaciona con los gastos en investigación y desarrollo (I + D). Estos análisis a menudo utilizan el concepto de un proyecto de stock de capital de I + D y la población tiene un significado claro dentro de las teorías subyacentes.

1. Standard de contabilización Primal del crecimiento

Iniciamos con la función de producción neoclásica

1. $Y = F(A, K, L)$

Donde *A* es el nivel de tecnología, *K* es el capital social, y *L* es la cantidad de trabajo. Capital y trabajo puede desglosarse entre los distintos tipos o calidades como en Jorgenson y Griliches (1967).

Como es bien sabido, la tasa de crecimiento de la producción puede ser separada en componentes asociados con la acumulación de factores y el progreso tecnológico. La diferenciación de la ecuación (1) con respecto a los rendimientos de tiempo, después de dividir por Y y reordenar de los términos,

2. $\frac{\dot{Y}}{Y} = g + \left(\frac{F_k K}{Y}\right)\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) + \left(\frac{F_L L}{Y}\right)\left(\frac{\dot{L}}{L}\right)$

Donde F_k, F_l son los factores (sociales) los productos marginales y g, el crecimiento debido a los cambios tecnológicos, que viene dado por:

3. $g \equiv \left(\frac{F_A A}{Y}\right)\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)$

Si el factor de la tecnología aparece en la forma neutral de Hicks, de modo que $F(A,K,L) = A * \tilde{F}(K,L), entonces\ g\ =\ \dot{A}/A$.

La tasa de progreso tecnológico, g, se puede calcular de la ecuación (2), como un residual,

4. $g = \frac{\dot{Y}}{Y} - \left(\frac{F_k K}{Y}\right) * \left(\frac{\dot{K}}{K}\right) - \left(\frac{F_L L}{Y}\right) * \left(\frac{\dot{L}}{L}\right)$

Sin embargo, la ecuación (4) no es práctica, porque requiere el conocimiento de los productos sociales marginales, $F_k\ y\ F_L$. Por lo tanto, en la práctica, los cálculos suelen asumir que los productos marginales sociales se pueden medir por la observación de los precios de los factores.

Si los factores pagan sus productos marginales sociales, de modo que $F_K = R$ (el precio de alquiler del capital) y $F_L\ =\ \omega$ (la tasa de salario), entonces, las estimaciones estándar primal de la tasa de progreso tecnológico sigue la ecuación (4),

5. $\hat{g} = \frac{\dot{Y}}{Y} - s_K\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) - s_L\left(\frac{\dot{L}}{L}\right)$

Donde $s_K \equiv RK/Y\ y\ \ s_L \equiv \omega L/Y$ son las proporciones respectivas que cada factor aporta en el producto total. El valor de $\hat{g}$ a menudo se describe como una estimación del crecimiento de la productividad total de factores (PTF) o el residuo de Solow.

La condición s_K + s_L = 1 ó, $Y = RK + \omega$L, se debe mantener si todos los ingresos relacionados con el producto interno bruto, Y, se atribuye a uno de los factores, restringido aquí al trabajo y capital. En un contexto internacional, algunos ingresos netos de los factores, pueden beneficiar a factores extranjeros, y $RK + \omega$L incluiría este ingreso neto de los factores. La ecuación de la producción, Y, con los ingresos totales es coherente con la igualdad entre los precios de los factores y productos marginales si la función de producción, F (.), presenta retornos constantes a escala en $K\ y\ L$, de modo que $Y = F_k K + F_L L$ se mantiene. Utilizando s_K + s_L = 1, la ecuación (5) también puede escribirse en forma intensiva como:

6. $\hat{g} = \frac{\dot{y}}{y} - s_K\left(\frac{\dot{k}}{k}\right)$

Donde $y \equiv \frac{Y}{L}$ y $k \equiv \frac{K}{L}$, son las cantidades por unidad de trabajo.

Jorgenson y Griliches (1967) y Jorgenson, Gollop y Fraumeni (1987) demuestran la importancia de desagregar las aportaciones por categorías de calidad. Por ejemplo, L se puede ver como un vector que especifica las cantidades de trabajo de diversa índole, clasificados por nivel educativo, edad, sexo, y así consecutivamente. En una versión extendida de la ecuación (5), la tasa de crecimiento de la cantidad de mano de obra de tipo *j*, $\dot{L}_j/L_j$, se multiplica por la asociada proporción del ingreso, s_{L_j}. Como un ejemplo, si el promedio de nivel educacional de la población, está aumentando con el tiempo, entonces este procedimiento asigna una porción del crecimiento económico para el aumento de L_j, en categorías, por ejemplo los trabajadores con educación universitaria, que reciben salarios relativamente altos ω_j. Una falla a permitir en este sentido, para la mejora de la calidad del trabajo tiende a sobrestimar el residuo de Solow, *g*, en la ecuación (5).

El tratamiento de la calidad del capital es análogo. Un elemento importante en este caso se refiere a la distinción entre el capital de corta vida y e larga vida. Para determinada tasa de rendimiento requerida sobre el capital, el precio del alquiler R_j, es más alto si la tasa de depreciación es mayor (debido al deterioro físico más rápido o la obsolescencia económica). Por lo tanto un cambio de capital de larga duración (por ejemplo edificios) al capital de corta duración (por ejemplo maquinaria) explicaría una parte del crecimiento económico. Una falla para este aumento en el capital tiende a sobre estimar el residuo de Solow en la ecuación (5).

La Tabla 1 resume las estimaciones de las tasas de crecimiento de PTF para los distintos países y períodos de tiempo, utilizando este enfoque. Para los principales países de la OCDE, las estimaciones de PTF para 1947-1973 variaron de 1,4% anual para los Estados Unidos hasta el 4,0% de Japón. Muestran las estimaciones para 1960-1973, ser bastante similares. Sin embargo, los valores indicados para 1973-1989 reflejan la conocida "ralentización de la productividad" y son mucho más pequeños que los periodos pre-1973. El rango de estimaciones para los principales países de la OCDE en el periodo post-1973 es muy estrecho, pasando de 0,3% para Canadá y Estados Unidos hasta el 1,4% para Francia.

Las estimaciones correspondientes a siete países de América Latina desde 1940 hasta 1990 oscilan entre el -0,6% al año para el Perú hasta el 1,4% para Chile[28]. Para cuatro países de Asia Oriental desde 1966 hasta 1990 o 1991, las estimaciones variaron entre el 0,2% para Singapur hasta el 2,6% para Taiwán. Debido al crecimiento estelar de estos países de Asia, muchos economistas se sorprendieron por las bajas estimaciones de PTF para estos casos.

Algunos de estos resultados se examinan en la sección posterior.

Un punto importante sobre las estimaciones de la PTF que se muestran en el cuadro 1, representan una aplicación directa de la ecuación (5), ampliado para incluir varios tipos de capital y de trabajo, y no implica estimación econométrica, la estimación residual de Solow, $\hat{g}$,

[28] La estimación de PTF tasas de crecimiento en América Latina son particularmente bajos, por lo general negativas, desde 1980 hasta 1990. los valores negativos son difíciles de entender como una regresión técnica en el sentido literal de olvido de la tecnología, sino que puede representar la disminución de eficiencia de la organización del mercado debido a la política u otros cambios.

se calcula en cada fecha mediante el uso de series cronológicas de datos sobre $\left(\frac{\dot{Y}}{Y}\right), \left(\frac{\dot{K}}{K}\right), \left(\frac{\dot{L}}{L}\right)$, s_K y s_L.[29] En la práctica, los investigadores reportan un promedio de los valores $\hat{g}$ calculados para un período de tiempo designado.

Un enfoque alternativo sería una regresión de la tasa de crecimiento de la producción, $\frac{\dot{Y}}{Y}$, en las tasas de crecimiento de los insumos, $\left(\frac{\dot{K}}{K}\right), \left(\frac{\dot{L}}{L}\right)$, en la forma de la ecuación (2). El intercepto entonces, mide $\hat{g}$, y los coeficientes de las tasas del factor de crecimiento mide$\left(\frac{F_k K}{Y}\right) y \left(\frac{F_L L}{Y}\right)$, respectivamente. La principal ventaja de este enfoque es que se prescinde del supuesto de que los productos de factor marginal social coincidirá con el precio de los factores observables, es decir, $F_K = R$ y $F_L = \omega$.

Las desventajas del método de regresión son varias:

Las variables $\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) y \left(\frac{\dot{L}}{L}\right)$ por lo general no pueden considerarse como un factor exógeno con respecto a las variaciones en g (en particular el factor de las tasas de crecimiento, podría recibir crédito por las variaciones de correlación en el cambios tecnológicos no observables).

Si $\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) y \left(\frac{\dot{L}}{L}\right)$ se miden con error, entonces las estimaciones estándar de los coeficientes de estas variables ofrecerán estimaciones inconsistentes de $\left(\frac{F_k K}{Y}\right) y \left(\frac{F_L L}{Y}\right)$, respectivamente. Este problema es probable que sea especialmente grave para la tasa de crecimiento de entrada de capital, donde el stock de capital medido es poco probable que corresponda bien con los stocks que actualmente se utilizan en la producción. Este problema a menudo conduce a estimaciones bajas de la contribución de la acumulación de capital para el crecimiento económico cuando los datos de alta frecuencia se emplean.

2. Estimación Dual para la contabilización del Crecimiento

Hsieh (1998) recientemente avanzo un doble enfoque para la contabilidad del crecimiento, mediante el cual el residuo de Solow es calculado a partir de las tasas de crecimiento de los precios de los factores, en lugar de la cantidad del factor. Esta idea se remonta al menos a Jorgenson y Griliches (1967). El enfoque dual puede deducirse fácilmente de la igualdad entre la producción y el factor de los ingresos:

7. $Y = RK + \omega \mathrm{L}$

[29] Con datos discretos, las tasas de crecimiento se miden, a raíz de Thörnqvist (1936), como registro de las diferencias entre los niveles en las fechas $t + 1$ y t, y la participación de los factores son medias aritméticas para fechas $t + 1$ y t. Diewert (1976) muestra que el procedimiento Thörnqvist es exacto si la función de producción toma la forma trans-log, que fue presentado por Christensen, Jorgenson y Lau (1971).

Diferenciación de ambos lados de la ecuación (7) con respecto al tiempo lleva, después de dividir por Y y reordenando los términos, a:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = s_K\left(\frac{\dot{R}}{R} + \frac{\dot{K}}{K}\right) + s_L\left(\frac{\dot{\omega}}{\omega} + \frac{\dot{L}}{L}\right)$$

Donde s_K y s_L son de nuevo la proporción del factor en el ingreso. Si los términos que envuelven las tasas de crecimiento de las cantidades de los factores, se colocan en el lado izquierdo de la ecuación, la tasa estimada de crecimiento PTF es igual a:

8. $\hat{g} = \frac{\dot{Y}}{Y} - s_K\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) - s_L\left(\frac{\dot{L}}{L}\right) = s_K\left(\frac{\dot{R}}{R}\right) + s_L\left(\frac{\dot{\omega}}{\omega}\right)$

Por lo tanto, la estimación original de la tasa de crecimiento de PTF en el lado izquierdo de la ecuación (basado en el filtrado del $\frac{\dot{Y}}{Y}$ para el crecimiento de su proporción ponderada en cantidades del factor) es igual al crecimiento de su proporcion ponderada de los precios de los factores de la derecha de la ecuación. Lo último, la estimación dual de la tasa de crecimiento de la PTF utiliza el mismo factor de proporción de ingresos, s_K y s_L, como estimación original, pero considera cambios en los precios de los factores, en lugar de las cantidades[30].

La intuición para el cálculo dual en el lado derecho de la ecuación (8) es que el aumento de precios de los factores (para el factor de calidad dado) sólo puede mantenerse si la producción es cada vez mayor para insumos dados. Por lo tanto, la media ponderada del crecimiento del precio de los factores mide el grado de crecimiento de la PTF.

Es importante reconocer que la derivación de la ecuación (8) utiliza sólo la condición $Y = RK + \omega L$. No se hicieron suposiciones sobre las relaciones de precio de los factores sociales marginales o sobre la forma de la función de producción. Si $Y = RK + \omega\mathrm{L}$ se mantiene, a continuación, las estimaciones primal y dual del crecimiento de la PTF inevitablemente coinciden. En algunos casos (sobre todo cuando los precios de los factores se desvían de los productos marginales sociales) el valor estimado, $\hat{g}$ de la ecuación (8) se

[30] Esta derivación me la sugiere Susanto Basu. La estimación fue el usada anteriormente por Jorgenson y Griliches (1967, pp. 251-253), que también extendieron la ecuación (8) para permitir cambios en el tiempo en los precios relativos de múltiples productos. En este caso, $\frac{\dot{Y}}{Y}$ se convierte en una proporción media ponderada de las tasas de crecimiento de la producción, y el lado derecho de la expresión doble de contabilidad, resta de la proporción media ponderada de las tasas de crecimiento de los precios del producto. Este último término es igual a cero en el contexto presente (con un precio fijo respecto de una sola forma de producto).

apartaría de el verdadero valor, g. Sin embargo, el error, $\hat{g} - g$, desde el enfoque dual será el mismo que el del enfoque primal[31].

Hsieh (1998) utiliza el enfoque dual (el lado derecho de la ecuación (8)) para rehacer las estimaciones de Young (1995) del crecimiento de PTF para los países de Asia oriental que figuran en la tabla 1. El procedimiento de Hsieh utiliza una matriz de categorías de calidad para L y K.

Los resultados, que se muestra junto con las estimación primal que son similares a los hallazgos de Young, se encuentran en el cuadro 2. La conclusión más llamativa, acentuada por Hsieh, es que la estimación para Singapur cambia respecto a la estimación primal de alrededor de cero para la estimación Dual del 2,2% al año. La estimación de Taiwán también se revisó de forma sustancial, pero aquellos para Hong Kong y el sur de Corea cambia un poco. (Hsieh también observa que las estimaciones dual para los Estados Unidos son similares las primal).

Dada la discusión anterior, debe que ser que las discrepancias entre la estimación primal y dual de tasas de crecimiento de PTF reflejan las salidas de la condición $Y = RK + \omega L$. El carácter general de esta salida de Singapur es sugerido por la discusión de Hsieh. Las cuentas nacionales de Singapur muestran notable crecimiento de K con el tiempo y (dado el comportamiento de $Y\ y\ \omega L$) en consecuencia una disminución aguda en el precio de renta, R. Sin embargo, las estimaciones directas de los retornos sobre el capital en Singapur (Basado en los retornos observados en los mercados financieros) son relativamente estables en el tiempo. Si la senda de R implicada por las tasas observadas de los rendimientos es precisa (y la información sobre $Y\ y\ \omega L$ se considera también razonable), entonces la senda de K demuestra mucho más moderado crecimiento que el que indican los datos de las cuentas nacionales. Hsieh afirma que las estadísticas oficiales tienen, en efecto, considerablemente exagerado crecimiento del stock

[31] Esta equivalencia generalmente no se mantiene si la proporción de los ingresos factoriales, s_K y s_L, se reemplazan por el peso del producto marginal, $\left(\frac{F_k K}{Y}\right)$ y $\left(\frac{F_L L}{Y}\right)$. Si estos pesos del producto marginal se utilizan, entonces, las estimaciones primal ğ calculada a partir de la ecuación (4) mide correctamente la tasa de crecimiento de PTF, la estimación correspondiente es:

$$\left(\frac{F_k K}{Y}\right) * \left(\frac{\dot{R}}{R}\right) + \left(\frac{F_L L}{Y}\right) * \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega}\right)$$

Es posible demostrar que esta estimación es igual a la original, si los porcentajes de los precios del producto marginal social (R/F_k y ω/F_L) no varían con el tiempo. (No es necesario que estas proporciones igualen a la unidad). Sin embargo, el significado práctico de estos resultados no está clara, $F_k\ y\ F_L$ por lo general no sería observable.

de capital y, por tanto, que la reducción de las estimaciones de crecimiento del capital implica por los valores observados de R, que son razonables.

La estimación dual de Hsieh de crecimiento de PTF de Singapur (2,2% por año) es un promedio ponderado del crecimiento robusto de los salarios (para una calidad de trabajo dada) y una pequeña cantidad de crecimiento de los precios de renta. Sin embargo, Hsieh podría muy bien haber calculado una estimación primal del crecimiento de PTF en la serie de tiempo para *K*, que está implícito por lo observado serie de tiempo exacta para R. (con múltiples tipos de capital, K_j, este cálculo se aplicaría a cada tipo, teniendo en cuenta los valores estimados de los precios de renta, R_j). Desde $Y = RK + \omega L$ establecida en este caso por construcción, la estimación primal coincidiría con la estimación dual. Por lo tanto, no es realmente necesaria para hacer la estimación dual.

3. Problemas con la contabilización del crecimiento

Una hipótesis clave en los ejercicios de contabilidad del crecimiento es que el precio del factor coincide con los productos marginales sociales. Si esta suposición es violada, entonces el valor estimado de $\hat{g}$ calculado a partir de la ecuación (5) (o la estimación correspondiente dual de la ecuación (8)) se desvía de la verdadera contribución, g, del cambio tecnológico al crecimiento económico. Las siguientes secciones ilustran estos problemas para los modelos con rendimientos crecientes y los desbordamientos de conocimiento, para ambientes con varias clases de impuestos, y para entornos con diferentes tipos de factores.

3.1- Modelo de retornos crecientes con desbordes

Muchos autores como Griliches (1979), Romer (1986) un Lucas (1988), han construido modelos de crecimiento económico con rendimientos crecientes y los desbordamientos. El análisis de Romer es una generalización de Arrow (1962), modelo de aprender haciendo, en la que la eficiencia de la producción aumenta con la experiencia acumulada. En la versión simple del modelo de Romer, el producto Y_i, de la firma *i* depende no sólo en las entradas privadas estándar,K_i y L_i, pero también en el ancho del stock de capital de la economía, K. La idea es que los productores aprenden mediante la inversión (un forma específica de "hacer") para producir más eficientemente. Por otra parte, este conocimiento se desborda de inmediato de una empresa a las demás, así la productividad de cada empresa depende de la suma de aprendizaje, como se refleja en el capital social global.

Estas premisas se pueden representar con una función de producción Cobb-Douglas como

9. $Y_i = AK_i^{\alpha} K^{\beta} \, L_i^{1-\alpha}$

Donde $0<\alpha<1$ y $\beta \geq 0$. Para un K dado, esta función de producción muestra retornos constantes a escala en las entradas privadas, K_i y L_i. Si $\beta \geq 0$, entonces el efecto desborde está presente.

Griliches (1979) en su versión de la función de producción en la ecuación (9), K_i, representa el capital de conocimientos específicos de la firma *i*, mientras que K (modelado como la suma de las K_i) es el nivel agregado del conocimiento en una industria. Por lo tanto, los efectos de desbordamiento de nuevo representan la difusión del conocimiento entre las empresas. En la versión de Lucas (1988), K_i, es el empleo de la firma, de capital humano, y K es la suma (o posiblemente promedio) del nivel de capital humano en un sector o país. En este caso los efectos secundarios implican beneficios de la interacción con la gente inteligente.

Volviendo a la interpretación de Romer de la ecuación (9), cada empresa se comporta de forma competitiva, tomando como dado el precio de los factores de la economía, R y ω, y el stock de capital agregado, K. Por lo tanto, los productos marginales privados se igualan a los precios de los factores, con ello la obtención

10. $R_i = \alpha Y_i / K_i$ y $\omega = (1-\alpha) Y_i / L_i$

La proporción del factor de ingresos, es por lo tanto dada, como usual por:

11. $S_K = \alpha \;\; y \;\; S_L = 1 - \alpha$

En equilibrio cada firma adopta la misma relación capital trabajo, K_i, pero la escala de cada firma es indeterminada. La función de producción en la ecuación (9) puede ser reescrita como:

$$Y_i = AK_i^{\alpha} k^{\beta} \; L_i L^{\beta}$$

Donde $k \equiv K/L$. El equilibrio se condiciona a través de $k_1 = k$, esto implica

$$Y_i = Ak^{\alpha+\beta} \; L_i L^{\beta}$$

La cual puede ser agregada entre las firmas para obtener

$$Y = Ak^{\alpha+\beta} \; L^{1+\beta}$$

Finalmente, la condición $k \equiv K/L$, lleva a la función de producción de toda la economía

12. $Y = Ak^{\alpha+\beta} \; L^{1-\alpha}$

Esta expresión relaciona el producto agregado Y, con las entradas agregadas, K y L. si $\beta>0$, entonces los retornos crecientes a escala aplican a toda la economía.

La parte derecha de la ecuación (12) muestra que la manera correcta de hacer la contabilidad del crecimiento con datos agregados es efectuando

13. $\hat{g} = \frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{Y}}{Y} - (\alpha + \beta)\ \left(\frac{\dot{K}}{K}\right) - (1 - \alpha)\left(\frac{\dot{L}}{L}\right)$

Por lo tanto $s_L = 1 - \alpha$ es el peso correcto para $\left(\frac{\dot{L}}{L}\right)$ pero el coeficiente $s_K = \alpha$ sobrestima por β>0 la contribución e $\frac{\dot{K}}{K}$. Esta sobrestimación haciende porque (con los desbordes de concomimiento dada la inversión) el producto marginal social $(\alpha + \beta)(Y/K)$, excede el producto marginal privado, $\alpha\left(\frac{Y}{K}\right)$. Este producto marginal privado es igual al precio del factor, *R*. Nótese también de que los pesos en las tasas de crecimiento del factor en la ecuación (13) adiciona a $1 + \beta$, el cual excede 1 si β>0, debido a los rendimientos crecientes a escala subyacente. Los rendimientos crecientes surgen porque las ideas acerca de cómo producir más eficientemente son fundamentalmente no competitivas (desbordan libre y de forma instantánea a través de las empresas).

La interpretación de K (factor que recibe un peso por encima de su participación en el ingreso en la ecuación de contabilidad del crecimiento 13) depende del modelo subyacente. Griliches (1979) identifica K con actividades creativas y de conocimiento, tales como I + D. Romer (1986) hace hincapié en capital físico en sí. Lucas (1988) hace hincapié en el capital humano en la forma de educación. Esto, por supuesto, también puede tener efectos secundarios que son negativos, como la congestión del tráfico y daños al medio ambiente.

La aplicación de resultados de la ecuación (13) es difícil porque los pesos apropiados sobre las tasas de crecimiento del factor no pueden deducirse de la proporción sobre el ingreso, en concreto, no existen estimaciones directas disponibles para el coeficiente β. Una vez calculado el residuo de Solow estándar dentro de este modelo, entonces se obtiene

14. $\tilde{g} = \frac{\dot{A}}{A} + \beta\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) = \frac{\dot{Y}}{Y} - \alpha\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) - (1 - \alpha)\left(\frac{\dot{L}}{L}\right)$

Por lo tanto, el cálculo estándar incluye el efecto del crecimiento de los desbordamientos y rendimientos crecientes ($\beta\left(\frac{\dot{K}}{K}\right)$), junto con la tasa de progreso tecnológico exógeno, $\frac{\dot{A}}{A}$ en el residuo de Solow.

Parece que la separación de los efectos de desbordamientos y retornos crecientes del progreso tecnológico exógeno requiere un enfoque de regresión. En este enfoque, el habitual residuo $\tilde{g}$ de Solow, calculado a partir de la ecuación (14) podría regresiones en el factor de la tasa de crecimiento $\frac{\dot{K}}{K}$, que fue pensado para llevar los efectos de desbordamiento. Este método, sin embargo, puede encontrar los problemas econométricos usuales con respecto a la simultaneidad.

3.2 - Los impuestos

En la mayoría de los casos, los impuestos no perturban los cálculos de PTF. Supongamos, por ejemplo, que a las empresas se les gravan los ingresos netos; que salarios y pagos de rentas son gastos deducibles de impuestos para las empresas y los salarios y los ingresos por renta tributarán en el nivel domestico. En este caso, las empresas competitivas igualan el producto marginal del trabajo, F_L, con el salario, ɯ, y el producto marginal del capital, F_k, al precio de renta *R*, la condición $Y = RK + \text{ɯL}$ también se mantiene (con un ingreso neto de la empresa y los impuestos igual a cero en equilibrio). Por lo tanto, la fórmula para $\hat{g}$ en la ecuación (5) sigue siendo válida.

Supongamos, en cambio, que el capital que adquiere la empresas a través de financiación de capital, que los salarios y la depreciación, δK, son deducibles de impuestos para las empresas, y que r es la tasa requerida (en cifras brutas de impuestos personal) de rendimiento sobre el capital. Una empresa competitiva todavía igualara el producto marginal del trabajo a la tasa salarial, ɯ. La empresa también iguala el producto marginal neto del capital después de impuestos $(1 - \tau)\ (F_k - \delta)$ a r, donde τ es la tasa marginal del impuesto sobre las ganancias de la empresa. Por lo tanto, el producto marginal del capital es igual a:

$$F_k = \frac{r}{1-\tau} + \delta$$

La formula de contabilización del crecimiento en la ecuación (4) implica, después de substitución por $F_k\ y\ F_L$:

$$15. \quad g = \frac{\dot{Y}}{Y} - \left[\left(\frac{r}{1-\tau}\right)\left(\frac{K}{Y}\right) + \left(\frac{\delta K}{Y}\right)\right]\frac{\dot{K}}{K} - s_L\left(\frac{\dot{L}}{L}\right)$$

Si los impuestos sobre las ganancias de la empresa son proporcionales entonces, así como la tasa marginal de impuestos, $rK/\ (1-\tau)$ es igual en equilibrio a las ganancias de la empresa (depreciación neta sobre impuestos brutos sobre las ganancias). Por lo tanto, el término entre corchetes en la ecuación (15) es igual a s_K, la proporción del ingreso sobre el capital, si los ingresos de capital se miden por los ingresos de las empresas (impuestos sobre las ganancias brutas), más la depreciación. La fórmula habitual de la tasa de crecimiento de PTF en la ecuación (5) sigue siendo válida.

De un impuesto sobre la producción o las ventas, las empresas competitivas satisfacen $F_L = \frac{\text{ɯ}}{1-\tau}$ y $F_k = \frac{R}{1-\tau}$ donde *R* es de nuevo el precio del alquiler de una capital y τ es la tasa marginal de impuestos sobre la producción. La fórmula de la contabilidad del crecimiento en la ecuación (4) implica, por tanto, después de la sustitución de F_L y F_k,

16. $g = \frac{\dot{Y}}{Y} - \left[\left(\frac{R}{1-\tau}\right)\left(\frac{K}{Y}\right)\right]\frac{\dot{K}}{K} - \left[\frac{\omega}{1-\tau}\left(\frac{L}{L}\right)\right]\left(\frac{\dot{L}}{L}\right)$

Si el impuesto sobre la producción son proporcionales, entonces los tipos impositivos marginales y medios coinciden, los ingresos totales conseguidos τY. Producción, Y, es igual a ingresos de los factores más el importe percibido por los impuestos indirectos:

$$Y = RK + \omega L + \tau Y$$

De modo que el ingreso total de los factores $RK + \omega L$ es igual a $(1-\tau)Y$. Por lo tanto, los términos entre corchetes en el lado derecho de la ecuación (16) iguala s_K y s_L, respectivamente. (Tenga en cuenta que estas acciones se expresan en relación al factor de ingresos más que al producto interno bruto) Se sigue que la fórmula habitual de las tasa de crecimiento de PTF en la ecuación (5) aun se mantiene[32].

3.3 - Múltiples tipos de factores

Supongamos ahora que la función de producción es

17. $Y = F(A, K_1, K_2, L_1, L_2)$

Una interpretación de la igualdad (17) es que $K_1\ y\ K_2$ representan los distintos tipos o calidades de bienes de capital, mientras que $L_1\ y\ L_2$ representan los distintos tipos de calidades de mano de obra. Entonces, el ejercicio habitual de contabilidad de crecimiento pasa por la manera de Jorgenson y Griliches (1967), si cada tipo de factor es ponderado por su participación en el ingreso. Esto es $\frac{\dot{K}_1}{K_1}$ se pondera por $\frac{R_1 K_1}{Y}$, y así consecutivamente. La generación del residuo de Solow habitual por este procedimiento mide con precisión la contribución del progreso tecnológico al crecimiento, *g*, siempre y cuando todos los factores pagan sus productos marginales sociales.

Se plantean problemas si las categorías del factor no pueden ser distinguidos en los datos, por ejemplo, si $\frac{\dot{K}_1}{K_1}$ y $\frac{\dot{K}_2}{K_2}$ son cada una asociada con el capital social total $\frac{R_1 K_1 + R_2 K_2}{Y}$. Una fuente de este tipo de problemas es que los nuevos y, que suelen ser, mejores bienes de capital pueden

[32] El análisis es más complicado si las empresas están sujetas a los esquemas de impuestos no proporcionales (con respecto a la producción o las ganancias). si las tasas marginales del impuesto de las empresas están aumentando, hay efectivamente una penalización a las grandes empresas. por lo tanto, en la configuración actual con rendimientos constantes a escala, las empresas estarán en equilibrio de tamaño infinitesimal. Esquemas de impuestos no proporcionales, puede ser admitido en los modelos en que se extienden los controles u otras consideraciones eventualmente crean rendimientos decrecientes al tamaño de la empresa.

ser agregados con los tipos más antiguos de capital. Del mismo modo, diversas categorías de trabajadores podrían estar agregados en los datos.

Otra interpretación de la ecuación (17) es que $L_1 \; y \; K_1$ representan factores empleados en el sector 1 (ejemplo manufactura urbana), mientras que $L_2 \; y \; K_2$ representan el empleo en el sector 2 (por ejemplo la agricultura). Cambios pueden ocurrir con el tiempo en la composición sectorial, por ejemplo, como pasar de la agricultura a la industria. Estos cambios no causan problemas a las tasas de crecimiento de contabilidad de las cantidades de factores (distinguido por su sector de ubicación) se ponderan por sectores, si el crecimiento de estos agregados se pondera por las proporciones de los ingresos globales de capital o mano de obra, respectivamente.

Para ilustrar, suponga que el índice de crecimiento de la PTF está correctamente estimado como:

18. $$\tilde{g} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \left[\left(\frac{R_1K_1+R_2K_2}{Y}\right)\left(\frac{\dot{K}}{K}\right)\right] - \left[\frac{\mathrm{w}_1\mathrm{L}_1+\mathrm{w}_2\mathrm{L}_2}{\mathrm{Y}}\left(\frac{\dot{\mathrm{L}}}{L}\right)\right]$$

Donde $K = K_1 + K_2$ y $L = L_1 + L_2$. Esta estimación se compara con la formula apropiada,

19. $$\hat{g} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \left(\frac{R_1K_1}{Y}\right)\left(\frac{\dot{K}_1}{K_1}\right) - \left(\frac{R_2K_2}{Y}\right)\left(\frac{\dot{K}_2}{K_2}\right) - \frac{\mathrm{w}_1\mathrm{L}_1}{\mathrm{Y}}\left(\frac{\dot{L}_1}{\mathrm{L}_1}\right) - \frac{\mathrm{w}_2\mathrm{L}_2}{\mathrm{Y}}\left(\frac{\dot{L}_2}{\mathrm{L}_2}\right)$$

Ecuación (19) correctamente estima la contribución al crecimiento del progreso tecnológico exógeno (Que $\hat{g} = g$) si todos los factores pagan sus productos marginales sociales.

La expresión para $\hat{g}$ en la ecuación (18) se puede mostrar a partir de la manipulación algebraica de para relacionar con el verdadero crecimiento de la PTF, como estimación precisa por la ecuación (19), de conformidad con:

20. $$\tilde{g} - \hat{g} = \left(\frac{K_1}{K}\right)\left(\frac{K_2}{K}\right)\frac{K}{Y}(R_1 - R_2)\left(\frac{\dot{K}_1}{K_1} - \frac{\dot{K}_2}{K_2}\right) + \left(\frac{\mathrm{L}_1}{\mathrm{L}}\right)\left(\frac{\mathrm{L}_2}{\mathrm{L}}\right)\left(\frac{L}{Y}\right)(\mathrm{w}_1 - \mathrm{w}_2)\left(\frac{\dot{L}_1}{\mathrm{L}_1} - \frac{\dot{L}_2}{\mathrm{L}_2}\right)$$

Por lo Tanto si $R_1 \neq R_2$ y $\frac{\dot{K}_1}{K_1} \neq \frac{\dot{K}_2}{K_2}$ o si $\mathrm{w}_1 \neq \mathrm{w}_2$ y $\frac{\dot{L}_1}{\mathrm{L}_1} \neq \frac{\dot{L}_2}{\mathrm{L}_2}$, entonces $\tilde{g} \neq \hat{g}$.
Específicamente, si $R_1 > R_2$, entonces $\frac{\dot{K}_1}{K_1} > \frac{\dot{K}_2}{K_2}$ nos conduce a que $\tilde{g} > \hat{g}$ y así mismo para el trabajo.

Con la interpretación de los tipos de trabajo como las categorías de calidad, el resultado es que la medida o estimación de la PTF este sobrestimada con respecto a la verdadera PTF si la composición de factores está cambiando con el tiempo hacia tipos de mayor calidad (y estos cambios no se permiten en la estimación). Este problema es el que destacó y que fue resuelto dadas las limitaciones de datos por Jorgenson y Griliches (1967).

Una interpretación de los resultados sectoriales implica la inmigración de mano de obra de las zonas rurales a las urbanas. El salario urbano, ω_1, podrá ser superior al salario rural ω_2, por diversas razones, incluida la legislación sobre salario mínimo y los requisitos de afiliación a un sindicato para los empleos de la ciudad. En este caso un cambio de mano de obra procedente de las zonas rurales al sector urbano representa un aumento de la productividad en toda la economía. El termino que incluye el trabajo en la ecuación (20) refleja el crecimiento económico generado por este cambio en la composición sectorial del trabajo, para una tasa de crecimiento dada de la mano de obra total de $\frac{\dot{L}}{L}$. Este tipo de efecto de crecimiento, aplicado a los movimientos de la mano de obra de la agricultura de baja productividad a la industria de alta productividad, fue examinado por Kuznets (1961, p. 61), que deriva una expresión análoga a la ecuación (20).

Desde la perspectiva de la contabilidad del crecimiento, los términos que implican los cambios sectoriales deben aparecer en alguna parte de los cálculos. Si los cambios en las cantidades de trabajo en cada sector son ponderados por las cuotas de ingreso de mano de obra para cada tipo de trabajo, a continuación, la contribución al crecimiento de los cambios sectoriales aparece en la parte correspondiente a variaciones en las cantidades factor en la ecuación (19). Si la ponderación se realiza en cambio, en la forma de la ecuación (18), entonces la contribución aparece en el estimado de crecimiento de PTF.

4. Crecimiento de la PTF y la Investigación y desarrollo.

La contabilidad del crecimiento a menudo se considera un primer paso en la explicación de la tasa de crecimiento de PTF, g, según las estimaciones de la ecuación (5). Por ejemplo, el programa de investigación resumidos por Griliches (1973) se centra en el gasto en I + D como factor determinante de la tasa de crecimiento PTF[33]. Las recientes teorías del "crecimiento endógeno" tienen implicaciones para el modelado de la relación entre cambio tecnológico y desembolsos en I + D. Las secciones siguientes exploran estas relaciones para los modelos que implican un aumento del número de tipos de productos y mejoras en la calidad de los productos existentes.

4.1 - Modelos Variados

El marco de variedades de producto se aplicó a los cambios tecnológicos por Romer (1990) y Grossman y Helpman (1991, cap. 3). En una formulación sencilla, el producto, Y es dado por la función de producción de Spence (1976) / Dixit y Stiglitz (1977) como:

---

[33] Contribuyentes anteriores a esta literatura incluyen Terleckyj (1958), Minasian (1962), Griliches (1964), y Mansfields (1965)

21. $Y = AL^{1-\alpha} \sum_{j=1}^{N} x_j^{\alpha}$

Donde A es el factor tecnológico exógeno, L es la entrada del trabajo, x_j la cantidad empleada de la entrada intermedia de tipo j^{th}. N Es el número de variedades de productos intermedios que son comúnmente conocidos y aplicados, y 0<α<1. En algunas versiones de este modelo, x_j es tratado por simplicidad como productos no durables. Sin embargo, la durabilidad de los intermediarios pueden ser admitiditos, en cuales casos x_j representa el flujo de servicios desde el tipo j de bienes de capital.

El flujo de producto, Y, puede ser consumido, utilizados como insumos intermedios para la producción (una base de uno por uno para cada tipo de entrada), o se destina a I + D. en particular, en este modelo mide la producción bruta, no sólo de los gastos efectuados con los intermedios, sino también los gastos de I + D. En la formulación considerada en Barro y Sala-i-Martin (1995, cap. 6), cada uno de los tipos de bienes no duraderos j tiene un precio (por el titular del monopolio de los derechos a la producción de productos intermedios del tipo j^{th}) en el nivel de monopolio, que resulta ser $\frac{1}{\alpha}$>1. En equilibrio, cada intermedio se emplea en el mismo nivel, x. Por lo tanto, la ecuación (21) se puede expresar como:

22. $Y_i = AL^{1-\alpha} N^{1-\alpha} X^{\alpha}$

Done $X = Nx$ es la cantidad total de bienes intermedios. Para el caso de bienes duraderos, X corresponde al flujo de servicios del stock de capital agregado.

El progreso tecnológico se produce a través del gasto en I +D en el tiempo. Por lo tanto, la variable N representa el estado actual de la tecnología determinada de manera endógena. En este modelo, la tecnología líder (es decir, la que emplean todas las N variedades que se han descubierto) es utilizado por todos los productores. Por lo tanto, esta especificación se ajusta mejor para las tecnologías de uso general (David (1991), y Trajtenberb Bresnahan (1995)), que tienen una amplia aplicación en la economía.

Los productores competitivos de la producción, Y, igualan el producto marginal del trabajo a la tasa de salario, de modo que

$$\omega = (1-\alpha)\left(\frac{Y}{L}\right)$$

Por lo tanto, la proporción de las rentas del trabajo, como de costumbre

23. $s_L = \frac{\omega L}{Y} = 1 - \alpha$

Productores competitivos también equiparan el producto marginal de cada insumo intermedio tipo al (monopolio) precio de intermedios, 1/α. Esta condición se puede expresar como

$$\frac{1}{\alpha} = \alpha\left(\frac{Y}{X}\right)$$

Por lo tanto la proporción de la renta gastada en los intermedios N es

24. $s_x = \left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{Y}{X}\right) = \alpha$

Para los bienes durables, la el flujo $\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{Y}{X}\right)$ correspondería a las rentas del monopolio cobrados por servicios de capital.

La fórmula de crecimiento de la producción, basado en la ecuación (22) es

25. $\dot{Y}/Y = \frac{\dot{A}}{A} + (1-\alpha)\left(\frac{\dot{N}}{N}\right) + S_L\left(\frac{\dot{L}}{L}\right) + S_x\left(\frac{\dot{X}}{X}\right)$

Donde s_L y s_x de la ecuación (23) y (24) fueron utilizados[34]. Por lo tanto, el enfoque habitual para el cálculo de los rendimientos de la tasa de crecimiento de PTF, en este modelo es

26. $\hat{g} = \dot{Y}/Y - s_L\left(\frac{\dot{L}}{L}\right) - s_x\left(\frac{\dot{X}}{X}\right) = \frac{\dot{A}}{A} + (1-\alpha)\left(\frac{\dot{N}}{N}\right)$

Por lo tanto, a pesar de la fijación monopólica de precios de los insumos intermedios, el residuo de Solow mide correctamente la suma de las contribuciones al crecimiento de la productividad de los cambios tecnológicos exógenos $\frac{\dot{A}}{A}$ y la expansión de las variedades endógenas, $\frac{\dot{N}}{N}$.

Nota de la ecuación (26) que la parte de crecimiento endógeno, del residuo de Solow refleja únicamente la fracción $1-\alpha$ de la tasa de crecimiento del número de variedades $\frac{\dot{N}}{N}$. La parte restante $\alpha\left(\frac{\dot{N}}{N}\right)$, es tomada como parte del termino de $S_x\left(\frac{\dot{X}}{X}\right)$, en el lado izquierdo de la ecuación (26). Por una cantidad fija x de intermedios de cada tipo, el descubrimiento de nuevos tipos de productos a la tasa $\frac{\dot{N}}{N}$ induce un incremento en el total de intermedios a la misma tasa. La contribución de esta expansión de intermedios, al crecimiento (que implica el coeficiente de α, la proporción de ingreso de los pagos a los intermediarios) lo atribuyen al crecimiento de los insumos de los factores, más que el progreso tecnológico subyacente. En efecto, parte del avance tecnológico de los descubrimientos de nuevos tipos de bienes intermedios se encarna en los intermedios que utilizan la nueva tecnología.

En el contexto actual, el coeficiente $1-\alpha$ que se multiplica $\frac{\dot{N}}{N}$ en el lado derecho de la ecuación (26) es la proporción del trabajo en el ingreso. De manera más general, dicho coeficiente

[34] Este enfoque trata a N como una variable continua. Probablemente lo mejor es pensar en N como una metáfora de la situación general de la tecnología, en lugar de, literalmente, el número de productos intermedios que se han descubierto.

representaría la proporción en los ingresos de los factores que no responden en cantidad a las mejoras tecnológicas.

En el modelo más simple,$\dot{N}$ es proporcional a la cantidad de la producción dedicada a I + D, $\dot{N} = \left(\frac{1}{\eta}\right)(I + D)$ donde η es un parámetro de costo que representa el monto de I+D, necesario para lograr un aumento de una unidad en N (en el marco actual, este costo de I + D de se supone que es constante) Por lo tanto, el crecimiento tasa de N está dado por

$$\frac{\dot{N}}{N} = (I + D)/(\eta N)$$

El termino ηN es el valor capitalizado de todos los desembolsos para I + D anteriores (de hecho, el número N multiplicado por el costo de reproducción, η, para cada invención. Por lo tanto, la tasa de crecimiento de PTF medida en la ecuación (26) satisface:

27. $\hat{g} = \frac{\acute{A}}{A} + (1 - \alpha)$(flujo actual de I + D) / (valor de mercado del pasado I+D)

En el modelo de variado, la cantidad elegida x es proporcional a L, de modo que el valor de $\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{L}}$ calculado a partir de la ecuación (22) es proporcional a N. Puesto que el denominador de la parte final en el lado derecho de la ecuación (27) es igual a ηN, este al final termina proporcional a la tasa de I + D para la producción por trabajador, $\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{L}}$. Este resultado es similar al utilizado por Griliches (1973) y Coe y Helpman (1995), entre otros, excepto que los gastos de I + D entran en el modelo variado en relación con la producción por trabajador, $\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{L}}$, antes que el nivel de producción , Y. La fuente de la diferencia es que el conocimiento de las variedades de productos, *N*, que es no competitivo en el marco de las variedades. Por esta razón, el modelo cuenta con un beneficio a escala de aumentos en *L* (en caso de I + D, Y y L crezcan todos en la misma proporción, entonces *g* incrementa).

La literatura empírica descrito por Griliches (1973) utiliza un enfoque de regresión para evaluar el efecto de una variable de I + D en la tasa de crecimiento de PTF. Por lo tanto, como en los enfoques de regresión para la contabilidad del crecimiento, el análisis puede ser confundido por los problemas de causalidad inversa. En este caso, la dificultad es que el gasto de I + D no respondería a los cambios exógenos en el crecimiento de la productividad (la variable $\frac{\acute{A}}{A}$ en la ecuación (27)) de modo que el coeficiente estimado de la variable de I + D se aproxima en parte por progreso exógenos tecnológico. Variables instrumentales satisfactorias para evitar este problema pueden no estar disponibles. Posibles instrumentos incluyen medidas de las políticas gubernamentales hacia la I + D, incluyendo subvenciones a investigaciones, las disposiciones legales, como el sistema de patentes, y el tratamiento fiscal de gastos en I+D.

Dentro de la teoría que subyace en la ecuación (27), podría ser posible extender el procedimiento habitual de contabilidad de crecimiento para evaluar la contribución de la I + D. Es decir, una modificación del residuo de Solow, podría calcularse que substrae de la tasa de crecimiento, las contribuciones del crecimiento de los insumos de los factores $s_L\left(\frac{\dot{L}}{L}\right)+s_x\left(\frac{\dot{X}}{X}\right)$, pero también el término $1-\alpha(\text{flujo actual de I + D}) / (\text{valor de mercado del pasado I + D})$. Sin embargo, el cómputo de este plazo implica el conocimiento no sólo si la participación del trabajo, y el flujo corriente o gasto de I + D, sino que, además, la medida de la masa acumulada (o valor capitalizado) del pasado desembolso en I + D.

También hay que recordar que el modelo subyacente contiene una serie de supuestos restrictivos. Primero, I + D aparece directamente en la medida de los gastos de la producción bruta. En segundo lugar, el cambio tecnológico, $\frac{\dot{N}}{N}$, se aplica de manera uniforme en toda la economía. Tercero, no se aplica olvido tecnológico.

4.2 - Modelos de escaleras de calidad

El otro modelo destacado de cambios tecnológicos en la literatura reciente de crecimiento endógeno es la formulación de escaleras de calidad de Aghion y Howitt (1992) y Grossman y Helpman (1991, cap. 4). En este marco, el progreso tecnológico consiste en la mejora de la calidad de los insumos intermedios (o equivalentemente, las reducciones en el costo de proporcionar los insumos de determinada calidad). El número de variedades de productos, se asume que son fijos en este contexto, aunque los cambios en este número podrían volver a ser admitidos.

Una simple especificación, explorada en Barro y Sala-i-Martin (1995, cap. 7) utiliza la función de producción

28. $Y = AL^{1-\alpha}\sum_{j=1}^{N}(q^{k_j}\chi_{jk_j})^{\alpha}$

Donde A es el nivel exógeno de la tecnología, L es la mano de obra 0<α<1, y N es el número fijo de las variedades de productos intermedios. El parámetro q es el espaciado proporcional entre los peldaños de una escalera de calidad determinada. El progreso tecnológico se produce a través de desembolsos en I + D que permiten los movimientos en la escalera de calidad, un paso a la vez. La variable k_j, es la posición más alta en la escalera de calidad que se logra actualmente en el sector j. La variable χ_{jk_j} es la cantidad empleada del tipo *j* de intermedios no duraderos.

El elemento clave del marco de escaleras de calidad, es que los insumos de diferentes grados de calidad de productos intermedios dentro de un determinado sector se modelan como sustitutos perfectos. Insumos clasificados más altos, son simplemente mejores que los de menor puntuación. Por esta razón, menor calidad de intermediarios de tipo *j* (en los peldaños k_j-1, k_j-2,...) son expulsados del mercado en equilibrio. Esta obsolescencia tecnológica (o la destrucción creativa) distingue el modelo de escaleras de calidad del marco variedades. En ese marco (explorado en la sección anterior) no se produjo la obsolescencia tecnológica, y nuevas variedades de productos elaborados trabajan al lado de los viejos para producir bienes. (En cierta medida, este resultado depende de la separabilidad aditiva de las cantidades χ_j en la ecuación (21)).

Unidades de χ_{jk_j} son de nuevo los precios en el nivel $1/\alpha$>1, de monopolio, en cada sector. Dada la forma en que se determinan las cantidades χ_{jk_j} (para igualar el producto marginal de cada intermedio al precio de monopolio), la función de producción en la ecuación (28) puede ser reescrita como

29. $Y = AL^{1-\alpha} X^{\alpha} Q^{1-\alpha}$

Donde $X \equiv \sum_{j=1}^{N} \chi_{jk_j}$ es el gasto total en productos intermedios y *Q* es un índice de calidad global, dada por

30. $Q \ \equiv \sum_{j=1}^{N} q^{K_j \alpha/(1-\alpha)}$

Ecuación (29) implica que el enfoque estándar de contabilidad del crecimiento seria en este modelo

31. $\hat{g} = \frac{\dot{Y}}{Y} - s_L \left(\frac{\dot{L}}{L}\right) - a_x \left(\frac{\dot{X}}{X}\right) = \frac{\dot{A}}{A} + (1-\alpha)\frac{\dot{Q}}{Q}$

Donde $s_L = \frac{\omega L}{Y}$ y $s_x = (1-\alpha)\left(\frac{X}{Y}\right)$. Por lo tanto, en este modelo, el residuo de Solow mide la suma del progreso tecnológico exógeno , $\frac{\dot{A}}{A}$, y la tasa de crecimiento de la calidad global, $\frac{\dot{Q}}{Q}$, ponderado por la participación del trabajo $1-\alpha$[35]. Este resultado es similar a la ecuación (26) a partir del modelo variado, salvo que la medida del cambio tecnológico es $\frac{\dot{Q}}{Q}$, en lugar de $\frac{\dot{N}}{N}$. de nuevo, una parte de la contribución del cambio tecnológico ($(\alpha)\frac{\dot{Q}}{Q}$) se manifiesta en el crecimiento de los insumos ($\frac{\dot{X}}{X}$), y sólo el resto aparece en el residuo de Solow.

[35] Este análisis trata *Q* como una variable continua. de hecho, *Q* se mueve discretamente en el tiempo correspondiente a los efectos de los cambios discretos en el K_j en la ecuación (30). La formulación continua es una razonable aproximación si el número de sectores es grande y los cambios estocásticos en los distintos K_j tienen una cantidad considerable de independencia.

Algunos nuevos resultados surgen de la relación de $\frac{\dot{Q}}{Q}$ a los gastos en I + D. En la versión del modelo de escalas de calidad explorado en Barro y Sala-i.Martin (1995, cap. 7), $\dot{Q}$ es proporcional al total de gasto en I + D. la tasa de crecimiento de *Q* se puede expresar como

32. $\frac{\dot{Q}}{Q} = c(\text{flujo actual de I + D}) \,/\, (\text{valor de mercado del pasado I + D})$

Donde 0<*c*<1 es una constante. En contraste con el modelo de variedades, la constante *c* es menor que uno, debido a la obsolescencia de los viejos tipos de productos intermedios en los sectores que experimentan mejoras en la calidad. La constante *c* es mayor cuanto mayor sea la relación de la productividad de la categoría inmediatamente inferior, que sólo se convirtió en obsoleto. Si esta proporción es mayor, entonces la destrucción creativa es creación que destrucción y, por tanto, la contribución del flujo de I + D con el índice de calidad global, Q, se atenúa en menor medida. En el modelo, el factor determinante de la relación de productividad es el parámetro *q*, el espacio proporcional entre los grados de calidad[36]. Un mayor valor de *q* implica un mayor valor de *c*.

El índice de calidad, Q, puede ser visto como una medida del stock de capital de I + D. Sin embargo, es incorrecto en este modelo, seguir la práctica común por la que se construye este stock. En el enfoque habitual de inventario perpetuo, el cambio en el stock de capital de I+D es igual al gasto actual en I+D (el equivalente a la inversión bruta) menos la depreciación acumulada en el actual stock de capital de I + D. El último término, a menudo modelado como una fracción constante del stock de capital existente, se cree que corresponde a la obsolescencia de las viejas tecnologías. En el marco de escaleras de calidad, el procedimiento correcto es descontar el actual gasto en I+D por el factor de *c* < 1 para permitir la obsolescencia contemporánea de insumos intermedios de menor. Entonces el gasto en I + D descuento entra uno a uno como el flujo de la inversión neta que los cambios de la I + D stock de capital (es decir, el índice de calidad, Q). la tasa de depreciación de estas poblaciones es cero, porque no olvido tecnológica se lleva a cabo en el modelo.

La fórmula de la contabilidad del crecimiento se puede escribir de las ecuación (31) y (32) Como

33. $\hat{g} = \frac{\dot{A}}{A} + c(1-\alpha)(\text{flujo actual de I + D}) \,/\, (\text{valor de mercado del pasado I + D})$

Este resultado es paralelo a la ecuación (27), excepto por la presencia del coeficiente *c*. por lo tanto, en el modelo de escalas de calidad, la contribución de la variable $(\text{flujo actual de I + D}) \,/\, (\text{valor de mercado del pasado I + D})$ para el crecimiento de PTF es menos que uno a uno, en parte debido a la multiplicación por la participación del trabajo , $1-\alpha$, y en parte por el coeficiente de obsolescencia, *c*. Dado que el coeficiente *c* no sería observable directamente,

[36] La relación es c=1- $q^{-\alpha/(1-\alpha)}$, donde *q*>1 es el espacio entre peldaños en la escalera de calidad.

un enfoque de no regresión para evaluar los efectos de crecimiento de la I + D no parecen ser posibles en el marco escaleras de calidad.

Como en el modelo de la variedad, el valor de mercado del pasado I + D es proporcional a la producción por trabajador. Por lo tanto, *g* una vez más se puede expresar (de la ecuación 33) como una función lineal de la relación (I + D) / (Y / L). El efecto de la I + D en la tasa de crecimiento de PTF por lo tanto se puede apreciar desde un enfoque de regresión utilizando esta forma de variable de I + D. En principio, los resultados podrían ser utilizados para estimar el coeficiente de obsolescencia, *c*. Sin embargo, este enfoque requiere instrumentos satisfactorios para la variable e I + D. Los posibles candidatos incluyen de nuevo las políticas gubernamentales con respecto a I + D, incluidas las subvenciones, las disposiciones legales y las normas fiscales.

5. Conclusiones

Los ejercicios estándar de contabilidad del crecimiento generan el residuo de Solow, que suele ser visto como una medida del progreso tecnológico. Las recientes teorías del crecimiento endógeno permiten una perspectiva más nítida de este residuo. En concreto, el residuo se puede interpretar de forma clara en entornos que permitan los rendimientos crecientes y los efectos secundarios o en modelos que se genera el progreso tecnológico para propósitos de investigación. Estos ofrecen una interpretación para explicar la orientación residual en términos de los gastos en I + D, las políticas públicas y otros factores.

Dos conclusiones generales son que los ejercicios estándar de contabilidad del crecimiento proporcionan información útil en el contexto de las modernas teorías del crecimiento endógeno y que las teorías recientes se pueden utilizar para extender la utilidad de la contabilidad del crecimiento tradicional. Por lo tanto, los enfoques nuevos y viejos para el crecimiento económico son complementarios.

B. Desarrollo

1. Estimacion Primal y Dual para la contabilidad del Crecimiento

La funcion de produccion neoclasica es:

$$\boldsymbol{Y = F(A, K, L)} \qquad \mathbf{(1)}$$

Donde A representa la tecnologia, K el stock de capital y L la cantidad de trabajo.

Como es conocido, la tasa de crecimiento de una de las tres variables (en este caso (A, K, L)) es igual a la suma de sus respectiva tasa de crecimiento.

Derivando la ecuación 1 con respecto al tiempo obtenemos:

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dY}{dA}.\frac{dA}{dt} + \frac{dY}{dK}.\frac{dK}{dt} + \frac{dY}{dL}.\frac{dL}{dt}$$

Ordenando

$$\dot{Y} = \frac{dY}{dK}.\dot{K} + \frac{dY}{dL}.\dot{L} + \frac{dY}{dA}.\dot{A}$$

$$\dot{Y} = \frac{K}{K}\frac{dY}{dK}.\dot{K} + \frac{L}{L}\frac{dY}{dL}.\dot{L} + \frac{A}{A}\frac{dY}{dA}.\dot{A}$$

$$\dot{Y} = K\frac{dY}{dK}\frac{\dot{K}}{K} + L\frac{dY}{dL}\frac{\dot{L}}{L} + A\frac{dY}{dA}\frac{\dot{A}}{A}$$

$\frac{dY}{dK}$ Es la variacion que experimenta Y cuando varia K, en la literatura economica se denomina Productividad Marginal del K (PMK).

$\frac{dY}{dL}$ Es la variacion que experimenta Y cuando varia L, en la literatura economica se denomina Productividad Marginal del L (PML).

Sabiendo lo anterior, la última ecuación queda:

$$\dot{Y} = (PMK)K\frac{\dot{K}}{K} + (PML)L\frac{\dot{L}}{L} + (PMA)A\frac{\dot{A}}{A}$$

Ahora se divide entre Y para obtener la tasa de crecimiento de Y.

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{(PMK)K}{Y}\frac{\dot{K}}{K} + \frac{(PML)L}{Y}\frac{\dot{L}}{L} + \frac{(PMA)A}{Y}\frac{\dot{A}}{A}$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \left(\frac{(PMA)A}{Y}\right)\frac{\dot{A}}{A} + \left(\frac{(PMK)K}{Y}\right)\frac{\dot{K}}{K} + \left(\frac{(PML)L}{Y}\right)\frac{\dot{L}}{L}$$

Denominamos F_K y F_L a PMK Y PML respectivamente.

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \left(\frac{AF_A}{Y}\right)\frac{\dot{A}}{A} + \left(\frac{F_K\ K}{Y}\right)\frac{\dot{K}}{K} + \left(\frac{F_L L}{Y}\right)\frac{\dot{L}}{L}$$

$$\boldsymbol{\frac{\dot{Y}}{Y} = g + \left(\frac{F_K\ K}{Y}\right)\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) + \left(\frac{F_L L}{Y}\right)\left(\frac{\dot{L}}{L}\right)} \qquad \mathbf{(2)}$$

Donde

$$\boldsymbol{g = \left(\frac{AF_A}{Y}\right)\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)} \qquad \mathbf{(3)}$$

Si el factor tecnologia aparece en la función como neutral en el sentido de Hicks[37] entonces:

$$g = \left(\frac{\dot{A}}{A}\right)$$

Esto se puede aclarar de mejor manera con un ejemplo, supongamos que estamos trabajando con una funcion Cobb-Douglas con retornos constantes a escala.

$$Y = AK^{\propto}L^{1-\propto}$$

Derivando con respecto a A

$$\frac{dY}{dA} = K^{\propto}L^{1-\propto}$$

Si sustituimos este resultado en la ecuación 3 nos queda, adicionalmente recuerde que la derivada de Y con respecto de A, $\left(\frac{dY}{dA}\right)$, es denominado F_A .

$$g = \left(\frac{AF_A}{Y}\right)\left(\frac{\dot{A}}{A}\right) = \left(\frac{dY}{dA}\right).\left(\frac{A}{Y}\right).\left(\frac{\dot{A}}{A}\right) = (K^{\propto}L^{1-\propto})\left(\frac{A}{Y}\right).\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)$$

$$g = \left(\frac{AK^{\propto}L^{1-\propto}}{Y}\right)\left(\frac{\dot{A}}{A}\right) = \left(\frac{Y}{Y}\right).\left(\frac{\dot{A}}{A}\right) = \frac{\dot{A}}{A} = g$$

[37] Si el progreso tecnológico se presenta de la forma $Y = F(AK, L)$, el progreso técnico es aumentador del capital. Si se presenta de la forma $Y = F(K, AL)$ se dice que es aumentador del trabajo o neutral en el sentido de Harrod. Si se presenta de la siguiente forma $Y = AF(K, L)$ se dice que es neutral en el sentido de Hicks.

$$g = \frac{\dot{A}}{A}$$

Recordando la ecuación 2

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = g + \left(\frac{F_K\, K}{Y}\right)\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) + \left(\frac{F_L L}{Y}\right)\left(\frac{\dot{L}}{L}\right)$$

Despejando de aquí "g" nos queda

$$\boldsymbol{g = \frac{\dot{Y}}{Y} - \left(\frac{F_K\, K}{Y}\right)\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) - \left(\frac{F_L L}{Y}\right)\left(\frac{\dot{L}}{L}\right)} \qquad \mathbf{(4)}$$

En un mercado completamente competitivo el precio de los factores de producción es igual a su producto marginal y dado que el precio del trabajo y del capital son el salario (w) y la renta del capital (R) respectivamente:

$$PMK = F_K = R$$

$$PMK = F_L = w$$

De aquí deducimos que

$$\boldsymbol{\hat{g} = \frac{\dot{Y}}{Y} - s_K.\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) - s_K\left(\frac{\dot{L}}{L}\right)} \qquad \mathbf{(5)}$$

Donde

$$s_K = \frac{RK}{Y}$$

$$s_L = \frac{wL}{Y}$$

Son las respectivas partes que cada factor (capital y trabajo) aportan al total del producto.

Los resultados anteriores se pueden expresar de forma intensiva

$$Y = F(A, K, L)$$

Sabiendo que la tecnologia aparece en la función de producción como neutral en el sentido de Hicks, por lo que

$$Y = AF(K, L)$$

Dividiendo por "L" o expresandolo en unidades por trabajador

$$\frac{Y}{L} = AF\left(\frac{K}{L}, \frac{L}{L}\right)$$

$$y = AF(k, 1)$$

$$y = AF(k)$$

Derivando con respecto al tiempo

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dA}\frac{dA}{dt} + \frac{dy}{dk}\frac{dk}{dt}$$

Se multiplica cada factor del lado derecho de la ecuación por un factor que no afecte los resultados, como por ejemplo $\left(\frac{A}{A}\right)$ o $\left(\frac{k}{k}\right)$ que básicamente es como si multiplicáramos la ecuación por uno.

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{A}{A}\right)\frac{dy}{dA}\frac{dA}{dt} + \left(\frac{k}{k}\right)\frac{dy}{dk}\frac{dk}{dt}$$

$$\dot{y} = \left(\frac{A}{A}\right)\frac{dy}{dA}\dot{A} + \left(\frac{k}{k}\right)\frac{dy}{dk}\dot{k}$$

$$\dot{y} = \left(\frac{A}{A}\right)(PMA)\dot{A} + \left(\frac{k}{k}\right)(PMk)\dot{k}$$

$$\dot{y} = A(PMA)\frac{\dot{A}}{A} + k(PMk)\frac{\dot{k}}{k}$$

PMk es el producto marginal del capital per cápita se denota f_k y PMA f_A

$$\dot{y} = A(f_A)\frac{\dot{A}}{A} + k(f_k)\frac{\dot{k}}{k}$$

Dividiendo entre y para obtener la tasa de crecimiento de y

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{A(f_A)}{y}\frac{\dot{A}}{A} + \frac{k(f_k)}{y}\frac{\dot{k}}{k}$$

Como se demostró en 3.2

$$g = \frac{A(f_A)}{y}\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{A}}{A}$$

$$g = \frac{\dot{A}}{A}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación anterior

$$\frac{\dot{y}}{y} = g + \frac{k(f_k)}{y}\frac{\dot{k}}{k}$$

$\frac{k(f_k)}{y}$, es la parte que el capital per cápita aporta al producto, que es igual al aporte del capital en el producto, antes denotado s_k.

$$\frac{\dot{y}}{y} = g + s_k\left(\frac{\dot{k}}{k}\right)$$

Despejando

$$\boldsymbol{g = \frac{\dot{y}}{y} - s_k\left(\frac{\dot{k}}{k}\right)} \quad \mathbf{(6)}$$

Estimación Dual para la contabilización del Crecimiento

El enfoque dual puede deducirse fácilmente de la igualdad entre la producción y el factor de los ingresos

$$\boldsymbol{Y = RK + wL} \qquad \mathbf{(7)}$$

$$\frac{dY}{dt} = R\frac{dK}{dt} + K\frac{dR}{dt} + w\frac{dL}{dt} + L\frac{dw}{dt}$$

$$\dot{Y} = R\dot{K} + K\dot{R} + w\dot{L} + L\dot{w}$$

$$\dot{Y} = \frac{K}{K}R\dot{K} + \frac{R}{R}K\dot{R} + \frac{L}{L}w\dot{L} + \frac{w}{w}L\dot{w}$$

Continuación

$$\dot{Y} = KR\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) + KR\left(\frac{\dot{R}}{R}\right) + Lw\left(\frac{\dot{L}}{L}\right) + Lw\left(\frac{\dot{w}}{w}\right)$$

En un mercado perfectamente competitivo la remuneración del capital y del trabajo es igual a sus respectivos productos marginales[38]

$$PMK = F_K = R$$

$$PML = F_L = w$$

Sustituyendo estas últimas igualdades en la ecuación precedente obtenemos.

$$\dot{Y} = KF_K\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) + KF_K\left(\frac{\dot{R}}{R}\right) + LF_L\left(\frac{\dot{L}}{L}\right) + LF_L\left(\frac{\dot{w}}{w}\right)$$

Dividiendo entre "Y" para obtener su tasa de crecimiento

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{KF_K}{Y}\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) + \frac{KF_K}{Y}\left(\frac{\dot{R}}{R}\right) + \frac{LF_L}{Y}\left(\frac{\dot{L}}{L}\right) + \frac{LF_L}{Y}\left(\frac{\dot{w}}{w}\right)$$

$$\boldsymbol{\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{KF_K}{Y}\left[\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) + \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)\right] + \frac{LF_L}{Y}\left[\left(\frac{\dot{L}}{L}\right) + \left(\frac{\dot{w}}{w}\right)\right]}$$

Si definimos s_K Y s_L como las cuotas de cada factor en el ingreso total

$$s_K = \frac{F_L K}{Y} \qquad s_L = \frac{F_L K}{Y} \quad \text{(a)}$$

Sustituyendo nos queda

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = s_K\left[\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) + \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)\right] + s_L\left[\left(\frac{\dot{L}}{L}\right) + \left(\frac{\dot{w}}{w}\right)\right] \qquad \text{(b)}$$

Separando

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = s_K\left(\frac{\dot{R}}{R}\right) + s_K\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) + s_L\left(\frac{\dot{w}}{w}\right) + s_L\left(\frac{\dot{L}}{L}\right) \qquad \text{(c)}$$

Recuerde que 2 definimos que

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = g + \frac{F_K K}{Y}\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) + \frac{F_L L}{Y}\left(\frac{\dot{L}}{L}\right) \qquad (2)$$

Sustituyendo en a en 2

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = g + s_K\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) + s_L\left(\frac{\dot{L}}{L}\right)$$

Despejando g

---

[38] Antes denominadosF_K Y F_L

$$g = \frac{\dot{Y}}{Y} - s_K\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) - s_L\left(\frac{\dot{L}}{L}\right) \qquad \text{(d)}$$

Si de c despejamos de tal forma que

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = s_K\left(\frac{\dot{R}}{R}\right) + s_K\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) + s_L\left(\frac{\dot{w}}{w}\right) + s_L\left(\frac{\dot{L}}{L}\right)$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = s_K\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) + s_L\left(\frac{\dot{L}}{L}\right) + s_K\left(\frac{\dot{R}}{R}\right) + s_L\left(\frac{\dot{w}}{w}\right)$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} - s_K\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) + s_L\left(\frac{\dot{L}}{L}\right) = s_K\left(\frac{\dot{R}}{R}\right) + s_L\left(\frac{\dot{w}}{w}\right) \qquad (7.15)$$

Podemos Obtener que el lado derecho de esta ultima ecuación es igual al lado derecho de d por lo que podemos sustituir

$$g = s_K\left(\frac{\dot{R}}{R}\right) + s_L\left(\frac{\dot{w}}{w}\right)$$

Es decir

$$\boldsymbol{g = \frac{\dot{Y}}{Y} - s_K\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) - s_L\left(\frac{\dot{L}}{L}\right) = s_K\left(\frac{\dot{R}}{R}\right) + s_L\left(\frac{\dot{w}}{w}\right)} \qquad (\mathbf{8})$$

2. Problemas con la contabilización del crecimiento

2.1 Modelo de retornos crecientes con desbordes

Muchos autores como Griliches (1979), Romer (1986) un Lucas (1988), han construido modelos de crecimiento económico con rendimientos crecientes y los desbordamientos. El análisis de Romer es una generalización de Arrow (1962), modelo de aprender haciendo, en la que la eficiencia de la producción aumenta con la experiencia acumulada. En la versión simple del modelo de Romer, el producto Y_i, de la firma *i* depende no sólo en las entradas privadas estándar,K_i y L_i, pero también en el ancho del stock de capital de la economía, K. La idea es que los productores aprenden mediante la inversión (un forma específica de “hacer”) para producir más eficientemente. Por otra parte, este conocimiento se desborda de inmediato de una empresa a las demás, así la productividad de cada empresa depende de la suma de aprendizaje, como se refleja en el capital social global

$$Y = AK_i^{\alpha} K^{\beta} L_i^{1-\alpha} \qquad (9)$$

Cada empresa se comporta de forma competitiva, tomando como dado el precio de los factores de la economía, R y w, y el stock de capital agregado, K. Por lo tanto, los productos marginales privados se igualan a los precios de los factores, con ello la obtención

$$Y = AK^{\alpha}(L)^{1-\alpha}$$

$$\frac{dY}{dK} = \alpha K^{\alpha-1} A(L)^{1-\alpha}$$

$$\frac{dY}{dK} = \alpha \left(\frac{1}{K^{1-\alpha} A^{-1} (L)^{\alpha-1}}\right)$$

Multiplicando el lado derecho por $\left(\frac{Y}{Y}\right)$

$$\frac{dY}{dK} = \alpha \left(\frac{Y}{Y}\right)\left(\frac{1}{K^{1-\alpha} A^{-1} (L)^{\alpha-1}}\right) \qquad \text{(e)}$$

Recuerde

$$Y = K^{\alpha} A(L)^{1-\alpha}$$

Si sustituimos el denominador de $\left(\frac{Y}{Y}\right)$ en e Resulta:

$$\frac{dY}{dK} = \alpha \left(\frac{Y}{K^{\alpha} A(L)^{1-\alpha}}\right)\left(\frac{1}{K^{1-\alpha} A^{-1} (L)^{\alpha-1}}\right)$$

$$\frac{dY}{dK} = \alpha \left(\frac{Y}{K^{\alpha} K^{1-\alpha} A A^{-1} (L)^{1-\alpha} (L)^{\alpha-1}}\right)$$

$$\frac{dY}{dK} = \alpha \left(\frac{Y}{K}\right)$$

En un mercado perfectamente competitivo el PMK es igual a su remuneración.

$$\boldsymbol{R = \alpha \left(\frac{Y}{K}\right)} \qquad (10.1)$$

Aplicando el mismo procedimiento a, el factor trabajo.

$$Y = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}$$

$$\frac{dY}{dL} = (1-\alpha) A (L)^{-\alpha} K^{\alpha}$$

$$\frac{dY}{dL} = (1-\alpha)\left(\frac{1}{K^{-\alpha}A^{-1}(L)^{\alpha}}\right)$$

Multiplicando por $\left(\frac{Y}{Y}\right)$

$$\frac{dY}{dL} = (1-\alpha)\left(\frac{Y}{Y}\right)\left(\frac{1}{K^{-\alpha}A^{-1}(L)^{\alpha}}\right)$$

Recuerde que

$$Y = K^{\alpha}A(L)^{1-\alpha}$$

Si sustituimos este resultado en la última ecuación anterior resulta:

$$\frac{dY}{dL} = (1-\alpha)\left(\frac{Y}{K^{\alpha}A(L)^{1-\alpha}}\right)\left(\frac{1}{K^{-\alpha}A^{-1}(L)^{\alpha}}\right)$$

$$\frac{dY}{dL} = (1-\alpha)\left(\frac{Y}{K^{\alpha}K^{-\alpha}AA^{-1}(L)^{1-\alpha}(L)^{\alpha}}\right)$$

$$\frac{dY}{dL} = (1-\alpha)\left(\frac{Y}{L}\right)$$

En un mercado perfectamente competitivo el PML es igual a su remuneración

$$\boldsymbol{w = (1-\alpha)\left(\frac{Y}{L}\right)} \qquad (10.2)$$

La proporción del factor de ingresos, es por lo tanto dada, como usual por:

$$S_K = \alpha \quad y \quad S_L = 1-\alpha$$

Retomando de la ecuación 9 en la cual:

En equilibrio cada empresa acepta un solo ratio capital-trabajo K; pero la escala de cada empresa es indeterminado. Es por lo anterior que la función de producción:

$$Y = Ak_i^{\alpha}k^{\beta}L_i^{1-\alpha}$$

La cual puede ser escrita también

$$\frac{Y}{L} = A\left(\frac{k_i^{\alpha}k^{\beta}}{L}\right)L_i^{1-\alpha}$$

$$Y = Ak_i^{\alpha}k^{\beta}L_iL^{\beta}$$

$$Y = Ak^{\alpha+\beta}L^{1+\beta}$$

Sustituyendo $K = \frac{K}{L}$

$$Y = AK^{\alpha+\beta}\frac{L^{1+\beta}}{L^{1+\beta}}$$

$$Y = AK^{\alpha+\beta}\left(L^{1+\beta}L^{-\alpha-\beta}\right)$$

$$\boldsymbol{Y = AK^{\alpha+\beta}L^{1-\alpha}} \qquad (\mathbf{12})$$

Podemos escribirlo como una función

$$Y = F(A, K, L)$$

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dY}{dA}\frac{dA}{dt} + \frac{dY}{dK}\frac{dK}{dt} + \frac{dY}{dL}\frac{dL}{dt}$$

$$\dot{Y} = \frac{dY}{dA}\dot{A} + \frac{dY}{dK}\dot{K} + \frac{dY}{dL}\dot{L}$$

$$\dot{Y} = \frac{A}{A}\frac{dY}{dA}\dot{A} + \frac{K}{K}\frac{dY}{dK}\dot{K} + \frac{L}{L}\frac{dY}{dL}\dot{L}$$

$$F_K = PMK$$

$$F_L = PML$$

$$\dot{Y} = A\frac{dY}{dA}\frac{\dot{A}}{A} + K\frac{dY}{dK}\frac{\dot{K}}{K} + L\frac{dY}{dL}\frac{\dot{L}}{L}$$

Dividiendo entre Y para encontrar tasa de crecimiento

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{AF_A}{Y}\left(\frac{\dot{A}}{A}\right) + \frac{KF_K}{Y}\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) + \frac{LF_L}{Y}\left(\frac{\dot{L}}{L}\right)$$

Recuerde que el resultados previos en que

$$\frac{AF_A}{Y}\left(\frac{\dot{A}}{A}\right) = \frac{\dot{A}}{A} = g$$

Entonces

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = g + \frac{KF_K}{Y}\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) + \frac{LF_L}{Y}\left(\frac{\dot{L}}{L}\right)$$

Como ya antes se ha mencionado en reiteradas ocasiones, en una economía perfectamente competitiva el producto marginal del capital es igual a su remuneración, el mismo análisis es aplicado al factor trabajo, por tanto:

$$\frac{KF_K}{Y} = \frac{KR}{Y}$$

$$\frac{LF_L}{Y} = \frac{Lw}{Y}$$

En el primer caso estamos multiplicando el numero de maquinas existentes en la economía por sus respectivas remuneraciones, recordemos que el PIB es la sumatoria de todas las remuneraciones. Es por ello que al dividirlo (KR) entre “Y” (Producción) estamos encontrando la relación entre la remuneración al capital y la remuneración total, es decir la cuota de ingreso del capital. El mismo análisis puede ser aplicado al factor trabajo.

Esta idea puede ser representada en la función Cobb-Douglas que en este caso se presenta

$$Y = AK^{\alpha+\beta}L^{1-\alpha}$$

Donde los exponentes o elasticidades se definen como

$$\alpha + \beta = \frac{KR}{Y}$$

$$1 - \alpha = \frac{Lw}{Y}$$

Por lo tanto podemos escribir H como

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = g + (\alpha + \beta)\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) + (1 - \alpha)\left(\frac{\dot{L}}{L}\right)$$

Despejando obtenemos

$$g = \frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{Y}}{Y} - (\alpha + \beta)\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) - (1 - \alpha)\left(\frac{\dot{L}}{L}\right) \qquad (13)$$

Básicamente lo que nos dice la última ecuación es que el factor capital “K” recibe un peso por encima de su participación en el Ingreso total.

Si en 13 separamos α y β

$$g = \frac{\dot{Y}}{Y} - (\alpha + \beta) - \left(\frac{\dot{K}}{K}\right) - (1 - \alpha)\left(\frac{\dot{L}}{L}\right)$$

$$g = \frac{\dot{Y}}{Y} - \alpha\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) - \beta\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) - (1-\alpha)\left(\frac{\dot{L}}{L}\right)$$

$$g = \frac{\dot{A}}{A} + \beta\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) = \frac{\dot{Y}}{Y} - \alpha\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) - (1-\alpha)\left(\frac{\dot{L}}{L}\right) \qquad (14)$$

El lado derecho de la ecuación anterior es igual a la ecuación con la que en secciones anteriores se encontraba el residuo de Solow. Con la ultima ecuación lo que se intenta decir es que en el cálculo estándar del residuo se encuentra junto con la tasa de progreso técnico exógeno $\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)$, la contribución indirecta de la acumulación de conocimientos.

2.2 Los impuestos

En un mercado perfectamente competitivo las empresas igualan el producto marginal de cada factor con su respectiva remuneración, por tanto la condición $Y = RK + WL$ sigue siendo válida al igual que la ecuación 5.

Se supone que el capital que adquiere la empresa a través de financiación al capital, salarios y depreciación, es deducible de impuestos, r es la tasa requerida de rentabilidad del capital.

Dado que las empresas buscan maximizar sus beneficios, para ello igualaran el producto marginal neto del capital después de impuestos $(1-\tau)(F_K - \delta)$ donde "τ" es la tasa marginal de impuestos sobre las ganancias de las empresas y δ es la tasa de depreciación del capital.

Producto Marginal neto del capital = $(F_K - \delta)$

$$(1-\tau)(F_K - \delta) = r$$

$$F_K - \delta = \frac{r}{1-\tau}$$

$$\boldsymbol{F_K = \frac{r}{1-\tau} + \delta} \qquad \text{(f)}$$

Recuerde que (4)

$$g = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{KF_K}{Y}\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) - \frac{LF_L}{Y}\left(\frac{\dot{L}}{L}\right)$$

Sustituyendo f en 4

$$\boldsymbol{g} = \frac{\dot{\boldsymbol{Y}}}{\boldsymbol{Y}} - \left[\left(\frac{\boldsymbol{r}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{\tau}}\right).\left(\frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{Y}}\right) + \left(\frac{\boldsymbol{\delta F_K}}{\boldsymbol{Y}}\right)\right].\left(\frac{\dot{\boldsymbol{K}}}{\boldsymbol{K}}\right) - \boldsymbol{s_L}\left(\frac{\dot{\boldsymbol{L}}}{\boldsymbol{L}}\right) \qquad (15)$$

Los impuestos a las ganancias de la empresa son proporcionales así como la tasa marginal de impuestos, es por ello que $\frac{rK}{1-\tau}$ es igual en el equilibrio a las ganancias de la empresa, por tanto, podemos definir el termino entre corchete como la elasticidad del capital o proporción de la renta dedicada al capital en relación a la renta total

$$s_K = \left[\left(\frac{r}{1-\tau}\right).\left(\frac{K}{Y}\right) + \left(\frac{\delta F_K}{Y}\right)\right] \qquad (4)$$

También se aprecia que el producto marginal de cada factor ahora tendrá que descontarse los impuestos

$$F_L = \frac{w}{1-\tau} \qquad (5.1)$$

$$F_K = \frac{R}{1-\tau} \qquad (5.2)$$

Recuerde un resultado precedente que muestra

$$s_K = \frac{F_K K}{Y}$$

$$s_L = \frac{F_L L}{Y}$$

Y que la fórmula para llegar al residuo era

$$g = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{KF_K}{Y}\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) - \frac{LF_L}{Y}\left(\frac{\dot{L}}{L}\right)$$

Si se incorpora en este análisis los impuestos

$$\boldsymbol{g} = \frac{\dot{\boldsymbol{Y}}}{\boldsymbol{Y}} - \left[\left(\frac{\boldsymbol{R}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{\tau}}\right)\left(\frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{Y}}\right)\right]\left(\frac{\dot{\boldsymbol{K}}}{\boldsymbol{K}}\right) - \left[\left(\frac{\boldsymbol{w}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{\tau}}\right)\left(\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{Y}}\right)\right]\left(\frac{\dot{\boldsymbol{L}}}{\boldsymbol{L}}\right) \qquad (16)$$

Si el impuesto es proporcional, entonces los tipos impositivos marginales y medios coinciden, es por ello que los impuestos totales pueden expresarse como τY

$$Y = RK + wL + \tau Y \qquad (g)$$

En esta formulación $RK + wL$ sigue siendo los ingresos de los factores y los términos entre corchetes en 16 son s_K y s_L.

Respectivamente se puede apreciar que los resultados encontrados en (5) siguen siendo validos

2.3 Múltiples factores

Supongamos la función de producción

$$Y = F(A, K_1, K_2, L_1, L_2) \qquad (17)$$

En esta función de producción K_1 y K_2 representan distintos tipos de calidades de bienes de capital al igual que L_1 y L_2 representan diferentes tipos de mano de obra, si cada tipo de factor es ponderado por su participación en el ingreso:

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dY}{dA}\frac{dA}{dt} + \frac{dY}{dK_1}\frac{dK_1}{dt} + \frac{dY}{dK_2}\frac{dK_2}{dt} + \frac{dY}{dL_1}\frac{dL_1}{dt} + \frac{dY}{dL_2}\frac{dL_2}{dt}$$

$$\dot{Y} = \frac{dY}{dA}\dot{A} + \frac{dY}{dK_1}\dot{K}_1 + \frac{dY}{dK_2}\dot{K}_2 + \frac{dY}{dL_1}\dot{L}_1 + \frac{dY}{dL_2}\dot{L}_2$$

$$\dot{Y} = A\frac{dY}{dA}\frac{\dot{A}}{A} + K_1\frac{dY}{dK_1}\frac{\dot{K}_1}{K_1} + K_2\frac{dY}{dK_2}\frac{\dot{K}_2}{K_2} + L_1\frac{dY}{dL_1}\frac{\dot{L}_1}{L_1} + L_2\frac{dY}{dL_2}\frac{\dot{L}_2}{L_2}$$

$$\frac{dY}{dA}, \frac{dY}{dK_1}, \frac{dY}{dK_2}, \frac{dY}{dL_1}, \frac{dY}{dL_2}$$

Son productos marginales de cada factor y lo denominaremos F con un subíndice que los denote.

$$\dot{Y} = AF_A\frac{\dot{A}}{A} + K_1F_{K_1}\frac{\dot{K}_1}{K_1} + K_2F_{K_2}\frac{\dot{K}_2}{K_2} + L_1F_{L_1}\frac{\dot{L}_1}{L_1} + L_2F_{L_2}\frac{\dot{L}_2}{L_2}$$

Dividiendo entre Y

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{AF_A}{Y}\frac{\dot{A}}{A} + \frac{K_1F_{K_1}}{Y}\frac{\dot{K}_1}{K_1} + \frac{K_2F_{K_2}}{Y}\frac{\dot{K}_2}{K_2} + \frac{L_1F_{L_1}}{Y}\frac{\dot{L}_1}{L_1} + \frac{L_2F_{L_2}}{Y}\frac{\dot{L}_2}{L_2}$$

Recuerde que

$$g = \frac{AF_A}{Y}\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{A}}{A}$$

Por tanto

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = g + \frac{K_1 F_{K_1}}{Y}\frac{\dot{K_1}}{K_1} + \frac{K_2 F_{K_2}}{Y}\frac{\dot{K_2}}{K_2} + \frac{L_1 F_{L_1}}{Y}\frac{\dot{L_1}}{L_1} + \frac{L_2 F_{L_2}}{Y}\frac{\dot{L_2}}{L_2}$$

En un mercado perfectamente competitivo los productos marginales de los factores serán igual a su remuneración, por tanto $F_{K_1} = R_1$, $F_{K_2} = R_2$, $F_{L_1} = w_1$, $F_{L_2} = w_2$,

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = g + \frac{K_1 R_1}{Y}\frac{\dot{K_1}}{K_1} + \frac{K_2 R_2}{Y}\frac{\dot{K_2}}{K_2} + \frac{L_1 w_1}{Y}\frac{\dot{L_1}}{L_1} + \frac{L_2 w_2}{Y}\frac{\dot{L_2}}{L_2}$$

En el momento de hacer el cálculo de la ultima ecuación surge el problema de que los factores no pueden ser distinguidos en los datos, por ejemplo; los datos que usualmente se calculan del capital total en la economía, es de una combinación entre todos los tipos de capital. Por lo que se obtiene cuando se calcula la proporción de la renta en la producción total es:

$$\frac{K_1 R_1}{Y} + \frac{K_2 R_2}{Y} = \frac{K_1 R_1 + K_2 R_2}{Y}$$

Una fuente de este tipo de problema es que las nuevas maquinas que suelen ser más productivas pueden ser agregadas con tipos más antiguos de capital, este resultado es igualmente al factor trabajo.

$$\frac{L_1 w_1}{Y} + \frac{L_2 w_2}{Y} = \frac{L_1 w_1 + L_2 w_2}{Y}$$

Si incorporamos los dos resultados anteriores y sustituimos en la última 5 obtenemos

$$\tilde{g} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \left[\frac{K_1 R_1 + K_2 R_2}{Y}\right]\left(\frac{\dot{K}}{K}\right) - \left[\frac{L_1 w_1 + L_2 w_2}{Y}\right]\left(\frac{\dot{L}}{L}\right) \qquad (18)$$

Donde

$$K = K_1 + K_2$$

$$L = L_1 + L_2$$

Si despejamos en 5 “g” obtenemos

$$\hat{g} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \left(\frac{K_1 R_1}{Y}\right)\left(\frac{\dot{K_1}}{K_1}\right) - \left(\frac{K_2 R_2}{Y}\right)\left(\frac{\dot{K_2}}{K_2}\right) - \left(\frac{L_1 w_1}{Y}\right)\left(\frac{\dot{L_1}}{L_1}\right) - \left(\frac{L_2 w_2}{Y}\right)\left(\frac{\dot{L_2}}{L_2}\right) \qquad (19)$$

Restando 19 a 18 queda (18-19)

$$\tilde{g}-\hat{g}=\left(\frac{K_1}{K}\right)\left(\frac{K_2}{K}\right).\frac{K}{Y}.(R_1-R_2).\left(\frac{\dot{K}_1}{K_1}-\frac{\dot{K}_2}{K_2}\right)+\left(\frac{K_2R_2}{Y}\right)\left(\frac{\dot{K}}{K}\right)-\left(\frac{L_1}{L}\right)\left(\frac{L_2}{L}\right).\frac{L}{Y}.(w_1-w_2)\left(\frac{\dot{L}_1}{L_1}-\frac{\dot{L}_2}{L_2}\right)$$
(20)

Por tanto si $R_1 \neq R_2$ y $\frac{\dot{K}_1}{K_1} \neq \frac{\dot{K}_2}{K_2}$ o si $W_1 \neq W_2$ y $\frac{\dot{L}_1}{L_1} \neq \frac{\dot{L}_2}{L_2}$, entonces $\tilde{g} \neq \hat{g}$ específicamente si $R_1 > R_2$ entonces $\frac{\dot{K}_1}{K_1} > \frac{\dot{K}_2}{K_2}$ nos dice que $\tilde{g} > \hat{g}$.

3. Modelos avanzados

$$Y = AL^{1-\alpha}\sum_{j=1}^{N} x_j^{\alpha}$$

Este es un conocido modelo de crecimiento económico con inversión y desarrollo, siendo x_i los bienes intermedios de capital, A, como siempre, es un parámetro tecnológico y L es el trabajo en otras palabras, la producción se obtiene a partir de trabajo y de un conjunto de N(t) de factores x_i. El progreso técnico se presenta bajo la forma de un aumento constante en el número de insumos, N(t). EL hecho de que la función sea aditivamente separable[39] comporta que los nuevos bienes de capital son diferentes a los anteriores aunque no sean ni mejores ni peores que estos. Un aspecto importante de esta ecuación es que representan rendimientos decrecientes respecto a cada bien de capital x_i, aunque representa rendimientos constantes del capital respecto a la cantidad total de estos bienes N(t). Esto se puede apreciar suponiendo que, en cada momento del tiempo la cantidad de dichos bienes sea la misma $x_i = x$ para toda i[40]

$$Y = A(Nx)^{\alpha}N^{1-\alpha}L^{1-\alpha}$$

$$Y = AL^{1-\alpha}N^{1-\alpha}X^{\alpha}$$

En un modelo perfectamente competitivo, el producto marginal del trabajo es igual al salario.

$$\frac{dY}{dL} = (1-\alpha)L^{-\alpha}(AN^{1-\alpha}x^{\alpha})$$

Dado que $w = \frac{dY}{dL}$ se puede:

$$w = (1-\alpha)L^{-\alpha}(AN^{1-\alpha}X^{\alpha})$$

$$w = (1-\alpha)\left(\frac{AN^{1-\alpha}X^{\alpha}}{L^{\alpha}}\right)$$

[39] El término aditivo separable se refiere a que todo los factores se multiplican entre sí, por lo que se pueden reunir de diferentes manera sin alterar su significado.
[40] Sala i Martin. (1994)

Multiplicando por $\frac{L^{1-\alpha}}{L^{1-\alpha}}$ a ambos lados:

$$\left(\frac{L^{1-\alpha}}{L^{1-\alpha}}\right)w = \frac{L^{1-\alpha}}{L^{1-\alpha}}(1-\alpha)\left(\frac{AN^{1-\alpha}X^{\alpha}}{L^{\alpha}}\right)$$

$$w = (1-\alpha)\left(\frac{L^{1-\alpha}AN^{1-\alpha}X^{\alpha}}{L^{1-\alpha}L^{\alpha}}\right)$$

$$w = (1-\alpha)\left(\frac{AL^{1-\alpha}N^{1-\alpha}X^{\alpha}}{L}\right)$$

Sustituyendo

$$Y = AL^{1-\alpha}N^{1-\alpha}X^{\alpha}$$

$$w = (1-\alpha)\left(\frac{Y}{L}\right)$$

Como es de costumbre sabemos que $(1-\alpha)$ es la parte de la renta del trabajo en la renta total, que también puede escribirse como wL/Y por tanto

$$\frac{wL}{Y} = 1-\alpha = s_L \qquad (23)$$

En mercados competitivos también se equiparan el producto marginal de los bienes intermedios de capital a su precio $\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

$$Y = AL^{1-\alpha}N^{1-\alpha}X^{\alpha}$$

$$\frac{dY}{dX} = \alpha X^{\alpha-1}(L^{1-\alpha}N^{1-\alpha}A)$$

$$\frac{1}{\alpha} = \alpha\left(\frac{L^{1-\alpha}N^{1-\alpha}A}{X^{1-\alpha}}\right)$$

Multiplicando por X^{α}/X^{α} a ambos lados

$$\frac{1}{\alpha} = \left(\frac{X^{\alpha}}{X^{\alpha}}\right)\alpha\left(\frac{L^{1-\alpha}N^{1-\alpha}A}{X^{1-\alpha}}\right)$$

$$\frac{1}{\alpha} = \alpha\left(\frac{X^{\alpha}AL^{1-\alpha}N^{1-\alpha}}{X^{\alpha}X^{1-\alpha}}\right)$$

$$\frac{1}{\alpha} = \alpha\left(\frac{AL^{1-\alpha}N^{1-\alpha}X^{\alpha}}{X}\right)$$

El numerador del lado derecho es igual a "Y" por tanto

$$\frac{1}{\alpha} = \alpha\left(\frac{Y}{X}\right)$$

La proporción de la renta gastada en N factores es:

$$s_X = \left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{Y}{X}\right) = \alpha \qquad (24)$$

La formula de crecimiento de la producción basada en la ecuación 22 es

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A}}{A} + (1-\alpha)\left(\frac{\dot{N}}{N}\right) + s_L\left(\frac{\dot{L}}{L}\right) + s_X\left(\frac{\dot{X}}{X}\right) \qquad (25)$$

s_X y s_L de la ecuación 23 y 24 fueron utilizados, por lo tanto, el enfoque habitual para el cálculo de los rendimientos de la tasa de crecimiento PTF en este modelo es:

$$\hat{g} = \frac{\dot{Y}}{Y} - s_L\left(\frac{\dot{L}}{L}\right) - s_X\left(\frac{\dot{X}}{X}\right) = \frac{\dot{A}}{A} + (1-\alpha)\left(\frac{\dot{N}}{N}\right) \qquad (26)$$

En los modelos más simples $\dot{N}$ es proporcional a la cantidad de producción dedicada a I+D

$$\dot{N} = \left(\frac{1}{\eta}\right)(I+D)$$

Donde η es un parámetro de costos que representa el monto de I+D. El crecimiento de N está dado por

$$\frac{\dot{N}}{N} = (I+D)(\eta N)$$

El termino ηN es el valor capitalizado de todos los desembolsos para I + D anteriores (de hecho, el número N multiplicado por el costo de reproducción, η, para cada invención. Por lo tanto, la tasa de crecimiento de PTF medida en la ecuación (26) satisface

$$\hat{g} = \frac{\dot{A}}{A} + (1-\alpha)(Flujo\ actual\ de\ I+D)/(Valor\ de\ mercado\ del\ pasado\ I+D)(27)$$

3.1 Modelos de escaleras de calidad

En este punto esperamos que se entienda los procedimientos para llegar a los resultados siguientes, especialmente el cómo llegar a la ecuación 31

El otro modelo destacado de cambios tecnológicos en la literatura reciente de crecimiento endógeno es la formulación de escaleras de calidad de Aghion y Howitt (1992) y Grossman y Helpman (1991, cap. 4). En este marco, el progreso tecnológico consiste en la mejora de la calidad de los insumos intermedios (o equivalentemente, las reducciones en el costo de proporcionar los insumos de determinada calidad). El número de variedades de productos, se asume que son fijos en este contexto, aunque los cambios en este número podrían volver a ser admitidos.

Una simple especificación, explorada en Barro y Sala-i-Martin (1995, cap. 7) utiliza la función de producción

$$Y = AL^{1-\alpha} \sum_{j=1}^{N} (q^{k_j} \chi_{jk_j})^{\alpha} \qquad (28)$$

Donde A es el nivel exógeno de la tecnología, L es la mano de obra 0<α<1, y N es el número fijo de las variedades de productos intermedios. El parámetro q es el espaciado proporcional entre los peldaños de una escalera de calidad determinada. El progreso tecnológico se produce a través de desembolsos en I + D que permiten los movimientos en la escalera de calidad, un paso a la vez. La variable k_j, es la posición más alta en la escalera de calidad que se logra actualmente en el sector j. La variable χ_{jk_j} es la cantidad empleada del tipo *j* de intermedios no duraderos.

El elemento clave del marco de escaleras de calidad, es que los insumos de diferentes grados de calidad de productos intermedios dentro de un determinado sector se modelan como sustitutos perfectos. Insumos clasificados más altos, son simplemente mejores que los de menor puntuación. Por esta razón, menor calidad de intermedios de tipo *j* (en los peldaños k_j-1, k_j-2,...) son expulsados del mercado en equilibrio. Esta obsolescencia tecnológica (o la destrucción creativa) distingue el modelo de escaleras de calidad del marco variedades. En ese marco (explorado en la sección anterior) no se produjo la obsolescencia tecnológica, y nuevas variedades de productos elaborados trabajan al lado de los viejos para producir bienes. (En cierta medida, este resultado depende de la separabilidad aditiva de las cantidades χ_j en la ecuación (21)).

Unidades de χ_{jk_j} son de nuevo los precios en el nivel $1/\alpha$>1, de monopolio, en cada sector. Dada la forma en que se determinan las cantidades χ_{jk_j} (para igualar el producto marginal de cada intermedio al precio de monopolio), la función de producción en la ecuación (28) puede ser reescrita como

$$Y = AL^{1-\alpha}X^{\alpha}Q^{1-\alpha} \qquad (29)$$

Donde $X \equiv \sum_{j=1}^{N} \chi_{jk_j}$ es el gasto total en productos intermedios y Q es un índice de calidad global, dada por

$$Q \equiv \sum_{j=1}^{N} q^{K_j \alpha/(1-\alpha)} \qquad (30)$$

Ecuación (29) implica que el enfoque estándar de contabilidad del crecimiento seria en este modelo

$$\hat{g} = \frac{\dot{Y}}{Y} - s_L\left(\frac{L}{L}\right) - a_x\left(\frac{\dot{X}}{X}\right) = \frac{\dot{A}}{A} + (1-\alpha)\frac{\dot{Q}}{Q} \qquad (31)$$

Donde $s_L = \frac{\omega L}{Y}$ y $s_x = (1-\alpha)\left(\frac{X}{Y}\right)$. Por lo tanto, en este modelo, el residuo de Solow mide la suma del progreso tecnológico exógeno , $\frac{\dot{A}}{A}$, y la tasa de crecimiento de la calidad global, $\frac{\dot{Q}}{Q}$, ponderado por la participación del trabajo $1-\alpha$[41]. Este resultado es similar a la ecuación (26) a partir del modelo variado, salvo que la medida del cambio tecnológico es $\frac{\dot{Q}}{Q}$, en lugar de $\frac{\dot{N}}{N}$. De nuevo, una parte de la contribución del cambio tecnológico $((\alpha)\frac{\dot{Q}}{Q})$ se manifiesta en el crecimiento de los insumos ($\frac{\dot{X}}{X}$), y sólo el resto aparece en el residuo de Solow.

[41] Este análisis trata Q como una variable continua. de hecho, Q se mueve discretamente en el tiempo correspondiente a los efectos de los cambios discretos en el K_j en la ecuación (30). La formulación continua es una razonable aproximación si el número de sectores es grande y los cambios estocásticos en los distintos K_j tienen una cantidad considerable de independencia.

IV. BIBLIOGRAFIA

Abramowitz, M. (1956). “Resource and output trends in the United States since 1870”. American Economic Review, 46(2): 5-23.

Acemoglu, Daron. (n.d)Introduction to Modern Economic Growth: Parts 1-5. Massachusetts Institute of Technology.

Antunez, César (2009). Crecimiento Económico, Modelos de Crecimiento Económico.

Argantoña, Antonio; Gámez Consuelo; Mochón Francisco (1997). Macroeconomía Avanzada II. Mc. Graw Hill.

Barro, Robert (1998). Notes on Growth Accounting. Working paper 6654. Cambridge.

Barro, Robert; Sala-i-Martin, Xavier (2004). Economic Growth. Segunda Edición. Massachussetts Institute of Technology.

Bosworth, B.P. y Collins, S.M. (2003). “The empirics of growth: an update”.

Brookings Papers on Economic Activity, nº 2: 113-179.

César, P (2008) Econometría avanzada. Técnicas y herramientas. Madriz, Pearson Prentice Hall.

David N. Weil (2006). Crecimiento económico, Pearson Addison Wesley,.

David Romer (2006). Macroeconomía Avanzada, tercera edición, McGrawHill.

De la Croix, David; Michel, Philipe Michel (2004). A Theory of Economic Growth. Dynamics and Policy in Overlapping Generations. University of Cambridge.

Dean, E.R. y Harper, M.J. (Eds.) (2001). New developments in productivity analysis. National Bureau of Economic Research, Conference on research in income and wealth. The University of Chicago Press, Chicago, Estados Unidos.

Dowrick, Steve; Pitchford, Rohan; Turnovsky, Stephen (2004). Economic Growth and Macroeconomic Dynamics. Cambridge University Press.

Erauskin I(2009), La Contabilidad Del Crecimiento En La Comunidad Autónoma Del País Vasco, Navarra Y España Durante El Período 1986-2000: Una Perspectiva Sectorial”.

Helpman, E. (2004). The mistery of economic growth. The Belknap press of Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, Estados Unidos.

Hulten, C.R. (2001). “Total factor productivity: a short biography”, en Hulten, C.R.

Jones, Hywell (1988). Introducción a las teorías modernas del crecimiento económico. Bosch, Casa Editorial. Barcelona.

N. Gregory Mankiw; David Romer; David N. Weil. (May, 1992).A Contribution to the Empirics of Economic Growth. The Quarterly Journal of Economics, Vol. 107, No. 2

Roberto Chang (September 2009). New Notes on the Solow Growth Model.

Romer, David (2006). Macroeconomía Avanzada. Tercera edición. Mc Graw Hill.

Sala-I-Martin, Xavier (1994). Apuntes de Crecimiento Económico. Antoni Bosch Editor.

Zhang, Wei-Bin (2005). Differential Equations, Bifurcations, and chaos in economics. Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences-Vol.68. World Scientific.