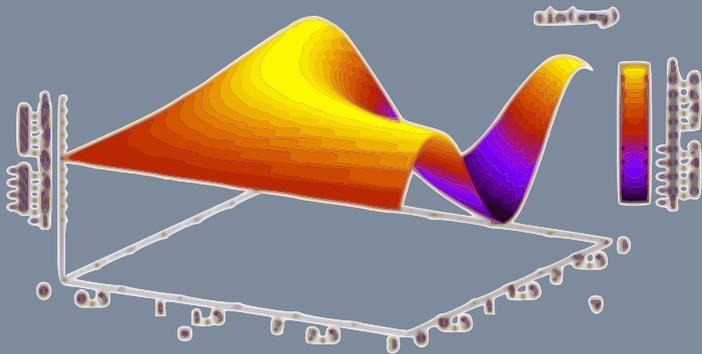


BREVE MANUAL DE *MAXIMA*



R. Ipanaqué

Breve Manual de *Maxima*

Breve Manual de *Maxima*

R. Ipanaqué

Departamento de Ciencias - Área de Matemática
Universidad Nacional de Piura

Robert Ipanaqué Chero

Departamento de Ciencias - Área de Matemática

Universidad Nacional de Piura

Urb. Miraflores s/n, Castilla, Piura

PERÚ

<http://www.unp.edu.pe/pers/ripanaque>

robertchero@hotmail.com

La composición de BREVE MANUAL DE MAXIMA

se ha hecho en \LaTeX , usando el editor libre \TeXMAKER 1.9.9.

Este documento es libre;

se puede redistribuir y/o modificar bajo los términos de la

GNU General Public License tal como lo publica la Free Software Foundation.

Para más detalles véase la GNU General Public License en

<http://www.gnu.org/copyleft/gpl.html>

Mayo 2010, publicado por el grupo [eumednet](http://www.eumed.net)

Grupo de Investigación de la Universidad de Málaga, España

<http://www.eumed.net>

Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional de España

con Resitro N°

ISBN

*En memoria de mi padre,
Juan A. Ipanaqué Vargas*

Índice

Prólogo	v
1. Obtención de <i>Maxima</i>	1
1.1. Descarga	1
1.2. Instalación	2
2. Funcionamiento de <i>Maxima</i>	9
2.1. Interfaz de cuaderno	9
2.2. Interfaz basada en texto	10
3. Uso del sistema <i>Maxima</i>	12
3.1. La estructura de <i>Maxima</i>	12
3.2. Cuadernos como documentos	14
3.3. Configuración de opciones y estilos	17
3.4. Búsqueda de ayuda	19
3.5. Reinicio	22
3.6. Comentarios	23
3.7. Paquetes en <i>Maxima</i>	23
3.8. Advertencias y mensajes	24
3.9. Interrupción de cálculos	25
4. Cálculos numéricos	26
4.1. Aritmética	26
4.2. Resultados exactos y aproximados	27
4.3. Algunas funciones matemáticas	30
4.4. Cálculos con precisión arbitraria	33
4.5. Números complejos	35

5. Generación de cálculos	37
5.1. Uso de entradas y salidas previas	37
5.2. Definición de variables	39
5.3. Secuencia de operaciones	42
5.4. Impresión de expresiones sin evaluar	44
6. Cálculos algebraicos	47
6.1. Cálculo simbólico	47
6.2. Valores para símbolos	50
6.3. Transformación de expresiones algebraicas	54
6.4. Simplificación de expresiones algebraicas	56
6.5. Expresiones puestas en diferentes formas	59
6.6. Simplificación con asunciones	65
6.7. Selección de partes de expresiones algebraicas	66
7. Matemáticas simbólicas	68
7.1. Límites	68
7.2. Diferenciación	70
7.3. Integración	73
7.4. Sumas y Productos	78
7.5. Operadores relacionales y lógicos	81
7.6. Ecuaciones	84
7.7. Solución de Ecuaciones	85
7.8. Ecuaciones diferenciales ordinarias	88
7.9. Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales	90
7.10. Series de potencias	92
7.11. Transformada de Laplace	96
8. Matemáticas numéricas	97
8.1. Solución numérica de ecuaciones	97
8.2. Integrales numéricas	99
9. Funciones y programas	101
9.1. Definición de funciones	101
9.2. Reglas de transformación para funciones	111
9.3. Funciones definidas a partir de expresiones	114
10. Listas	117
10.1. Juntar objetos	117
10.2. Generación de listas	118
10.3. Elección de elementos de una lista	121

10.4. Prueba y búsqueda de elementos de una lista	124
10.5. Combinación de listas	126
10.6. Reordenamiento de listas	127
10.7. Agregar y quitar elementos de una lista	128
10.8. Reorganización de listas	129
10.9. Funciones adicionales para listas	130
11. Arrays	132
12. Matrices	136
12.1. Generación de Matrices	136
12.2. Elegir elementos de matrices	138
12.3. Operaciones matriciales	139
12.4. Funciones adicionales para matrices	144
12.5. Matrices asociadas a sistemas de ecuaciones	147
12.6. Autovalores y autovectores	148
13. Conjuntos	150
13.1. Generación de conjuntos	150
13.2. Conversiones entre conjuntos y listas	152
13.3. Elección de elementos de un conjunto	153
13.4. Prueba y búsqueda de elementos de un conjunto	154
13.5. Agregar y quitar elementos de un conjunto	156
13.6. Reorganización de conjuntos	157
13.7. Operaciones con conjuntos	157
13.8. Funciones adicionales para conjuntos	160
14. Gráficos	162
14.1. Gráficos básicos	163
14.2. Opciones	165
14.3. Gráficos de puntos y líneas	169
14.4. Gráficos paramétricos y polares	172
14.5. Combinación de gráficos	174
14.6. Gráficos de superficies tridimensionales	174
14.7. Gráficos de densidad y contornos	179
14.8. Gráficos animados	180
15. Gráficos con draw	183
15.1. Objetos gráficos bidimensionales	184
15.2. Opciones para los objetos gráficos bidimensionales	192
15.2.1. Opciones locales	192

15.2.2. Opciones locales genéricas	194
15.2.3. Opciones globales	195
15.2.4. Ejemplos ilustrativos	198
15.3. Objetos gráficos tridimensionales	203
15.4. Opciones para objetos gráficos tridimensionales	211
15.4.1. Opciones locales	211
15.4.2. Opciones locales genéricas	212
15.4.3. Opciones globales	212
15.4.4. Ejemplos ilustrativos	214
15.5. Fijación de valores para opciones	217
15.6. Gráficos múltiples	218
15.7. Gráficos animados	220
16. Archivos y operaciones externas	224
16.1. Generación de expresiones y archivos $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$	224
16.2. Generación de archivos HTML	228
16.3. Generación de expresiones Lisp y Fortran	228
17. Programación con <i>Maxima</i>	229
17.1. Operadores relacionales y lógicos	229
17.2. Operadores y argumentos	232
17.3. Programación funcional	235
17.4. Implementación del paquete: ejemplo	237
BIBLIOGRAFÍA	242

Prólogo

Este manual da una introducción al Software Libre *Maxima v5.21.1*, presentándolo como un potente Sistema Algebraico Computacional (Computer Algebraic System, o CAS) cuyo objeto es la realización de cálculos matemáticos, tanto simbólicos como numéricos; además de ser expandible, pues posee un lenguaje de programación propio.

Las razones para apostar por el uso de Software Libre pueden deducirse de las cuatro libertades asociadas a este tipo de Software: *libertad de ejecutarlo, para cualquier propósito; libertad de estudiar cómo trabaja, y cambiarlo a voluntad de quien lo usa; libertad de redistribuir copias para ayudar al prójimo; y libertad de mejorarlo y publicar sus mejoras, y versiones modificadas en general, para que se beneficie toda la comunidad.*

De hecho, las libertades asociadas a todo Software Libre y, en particular, al CAS *Maxima* hacen de éste una formidable herramienta pedagógica accesible a todos los presupuestos, tanto institucionales como individuales. No obstante, somos sinceros en señalar que no posee toda la versatilidad de sus símiles comerciales; pero el hecho que sea gratuito minimiza tal carencia. Hay que señalar, también, que cualquier actualización de un Software Libre puede obtenerse sin obstáculo alguno y así es posible contar inmediatamente con la última versión del mismo. Algo que no sucede con el Software Comercial, a menos que se tenga disponibilidad inmediata de dinero para pagar la actualización.

La idea de elaborar este manual surge de la necesidad de contar con bibliografía propia acerca de un CAS Libre para trabajar con alumnos de un curso de pregrado, los cuales ya estaban familiarizados con el uso de un CAS Comercial. La experiencia ha sido bastante satisfactoria y quedan en el tintero los borradores para la futura elaboración de un

libro en el que se plasmen los resultados obtenidos en tal curso.

Este manual se compone de diecisiete capítulos en los cuales se describen resumidamente las principales características y las funciones incorporadas en el núcleo de *Maxima*. Sin embargo, en el capítulo quince se hace una excepción y se aborda una breve descripción del paquete incorporado `draw`, pues éste amplía la capacidad gráfica que ofrecen las funciones incorporadas en el núcleo de *Maxima*. Además, en el último capítulo se dan los lineamientos generales para la elaboración de paquetes de funciones. Esto con la finalidad que el usuario obtenga el máximo provecho en el uso de *Maxima*.

R. IPANAQUÉ

Piura, Perú

Capítulo 1

Obtención de *Maxima*

Maxima puede funcionar en distintos sistemas operativos, entre ellos diversas variantes de Windows y de GNU/Linux. En este capítulo se tratará acerca de la descarga e instalación de *Maxima* en el sistema operativo Windows (95 o posterior). El lector interesado en utilizar *Maxima* en alguna variante de GNU/Linux, puede acceder a la sección Download de la web de *Maxima* y seguir las instrucciones que en ella se indican.

1.1 Descarga

Maxima se descarga gratuitamente desde la página de **sourceforge** que alberga a una gran cantidad de instaladores de softwares de código abierto¹. Debemos destacar que por el hecho de ser gratuito no requiere de ningún password que siempre está asociada con el software comercial (también llamado software propietario o más acertadamente *software privado*).

La dirección específica donde esta alojado *Maxima* es la siguiente:

<http://sourceforge.net/projects/maxima/files>

¹Código abierto (en inglés open source) es el término con el que se conoce al software distribuido y desarrollado libremente. El código abierto tiene un punto de vista más orientado a los beneficios prácticos de compartir el código que a las cuestiones morales y/o filosóficas las cuales destacan en el llamado software libre.



Figura 1.1: Porción de la página de descarga de *Maxima-5.21.1.exe*. El botón señalado permite la descarga directa de *Maxima* para Windows.

desde donde puede descargarse el archivo *Maxima-5.21.1.exe* que es el instalador de *Maxima* para Windows. Este instalador ocupa 25.3 MB de espacio en memoria.

Una vez descargado el instalador se verá un icono, como el que se aprecia en la figura 1.2, en la carpeta donde éste se haya descargado.

1.2 Instalación

Después de la descarga se procede a instalar *Maxima*, lo cual debe hacerse siguiendo los pasos que se detallan a continuación.



Figura 1.2: Icono del instalador de *Maxima-5.21.1.exe*.

1. Hacer doble clic sobre el icono del instalador.

2. Si aparece un cuadro como el de la figura 1.3, hacer clic sobre el botón **Ejecutar**.



Figura 1.3: Cuadro de verificación.

3. Seleccionar el idioma (por defecto esta seleccionado Español) y hacer clic sobre el botón **Aceptar** (fig. 1.4).

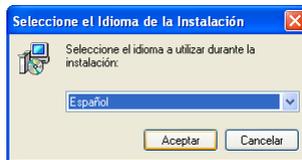


Figura 1.4: Cuadro para seleccionar el idioma.

4. Hacer clic sobre el botón **Siguiente** del cuadro **Bienvenido al asistente de instalación de Maxima** (fig. 1.5).
5. Seleccionar la opción **Acepto el acuerdo** del cuadro **Acuerdo de Licencia**. Luego hacer clic en el botón **Siguiente** del mismo cuadro (fig. 1.6).
6. Hacer clic en el botón **Siguiente** del cuadro **Información** (fig. 1.7).
7. Seleccionar la carpeta en la cual se quiere instalar Maxima (generalmente se deja la carpeta que aparece por defecto) y luego



Figura 1.5: Cuadro **Bienvenido al asistente de instalación de Maxima**.

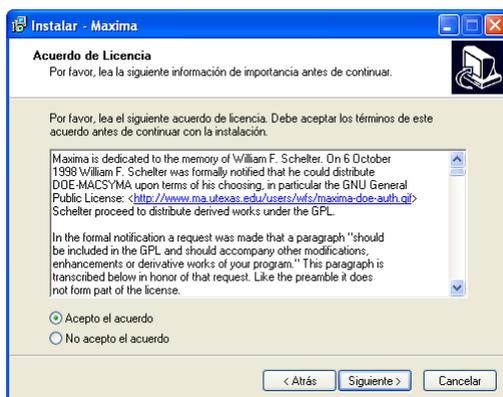


Figura 1.6: Cuadro **Acuerdo de Licencia**.

hacer clic en el botón **Siguiente** del cuadro **Seleccione la Carpeta de Destino** (fig. 1.8).

- En el cuadro **Seleccione los Componentes** desmarcar las casillas **Portugués** y **Portugués Brasileño** ya que sólo utilizaremos el idioma **Español**. Esto permite, a su vez, el ahorro de memoria (fig. 1.9).
- Seleccionar la carpeta del menú **Inicio** en la cual se quiere ubi-

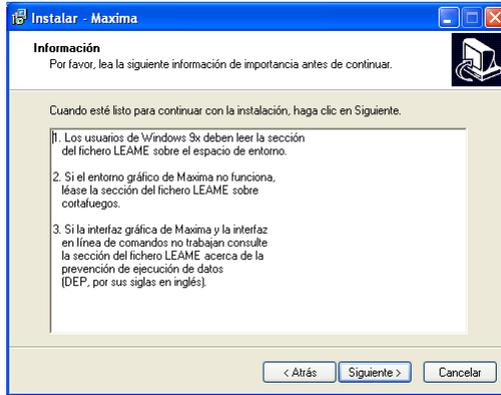


Figura 1.7: Cuadro **Información**.

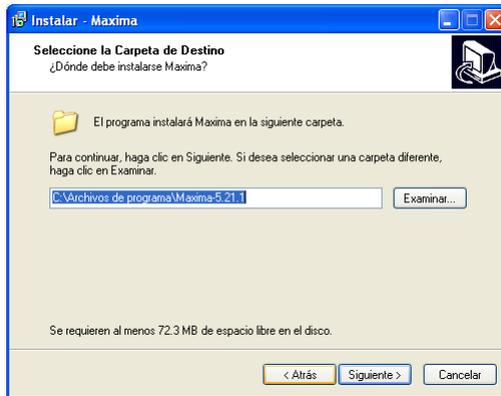


Figura 1.8: Cuadro **Seleccione la Carpeta de Destino**.

car el icono de acceso a *Maxima* (generalmente se deja la carpeta que aparece por defecto) y luego hacer clic en el botón **Siguiente** del cuadro **Seleccione la Carpeta del Menú Inicio** (fig. 1.10).

10. Hacer clic en el botón **Siguiente** del cuadro **seleccione las Tareas Adicionales** para que el asistente cree un icono de acceso directo a *Maxima* en el escritorio (fig. 1.11).
11. Hacer clic en el botón **Instalar** del cuadro **Listo para Instalar**

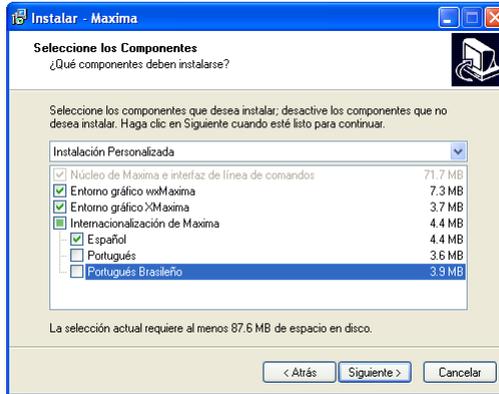


Figura 1.9: Cuadro **Selección de Componentes**.

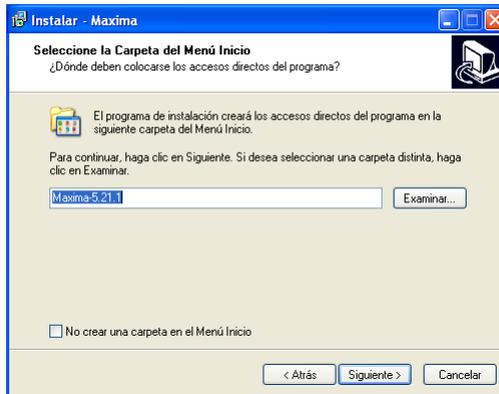


Figura 1.10: Cuadro **Selección de la Carpeta del Menú Inicio**.

(fig. 1.12).

12. Hacer clic en el botón **Siguiente** del cuadro **Información** (fig. 1.13).
13. Por último, hacer clic en el botón **Finalizar** del cuadro **Completando la Instalación de Maxima** (fig. 1.14).

Después de seguir el procedimiento anterior deben haberse instalado: el núcleo de *Maxima* que es el responsable de todos los cálculos

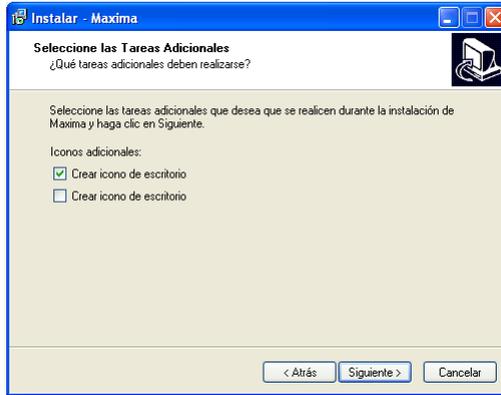


Figura 1.11: Cuadro **Seleccione las Tareas Adicionales**.

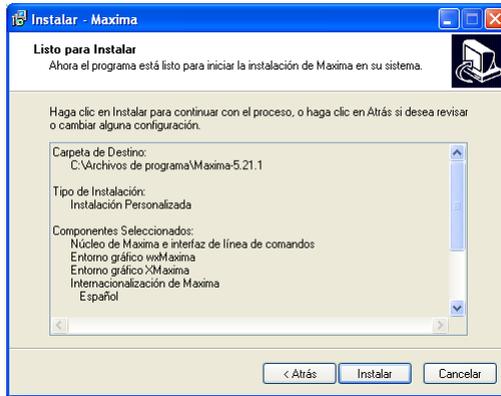


Figura 1.12: Cuadro **Listo para Instalar**.

y permite una interfaz de texto, el entorno gráfico *wxMaxima* que permite una interfaz gráfica (o interfaz de “cuaderno”) bastante amigable, el entorno gráfico *XMaxima* que también permite una interfaz gráfica (aunque menos amigable que *wxMaxima*) y una aplicación para usuarios de habla hispana. Además, debe haberse creado automáticamente, en el escritorio de su ordenador (computadora), el icono de acceso directo al entorno gráfico *wxMaxima* (fig. 1.15).



Figura 1.13: Cuadro **Información**.



Figura 1.14: Cuadro **Completando la Instalación de Maxima**.



Figura 1.15: Icono de acceso directo a *wxMaxima*.

Capítulo 2

Funcionamiento de *Maxima*

2.1 Interfaz de cuaderno

utilice un icono o el menú de Inicio	formas gráficas de inicializar <i>Maxima</i>
finalizar texto con $\boxed{\text{Shift}} + \boxed{\text{Enter}}$	entrada para <i>Maxima</i>
elegir el ítem salida del menú	salir de <i>Maxima</i>

Funcionamiento de *Maxima* en una interfaz de cuaderno.

El acceso a una interfaz de “cuaderno” es factible en un ordenador usado vía una interfaz puramente gráfica (como Windows). En una interfaz de cuaderno, es posible interactuar con *Maxima* creando documentos interactivos. Para ello el usuario debe hacer doble clic en el icono de inicio de *wxMaxima*, después de lo cual se desplegará un cuaderno en blanco. En este cuaderno el usuario digita la entrada (input), luego presiona (en simultáneo) las teclas $\boxed{\text{Shift}} + \boxed{\text{Enter}}$ para que *Maxima* procese su entrada. $\boxed{\text{Shift}} + \boxed{\text{Enter}}$ indica a *Maxima* que el usuario ha finalizado su entrada.

Después de ejecutar una entrada en *Maxima* desde un cuaderno, *Maxima* etiquetará la entrada con $(\%in)$ y después de presionar $\boxed{\text{Shift}} + \boxed{\text{Enter}}$ devolverá la correspondiente salida etiquetada con $(\%on)$.

Maxima

El usuario digita `1+1`, luego finaliza su entrada con `(Shift)+Enter`. *Maxima* procesa la entrada, después etiqueta la entrada con `(%i1)`, y devuelve la respectiva salida etiquetada con `(%o1)`.

```
(%i1) 1+1;
(%o1) 2
```

Debe recordarse que los cuadernos corresponden al entorno gráfico *wxMaxima*. El núcleo de *Maxima* es el que realiza realmente los cálculos (sección 3.1).

Para salir de *wxMaxima*, el usuario elige el ítem salida del respectivo menú en la interfaz de cuaderno.

2.2 Interfaz basada en texto

<code>maxima</code>	comando del sistema operativo para inicializar <i>Maxima</i>
finalizar texto con <code>;</code> + <code>Enter</code>	entrada para <i>Maxima</i>
<code>quit()</code> ;	salir de <i>Maxima</i>

Funcionamiento de *Maxima* en una interfaz basada en texto.

Con una interfaz basada en texto, el usuario interactúa con su ordenador digitando texto mediante el teclado.

Para inicializar *Maxima* en una interfaz basada en texto, se digita el comando `maxima` en el prompt del sistema operativo.

Cuando *Maxima* ha inicializado, imprimirá el prompt `(%i1)`, esto significa que esta lista para que el usuario haga su entrada. Éste puede entonces digitar su entrada, terminándola con `;`+`Enter`.

Maxima procesa la entrada y genera un resultado, el mismo que etiquetará con `(%o1)`.

Obsérvese que la mayor parte de los diálogos dados en el libro muestran salidas en la forma que se obtendrían con una interfaz de

cuaderno de *Maxima*; la salida con una interfaz basada en texto luce similar, pero carece de características tales como caracteres especiales y cambio de tamaño de fuente.

Para salir de *Maxima*, debe digitarse `Quit()`; en el prompt de la entrada.

Capítulo 3

Uso del sistema *Maxima*

3.1 La estructura de *Maxima*

<i>Maxima</i>	núcleo responsable de todos los cálculos
<i>wxMaxima</i>	interfaz de cuaderno que se ocupa de interactuar con el usuario (muy amigable)
<i>XMaxima</i>	interfaz gráfica que se ocupa de interactuar con el usuario (menos amigable que <i>wxMaxima</i>)

Partes básicas del Sistema *Maxima*.

Maxima es un potente motor de cálculo simbólico aunque, en su origen, no destacaba por tener una interfaz gráfica más amigable para los usuarios que la simple consola de texto. Con el tiempo este hecho ha ido cambiando y han aparecido distintos entornos de ejecución que intentan facilitar la interacción con los usuarios. Entre ellos, están *XMaxima* y *wxMaxima*.

XMaxima es la primera interfaz gráfica que fue desarrollada, es mantenida “oficialmente” por el equipo de desarrollo de *Maxima*. En Windows se instala automáticamente. Presenta algunas ventajas como la integración en formato HTML de manuales de ayuda. Sin embargo, también tiene algunas desventajas con respecto a otras inter-

faces más modernas.

*wxMaxima*¹, basada en la biblioteca gráfica *wxwidgets*, gracias a la cual existen versiones nativas tanto para sistemas operativos GNU/Linux como para Windows. Integra elementos específicos para la navegación de la ayuda, introducción de matrices, creación de gráficas, cálculo de límites, derivadas o integrales, etc. Actualmente también se instala automáticamente en Windows.

— *Maxima* —

Un cuaderno que mezcla texto, gráficos con entradas y salidas de *Maxima*.

□ 1 Ejemplos de integrales

He aquí un ejemplo de una integral algebraica muy simple:

```
(%i1) integrate(1/(x^3-1), x);
(%o1) 
$$\frac{\log(x^2+x+1)}{6} - \frac{\operatorname{atan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} + \frac{\log(x-1)}{3}$$

```

Y he aquí un gráfico de la función resultante:

```
(%i2) wxplot2d(%,[x,1,2]);
plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere
(%t2)
(%o2)
```

interfaz de cuaderno con	documentos interactivos
<i>wxMaxima</i>	
interfaz basada en texto	texto desde el teclado

Tipos comunes de interfaz con *Maxima*.

¹*wxMaxima* fue desarrollada por Andrej Vodopivec y está disponible en <http://wxmaxima.sourceforge.net>

En algunos casos, puede que el usuario no necesite usar la interfaz de cuaderno, y que desee en cambio interactuar directamente con el núcleo de *Maxima*. Es posible hacer esto usando la interfaz basada en texto, en la cual se digita el texto en el teclado y éste va directamente al núcleo.

— *Maxima* —

Un diálogo con *Maxima* usando una interfaz basada en texto.

```

Maxima 5.20.1 http://maxima.sourceforge.net
using Lisp GNU Common Lisp (GCL) GCL 2.6.8 (a.k.a. GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
(%i1) 2^100;
      1267650600228229401496703205376
(%i2) integrate(1/(x^3-1),x);
      2 x + 1
      atan(-----)
      sqrt(3)
      log(x^2 + x + 1)
      -----
      6
      sqrt(3)
      +
      log(x - 1)
      -----
      3
(%o2)
(%i3) diff(%2,x);
      2 x + 1
      -----
      2
      2 x + 1
      -----
      6 (x^2 + x + 1)
      +
      1
      -----
      3 (x - 1)
(%o3)
(%i4) radcan(%);
      1
      -----
      3
      x^3 - 1
(%o4)
(%i5) %o1/(2^98);
      4
(%o5)
(%i6) factor(%o4);
      1
      -----
      (x - 1) (x^2 + x + 1)
(%o6)
(%i7) =

```

3.2 Cuadernos como documentos

Los cuadernos de *wxMaxima* permiten crear documentos que pueden verse interactivamente en la pantalla o imprimirse en papel. En los cuadernos extensos, es común tener los capítulos, secciones etc., representados cada uno en grupos de celdas. La extensión de estos grupos de celdas es indicada por el botón asociado a la celda dominante que es una celda de estilo título, sección o subsección.

Un grupo de celdas puede estar abierto o cerrado. Cuando está abierto se puede ver todas sus celdas explícitamente. Pero cuando está cerrado, sólo puede verse la celda que encabeza el grupo de celdas.

Maxima

Un cuaderno de *wxMaxima* como documento.

□ **Título** Este es un botón

□ 1 Sección

▣ Este texto corresponde a la sección 1.

□ 1.1 Subsección

▣ Este texto corresponde a la subsección 1.1.

▣ (%i1) 'integrate(1/(x^3-1),x)=integrate(1/(x^3-1),x);

(%o1)
$$\int \frac{1}{x^3-1} dx = -\frac{\log(x^2+x+1)}{6} - \frac{\operatorname{atan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} + \frac{\log(x-1)}{3}$$

▣ Más texto correspondiente a la subsección 1.1.

□ 1.2 Otra subsección

▣ Este texto corresponde a la otra subsección 1.2.

▣ Más texto correspondiente a la subsección 1.2.

Los cuadernos extensos son a menudo distribuidos con muchos grupos de celdas cerradas, para que cuando sean vistos por primera vez el cuaderno muestre solamente una lista de su contenido. Es posible abrir las partes en las que el usuario esté interesado haciendo clic sobre el botón apropiado.

Maxima

Haciendo clic sobre el botón que corresponde a la celda dominante se cierra el grupo, dejando sólo la primera celda visible.

□ **Título**

□ 1 Sección

▣ Este texto corresponde a la sección.

■ 1.1 Subsección

■ 1.2 Otra subsección

Maxima

Cuando el grupo está cerrado, el botón que le corresponde aparece relleno en color negro. Haciendo clic sobre este botón se abre nuevamente el grupo.

□ **Título**

□ **1 Sección**

Este texto corresponde a la sección 1.

□ **1.1 Subsección**

Este texto corresponde a la subsección 1.1.

```
(%i1) 'integrate(1/(x^3-1),x)=integrate(1/(x^3-1),x);
```

$$(\%o1) \int \frac{1}{x^3-1} dx = -\frac{\log(x^2+x+1)}{6} - \frac{\operatorname{atan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} + \frac{\log(x-1)}{3}$$

Más texto correspondiente a la subsección 1.1.

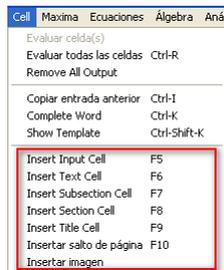
■ **1.2 Otra subsección**

A cada celda dentro de un cuaderno se le asigna un estilo en particular que indica su rol dentro del cuaderno.

La interfaz de *wxMaxima* provee menús y métodos abreviados de teclas para insertar celdas con diferentes estilos todos ellos están disponibles en el último bloque del menú Cell.

Maxima

El recuadro muestra los menús y métodos abreviados de teclas para insertar celdas con diferentes estilos.



Maxima

Esto muestra celdas en diferentes estilos. Los estilos no sólo definen el formato del contenido de las celdas, sino que también su ubicación y espaciado.

- Esta celda está en estilo Título
 - 1 *Esta celda está en estilo Sección*
 - 1.1 **Esta celda está en estilo Subsección**
 - Esta celda está en estilo Texto.
 - --> esta celda está en estilo Input
-

3.3 Configuración de opciones y estilos

Como se vio en la sección 3.2 los cuadernos pueden editarse a manera de documentos. *wxMaxima* incorpora una configuración predefinida para los estilos de los títulos, secciones, etc. Sin embargo, es posible cambiar algunos aspectos de dicha configuración haciendo clic en la opción Preferencias del menú Editar.

Maxima

Primer paso para configurar las opciones y estilos.



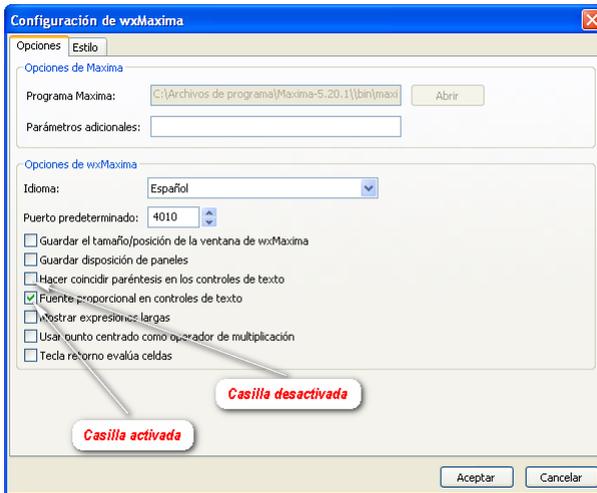
Después de hacer clic en la opción Preferencias se despliega la ventana Configuración de wxMaxima que incorpora dos pestañas: Opciones y Estilo.

Por ejemplo, cuando está activa la casilla de verificación de la opción Hacer coincidir los paréntesis en los controles de texto (de la pestaña Opciones), *Maxima* cierra automáticamente cualquier paréntesis que se abra en una celda de estilo Input. Al desactivar esta casilla, y hacer clic en **Aceptar**, *Maxima* no volverá a cerrar automáticamente ningún paréntesis sino que esperará a que el usuario lo haga.

En la pestaña **Estilo** se presenta una lista de todos los estilos que pueden configurarse a gusto del usuario y la forma de hacerlo es bastante intuitiva.

— *Maxima* —

Activando o desactivando las casillas de verificación se cambia la configuración de las opciones.



Por ejemplo, configurando los estilos con los valores indicados en las siguientes tablas se obtienen cuadernos con un aspecto elegante.

Fuentes	Tipo
Fuente predeterminada	Courier New (12)
Fuente matemática	Courier New (12)

Estilos	Color	Fuente	Aspecto	Tam.
Nombre de funciones	rgb(0,0,0)	Courier New	Gruesa, Itálica	12
Celda de texto	rgb(0,0,0)	Tahoma	Normal	12
Celda de subsección	rgb(188,73,18)	Tahoma	Gruesa	16
Celda de sección	rgb(188,73,18)	Tahoma	Gruesa	18
Celda de título	rgb(54,95,145)	Tahoma	Gruesa	24
Fondo de celda de texto	rgb(252,250,245)			
Fondo	rgb(252,250,245)			

— *Maxima* —

Un cuaderno de *wxMaxima* como documento, después de haber editado la configuración de estilo.

Título

1 Sección

Este texto corresponde a la sección 1.

1.1 Subsección

Este texto corresponde a la subsección 1.1.

`(%i1) 'integrate(1/(x^3-1),x)=integrate(1/(x^3-1),x);`

$$\int \frac{1}{x^3-1} dx = -\frac{\log(x^2+x+1)}{6} - \frac{\operatorname{atan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} + \frac{\log(x-1)}{3}$$

Más texto correspondiente a la subsección 1.1.

1.2 Otra subsección

Este texto corresponde a la otra subsección 1.2.

Más texto correspondiente a la subsección 1.2.

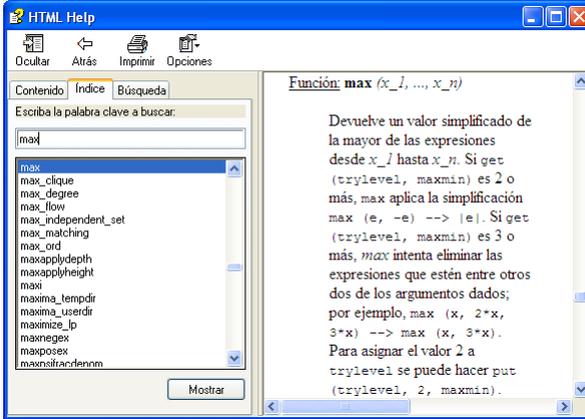
3.4 Búsqueda de ayuda

Todas las funciones incorporadas en *Maxima* están descritas en el manual en línea del usuario, el cual puede ser consultado en diferentes formas. La más usada es desde el menú **Ayuda**, de la barra de menús, que da acceso a la opción **Ayuda de Maxima** la cual sirve como un

punto de entrada a la gran cantidad de documentación en línea para *Maxima*.

— *Maxima* —

Un ejemplo de búsqueda de información básica sobre una función en el Índice de la Ayuda de *Maxima*



Para buscar ayuda desde un cuaderno de trabajo puede utilizarse la función `describe`².

<code>describe(string)</code>	encuentra el elemento, si existe, cuyo título coincide exactamente con <i>string</i> (ignorando la diferencia entre mayúsculas y minúsculas)
<code>describe(string,exact)</code>	equivale a <code>describe(string)</code>
<code>describe(string,inexact)</code>	encuentra todos los elementos documentados que contengan <i>string</i> en sus títulos

Sintaxis de la función `describe`, la cual permite recibir información de las funciones de *Maxima*.

²`describe` no evalúa su argumento. La función `describe` devuelve `true` si encuentra la documentación solicitada y `false` en caso contrario.

```
?name  equivale a describe("name")
??name equivale a
        describe("name",inexact)
```

Otras formas de recibir información.

Maxima

Esta sentencia da información de la función incorporada `max`.

```
(%i1) describe("max");
--Función: max(< x_1 >, ..., < x_n >)
```

Devuelve un valor simplificado de la mayor de las expresiones desde `< x_1 >` hasta `< x_n >`. Si `'get(trylevel,maxmin)'` es 2 o más, `'max'` aplica la simplificación `'max(e, e) --> |e|'`. Si `'get(trylevel,maxmin)'` es 3 o más, `'max'` intenta eliminar las expresiones que estén entre dos de los argumentos dados; por ejemplo, `'max(x, 2 * x, 3 * x) --> max(x, 3 * x)'`. Para asignar el valor 2 a `'trylevel'` se puede hacer `'put(trylevel, 2, maxmin)'`.

There are also some inexact matches for `'max'`.

Try `'??max'` to see them.

```
(%o1) true
```

Maxima

Esta sentencia encuentra todos los elementos documentados que contienen `"plus"` en sus títulos. No devuelve `true` o `false` hasta que el usuario seleccione las opciones que desee consultar (aquí las opciones disponibles son: 0,1,2,3, all y none).

```
(%i2) describe("plus",inexact);
0: doscmxplus (Funciones y variables para las matrices y el álgebra lineal).
1: poisplus (Series de Poisson)
2: region_boundaries_plus (Funciones y variables para worldmap)
3: trigexpandplus (Funciones y variables para trigonometría)
```

Enter space-separated numbers, `'all'` or `'none'`:

Maxima

Una vez elegidas las opciones (en este caso 0 y 2) la sentencia devuelve `true`.

```
(%i2) describe("plus", inexact);
```

0: doscmxplus (Funciones y variables para las matrices y el álgebra lineal).

1: poisplus (Series de Poisson)

2: region_boundaries_plus (Funciones y variables para worldmap)

3: trigexpandplus (Funciones y variables para trigonometría)

Enter space-separated numbers, 'all' or 'none': 0 2;

--Variable opcional: doscmxplus

Valor por defecto: 'false'.

Cuando 'doscmxplus' vale 'true', las operaciones entre escalares y matrices dan como resultado una matriz.

--Función: region_boundaries_plus(< x1 >, < y1 >, < x2 >, < y2 >)

Detecta los segmentos poligonales almacenados en la variable global

'boundaries_array' con al menos un vértice dentro del rectángulo definido por los extremos (< x1 >, < y1 >) -superior izquierdo- y (< x2 >, < y2 >) -inferior derecho-.

Ejemplo.

```
(%i1) load(worldmap);
```

```
(%i2) region_boundaries(10.4,41.5,20.7,35.4);
```

```
(%o2) [1846, 1863, 1864, 1881, 1888, 1894]
```

```
(%i3) draw2d(geomap(%))$
```

```
(%o2) true
```

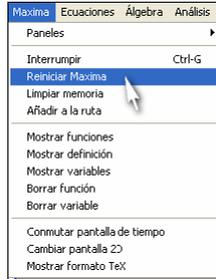
3.5 Reinicio

La forma brusca de reiniciar *Maxima* es saliendo de *Maxima*. No obstante, en muchos casos resulta útil reiniciar *Maxima* sin salir de

Maxima. Para reiniciar *Maxima* sin salir de *Maxima* se elige la opción Reiniciar Maxima del menú Maxima.

— *Maxima* —

Reiniciando Maxima en una interfaz de cuaderno.



3.6 Comentarios

Los comentarios son toda una serie de caracteres que no afectan los cálculos. En *Maxima* los comentarios se escriben entre las marcas `/*` y `*/`.

`/*comentario/*` con esta sintaxis *comentario* es interpretado como un comentario

Escribiendo comentarios.

— *Maxima* —

Aquí se muestra un cálculo y un comentario.

```
(%i3) 4+5 /*esto es una suma*/;
(%o3) 9
```

3.7 Paquetes en *Maxima*

Una de las características más importantes de *Maxima* es que es un sistema extensible, hay una cierta cantidad de funciones incorporadas

en *Maxima* pero, usando el lenguaje de programación de *Maxima*, siempre es posible añadir más funciones.

Para muchos tipos de cálculos, lo incorporado en la versión estándar de *Maxima* será suficiente. Sin embargo, si se trabaja en particular en un área especializada, es posible encontrarse en la necesidad de utilizar ciertas funciones no incorporadas en *Maxima*.

En tales casos, podría ser factible encontrar (o elaborar) un paquete (paquete) de funciones de *Maxima* que contenga las funciones que sean necesarias.

```
load(“paquete”) lee un paquete de Maxima
```

Leyendo paquetes de *Maxima*.

Si el usuario quiere usar las funciones de un paquete en particular, primero debe inicializar el paquete en *Maxima*.

Maxima

Con estas sentencias se está inicializando y utilizando una función de un paquete en particular de *Maxima*.

```
(%i4) load(“simplex”);
(%i5) minimize_lp(x+y,[3*x+2*y>2,x+4*y>3]);
(%o5) [ $\frac{9}{10}$ , [ $y = \frac{7}{10}$ ,  $x = \frac{1}{5}$ ]]
```

El hecho de que *Maxima* pueda extenderse usando paquetes significa que las posibilidades de *Maxima* son ilimitadas. En lo que al uso concierne, no hay en realidad ninguna diferencia entre las funciones definidas en paquetes y las funciones incorporadas en *Maxima*.

3.8 Advertencias y mensajes

Maxima “sigue” el trabajo del usuario silenciosamente, dando salida solamente cuando éste lo requiere. Sin embargo, si *Maxima* se percata de algo que se pretende hacer y que definitivamente no entiende, imprimirá un mensaje de advertencia.

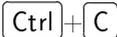
Maxima

La función para calcular la raíz cuadrada debe tener solamente un argumento. *Maxima* imprime un mensaje para advertir que, en este caso, se ha errado en el número de argumentos.

```
(%i6) sqrt(4,5);
Wrong number of arguments to sqrt
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

3.9 Interrupción de cálculos

Probablemente habrá veces en que el usuario desee detener *Maxima* en medio de un cálculo. Tal vez él se da cuenta que pidió a *Maxima* hacer un cálculo incorrecto. O quizás el cálculo tarda demasiado, y quiere saber que es lo que pasa. La forma en que se interrumpa un cálculo en *Maxima* depende de qué clase de interfaz está utilizando.

Clic en el botón 	interfaz de cuaderno
	interfaz basada en texto

Formas de interrumpir cálculos en *Maxima*.

x^y ó $x**y$	potencia
$-x$	menos
x/y	división
$x*y*z$	producto
$x+y+z$	suma

Operaciones aritméticas en *Maxima*.

Las operaciones aritméticas en *Maxima* se agrupan de acuerdo con las convenciones estándares de la matemática. Como es usual, $2+3/7$, por ejemplo, significa $2+(3/7)$, y no $(2+3)/7$. El usuario siempre puede controlar la forma de agrupar explícitamente usando los paréntesis.

4.2 Resultados exactos y aproximados

Una calculadora electrónica hace todos sus cálculos con una precisión determinada, digamos de diez dígitos decimales. Con *Maxima*, en cambio, es posible obtener resultados exactos.

```

Maxima
Maxima da un resultado exacto para  $2^{300}$ .

(%i4) 2^300;
(%o4) 20370359763344860862684456884093781610514683936
      65936250636140449354381299763336706183397376

```

El usuario puede pedir a *Maxima* que devuelva un resultado aproximado, tal como lo daría una calculadora, para ello puede usar la función `float` o la variable `numer` o una combinación de ambos.

```

Maxima
Esto da un resultado numérico aproximado.

(%i5) 2^300,float;
(%o5) 2,0370359763344861 10^90

```

<code>float(<i>expr</i>)</code>	da un valor numérico aproximado para ciertas <i>expr</i>
<code><i>expr</i>, float</code>	equivale a <code>float(<i>expr</i>)</code>
<code><i>expr</i>, numer</code>	da un valor numérico aproximado para ciertas <i>expr</i>
<code>float(<i>expr</i>), numer</code>	da un valor numérico aproximado para cualquier <i>expr</i> que no sea una constante

Obteniendo aproximaciones numéricas.

— *Maxima* —

Esta forma también da un resultado numérico aproximado.

```
(%i6) float(2^300);
(%o6) 2.0370359763344861 1090
```

— *Maxima* —

Para el cálculo previo la constante `numer` no es útil.

```
(%i7) 2^300, numer;
(%o7) 20370359763344860862684456884093781610514683936
65936250636140449354381299763336706183397376
```

— *Maxima* —

Maxima puede dar resultados en términos de números racionales.

```
(%i8) 1/3+2/7;
(%o8)  $\frac{13}{21}$ 
```

— *Maxima* —

En este caso, tanto con `float` como con `numer`, se obtiene un resultado numérico aproximado.

```
(%i9) 1/3+2/7, float;
(%o9) 0.61904761904762
```

```
(%i10) 1/3+2/7,numer;
(%o10) 0.61904761904762
```

Cuando el usuario digita un entero como 7, *Maxima* asume que es exacto. Si digita un número como 4.5, con un punto decimal explícito, *Maxima* asume que desea efectuar cálculo numérico aproximado.

— *Maxima* —

Esto es tomado como un número racional exacto, y es llevado a una fracción irreducible.

```
(%i11) 26/78;
(%o11) 1/3
```

— *Maxima* —

Cuando el usuario digita un número con un punto decimal explícito, *Maxima* produce un resultado numérico aproximado.

```
(%i12) 26.7/78;
(%o12) 0.34230769230769
```

— *Maxima* —

Aquí, la presencia del punto decimal seguido del cero hace que *Maxima* dé un resultado numérico aproximado.

```
(%i13) 26.0/78;
(%o13) 0.33333333333333
```

— *Maxima* —

Cuando cualquier número en una expresión aritmética es digitado con un punto decimal seguido del cero, el usuario obtiene un resultado numérico aproximado.

```
(%i14) 5.0+9/78-5/8;
(%o14) 4.490384615384615
```

4.3 Algunas funciones matemáticas

Maxima incluye una gran colección de funciones matemáticas. A continuación se mencionan las más comunes.

<code>sqrt(x)</code>	raíz cuadrada (\sqrt{x})
<code>exp(x)</code>	exponencial (e^x)
<code>log(x)</code>	logaritmo neperiano ($\log_e x$)
<code>sin(x)</code> , <code>cos(x)</code> , <code>tan(x)</code> , <code>cot(x)</code> , <code>sec(x)</code> , <code>csc(x)</code>	funciones trigonométricas (con argumentos en radianes)
<code>asin(x)</code> , <code>acos(x)</code> , <code>atan(x)</code> , <code>acot(x)</code> , <code>asec(x)</code> , <code>acsc(x)</code>	funciones trigonométricas inversas
<code>n!</code>	factorial de n (producto de los enteros $1, 2, \dots, n$)
<code>n!!</code>	$1 \times 3 \times \dots \times n$ (n impar) ó $2 \times 4 \times \dots \times n$ (n par)
<code>abs(x)</code>	valor absoluto
<code>round(x)</code>	redondeo
<code>mod(n,m)</code>	n módulo m (resto de la división de n entre m)
<code>floor(x)</code>	mayor entero de x
<code>random(x)</code>	número pseudo aleatorio r , tal que $0 \leq r < x$, si $x \in \mathbb{N}$ ó $0 < r < x$, si $x \in \mathbb{R}^+$
<code>max(x,y,...)</code> , <code>min(x,y,...)</code>	máximo, mínimo de x, y, \dots
<code>ifactor(n)</code>	factores primos de n

Algunas de las funciones matemáticas más comunes.

- Los argumentos de todas las funciones en *Maxima* se colocan entre paréntesis.
- Los nombres de las funciones incorporadas en *Maxima* empiezan con letra minúscula.

Dos puntos importantes acerca de funciones en *Maxima*.

— *Maxima* —

Esto da $\log_e 15,7$.

```
(%i15) log(15.7);  
(%o15) 2.753660712354262
```

— *Maxima* —

Maxima no tiene definida una función para el logaritmo de base 10 u otras bases. Para salvar esta dificultad el usuario puede hacer uso de la igualdad matemática $\log_b x = \frac{\log_e x}{\log_e b}$. Así, por ejemplo, lo siguiente devuelve un resultado numérico para $\log_2 1024$.

```
(%i16) log(1024)/log(2), numer;  
(%o16) 10.0
```

— *Maxima* —

Esto devuelve $\sqrt{64}$ como un número exacto.

```
(%i17) sqrt(64);  
(%o17) 8
```

— *Maxima* —

Esto da un valor numérico aproximado para $\sqrt{6}$.

```
(%i18) sqrt(6), numer;  
(%o18) 2.449489742783178
```

— *Maxima* —

La presencia explícita de un punto decimal seguido de un cero le indica a *Maxima* que dé un resultado numérico aproximado.

```
(%i19) sqrt(6.0);  
(%o19) 2.449489742783178
```

Maxima

En este caso *Maxima* devuelve un número en forma simbólica exacta.

```
(%i20) sqrt(6);
(%o20)  $\sqrt{6}$ 
```

Maxima

Aquí tenemos un resultado entero exacto para $40 \times 39 \times \dots \times 1$.

```
(%i21) 40!;
(%o21) 81591528324789773434561126959611589427200000000
```

Maxima

Esto da un valor numérico aproximado del factorial.

```
(%i22) float(40!);
(%o22) 8,1591528324789768 1047
```

<code>%e</code>	$e \approx 2,718281828459045$
<code>%i</code>	$i = \sqrt{-1}$
<code>inf</code>	representa al infinito real positivo
<code>minf</code>	representa al infinito real negativo
<code>infinity</code>	representa al infinito complejo
<code>und</code>	representa un resultado indefinido
<code>%pi</code>	$\pi \approx 3,141592653589793$

Algunas constantes matemáticas comunes.

Maxima

Este es el valor numérico de π^2 .

```
(%i23) %pi^2, numer;
(%o23) 9.869604401089358
```

Maxima

Esto devuelve el valor exacto para $\text{sen}(\pi/2)$.

```
(%i24) sin(%pi/2);
(%o24) 1
```

4.4 Cálculos con precisión arbitraria

Cuando el usuario utiliza `float`, `numer` o una combinación de ambos para obtener un resultado numérico, *Maxima* devuelve el resultado con un número fijo de cifras significativas. No obstante, es posible indicar a *Maxima* las cifras significativas con las que se desea operar. Esto permite obtener resultados numéricos en *Maxima* con cualquier grado de precisión.

<code>fpprec : n\$ bfloat(<i>expr</i>)</code>	valor numérico de <i>expr</i> calculado con
	ó <i>n</i> dígitos de precisión (el valor por defecto es 16)
<code>fpprec : n\$ <i>expr</i>, bfloat</code>	

Evaluación numérica con precisión arbitraria.

Maxima

Esto devuelve el valor numérico de π con un número fijo de cifras significativas.

```
(%i25) float(%pi);
(%o25) 3.141592653589793
```

Maxima

Esto devuelve π con 50 dígitos.

```
(%i26) fpprec : 50$ bfloat(%pi);
(%o27) 3.141592653589793238462643383279502884197169399
3751b0
```

Cabe mencionar que el símbolo de dolar que aparece después del número que indica la cantidad de dígitos significativos se utiliza, en general, para finalizar una sentencia y, a diferencia del punto y coma, no permite que aparezca ninguna salida en pantalla (subsec. 5.3).

Al realizar cualquier tipo de cálculo numérico el usuario puede introducir pequeños errores de redondeo en sus resultados. Cuando se aumenta la precisión numérica estos errores se hacen más pequeños. Asegurarse que se obtiene la misma respuesta al aumentar la precisión numérica es a menudo una buena forma de verificar los resultados.

Maxima

La cantidad $e^{\pi\sqrt{163}}$ esta bastante próxima a ser entera. Para verificar que el resultado no es, de hecho, un entero, usted tiene que usar la precisión numérica suficiente.

```
(%i28) fpprec : 40$ bfloat(exp(%pi * sqrt(163)));
(%o29) 2.625374126407687439999999999992500725972b17
```

El usuario que desee, por ejemplo, visualizar π con una precisión de 200 cifras significativas, o 2^{1000} con el total de las cifras, utilizando las sentencias aquí descritas encontrará que la salida se muestra truncada en la parte central, en la cual aparece un número que indica la cantidad de dígitos faltantes.

Maxima

Esto devuelve una salida de π con 200 dígitos, la cual ha sido truncada. El dato entre los corchetes indica que se han obviado 443 dígitos

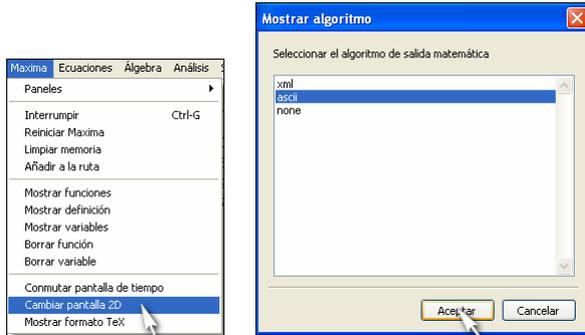
```
(%i30) fpprec : 200$ bfloat(%pi);
(%o31) 3.1415926535897932384626433832[443 digits]88575
27248912279381830119491b0
```

Para obtener una salida completa se selecciona `ascii` como el *algoritmo de salida matemática* de la opción `Cambiar pantalla 2D` del menú `Maxima` y luego se ejecutan las sentencias de `(%i30)`.

Téngase presente que el algoritmo de salida matemática, previamente seleccionado (`ascii`), prevalecerá hasta que el usuario vuelva a seleccionar como algoritmo de salida matemática a `xml`.

Maxima

Seleccionando `ascii` como el *algoritmo de salida*.



Maxima

Después de cambiar el *algoritmo de salida matemática* se devuelve la salida π con 200 dígitos.

```
(%i32) fpprec : 200$ bfloat(%pi);
(%o33) 3.141592653589793238462643383279502884197169399
37510582097494459230781640628620899862803482534
21170679821480865132823066470938446095505822317
25359408128481117450284102701938521105559644622
948954930382b0
```

4.5 Números complejos

Es posible ingresar números complejos en *Maxima* con sólo incluir la constante `%i`, igual a $\sqrt{-1}$.

Maxima

Esto devuelve como resultado el número imaginario $2i$.

```
(%i34) sqrt(-4);
(%o34) 2%i
```

Maxima

Esto devuelve la división de dos números complejos.

```
(%i35) (8 + 4 * %i)/(-1 + %i),rectform;
(%o35) -6%i - 2
```

Maxima

Aquí tenemos el valor numérico de un exponencial complejo.

```
(%i36) exp(11 + 5 * %i),numer;
(%o36) 16984,02989166794 - 57414,76791532402%i
```

$x + %i*y$	el número complejo $x + i y$
<code>realpart(z)</code>	parte real
<code>imagpart(z)</code>	parte imaginaria
<code>conjugate(z)</code>	complejo conjugado z^* ó \bar{z}
<code>cabs(z)</code>	módulo de z
<code>carg(z)</code>	el argumento φ en $ z e^{i\varphi}$

Operaciones con números complejos.

Capítulo 5

Generación de cálculos

5.1 Uso de entradas y salidas previas

Al realizar cálculos, muchas veces se necesita usar expresiones previamente ingresadas u obtenidas. En *Maxima*, `_` y `%` siempre hacen referencia a la última expresión de entrada y salida, respectivamente.

<code>_</code>	la última expresión de entrada
<code>%</code>	la última expresión de salida
<code>%in</code>	la expresión de la entrada <code>%in</code>
<code>%on</code>	la expresión de la salida <code>%on</code>
<code>%th(i)</code>	la expresión de la i -ésima salida anterior

Formas de hacer referencia a expresiones de entrada y salida previas.

Para efectos didácticos, a partir de esta sección se supone un reinicio de *Maxima* (sec. 3.5).

— *Maxima* —

Aquí se tienen las expresiones de la primera entrada y salida.

```
(%i1) 5^3;  
(%o1) 125
```

Maxima

Esto agrega 6 a la expresión de la última salida.

```
(%i2)  %+6;
(%o2)  131
```

Maxima

Esto utiliza las dos expresiones de las salidas previas.

```
(%i3)  5+%o1+%;
(%o3)  261
```

Maxima

Esto suma las expresiones de las salidas 1 y 3.

```
(%i4)  %o1+%o3;
(%o4)  386
```

Maxima

Aquí se eleva al cuadrado la expresión de la salida 2.

```
(%i5)  %o2^2;
(%o5)  17161
```

Si se utiliza una interfaz basada en texto en *Maxima*, entonces las líneas sucesivas de entradas y salidas aparecerán siempre en orden. Sin embargo, si se utiliza una interfaz de cuaderno, varias líneas sucesivas de entradas y salidas no necesariamente aparecen en orden. Es posible, por ejemplo, “volver atrás” e insertar el cálculo siguiente dondequiera que se desee en el cuaderno. Téngase en cuenta que % siempre invoca el último resultado que *Maxima* generó. Éste puede o no ser el resultado que aparece inmediatamente encima de su actual posición en el cuaderno. Con una interfaz de cuaderno, la única manera de saber cuándo un resultado particular fue generado es mirar la etiqueta de (%on) que tiene. Como es posible insertar y suprimir en

todas partes en un cuaderno, de acuerdo a la necesidad del usuario, el ordenamiento de los resultados, por lo general, no tiene ninguna relación con el orden en el cual los resultados fueron generados.

5.2 Definición de variables

Cuando se efectúan cálculos extensos, muchas veces es conveniente dar nombre a los resultados intermedios. De igual modo que en las matemáticas tradicionales o en otros lenguajes de programación, es posible hacer esto introduciendo *variables* con un nombre específico.

— *Maxima* —

Esto inicializa el valor de la variable x con 6.

```
(%i6) x:6;
(%o6) 6
```

— *Maxima* —

Donde quiera que aparezca x , *Maxima* la reemplaza por su valor 6.

```
(%i7) x^3-25
(%o7) 191
```

— *Maxima* —

Esto asigna un nuevo valor para x .

```
(%i8) x:11+5
(%o8) 16
```

— *Maxima* —

π es inicializada con el valor numérico de π con 20 dígitos de exactitud.

```
(%i9) fpprec:20$
(%i10) pi:%pi,bfloat;
(%o10) 3.1415926535897932385b0
```

Maxima

Aquí está el valor de `sqrt(pi)`.

```
(%i1) sqrt(pi)
(%o1) 1.7724538509055160273b0
```

<code>x : valor</code>	asigna un valor a la variable x
<code>x : y : valor</code>	asigna un valor a las variable x e y
<code>kill(x)</code>	quita cualquier valor asignado a x
<code>kill(x, y)</code>	quita cualquier valor asignado a x e y
<code>values</code>	muestra las variables a las que se les ha asignado un valor

Manipulación de variables.

Es muy importante recordar que los valores asignados a las variables son permanentes. Una vez que el usuario ha asignado un valor a una variable en particular, el valor será almacenado hasta que éste lo remueva explícitamente. El valor, claro está, desaparecerá si el usuario inicia una nueva sesión con *Maxima*.

Olvidarse de las definiciones hechas es la causa más común de errores al usar *Maxima*. Si el usuario pusiera `x:5`, *Maxima* asume que éste siempre quiere que `x` tenga el valor 5, hasta o a menos que se le indique explícitamente otra cosa. Para evitar los errores, deben quitarse los valores definidos en cuanto se haya terminado de usarlos.

- Quite valores que asigne a las variables en cuanto termine de usarlos.
-

Un principio útil al usar *Maxima*.

Maxima

Inicializando el valor de la variable y con 9.

```
(%i12) y:9;
(%o12) 9
```

Maxima

Aquí se muestran todas las variables que tienen un valor asignado.

```
(%i13) values;
(%o13) [x,π,y]
```

Maxima

Sentencia para quitar el valor asignado a la variable x .

```
(%i14) kill(x);
(%o14) done
```

Maxima

Sentencia para quitar el valor asignado a todas las variables.

```
(%i15) kill(values);
(%o15) done
```

Las variables que el usuario define pueden tener cualquier nombre. No hay límite para la longitud de sus nombres. Un inconveniente, sin embargo, es que los nombres de las variables nunca pueden empezar con números. Por ejemplo, $x3$ puede ser una variable, pero $3x$ corresponde a una sintaxis incorrecta en *Maxima*.

Maxima

He aquí cuatro variables diferentes.

```
(%i16) EstoEsUnaVariable:4/3;
(%o16)  $\frac{4}{3}$ 
(%i17) Esto_Es_Una_Variable:5^3;
(%o17) 125
(%i18) estoesanavariab:8;
(%o18) 8
(%i19) esto_es_una_variable:sqrt(7);
(%o19)  $\sqrt{7}$ 
```

Maxima

Con `values` visualizamos las nuevas variables a las que se les ha asignado un valor.

```
(%i20) values;
(%o20) [EstoEsUnaVariable,Esto_Es_Una_Variable,
        estoesanavariabile,esto_es_una_variable]
```

Maxima

Es posible realizar operaciones diversas con estas variables.

```
(%i21) (Esto_Es_Una_Variable^2+esto_es_una_variable*
        estoesanavariabile)/EstoEsUnaVariable;
(%o21) 
$$\frac{3(8\sqrt{7} + 15625)}{4}$$

```

Maxima

Con `kill(all)` también se quita el valor asignado a todas las variables.

```
(%i22) kill(all);
(%o22) done
```

Maxima

Esta vez `values` no encuentra ninguna variable con valor asignado.

```
(%i23) values;
(%o23) [ ]
```

5.3 Secuencia de operaciones

Al realizar cálculos con *Maxima*, usualmente se lo hace mediante una secuencia de pasos. Si el usuario desea puede realizar cada paso en una línea separada. A veces, sin embargo, es conveniente ingresar varios pasos en una misma línea. Es posible hacer esto simplemente separando cada una de las partes ingresadas con punto y coma (si

quiere verse las salidas en pantalla) o con signo de dolar (si no quiere verse salida alguna).

<code>expr₁;expr₂;...;expr_n;</code>	hace varias operaciones y da el resultado de todas ellas
<code>expr₁ \$ expr₂ \$... \$ expr_n \$</code>	hace varias operaciones y no muestra ningún resultado
<code>expr₁ \$ expr₂ \$... \$ expr_n;</code>	hace varias operaciones y da el resultado de la última línea

Formas de hacer secuencias de operaciones en *Maxima*.

Maxima

Esto realiza tres operaciones en una misma línea y muestra todos los resultados.

```
(%i24) x:3;y:4;z:x+y;
(%o24) 3
(%o25) 4
(%o26) 7
```

Maxima

Esto realiza tres operaciones en una misma línea sin mostrar resultados.

```
(%i27) x:3 $ y:4 $ z:x+y $
```

Maxima

Esto realiza tres operaciones en una misma línea y muestra el resultado de la última operación.

```
(%i30) x:3 $ y:4 $ z:x+y;
(%o32) 7
```

Si el usuario finaliza su entrada con un signo de dolar, esto es interpretado por *Maxima* como si estuviera ingresando una secuencia de operaciones con un signo de dolar al final; así que tiene el efecto

de hacer que *Maxima* calcule las operaciones especificadas, pero no muestre la salida.

```
expr $ realiza una operación, pero no muestra
la salida
```

Inhibiendo la salida.

— *Maxima* —

Añadiendo un signo de dolar al final de la línea se le indica a *Maxima* que no muestre la salida.

```
(%i33) x:47+5$
```

— *Maxima* —

Usando % se puede visualizar la salida anterior.

```
(%i34) %
(%o34) 52
```

5.4 Impresión de expresiones sin evaluar

El operador comilla simple evita la evaluación. Aplicado a un símbolo, la comilla simple evita la evaluación del símbolo. Aplicado a la invocación de una función, la comilla simple evita la evaluación de la función invocada, aunque los argumentos de la función son evaluados (siempre y cuando la evaluación no se evite de otra manera). Aplicado a una expresión con paréntesis, la comilla simple evita la evaluación de todos los símbolos y llamadas a funciones que hayan en la expresión.

— *Maxima* —

Esto asigna valores a las variables *a* y *b*.

```
(%i35) a:45$ b:56$
```

<code>'a</code>	evita la evaluación del símbolo a
<code>'f(x)</code>	evita la evaluación de la función f , pero no de sus argumentos
<code>'(expr)</code>	evita la evaluación de todos los símbolos y llamadas a funciones que hayan en la expresión $expr$

Evitando la evaluación.

— *Maxima* —

El operador comilla simple (`'`) aplicado a la variable a evita la evaluación de ésta.

```
(%i37) 'a
(%o37) a
```

— *Maxima* —

El operador `'` aplicado a la función `integrate` evita la evaluación de ésta.

```
(%i38) 'integrate(x^3,x);
(%o38)  $\int x^3 dx$ 
```

— *Maxima* —

Un uso interesante del operador `'`.

```
(%i39) 'integrate(x^3,x)=integrate(x^3,x);
(%o39)  $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$ 
```

— *Maxima* —

El operador `'` no evita la evaluación de los argumentos de una función.

```
(%i40) 'integrate((2+3)*x^3,x);
(%o40)  $5 \int x^3 dx$ 
```

Maxima

El operador ' aplicado a una expresión.

```
(%i41) '(2*sqrt(a)+b*integrate(x^3,x));
```

```
(%o41) b ∫ x3 dx + 2√a
```

Maxima

Otro uso interesante del operador '.

```
(%i42) '(2*sqrt(a)+b*integrate(x^3,x))=(2*sqrt(a)+
b*integrate(x^3,x));
```

```
(%o42) b ∫ x3 dx + 2√a = 14x4 + 6√5
```

Capítulo 6

Cálculos algebraicos

6.1 Cálculo simbólico

Una de las características importantes de *Maxima* es que puede hacer cálculos simbólicos y numéricos. Esto significa que puede manejar fórmulas algebraicas así como números.

```
┌─── Maxima ───┐
He aquí un típico cálculo numérico.

(%i1) 4 + 36 - 1;
(%o1) 39
└──────────┘
```

```
┌─── Maxima ───┐
Este es un cálculo simbólico.

(%i2) 7 * x - 3 * x + 6;
(%o2) 4 x + 6
└──────────┘
```

Cálculo numérico	$4 + 36 - 1 \rightarrow 39$
Cálculo simbólico	$7x - 3x + 6 \rightarrow 4x + 6$

Cálculo simbólico y numérico.

Maxima

El usuario puede digitar cualquier expresión algebraica en *Maxima*.

(%i3) $x^3 + 2 * x - 1;$

(%o3) $x^3 + 2x - 1$

Maxima

Maxima realiza automáticamente simplificaciones algebraicas básicas. Aquí combina a x^2 y a $-4x^2$ para dar $-3x^2$.

(%i4) $x^2 + x - 4 * x^2;$

(%o4) $x - 3x^2$

Es posible digitar cualquier expresión algebraica usando los operadores enumerados en la sección 4.1. No debe olvidarse ingresar el asterisco para el producto, por ejemplo: $x * y$, de lo contrario *Maxima* asumirá que se trata de una sola variable.

Maxima

Maxima reordena y combina términos usando las reglas estándares del álgebra.

(%i5) $x * y + 2 * x^2 * y + y^2 * x^2 - 2 * y * x;$

(%o5) $x^2 y^2 + 2x^2 y - xy$

Maxima

He aquí otra expresión algebraica.

(%i6) $(x + 2 * y + 1) * (x - 2)^2;;$

(%o6) $(x - 2)^2 (2y + x + 1)$

Maxima

La función `expand` amplía productos y potencias.

(%i7) `expand(%);`

(%o7) $2x^2y - 8xy + 8y + x^3 - 3x^2 + 4$

Maxima

factor hace lo inverso de **expand**.

```
(%i8) factor(%);
(%o8) (x - 2)^2 (2y + x + 1)
```

Cuando se digita expresiones complicadas, es importante poner los paréntesis en los lugares correctos. Así, por ejemplo, debe dar la expresión x^{4y} en la forma $x^{(4y)}$. Si no colocan los paréntesis, se interpretará como x^4y .

Maxima

He aquí una fórmula más complicada, que requiere de varios paréntesis.

```
(%i9) sqrt(2)/9801 * (4 * n)! * (1103 + 26390 * n)/(n!^4 + 1);
(%o9) 
$$\frac{\sqrt{2} (26390 n + 1103) (4 n)!}{9801 (n!^4 + 1)}$$

```

Cuando el usuario digita una expresión, *Maxima* aplica automáticamente su gran repertorio de reglas para transformar las expresiones. Estas reglas incluyen las reglas estándares del álgebra, tales como $x - x = 0$, junto con reglas mucho más sofisticadas.

Maxima

Maxima utiliza reglas estándares del álgebra para sustituir $(\sqrt{x+1})^4$ por $(x+1)^2$.

```
(%i10) sqrt(x + 1)^4;
(%o10) (x + 1)^2
```

Maxima

Maxima no conoce ninguna regla para esta expresión, así que deja expresión en la forma original que usted le dio.

```
(%i11) log(cos(x) + 1);
(%o11) log(cos x + 1)
```

6.2 Valores para símbolos

Cuando *Maxima* transforma una expresión por ejemplo $x + x$ en $2x$, está tratando la variable x en forma puramente simbólica o formal. En tales casos, x es un símbolo que puede representar cualquier expresión.

A menudo, sin embargo, se necesita sustituir un símbolo como x por un “valor” determinado. Algunas veces este valor será un número; aunque puede que sea una expresión.

Para sustituir el símbolo x , que aparece en la expresión $1 + 2x$, con un valor determinado; el usuario puede utilizar la función `ev` o una sintaxis alternativa de la misma.

<code>ev(expr, x=valor)</code>	reemplaza x por $valor$ en la expresión exp
<code>ev(expr, x=valor, y=valor)</code>	realiza varios reemplazos
<code>expr, x=valor</code>	reemplaza x por $valor$ en la expresión exp
<code>expr, x=valor, y=valor</code>	realiza varios reemplazos

Sustitución de símbolos por valores en expresiones.

— *Maxima* —

Esto realiza la regla de sustitución $x = 3$ en la expresión $1 + 2x$.

```
(%i12) 1 + 2 * x, x = 3;
(%o12) 7
```

— *Maxima* —

También es posible sustituir x por cualquier expresión. Aquí cada ocurrencia de x es sustituida por $2 - y$.

```
(%i13) 1 + x + x^2, x = 2 - y;
(%o13) -y + (2 - y)^2 + 3
```

Maxima

Maxima trata las reglas de sustitución como cualquier otra expresión simbólica.

(%i14) $x = y + 3;$

(%o14) $x = y + 3$

Maxima

Esto aplica la regla de sustitución última a la expresión $x^2 - 9$.

(%i15) $x^2 - 9, %;$

(%o15) $(y + 3)^2 - 9$

Maxima

Es posible aplicar varias reglas de sustitución juntas.

(%i16) $(x + y) * (x - y)^2, x = 3, y = 1 - a;$

(%o16) $(4 - a) (a + 2)^2$

La función `ev` o su sintaxis alternativa, permiten aplicar reglas de sustitución a una expresión particular. A veces, sin embargo, se querrá definir reglas de sustitución que se apliquen siempre. Por ejemplo, puede ser que se desee sustituir x por 3 siempre que aparezca x . Según lo discutido en la sección 5.2, puede hacerse esto asignando el valor 3 a x , usando $x : 3$. Una vez que se haya hecho la asignación $x : 3$, x siempre será sustituido por 3, cuando aparezca.

Maxima

Esto asigna el valor de 3 a x .

(%i17) $x : 3;$

(%o17) 3

Maxima

Ahora x será sustituido automáticamente por 3 dondequiera que aparezca.

(%i18) $x^2 - 1;$

```
(%o18) 8
```

Maxima

Esto asigna la expresión $1 + a$ a x .

```
(%i19) x : a + 1;
(%o19) a + 1
```

Maxima

Ahora x es reemplazado por $a + 1$.

```
(%i20) x^2 - 1;
(%o20) (a + 1)^2 - 1
```

Es posible definir como valor de un símbolo a cualquier expresión, no solamente a un número. Debe recordarse que una vez que se haya dado tal definición, ésta continuará siendo utilizada siempre que aparezca el símbolo, hasta que el usuario la cambie o quite explícitamente. Para la mayoría de usuarios, el olvidarse quitar valores que han asignado a los símbolos es la causa más común de errores al usar *Maxima*.

$x:valor$	define un valor para x que será utilizado siempre
$kill(x)$	remueve cualquier valor definido para x

Asignando valores a símbolos.

Maxima

El símbolo x todavía tiene el valor que le asignó arriba.

```
(%i21) x + 5 - 2 * x;
(%o21) -2 (a + 1) + a + 6
```

Maxima

Esto quita el valor que asignó a x .

```
(%i22) kill(x)
(%o22) done
```

Maxima

Ahora x no tiene ningún valor definido, así que puede ser utilizado como variable puramente simbólica.

```
(%i23) x + 5 - 2 * x;
(%o23) 5 - x
```

Los lenguajes de programación tradicionales que no soportan el cálculo simbólico permiten que las variables sean utilizadas solamente como nombres para objetos, típicamente números, que se han asignado como valores para ellos. En *Maxima*, sin embargo, x se puede también tratar como variable puramente formal, a la cual se le puede aplicar varias reglas de transformación. Por supuesto, si el usuario da explícitamente una definición, por ejemplo $x : 3$, entonces x será sustituida siempre por 3, y no sirve más como variable formal.

Debe recordarse que las definiciones explícitas por ejemplo $x : 3$ tienen un efecto global. Por otra parte, un reemplazo tal como

$$expr, x = 3$$

afecta solamente a la expresión específica *expr*.

Es posible mezclar siempre reemplazos con asignaciones. Con asignaciones, se puede dar nombres a las expresiones en las cuales se desea hacer reemplazos, o a las reglas que se desea utilizar para hacer los reemplazos.

Maxima

Esto asigna un valor al símbolo t .

```
(%i24) t : x^2 + 1;
(%o24) x^2 + 1
```

Maxima

Esto asigna un valor al símbolo t .

```
(%i25) t : x = 2;
(%o25) 5
```

Maxima

Esto encuentra el valor de t para un valor diferente de x .

```
(%i26) t, x = 5 * a;
(%o26) 25a2 + 1
```

Maxima

Esto encuentra el valor de t cuando x es sustituido por $\%pi$, y luego evalúa el resultado numéricamente.

```
(%i27) t, x = %pi, numer;
(%o27) 10,86960440108936
```

6.3 Transformación de expresiones algebraicas

A menudo hay muchas formas diferentes de escribir la misma expresión algebraica. Como un ejemplo, la expresión $(x + 1)^2$ puede ser escrita como $x^2 + 2x + 1$. *Maxima* proporciona una gran colección de funciones para hacer conversiones entre las diferentes formas de expresiones algebraicas.

Maxima

`expand` da la “forma expandida” de una expresión, con los productos y las potencias desarrolladas.

```
(%i28) expand((x + 1)^2);
(%o28) x2 + 2x + 1
```

<code>expand(expr)</code>	desarrolla productos y potencias, escribiendo el resultado como suma de términos
<code>expr, expand</code>	equivale a <code>expand(expr)</code>
<code>factor(expr)</code>	escribe <code>expr</code> como un producto de factores mínimos
<code>expr, factor</code>	equivale a <code>factor(expr)</code>

Dos funciones comunes para transformar expresiones algebraicas.

— *Maxima* —

`factor` recupera la forma original.

```
(%i29) factor(%);
(%o29) (x + 1)2
```

— *Maxima* —

Es fácil generar expresiones complicadas con `expand`.

```
(%i30) (x + 3 * y + 1)4, expand;
(%o30) 81 y4 + 108 x y3 + 108 y3 + 54 x2 y2 + 108 x y2 +
54 y2 + 12 x3 y + 36 x2 y + 36 x y + 12 y + x4 + 4 x3 +
6 x2 + 4 x + 1
```

— *Maxima* —

`factor` a menudo le da expresiones más simples.

```
(%i31) %, factor;
(%o31) (3 y + x + 1)4
```

— *Maxima* —

Hay algunos casos donde `factor` puede dar expresiones más complicadas.

```
(%i32) x8 - 1, factor;
(%o32) (x - 1) (x + 1) (x2 + 1) (x4 + 1)
```

Maxima

En este caso, `expand` da la forma “más simple”.

```
(%i33)  %, expand;
(%o33)  x8 - 1
```

6.4 Simplificación de expresiones algebraicas

En muchas situaciones el usuario desea escribir una expresión algebraica en la forma más simple posible. Aunque sea difícil saber exactamente lo que se entiende por la “forma más simple”, un procedimiento práctico que vale la pena seguir es analizar varias formas diferentes de una expresión, y elegir la de menor número de partes

<code>rat(expr)</code>	convierte <i>expr</i> al formato canónico racional
<code>ratsimp(expr)</code>	simplifica la expresión <i>expr</i> y todas sus subexpresiones, incluyendo los argumentos de funciones no racionales
<code>expr, ratsimp</code>	equivale a <code>ratsimp(expr)</code>
<code>fullratsimp(expr)</code>	aplica repetidamente <code>ratsimp</code> a una expresión, seguida de simplificaciones no racionales, hasta que no se obtienen más transformaciones; entonces devuelve el resultado
<code>expr, fullratsimp</code>	equivale a <code>fullratsimp(expr)</code>

Simplificación de expresiones algebraicas.

Se puede utilizar, a menudo, `ratsimp` para “mejorar” expresiones complicadas que se obtienen como resultado de cálculos.

Maxima

He aquí la integral de $\frac{1}{x^4 - 1}$.

```
(%i34)  integrate(1/(x^4 - 1), x);
```

$$(\%o34) \quad -\frac{\log(x+1)}{4} - \frac{\arctan x}{2} + \frac{\log(x-1)}{4}$$

Maxima

Al derivar el último resultado debería volverse a la expresión original. En este caso, como es común, se obtiene una versión más complicada de la expresión original.

(%i35) `diff(% , x);`

$$(\%o35) \quad -\frac{1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{4(x-1)}$$

Maxima

`ratsimp` permite volver a la forma original de la expresión.

(%i36) `ratsimp(%);`

$$(\%o36) \quad \frac{1}{x^4-1}$$

Las expresiones pueden incluir funciones no racionales y los argumentos de tales funciones son también racionalmente simplificados.

Maxima

He aquí una expresión que incluye funciones no racionales cuyos argumentos admiten ser racionalmente simplificados.

(%i37) `sin(x/(x^2+x)) = exp((log(x)+1)^2 - log(x)^2);`

$$(\%o37) \quad \sin\left(\frac{x}{x^2+x}\right) = \%e^{(\log x+1)^2 - \log^2 x}$$

Maxima

`ratsimp` simplifica los argumentos de tales funciones.

(%i38) `%, ratsimp;`

$$(\%o38) \quad \sin\left(\frac{1}{x+1}\right) = \%e^{x^2}$$

Ante expresiones no racionales, una llamada a `ratsimp` puede no ser suficiente para conseguir un resultado simplificado. En ocasiones serán necesarias más de una llamada a `ratsimp`, que es lo que hace precisamente `fullratsimp`.

Maxima

Esto define la variable `expresion`.

(%i39) `expresion : (x^(a/2) + 1)^2 * (x^(a/2) - 1)^2 / (x^a - 1);`

(%o39)
$$\frac{(x^{a/2} - 1)^2 (x^{a/2} + 1)^2}{x^a - 1}$$

Maxima

En general, `rat` no simplifica otras funciones que no sean la suma, resta, multiplicación, división y exponenciación de exponente entero.

(%i40) `rat(expresion);`

(%o40)
$$\frac{(x^{a/2})^4 - 2(x^{a/2})^2 + 1}{x^a - 1}$$

Maxima

Con `ratsimp` se consigue una “mejor” simplificación.

(%i41) `ratsimp(expresion);`

(%o41)
$$\frac{x^{2a} - 2x^a + 1}{x^a - 1}$$

Maxima

Con `fullratsimp` se consigue simplificar la expresión al máximo.

(%i42) `fullratsimp(expresion);`

(%o42)
$$x^a - 1$$

6.5 Expresiones puestas en diferentes formas

Las expresiones algebraicas complicadas se pueden escribir generalmente en varias maneras. *Maxima* proporciona una variedad de funciones para convertir expresiones de una forma a otra. Los más comunes de estas funciones son `expand`, `factor` y `ratsimp`. Sin embargo, cuando se tiene expresiones racionales que contienen cocientes, puede ser necesario utilizar otras funciones.

<code>expandwrt(<i>expr</i>,<i>var</i>₁,...,<i>var</i>_{<i>n</i>})</code>	expande la expresión <i>expr</i> con respecto a las variables <i>var</i> ₁ ,..., <i>var</i> _{<i>n</i>} y por defecto no expande los denominadores
<code>expand(<i>expr</i>)</code>	expande la expresión <i>expr</i>
<code>factor(<i>expr</i>)</code>	factoriza la expresión <i>expr</i>
<code>partfrac(<i>expr</i>,<i>var</i>)</code>	expande la expresión <i>expr</i> en fracciones parciales respecto de la variable principal <i>var</i>

Comandos para transformar expresiones algebraicas.

— *Maxima* —

He aquí una expresión racional, la cual puede ser escrita en varias formas diferentes.

(%i43) `e : (x - 1)2 * (2 + x) / ((1 + x) * (x - 3)2);`

(%o43)
$$\frac{(x - 1)^2 (x + 2)}{(x - 3)^2 (x + 1)}$$

— *Maxima* —

`expandwrt` expande el numerador de la expresión, pero deja el denominador en forma factorizada.

(%i44) `expandwrt(e, x);`

(%o44)
$$\frac{x^3}{(x - 3)^2 (x + 1)} - \frac{3x}{(x - 3)^2 (x + 1)} + \frac{2}{(x - 3)^2 (x + 1)}$$

Maxima

`expand` expande todo, incluyendo el denominador.

(%i45) `expand(e);`

(%o45)
$$\frac{x^3}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9} - \frac{3x}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9} + \frac{2}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}$$

Maxima

`partfrac` separa la expresión en términos con denominadores simples.

(%i46) `partfrac(% , x);`

(%o46)
$$\frac{1}{4(x+1)} + \frac{19}{4(x-3)} + \frac{5}{(x-3)^2} + 1$$

Maxima

`factor` factoriza todo, en este caso reproduce la forma original.

(%i47) `factor(%);`

(%o47)
$$\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-3)^2(x+1)}$$

`collectterms(expr,var)` agrupa juntas todas las potencias de var

Reordenamiento de expresiones en varias variables.

Maxima

He aquí una expresión algebraica en dos variables.

(%i48) `v : expand((3 + 2 * x)^2 * (x + 2 * y)^2);`

(%o48)
$$16x^2y^2 + 48xy^2 + 36y^2 + 16x^3y + 48x^2y + 36xy + 4x^4 + 12x^3 + 9x^2$$

```

Maxima
-----
Esto agrupa los términos de v afectados por la misma potencia de x.

(%i49) collectterms(v, x);
(%o49) x (48 y^2 + 36 y) + x^2 (16 y^2 + 48 y + 9) +
      36 y^2 + x^3 (16 y + 12) + 4 x^4
    
```

```

Maxima
-----
Esto agrupa juntas las potencias de y.

(%i50) collectterms(v, y);
(%o50) (16 x^2 + 48 x + 36) y^2 + (16 x^3 + 48 x^2 + 36 x) y +
      4 x^4 + 12 x^3 + 9 x^2
    
```

Como acaba de verse, cuando el usuario se limita a expresiones polinómicas racionales, hay muchas formas de escribir cualquier expresión particular. Si éste considera expresiones más complicadas, que incluyan, por ejemplo, funciones matemáticas trascendentes, la variedad de formas posibles llega a ser mayor. Por consiguiente, es imposible tener una función incorporada específico en *Maxima* para producir cada forma posible. Más bien, *Maxima* le permite construir sistemas arbitrarios de reglas de transformación para hacer diversas conversiones¹. Sin embargo, hay algunas funciones incorporadas adicionales de *Maxima* para transformar expresiones.

<code>trigexpand(expr)</code>	expande funciones trigonométricas e hiperbólicas de sumas de ángulos y de múltiplos de ángulos presentes en <i>expr</i>
<code>expr, trigexpand</code>	equivale a <code>trigexpand(expr)</code>
<code>trigsimp(expr)</code>	utiliza las identidades $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$ y $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$ para simplificar expresiones que contienen tan, sec, etc.

Algunas funciones más para transformar expresiones.

¹Para más detalle al respecto consulte sobre las funciones `scsimp` y `defrule` en la ayuda de *Maxima*.

<code>trigreduce(<i>expr</i>,<i>var</i>)</code>	combina productos y potencias de senos y cosenos trigonométricos e hiperbólicos de <i>var</i> , transformándolos en otros que son múltiplos de <i>var</i>
<code>trigreduce(<i>expr</i>)</code>	si no se introduce el argumento <i>var</i> , entonces se utilizan todas las variables de <i>expr</i>
<code><i>expr</i>, trigreduce</code>	equivale a <code>trigreduce(<i>expr</i>)</code>
<code>trigrat(<i>expr</i>)</code>	devuelve una forma canónica simplificada cuasi-lineal de una expresión trigonométrica
<code>exponentialize(<i>expr</i>)</code>	convierte las funciones trigonométricas e hiperbólicas de <i>expr</i> a exponenciales
<code><i>expr</i>, exponentialize</code>	equivale a <code>exponentialize(<i>expr</i>)</code>
<code>demoivre(<i>expr</i>)</code>	convierte exponenciales complejos en expresiones equivalentes pero en términos de las funciones trigonométricas
<code><i>expr</i>, demoivre</code>	equivale a <code>demoivre(<i>expr</i>)</code>
<code>rectform(<i>expr</i>)</code>	devuelve una expresión de la forma $a + b\%i$ equivalente a <i>expr</i> , con <i>a</i> y <i>b</i> reales
<code><i>expr</i>, rectform</code>	equivale a <code>rectform(<i>expr</i>)</code>
<code>polarform(<i>expr</i>)</code>	devuelve una expresión de la forma $r\%e\%i\theta$ equivalente a <i>expr</i> , con <i>r</i> y θ reales
<code><i>expr</i>, polarform</code>	equivale a <code>polarform(<i>expr</i>)</code>
<code>radcan(<i>expr</i>)</code>	simplifica la expresión <i>expr</i> , que puede contener logaritmos, exponenciales y radicales, convirtiéndola a una forma canónica
<code><i>expr</i>, radcan</code>	equivale a <code>radcan(<i>expr</i>)</code>
<code>prod, radexpand:all</code>	las raíces <i>n</i> -ésimas de los factores del producto <i>prod</i> , que sean potencias de <i>n</i> , se extraen del símbolo radical (p. ej., $\sqrt{4x^2} \rightarrow 2x$)

Algunas funciones más para transformar expresiones.

<code>logcontract(<i>expr</i>)</code>	analiza la expresión <i>expr</i> recursivamente, transformando subexpresiones de la forma $a_1 \log(b_1) + a_2 \log(b_2) + c$ en expresiones de la forma $\log(\text{ratsimp}(b_1^{a_1} b_2^{a_2})) + c$
<code><i>expr</i>, logcontract</code>	equivale a <code>logcontract(<i>expr</i>)</code>

Algunas funciones más para transformar expresiones.

— *Maxima* —

Esto expande la expresión trigonométrica, escribiéndola de modo que todas las funciones tengan argumento *x*.

```
(%i51) tan(x) * cos(3 * x), trigexpand;
(%o51) (cos^3 x - 3 cos x sin^2 x) tan x
```

— *Maxima* —

Esto reduce la expresión usando ángulos múltiples.

```
(%i52) tan(x) * cos(2 * x), trigreduce;
(%o52) tan x cos (3 x)
```

— *Maxima* —

Esto expande el seno asumiendo que *x* e *y* son reales.

```
(%i53) sin(x + %i * y), rectform;
(%o53) %i cos x sinh y + sin x cosh y
```

— *Maxima* —

Con `logcontract` se “contrae” una expresión logarítmica.

```
(%i54) 2 * (a * log(x) + 2 * a * log(y)), logcontract;
(%o54) a log(x^2 y^4)
```

Las transformaciones hechas por funciones como `expand` y `factor` siempre son correctas, independientemente del valor que puedan tener las variables simbólicas en las expresiones. A veces, sin embargo, es útil realizar transformaciones que sólo son correctas para algunos posibles valores de las variables simbólicas. Transformaciones como éstas las realizan `radcan` y `radexpand:all`.

Maxima

Maxima no expande automáticamente potencias no enteras de productos y cocientes.

```
(%i55) sqrt(x^5 * y/w^3);
```

```
(%o55) 
$$\sqrt{\frac{x^5 y}{w^3}}$$

```

Maxima

`radcan` hace la expansión.

```
(%i56) %, radcan;
```

```
(%o56) 
$$\frac{x^{\frac{5}{2}} \sqrt{y}}{w^{\frac{3}{2}}}$$

```

Maxima

En este caso *Maxima* aplica una equivalencia matemática.

```
(%i57) sqrt(x^6 * y^2/w^10);
```

```
(%o57) 
$$\frac{|x|^3 |y|}{|w|^5}$$

```

Maxima

Utilizando la variable opcional `radexpand` con el valor asignado `all`, *Maxima* pasa por alto la equivalencia anterior.

```
(%i58) sqrt(x^6 * y^2/w^10), radexpand : all;
```

```
(%o58) 
$$\frac{x^3 y}{w^5}$$

```

6.6 Simplificación con asunciones

<code>assume(pred₁, ..., pred_n)</code>	añade los predicados $pred_1, \dots, pred_n$ al contexto actual
<code>forget(pred₁, ..., pred_n)</code>	borra los predicados establecidos por <code>assume</code>

Asunción de predicados.

— *Maxima* —

`assume` devuelve una lista con los predicados que han sido añadidos al contexto.

```
(%i59) assume(x > 0, y < 0);
(%o59) [x > 0, y < 0]
```

— *Maxima* —

Maxima realiza simplificaciones asumiendo los predicados ingresados.

```
(%i60) [sqrt(x^2), sqrt(y)];
(%o60) [x, sqrt(y)]
```

— *Maxima* —

Otra simplificación asumiendo los predicados ingresados.

```
(%i61) sqrt(x^2 * y^2);
(%o61) -x y
```

— *Maxima* —

`forget` borra los predicados previamente establecidos.

```
(%i62) forget(x > 0, y < 0);
(%o62) [x > 0, y < 0]
```

6.7 Selección de partes de expresiones algebraicas

<code>coeff(expr,x,n)</code>	devuelve el coeficiente de x^n en $expr$ (el argumento n puede omitirse si es igual a la unidad)
<code>hipow(expr,x)</code>	devuelve el mayor exponente explícito de x en $expr$ (si x no aparece en $expr$, <code>hipow</code> devuelve 0)
<code>part(expr,n₁,...,n_k)</code>	devuelve la parte de $expr$ que se especifica por los índices n_1, \dots, n_k (primero se obtiene la parte n_1 de $expr$, después la parte n_2 del resultado anterior, y así sucesivamente)

Comandos para seleccionar partes de polinomios.

— *Maxima* —

He aquí una expresión algebraica.

```
(%i63) e : expand((1 + 3 * x + 4 * y^2)^2);
(%o63) 16 y^4 + 24 x y^2 + 8 y^2 + 9 x^2 + 6 x + 1
```

— *Maxima* —

Esto da el coeficiente de x en e .

```
(%i64) coeff(e,x);
(%o64) 24 y^2 + 6
```

— *Maxima* —

`hipow(expr,y)` da la mayor potencia de y que aparece en $expr$.

```
(%i65) hipow(e,y);
(%o65) 4
```

Maxima

Esto da el cuarto término en e .

```
(%i66) part(e,4);
(%o66) 9 x2
```

<code>num(<i>expr</i>)</code>	devuelve el numerador de <i>expr</i> (si <i>expr</i> no es una fracción, devuelve <i>expr</i>)
<code>denom(<i>expr</i>)</code>	devuelve el denominador de <i>expr</i> (si <i>expr</i> no es una fracción, devuelve 1)

Comandos para seleccionar partes de expresiones racionales.

Maxima

He aquí una expresión racional.

```
(%i67) r : (1 + x)/(2 * (2 - y));
(%o67)  $\frac{x + 1}{2(2 - y)}$ 
```

Maxima

`denom` selecciona el denominador.

```
(%i68) denom(r);
(%o68) 2 (2 - y)
```

Maxima

`denom` da 1 para las expresiones que no son cocientes.

```
(%i69) denom(1/x + 1/y);
(%o69) 1
```

Capítulo 7

Matemáticas simbólicas

7.1 Límites

<code>limit(f,x,x0)</code>	el límite $\lim_{x \rightarrow x_0} f$
<code>limit(f,x,x0,plus)</code>	el límite $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f$
<code>limit(f,x,x0,minus)</code>	el límite $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f$

Límites.

Maxima

He aquí la expresión $\frac{\text{sen } x}{x}$.

```
(%i1) f : sin(x)/x;  
(%o1)  $\frac{\sin(x)}{x}$ 
```

Maxima

Si se sustituye x por 0, la expresión se hace 0/0, y se obtiene un mensaje de error.

```
(%i2) f, x = 0;  
Division by 0  
--an error. To debug this try: debugmode(true);
```

Maxima

Si se evalúa $\frac{\text{sen}(x)}{x}$ para un x próximo a 0, se consigue un resultado próximo a 1.

```
(%i3) f, x = 0, 01;
(%o3) 0,99998333341667
```

Maxima

Esto encuentra el límite de $\frac{\text{sen}(x)}{x}$ cuando x tiende a 0.

```
(%i4) limit(f, x, 0);
(%o4) 1
```

<code>inf</code>	$+\infty$
<code>minf</code>	$-\infty$
<code>und</code>	indefinido
<code>ind</code>	indefinido pero acotado
<code>zeroa</code>	infinitesimal mayor que cero
<code>zerob</code>	infinitesimal menor que cero
<code>infinity</code>	infinito complejo

Símbolos especiales para límites.

La función `limit` con un solo argumento se utiliza frecuentemente para simplificar expresiones en las que aparecen los símbolos especiales para límites.

Maxima

Esto da un resultado para $1 - \infty$.

```
(%i5) limit(1 - minf);
(%o5)  $\infty$ 
```

Maxima

He aquí la simplificación de una expresión que incluye un infinitesimal mayor que cero.

```
(%i6) limit(x + zeroa);
(%o6) x
```

7.2 Diferenciación

<code>diff(f,x)</code>	devuelve la primera derivada de f respecto de la variable x
<code>diff(f,x,n)</code>	devuelve la n -ésima derivada de f respecto de x
<code>diff(f,x₁,n₁,...,x_m,n_m)</code>	devuelve la derivada parcial de f con respecto de x_1, \dots, x_m y equivale a <code>diff(...(diff(f,x_m,n_m...),x₁,n₁)</code>
<code>diff(f)</code>	devuelve el diferencial total de f

Diferenciación con *Maxima*.

Maxima

He aquí la derivada x^n con respecto a x .

```
(%i7) diff(x^n, x);
(%o7) n x^{n-1}
```

Maxima

Maxima conoce las derivadas de todas las funciones matemáticas estándar.

```
(%i8) diff(atan(x), x);
(%o8) 1 / (x^2 + 1)
```

Maxima

La tercera derivada con respecto a x .

```
(%i9) diff(x^n, x, 3);
(%o9) (n - 2) (n - 1) n x^{n-3}
```

Si no se indica la variable, *Maxima* asume que se quiere calcular la diferencial total, en la cual todas las derivadas se asumen relacionadas. En notación matemática, $\text{diff}(f, x)$ es como $\frac{d}{dx}f$, mientras $\text{diff}(f)$ es como df .

Maxima

Esto da la diferencial total $d(x^n)$. $\text{del}(x)$ y $\text{del}(n)$ son los diferenciales dx y dn , respectivamente.

```
(%i10) diff(x^n);
(%o10) n x^{n-1} del(x) + x^n log x del(n)
```

Así como se trata variables simbólicamente, también es posible tratar funciones simbólicamente en *Maxima*. Así, por ejemplo, puede encontrarse fórmulas para las derivadas de $f(x)$, sin especificar una forma explícita para la función f . Para esto hay que indicar a *Maxima* la dependencia de la función, lo que se consigue con la función `depends`.

Maxima

Esto declara la dependencia $f(x^2)$.

```
(%i11) depends(f, x^2);
(%o11) [f(x^2)]
```

Maxima

Ahora *Maxima* puede utilizar la regla de cadena para simplificar la derivada.

```
(%i12) diff(2 * x * f, x);
(%o12) 4 \left( \frac{d}{dx} f \right) x^2 + 2 f
```

<code>depends(ϕ, φ)</code>	declara la dependencia funcional $\phi(\varphi)$
<code>depends($\phi_1, \varphi_1, \dots, \phi_n, \varphi_n$)</code>	declara la dependencia funcional $\phi_1(\varphi_1), \dots, \phi_n(\varphi_n)$
<code>depends($[\phi_1, \dots, \phi_n], \varphi$)</code>	declara la dependencia funcional $\phi_1(\varphi), \dots, \phi_n(\varphi)$
<code>depends($\phi, [\varphi_1, \dots, \varphi_n]$)</code>	declara la dependencia funcional $\phi(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$
<code>depends($[\phi_1, \dots, \phi_n], [\varphi_1, \dots, \varphi_m]$)</code>	declara la dependencia funcional $\phi_1(\varphi_1, \dots, \varphi_m), \dots, \phi_n(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$
<code>dependencies</code>	lista de átomos que tienen algún tipo de dependencia funcional
<code>remove($\phi, \text{dependency}$)</code>	elimina la dependencia funcional asociada con ϕ
<code>remove($[\phi_1, \dots, \phi_n], \text{dependency}$)</code>	elimina la dependencia funcional asociada con ϕ_1, \dots, ϕ_n
<code>remove(all, dependency)</code>	elimina la dependencia funcional de todos los átomos que la tengan

Declaración y remoción de dependencia funcional.

— *Maxima* —

Esto declara las dependencias $u(x)$ y $v(x)$.

```
(%i13) depends([u, v], x);
(%o13) [u(x), v(x)]
```

— *Maxima* —

Aquí se obtiene una fórmula para $\frac{d}{dx}(u^v)$, donde $u = u(x)$ y $v = v(x)$.

```
(%i14) diff(u^v, x), expand;
(%o14) u^v log u (d/dx v) + u^{v-1} (d/dx u) v
```

— *Maxima* —

Esto permite apreciar todas las dependencias declaradas hasta el momento.

```
(%i15) dependencies;
```

```
(%o15) [f(x^2), u(x), v(x)]
```

— *Maxima* —

Con esta sentencia se borran todas las dependencias.

```
(%i16) remove(all, dependency);
(%o16) done
```

7.3 Integración

<code>integrate(f,x)</code>	la integral indefinida $\int f dx$
<code>integrate(f,x,a,b)</code>	la integral definida $\int_a^b f dx$
<code>integrate(f=g,x)</code>	la integral definida de una ecuación, equivale a $\int f dx = \int g dx$
<code>changevar('expr,phi(x,y),y,x)</code>	hace el cambio de variable dado por $\phi(x,y) = 0$ en la expresión <i>expr</i> que depende de <i>x</i> (la nueva variable será <i>y</i>)

Integración.

<code>integration_constant</code>	variable del sistema cuyo valor por defecto es %c
<code>integration_constant_counter</code>	variable del sistema cuyo valor por defecto es 0

Constantes y contadores de constantes para integrar ecuaciones.

— *Maxima* —

Para calcular la integral $\int x^n dx$, *Maxima*, pregunta si $n + 1 = 0$ o $n + 1 \neq 0$. En este caso se le ha indicado la elección de la opción $n + 1 = 0$, es decir, $n \neq -1$.

```
(%i17) integrate(x^n, x);
Is n+1 zero or nonzero? n;
```

$$(\%o17) \quad \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Maxima

He aquí la integral $\int x^n dx$, cuando $n = -1$.

$$(\%i18) \quad \text{integrate}(x^n, x);$$

Is $n+1$ zero or nonzero? z;

$$(\%o18) \quad \log(x)$$

Maxima

Este es un ejemplo ligeramente más complicado.

$$(\%i19) \quad \text{integrate}(1/(x^4 - a^4), x);$$

$$(\%o19) \quad -\frac{\log(x+a)}{4a^3} + \frac{\log(x-a)}{4a^3} - \frac{\arctan\left(\frac{x}{a}\right)}{2a^3}$$

Maxima

Recuérdese que `logcontract` “contrae” los logaritmos.

$$(\%i20) \quad \text{integrate}(1/(x^4 - a^4), x), \text{logcontract};$$

$$(\%o20) \quad -\frac{\log\left(\frac{x+a}{x-a}\right) + 2 \arctan\left(\frac{x}{a}\right)}{4a^3}$$

Maxima resuelve casi cualquier integral que puede ser expresada en términos de funciones matemáticas estándares. Pero debe comprenderse que aun cuando un integrando pueda contener sólo funciones simples, su integral puede implicar funciones mucho más complicadas, o puede no ser expresable en absoluto en términos de funciones matemáticas estándares.

Maxima

He aquí una integral simple.

$$(\%i21) \quad \text{integrate}(\log(1 - x^2), x), \text{logcontract};$$

$$(\%o21) \quad x \left(\log(1 - x^2) - 2 \right) + \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

Maxima

Esta integral puede ser expresada sólo en términos de una función dilogarítmica¹.

$$(\%i22) \quad \text{integrate}(\log(1 - x^2)/x, x);$$

$$(\%o22) \quad \log(x) \log(1 - x^2) + \frac{\text{li}_2(1 - x^2)}{2}$$

Maxima

Esta integral involucra la función erf^2 .

$$(\%i23) \quad \text{integrate}(\exp(1 - x^2), x);$$

$$(\%o23) \quad \frac{\sqrt{\pi} e \text{erf}(x)}{2}$$

Maxima

Esta integral simplemente no puede ser expresada en términos de funciones matemáticas estándares. Por consiguiente, *Maxima* la deja como está.

$$(\%i24) \quad \text{integrate}(x^x, x);$$

$$(\%o24) \quad \int x^x dx$$

Maxima

He aquí la integral definida $\int_a^b \sin^2(x) dx$.

$$(\%i25) \quad \text{integrate}(\sin(x)^2, x, a, b);$$

$$(\%o25) \quad \frac{\sin(2a) - 2a}{4} - \frac{\sin(2b) - 2b}{4}$$

¹La función polilogarítmica de orden s y argumento z está definida por la serie infinita $\text{li}_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}$. En este caso $s = 2$ y $z = 1 - x^2$.

² $\text{erf}(z)$ es la integral de la distribución gaussiana, dada por $\text{erf}(z) = \int_0^z e^{-t^2} dt$

Maxima

He aquí otra integral definida.

(%i26) `integrate(exp(-x^2), x, 0, inf);`

(%o26) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Maxima

Maxima no puede darle una fórmula para esta integral definida.

(%i27) `integrate(x^x, x, 0, 1);`

(%o27) $\int_0^1 x^x dx$

Maxima

Esto evalúa la integral múltiple $\int_0^1 \int_0^x (x^2 + y^2) dy dx$.

(%i28) `integrate(integrate(x^2 + y^2, y, 0, x), x, 0, 1);`

(%o28) $\frac{1}{3}$

Cuando una constante de integración se crea durante la integración definida de una ecuación, el nombre de la constante se construye concatenando `integration_constant` y `integration_constant_counter`.

Maxima

Esto calcula la integral definida de una ecuación.

(%i29) `integrate(x^2 = sin(x), x);`

(%o29) $\frac{x^3}{3} = \%c_1 - \cos(x)$

Maxima

A `integration_constant` se le puede asignar un símbolo cualquiera.

(%i30) `integration_constant : 'K;`

(%o30) K

Maxima

Esto calcula la integral definida de una ecuación a la que se le ha reiniciado la constante de integración por defecto.

```
(%i31) integrate(x^2 = sin(x), x);
(%o31)  $\frac{x^3}{3} = K_2 - \cos x$ 
```

Maxima

Es posible reiniciar el contador de `integration_constant_counter`.

```
(%i32) reset(integration_constant_counter);
(%o32) [integration_constant_counter]
```

Maxima

Aquí se aprecia que el contador ha sido reiniciado.

```
(%i33) integrate(x^2 = sin(x), x);
(%o33)  $\frac{x^3}{3} = K_1 - \cos x$ 
```

Es posible realizar un cambio de variable en una integral indefinida o definida usando la función `changevar`. Para que *Maxima* pueda realizar esto debe mantenerse la integral sin evaluar (sección 5.4).

Maxima

He aquí una integral clásica sin evaluar.

```
(%i34) 'integrate(%e^sqrt(y), y);
(%o34)  $\int \%e^{\sqrt{y}} dy$ 
```

Maxima

Esto realiza un cambio de variable en una integral indefinida.

```
(%i35) assume(z > 0)$ changevar(%o28, y - z^2, z, y);
```

$$(\%o36) \int \%e^{\sqrt{y}} dy$$

Maxima

Esto realiza un cambio de variable en una integral definida.

(%i37) 'changevar(integrate(%e^sqrt(y),y,0,4),y-z^2,z,y);

$$(\%o37) -2 \int_{-2}^0 z \%e^z dz$$

7.4 Sumas y Productos

`sum(f,i,i_min,i_max)` la suma $\sum_{i_{min}}^{i_{max}} f$
`lsum(f,i,L)` representa la suma de f para cada elemento i en L

Sumas.

Maxima

Esto construye la suma $\sum_{i=1}^7 \frac{x^i}{i}$.

(%i38) `sum(x^i/i,i,1,7);`

$$(\%o38) \frac{x^7}{7} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$$

Maxima

Esto devuelve la suma $\sum_{i=1}^n i^2$ sin realizar ningún cambio.

(%i39) `sum(i^2,i,1,n);`

$$(\%o39) \sum_{i=1}^n i^2$$

Maxima

Agregando `simpsum` la suma es calculada simbólicamente como una función de `n`.

```
(%i40) sum(i^2, i, 1, n), simpsum;
(%o40) 
$$\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

```

Maxima

Combinando `simpsum` con `factor` se obtiene un resultado factorizado.

```
(%i41) sum(i^2, i, 1, n), simpsum, factor;
(%o41) 
$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

```

Maxima

Maxima también puede dar un resultado exacto para esta suma infinita.

```
(%i42) sum(1/i^4, i, 1, inf), simpsum;
(%o42) 
$$\frac{\pi^4}{90}$$

```

Maxima

Esta es la suma múltiple $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^i x^i y^j$.

```
(%i43) sum(sum(x^i * y^j, j, 1, i), i, 1, 3);
(%o43) 
$$x^3 y^3 + x^3 y^2 + x^2 y^2 + x^3 y + x^2 y + x y$$

```

Maxima

Esta es una suma para la cual los valores del índice de variación no están equi-incrementados.

```
(%i44) lsum(x^i, i, [1, 2, 7]);
(%o44) 
$$x^7 + x^2 + x$$

```

`product(f(i), i, i_min, i_max)` el producto $\prod_{i_{min}}^{i_{max}} f(i)$

Productos.

Maxima

Los productos se obtienen en forma similar a las sumas.

```
(%i45) prod(x + i, i, 1, 4);
(%o45) (x + 1) (x + 2) (x + 3) (x + 4)
```

Maxima

Agregando `simpproduct` la suma es calculada simbólicamente como una función de `n`.

```
(%i46) product(k, k, 1, n), simpproduct;
(%o46) n!
```

Cabe mencionar que la función `changevar` también se puede utilizar para cambiar los índices de una suma o producto. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que cuando se realiza un cambio en una suma o producto, el mismo debe expresarse en términos de sumas, como $i = j + \dots$, no como una función de mayor grado.

Maxima

He aquí una suma finita con índice j .

```
(%i47) sum(f(j + 2) * x^j, j, -2, n);
(%o47) 
$$\sum_{j=-2}^n f(j + 2) x^j$$

```

Maxima

Esto realiza el cambio $j = i - 2$ en la suma anterior.

```
(%i48) changevar(%, j - i + 2, i, j);
```

$$(\%o48) \quad \sum_{i=0}^{n+2} f(i) x^{i-2}$$

— *Maxima* —

Aquí se hace el cambio $i = k - 2$ en un producto infinito.

(%i49) `product(f(i + 2) * x^(i + 2), i, -2, inf);`

(%o49) $\prod_{i=-2}^{\infty} f(i + 2) x^{i+2}$

(%i50) `changevar(% , i - k + 2, k, i);`

(%o50) $\prod_{k=0}^{\infty} f(k) x^k$

7.5 Operadores relacionales y lógicos

<code>=</code>	igual (por sintaxis)
<code>#</code>	desigual (por sintaxis)
<code>></code>	mayor que
<code>>=</code>	mayor o igual que
<code><</code>	menor que
<code><=</code>	menor o igual que
<code>equal</code>	igual (por valor)
<code>notequal</code>	desigual (por valor)

Operadores relacionales.

<code>compare(x,y)</code>	compara x e y y devuelve <code><</code> , <code><=</code> , <code>></code> , <code>>=</code> , <code>=</code> , <code>#</code> , <code>notcomparable</code> ó <code>unknown</code> , según sea el caso
---------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Función para obtener operadores relacionales.

— *Maxima* —

Esto prueba si 10 es menor que 7.

```
(%i51) 10 < 7, pred;
(%o51) false
```

— *Maxima* —

Esto prueba si 10 es diferente que 7.

```
(%i52) 10 # 7, pred;
(%o52) true
```

— *Maxima* —

Ya que los entes involucrados son numéricas, *Maxima* puede determinar que esto es verdadero.

```
(%i53) %pi ^ %e < %e ^ %pi, pred;
(%o53) true
```

— *Maxima* —

Puesto que los entes a comparar son constantes, *Maxima* no sabe si esto es verdadero o falso.

```
(%i54) x > y, pred;
(%o54) x > y
```

— *Maxima* —

He aquí dos comparaciones.

```
(%i55) compare(1, 2);
(%o55) <
(%i56) compare(1/x, 0);
(%o56) #
```

Maxima

Una diferencia notable entre `=` y `equal`.

```
(%i57) (x + 1)2 = x2 + 2 * x + 1, pred;
(%o57) false
(%i58) equal((x + 1)2, x2 + 2 * x + 1), pred;
(%o58) true
```

El usuario debe tener presente que, los operadores relacionales son todos operadores binarios. *Maxima* no reconoce expresiones del estilo $a < b < c$.

Maxima

Al pretender evaluar una desigualdad como la siguiente, *Maxima* devuelve un mensaje de error.

```
(%i59) 2 < 3 < 4, pred;
```

Incorrect syntax: Found logical expression where algebraic expression expected
 $2 < 3 < 4$

	<code>not</code>	negación
	<code>and</code>	conjunción
	<code>or</code>	disyunción
<code>if cond then expr₁</code>	<code>else expr₂</code>	devuelve $expr_1$ si $cond$ es <code>true</code> , y $expr_2$ si $cond$ es <code>false</code>

Operadores lógicos.

Maxima

Una forma de ingresar expresiones del estilo $a < b < c$, en *Maxima*, es usando el operador lógico `and`.

```
(%i60) 2 < 3 and 3 < 4;
(%o60) true
```

Maxima

Mientras no se hayan hecho asignaciones adecuadas a p y q , *Maxima* no sabe si esto es verdadero o falso.

```
(%i61) p and q;
(%o61) p ∧ q
```

7.6 Ecuaciones

En *Maxima*, una ecuación consiste de dos expresiones vinculadas con el símbolo =.

$expr_1 = expr_2$	representa una ecuación
<code>lhs($expr_1 = expr_2$)</code>	devuelve $expr_1$
<code>rhs($expr_1 = expr_2$)</code>	devuelve $expr_2$

Ecuaciones en *Maxima*.

Maxima

Una ecuación por sí misma no es evaluada.

```
(%i62) x^4 - 5 * x^2 - 3 = x;
(%o62) x = x^4 - 5x^2 - 3
```

Es muy importante que el usuario no confunda $x:y$ con $x=y$ (ver sección 5.2). Mientras que $x:y$ es una declaración imperativa que origina una asignación, $x=y$ no causa ninguna acción explícita.

Maxima

Con `lhs`³ se selecciona el miembro izquierdo de la ecuación.

```
(%i63) lhs(x = x^4 - 5 * x^2 - 3);
(%o63) x
```

³Las funciones `lhs` y `rhs` también pueden ser aplicadas en los casos cuando el vínculo es cualquier otro operador relacional.

Maxima

Con `rhs` se selecciona el miembro derecho de la ecuación.

```
(%i64) rhs(x = x^4 - 5 * x^2 - 3);
(%o64) x^4 - 5x^2 - 3
```

7.7 Solución de Ecuaciones

<code>solve(ecu,x)</code> resuelve la ecuación algebraica <i>ecu</i> de incógnita <i>x</i>

Solución de ecuaciones.

`solve` siempre trata de dar fórmulas explícitas para las soluciones de ecuaciones. Sin embargo, para ecuaciones suficientemente complicadas, no pueden darse fórmulas algebraicas explícitas. Si se tiene una ecuación algebraica en una variable, y la potencia más alta de la variable es menor que cinco, entonces *Maxima* siempre puede dar fórmulas para las soluciones. Sin embargo, si la potencia más alta es cinco o más, puede ser matemáticamente imposible dar fórmulas algebraicas explícitas para todas las soluciones.

Maxima

Maxima siempre puede solucionar ecuaciones algebraicas en una variable cuando la potencia más alta es menor que cinco.

```
(%i65) solve(x^4 - 5 * x^2 - 3 = 0, x);
(%o65) [x = -sqrt(sqrt(37)+5)/sqrt(2), x = sqrt(sqrt(37)+5)/sqrt(2), x = -sqrt(sqrt(37)-5%i)/sqrt(2),
x = sqrt(sqrt(37)-5%i)/sqrt(2)]
```

Maxima

También puede solucionar algunas ecuaciones que involucran potencias más altas.

```
(%i66) solve(x^6 = 1, x);
```

$$(\%o66) \left[x = \frac{\sqrt{3}\%i+1}{2}, x = \frac{\sqrt{3}\%i-1}{2}, x = -1, x = -\frac{\sqrt{3}\%i+1}{2}, \right. \\ \left. x = -\frac{\sqrt{3}\%i-1}{2}, x = 1 \right]$$

— *Maxima* —

Hay algunas ecuaciones, sin embargo, para las cuales es matemáticamente imposible encontrar fórmulas explícitas para las soluciones.

$$(\%i67) \text{ solve}(2 - 4 * x + x^5 = 0, x); \\ (\%o67) [0 = x^5 - 4x + 2]$$

Además de la capacidad de solucionar ecuaciones puramente algebraicas, *Maxima* también puede solucionar algunas ecuaciones que implican otras funciones.

— *Maxima* —

Hay algunas ecuaciones, sin embargo, para las cuales es matemáticamente imposible encontrar fórmulas explícitas para las soluciones. Después de la impresión de una advertencia, *Maxima* devuelve una solución para esta ecuación.

$$(\%i68) \text{ solve}(\sin(x) = a, x); \\ \text{solve: using arc-trig functions to get a solution.} \\ \text{Some solutions will be lost.} \\ (\%o68) [x = \text{asin}(a)]$$

Es importante comprender que una ecuación tal como $\sin(x) = a$ en realidad tiene un número infinito de soluciones posibles, en este caso que se diferencian por múltiplos de 2π . Sin embargo, *solve* por defecto da sólo una solución, pero imprime un mensaje que le dice que pueden existir otras soluciones.

— *Maxima* —

No hay ninguna solución explícita para una ecuación trascendental como esta.

$$(\%i69) \text{ solve}(\cos(x) = x, x); \\ (\%o69) [x = \cos(x)]$$

<code>solve([ecu₁, ..., ecu_n], [x₁, ..., x_n])</code>	resuelve un sistema de ecuaciones polinómicas simultáneas (lineales o no)
--------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------

Solución de sistemas ecuaciones.

También puede usarse *Maxima* para solucionar conjuntos de ecuaciones simultáneas. Simplemente se da la lista de ecuaciones, y especifica la lista de variables.

Maxima

He aquí una lista de dos ecuaciones simultáneas, para que sean resueltas en las variables x e y .

```
(%i70) solve([a * x + y = 0, 2 * x + (1 - a) * y = 1], [x, y]);
(%o70) [[x = 1 / (a^2 - a + 2), y = -a / (a^2 - a + 2)]]
```

Maxima

He aquí algunas ecuaciones simultáneas más complicadas.

```
(%i71) solve([x^2 + x * y + y^2 = 4, x + x * y + y = 2], [x, y]);
(%o71) [[x = 2, y = 0], [x = -sqrt(11%i + 3) / 2, y = -sqrt(11%i + 7) / sqrt(11%i + 1)],
[x = sqrt(11%i - 3) / 2, y = -sqrt(11%i - 7) / sqrt(11%i - 1)], [x = 0, y = 2]]
```

Maxima

Con `rectform` se obtiene una mejor presentación.

```
(%i72) %, rectform;
(%o72) [[x = 2, y = 0], [x = -sqrt(11%i) / 2 - 3/2, y = sqrt(11%i) / 2 - 3/2],
[x = sqrt(11%i) / 2 - 3/2, y = -sqrt(11%i) / 2 - 3/2], [x = 0, y = 2]]
```

Una variable para `solve` puede ser también una expresión. Esto se aprecia, por ejemplo, al aplicar esta función para obtener la derivada de una función dada en forma implícita.

Maxima

Esto asigna la ecuación $y^3 - 3xy + x^3 = 0$ a la variable e .

```
(%i73) e: x^3 - 3*x*y + y^3 = 0;
(%o73) y^3 - 3*x*y + x^3 = 0
```

Maxima

Aquí se define la dependencia $y(x)$.

```
(%i74) depends(y, x);
(%o74) [y(x)]
```

Maxima

Ahora se deriva e

```
(%i75) diff(e, x);
(%o75) 3y^2 (d/dx y) - 3x (d/dx y) - 3y + 3x^2 = 0
```

Maxima

Finalmente se resuelve la ecuación para la variable $\frac{d}{dx}y$.

```
(%i76) solve(%, diff(y, x));
(%o76) [d/dx y = (y - x^2) / (y^2 - x)]
```

7.8 Ecuaciones diferenciales ordinarias

<pre>ode2(ecu, dvar, ivar)</pre>	resuelve la ecuación diferencial ordinaria ecu , de variable dependiente $dvar$ y variable independiente $ivar$, de primer orden y segundo orden
----------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias.

<code>ic11(sol,x = x0,y = y0)</code>	resuelve el problema del valor inicial en ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden
<code>ic12(sol,x = x0,y = y0,'diff(y,x) = dy0)</code>	resuelve el problema del valor inicial en ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden
<code>bc2(sol,x = x0,y = y0,x = x1,y = y1)</code>	resuelve el problema del valor en la frontera para ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Maxima

He aquí la solución de la ecuación diferencial $y'(x) = ay(x) + 1$. En esta solución `%c` es una constante que debe ser determinada a partir de valores iniciales.

```
(%i77) ode2('diff(y,x) = a * y + 1, y, x);
```

```
(%o77) y = ( %c -  $\frac{e^{-ax}}{a}$  ) eax
```

Maxima

Si se incluye una condición inicial apropiada, entonces no hay ninguna constante en la solución.

```
(%i78) ic1(% , x = 0, y = 0);
```

```
(%o78) y =  $\frac{e^{ax} - 1}{a}$ 
```

Maxima

He aquí la solución de la ecuación diferencial $y''(x) + y y'(x) = 0$. En esta solución `%k1` y `%k2` son constantes a ser determinadas a partir de valores iniciales o valores de frontera.

```
(%i79) ode2('diff(y,x,2) + y * 'diff(y,x)^3 = 0, y, x);
```

```
(%o79)  $\frac{y^3 + 6 \%k_1 y}{6} = x + \%k_2$ 
```

Maxima

Si se incluyen las condiciones iniciales apropiadas desaparecen las constantes.

(%i80) `ic2(% , x = 0, y = 0, 'diff(y, x) = 1);`

(%o80)
$$\frac{y^3 - 3y(y^2 - 1)}{6} = x$$

Maxima

Si se incluyen los valores de frontera apropiados también desaparecen las constantes.

(%i81) `bc2(%o3, x = 0, y = 0, x = 1, y = 1);`

(%o81)
$$\frac{y^3 + 5y}{6} = x$$

7.9 Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales

La función `desolve` resuelve sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales utilizando la transformada de Laplace. La dependencia funcional respecto de una variable independiente debe indicarse explícitamente, tanto en las variables como en las derivadas. Por ejemplo, para la primera derivada, a diferencia de la forma `'diff(y, x)` (usada en la sección 7.8), debe usarse la forma `'diff(y(x), x)`.

<code>desolve(ecu, y(x))</code>	resuelve una ecuación diferencial para $y(x)$, tomando a x como variable independiente
<code>desolve([ecu₁, ..., ecu_n], [y₁(x), ..., y_n(x)])</code>	resuelve sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales
<code>atvalue(φ(x), x = x₀, val)</code>	permite añadir la condición inicial $\phi(x_0) = val$ a un determinado sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales

Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales.

Maxima

He aquí la solución de la ecuación diferencial $y''(x) + y(x) = 2x$.

```
(%i82)  solve('diff(y(x), x, 2) + y(x) = 2 * x, y(x));
(%o82)  y(x) = sin(x) (  $\frac{d}{dx} y(x)|_{x=0} - 2$ ) + y(0) cos(x) + 2 x
```

Maxima

Esto resuelve el sistema $\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{cases}$.

```
(%i83)  solve(['diff(x(t), t) = y(t), 'diff(y(t), t) = x(t)],
[x(t), y(t)]);
(%o83)  [ x(t) =  $\frac{(y(0) + x(0)) \%e^t}{2} - \frac{(y(0) - x(0)) \%e^{-t}}{2}$ ,
y(t) =  $\frac{(y(0) + x(0)) \%e^t}{2} + \frac{(y(0) - x(0)) \%e^{-t}}{2}$  ]
```

Maxima

De esta manera se añaden las las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ al sistema anterior.

```
(%i84)  atvalue(x(t), t = 0, 1);
(%o84)  1
(%i85)  atvalue(y(t), t = 0, 0);
(%o85)  0
```

Maxima

Al volver a resolver el sistema se obtienen las soluciones con las condiciones iniciales dadas.

```
(%i86)  solve(['diff(x(t), t) = y(t), 'diff(y(t), t) = x(t)],
[x(t), y(t)]);
(%o86)  [ x(t) =  $\frac{\%e^t}{2} + \frac{\%e^{-t}}{2}$ , y(t) =  $\frac{\%e^t}{2} - \frac{\%e^{-t}}{2}$  ]
```

7.10 Series de potencias

<code>taylor(expr, x, a, n)</code>	expande la expresión <i>expr</i> en un desarrollo de Taylor o de Laurent respecto de la variable <i>x</i> alrededor del punto <i>a</i> , con términos hasta $(x - a)^n$
<code>taylor(expr, [x₁, x₂, ...], a, n)</code>	devuelve la serie en potencias truncada de grado <i>n</i> en todas las variables <i>x</i> ₁ , <i>x</i> ₂ , ... alrededor del punto (<i>a</i> , <i>a</i> , ...)
<code>taylor(expr, [x₁, a₁, n₁], [x₂, a₂, n₂], ...)</code>	devuelve la serie en potencias truncada en las variables <i>x</i> ₁ , <i>x</i> ₂ , ... alrededor del punto (<i>a</i> ₁ , <i>a</i> ₂ , ...); el truncamiento se realiza, respectivamente, en los grados <i>n</i> ₁ , <i>n</i> ₂ , ...
<code>taylor(expr, [x₁, x₂, ...], [a₁, a₂, ...], [n₁, n₂, ...], ...)</code>	equivale a <code>taylor(expr, [x₁, a₁, n₁], [x₂, a₂, n₂], ...)</code>
<code>taylor(expr, [x, a, n, 'asympt'])</code>	desarrolla <i>expr</i> en potencias negativas de <i>x - a</i> (el término de mayor orden es $(x - a)^{-n}$)

Obtención de series de potencias.

Las operaciones matemáticas de las que se ha hablado hasta ahora son exactas. Considerando la entrada exacta, sus resultados son fórmulas exactas. En muchas situaciones, sin embargo, no se necesita un resultado exacto. Puede ser suficiente, por ejemplo, encontrar una fórmula aproximada que es válida, digamos, cuando la cantidad *x* es pequeña.

— *Maxima* —

Esto da una aproximación en serie de potencias para alrededor de 0, hasta los términos de orden 3.

```
(%i87)  taylor((1 + x)^n, x, 0, 3);
```

```
(%o87)  1 + n x +  $\frac{(n^2 - n)x^2}{2}$  +  $\frac{(n^3 - 3n^2 + 2n)x^3}{6}$  + ...
```

— *Maxima* —

Maxima conoce las expansiones en serie de potencias para una gran cantidad funciones matemáticas.

(%i88) `taylor(exp(-a * t) * (1 + sin(2 * t)), t, 0, 4);`

(%o88)
$$1 + (-a + 2) t + \frac{(a^2 - 4a) t^2}{2} - \frac{(a^3 - 6a^2 + 8) t^3}{6} + \frac{(a^4 - 8a^3 + 32a) t^4}{24} + \dots$$

— *Maxima* —

Si se da una función no conocida, `taylor` escribe la serie de potencias en términos de derivadas.

(%i89) `taylor(1 + f(t), t, 0, 3);`

(%o89)
$$1 + f(0) + \left(\frac{d}{dt} f(t) \Big|_{t=0} \right) t + \frac{\left(\frac{d^2}{dt^2} f(t) \Big|_{t=0} \right) t^2}{2} + \frac{\left(\frac{d^3}{dt^3} f(t) \Big|_{t=0} \right) t^3}{6} + \dots$$

Las series de potencias son fórmulas aproximadas que juegan el mismo papel con respecto a las expresiones algebraicas como los números aproximados con las expresiones numéricas.

Maxima permite realizar operaciones en series de potencias y en todos los casos mantiene el orden apropiado o el “grado de precisión” para las series de potencias resultantes.

— *Maxima* —

He aquí una serie de potencias simple, de orden 3.

(%i90) `taylor(exp(x), x, 0, 3);`

(%o90)
$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

Maxima

Cuando se hacen operaciones en una serie de potencias, el resultado es calculado sólo en el orden apropiado en x .

$$\begin{aligned} (\%i91) \quad & \%^2 * (1 + \%); \\ (\%o91) \quad & 2 + 5x + \frac{13x^2}{2} + \frac{35x^3}{6} + \dots \end{aligned}$$

Maxima

Al copiar los tres primeros términos del desarrollo anterior se tiene una expresión ordinaria.

$$\begin{aligned} (\%i92) \quad & 2 + 5 * x + (13 * x^2)/2 + (35 * x^3)/6; \\ (\%o92) \quad & \frac{35x^3}{6} + \frac{13x^2}{2} + 5x + 2 \end{aligned}$$

Maxima

Ahora el cuadrado es calculado exactamente.

$$\begin{aligned} (\%i93) \quad & \%^2; \\ (\%o93) \quad & \left(\frac{35x^3}{6} + \frac{13x^2}{2} + 5x + 2 \right)^2 \end{aligned}$$

Maxima

Al aplicar `expand` se obtiene un resultado con once términos.

$$\begin{aligned} (\%i94) \quad & \%, \text{expand}; \\ (\%o94) \quad & \frac{1225x^6}{36} + \frac{455x^5}{6} + \frac{1207x^4}{12} + \frac{265x^3}{3} + 51x^2 + 20x + 4 \end{aligned}$$

Maxima

He aquí una serie de potencias doble de orden 3.

$$\begin{aligned} (\%i95) \quad & \text{taylor}(\sin(y + x), [x, 0, 3], [y, 0, 3]); \\ (\%o95) \quad & y - \frac{y^3}{6} + \dots + \left(1 - \frac{y^2}{2} + \dots\right) x + \left(-\frac{y}{2} + \frac{y^3}{12} + \dots\right) x^2 + \\ & \left(-\frac{1}{6} + \frac{y^2}{12} + \dots\right) x^3 + \dots \end{aligned}$$

Un detalle interesante para mencionar es que *Maxima*, en los casos que sea posible, permite obtener la fórmula general del desarrollo en serie de potencias de una función.

`powerseries(expr, x, a)` devuelve la forma general del desarrollo en serie de potencias de *expr* para la variable *x* alrededor del punto *a*

Obtención de series de potencias.

Maxima

He aquí una conocida fórmula.

(%i96) `powerseries(sin(x), x, 0);`

(%o96)
$$\sum_{i_1=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i_1} x^{2 i_1+1}}{(2 i_1+1)!}$$

Maxima

Esta es una fórmula más elaborada.

(%i97) `powerseries(cos(x^2 - 1), x, 0);`

(%o97)
$$\sin(1) \sum_{i_2=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i_2} x^{2(2 i_2+1)}}{(2 i_2+1)!} + \cos(1) \sum_{i_2=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i_2} x^{4 i_2}}{(2 i_2)!}$$

Maxima

Una forma de eliminar los *subíndices* de los *índices*, en las sumas, es usando la función `niceindices`.

(%i98) `niceindices(powerseries(cos(x^2 - 1), x, 0));`

(%o98)
$$\sin(1) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2(2 i+1)}}{(2 i+1)!} + \cos(1) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{4 i}}{(2 i)!}$$

7.11 Transformada de Laplace

<code>laplace(expr, t, s)</code>	calcula la transformada de Laplace de <i>expr</i> con respecto de la variable <i>t</i> y parámetro de transformación <i>s</i>
<code>ilt(expr, s, t)</code>	calcula la transformada inversa de Laplace de <i>expr</i> con respecto de <i>s</i> y parámetro <i>t</i> .

Transformadas de Laplace.

— *Maxima* —

Esto calcula la transformada de Laplace.

```
(%i99) laplace(t^3 * exp(a * t), t, s);
```

```
(%o99) 
$$\frac{6}{(s - a)^4}$$

```

— *Maxima* —

He aquí la transformada inversa.

```
(%i100) ilt(%, s, t);
```

```
(%o100) t^3 %ea t
```

Capítulo 8

Matemáticas numéricas

8.1 Solución numérica de ecuaciones

<code>algsys</code> ($[ecu_1, \dots, ecu_m]$, $[x_1, \dots, x_n]$)	resuelve el sistema de ecuaciones polinómicas ecu_1, \dots, ecu_m para las variables x_1, \dots, x_n
<code>allroots</code> (ecu, x)	calcula aproximaciones numéricas de las raíces reales y complejas de la ecuación polinómica ecu para la variable x
<code>find_root</code> (ecu, x, a, b)	calcula una raíz de la ecuación ecu en el intervalo de aislamiento $[a, b]$

Búsqueda de raíces numéricas.

— *Maxima* —

`solve` devuelve la ecuación ingresada.

```
(%i1) solve(2 - 4 * x + x^5 = 0, x);  
(%o1) [0 = x^5 - 4x + 2]
```

— *Maxima* —

`algsys` proporciona una lista con soluciones aproximadas.

```
(%i2) algsys([2 - 4 * x + x^5 = 0], [x]);
```

```
(%o2) [[x = 1,243596445373759],
      [x = -1,438447695329177 %i - 0,11679186122298],
      [x = 1,438447695329177 %i - 0,11679186122298],
      [x = -1,518512140520062], [x = 0,50849947534103]]
```

— *Maxima* —

La opción `realonly:true` proporciona únicamente las aproximaciones reales.

```
(%i3) algsys([2 - 4 * x + x5 = 0], [x], realonly : true;
(%o3) [[x = 1,243596445373759], [x = 0,50849947534103],
      [x = -1,518512140520062]]
```

Si las ecuaciones involucran sólo funciones lineales o polinómicas, entonces puede usarse `algsys` para obtener aproximaciones numéricas de todas las soluciones. Sin embargo, cuando las ecuaciones involucran funciones más complicadas, no hay en general ningún procedimiento sistemático para obtener todas las soluciones, aún numéricamente. En tales casos, puede usarse `find_root` para buscar soluciones.

Téngase presente que `find_root` espera que la función en cuestión tenga signos diferentes en los extremos del intervalo de aislamiento.

— *Maxima* —

Aquí *Maxima* devuelve la misma sentencia de entrada, pues `find_root` evalúa los extremos del intervalo de aislamiento: $[0, 2]$; y la función `log` que, en este caso, forma parte de la ecuación no está definida en cero.

```
(%i4) find_root(3 * cos(x) = log(x), x, 0, 2);
(%o4) find_root(3 * cos(x) = log(x), x, 0, 0, 2, 0)
```

— *Maxima* —

Variando el extremo izquierdo del intervalo de aislamiento se obtiene una solución aproximada.

```
(%i5) find_root(3 * cos(x) = log(x), x, 0, 00001, 2);
(%o5) 1,447258617277903
```

— *Maxima* —

La ecuación tiene varias soluciones. Si se da un intervalo de aislamiento diferente, `find_root` puede devolver una solución diferente.

```
(%i6) find_root(3 * cos(x) = log(x), x, 12, 15);
(%o6) 13,10638768062491
```

8.2 Integrales numéricas

<code>quad_qags(f, x, a, b)</code>	calcula numéricamente la integral $\int_a^b f dx$
<code>quad_qagi(f, x, a, inf)</code>	calcula numéricamente la integral $\int_a^\infty f dx$
<code>quad_qagi($f, x, minf, b$)</code>	calcula numéricamente la integral $\int_{-\infty}^b f dx$
<code>quad_qagi($f, x, minf, inf$)</code>	calcula numéricamente la integral $\int_{-\infty}^\infty f dx$

Integrales numéricas.

Las funciones `quad_qags` y `quad_qagi` devuelven una lista de cuatro elementos:

1. la aproximación a la integral,
2. el error absoluto estimado de la aproximación,
3. el número de evaluaciones del integrando,
4. un *código de error*.

El *código de error* puede tener los siguientes valores:

- 0** si no ha habido problemas;
- 1** si se utilizaron demasiados intervalos;

Capítulo 9

Funciones y programas

9.1 Definición de funciones

Hasta aquí, se ha visto muchos ejemplos de funciones incorporadas en *Maxima*. En esta sección, se mostrará la forma en que el usuario puede añadir sus propias funciones a *Maxima*.

```
— Maxima —  
Esto define la función f.  
  
(%i1) f(x) := x^2;  
(%o1) f(x) := x2
```

```
— Maxima —  
f eleva al cuadrado su argumento.  
  
(%i2) f(a + 1);  
(%o2) (a + 1)2
```

```
— Maxima —  
El argumento puede ser un número.  
  
(%i3) f(4);  
(%o3) 16
```

Maxima

O puede ser una expresión más complicada.

```
(%i4) f(x^2 + 3 * x);
(%o4) (x^2 + 3 x)^2
```

Maxima

Puede usarse *f* en un cálculo.

```
(%i5) expand(f(x + y + 1));
(%o5) y^2 + 2 x y + 2 y + x^2 + 2 x + 1
```

Maxima

Esto muestra la definición hecha para *f*.

```
(%i6) dispfun(f);
(%t6) f(x) := x^2
(%o6) [%t38]
```

<code>f(x) := x^2</code>	define la función <code>f</code>
<code>dispfun(f)</code>	muestra la definición de <code>f</code>
<code>remfunction(f)</code>	borra todas las definiciones de <code>f</code>
<code>functions</code>	es una variable que contiene los nombres de las funciones definidas por el usuario

Definición de una función en *Maxima*.

Maxima

Las funciones en *Maxima* pueden tener cualquier número de argumentos

```
(%i7) hump(x, xmax) := (x - xmax)^2/xmax;
(%o7) hump(x, xmax) := (x - xmax)^2
                    xmax
```

Maxima

Puede usarse la función `hump` tal como cualquiera de las funciones predefinidas.

```
(%i8) 2 + hump(x, 3, 5);
(%o8) 0,28571428571429 (x - 3,5)^2 + 2
```

Maxima

Esto da una nueva definición para `hump`, que sobrescribe la anterior.

```
(%i9) hump(x, xmax) := (x - xmax)^4;
(%o9) hump(x, xmax) := (x - xmax)^4
```

Maxima

Sólo es mostrada la nueva definición.

```
(%i10) dispfun(hump);
(%t10) hump(x, xmax) := (x - xmax)^4
(%o10) [%t42]
```

Maxima

Esto limpia todas las definiciones para `hump`.

```
(%i11) remfunction(hump);
(%o11) [hump]
```

<code>dispfun(f_1, \dots, f_n)</code>	muestra las definiciones de f_1, \dots, f_n
<code>remfunction(f_1, \dots, f_n)</code>	borra todas las definiciones de f_1, \dots, f_n
<code>dispfun(<i>all</i>)</code>	muestra las definiciones de todas la funciones definidas por el usuario
<code>remfunction(<i>all</i>)</code>	borra todas las definiciones de todas la funciones definidas por el usuario

Vista y borrado de varias funciones.

Maxima

Ahora se define la función g .

```
(%i12) g(x) := sqrt(1 - x);
(%o12) g(x) :=  $\sqrt{1 - x}$ 
```

Maxima

Esto muestra la definición de todas las funciones (en este caso f y g).

```
(%i13) dispfun(all);
(%t13) f(x) :=  $x^2$ 
(%t14) g(x) :=  $\sqrt{1 - x}$ 
(%o14) [%t13, %t14]
```

Maxima

Esto borra la definición de todas las funciones (en este caso f y g).

```
(%i15) remfunction(all);
(%o15) [f, g]
```

Maxima

Ya no hay funciones definidas por el usuario.

```
(%i16) dispfun(all);
(%o16) [ ]
```

Cuando se ha terminado con una función particular, es bueno limpiar las definiciones que se haya hecho para ella. Si no, podría incurrirse en un conflicto al usar la misma función para un propósito diferente en la sesión de *Maxima*.

Maxima también permite definir funciones con una cantidad variable de argumentos (funciones de argumento variable) y funciones que se aplican directamente a listas (funciones *array*).

$F[L] := \phi(L)$	define la función F cuyo número de argumentos es variable
$F[x_1, \dots, x_n] := \phi(x_1, \dots, x_n)$	define la función array F cuyo argumento es una lista
$F[x_1, \dots, x_n] := [\phi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \phi_m(x_1, \dots, x_n)]$	define la función array F cuyo argumento es una lista y que devuelve una lista

Más definiciones de funciones en *Maxima*.

— *Maxima* —

Aquí se define la función F que admite un número variable de argumentos.

```
(%i17) F([x]) := x^2 + 4;
(%o17) F([x]) := x^2 + 4
```

— *Maxima* —

Esto evalúa F en un solo argumento.

```
(%i18) F(2);
(%o18) 8
```

— *Maxima* —

Esto evalúa F en dos argumentos.

```
(%i19) F(2,3);
(%o19) [8, 13]
```

— *Maxima* —

He aquí la definición de la función array G .

```
(%i20) G[x,y] := x^2 + y^2;
(%o20) G_{x,y} := x^2 + y^2
```

Maxima

Aquí se evalúa G en la lista $[2, 3]$

```
(%i21) G[2, 3];
```

```
(%o21) 13
```

Maxima

Esto define la función array H que devuelve una lista.

```
(%i22) H[x, y] := [2 * x, 3 - y, x * y];
```

```
(%o22) Hx,y := [2 * x, 3 - y, x * y]
```

Maxima

Aquí se evalúa la función H en la lista $[4, 3]$.

```
(%i23) H[4, 3];
```

```
(%o23) [8, 0, 12]
```

Para visualizar la definición de este tipo de funciones puede usarse la función `dispfun`, pero para borrar las respectivas definiciones debe usarse la función `remarray`.

<code>remarray(F)</code>	borra la función array F
<code>remarray(F_1, \dots, F_n)</code>	borra las funciones array F_1, \dots, F_n
<code>remarray(all)</code>	borra todas las funciones array definidas por el usuario

Borrado de funciones array.

Maxima

Esto la definición de todas las funciones array, hasta ahora, definidas.

```
(%i24) dispfun(all);
```

```
(%t24) F([x]) := x^2 + 4
```

```
(%t25) Gx,y := x^2 + y^2
```

```
(%t26) Hx,y := [2 x, 3 - y, x y]
(%o26) [%t24, %t25, %t26]
```

Maxima

Esto borra la definición de la función F definida en (%i17).

```
(%i27) remfunction(F);
(%o27) [F]
```

Maxima

Esto borra la definición de todas las funciones array definidas por el usuario.

```
(%i28) remarray(all);
(%o28) [G, H]
```

Además, *Maxima* permite definir las llamadas funciones *anónimas* que son de mucha utilidad en algunos contextos en los que sea necesario un nombre de función y que generalmente está vinculado con la programación. La función para definir las es *lambda*.

<code>lambda([x], expr)</code>	define una función anónima
<code>lambda([x₁, ..., x_m], expr₁, ..., expr_n)</code>	define una función anónima de argu- mentos múltiples

Función anónima.

Maxima

Una función anónima puede asignarse a una variable y ser evaluada como si fuese una función ordinaria.

```
(%i29) f : lambda([x], x^2);
(%o29) lambda([x], x^2)
(%i30) f(a);
(%o30) a^2
```

Maxima

O puede aplicarse directamente.

```
(%i31) lambda([x], x^2)(a);
(%o31) a^2
```

Maxima

No obstante, no es reconocida por `dispfun`.

```
(%i32) dispfun(all);
(%o32) [ ]
```

En muchas clases de cálculos, el usuario puede encontrarse digitando la misma entrada a *Maxima* muchas veces. Es posible ahorrarse mucha digitación definiendo una función que contiene todas las sentencias de entrada.

Maxima

Esto construye un producto de tres términos, y expande el resultado.

```
(%i33) expand(product(x + i, i, 1, 3));
(%o33) x^3 + 6 x^2 + 11 x + 6
```

Maxima

Esto hace lo mismo, pero con cuatro términos.

```
(%i34) expand(product(x + i, i, 1, 4));
(%o34) x^4 + 10 x^3 + 35 x^2 + 50 x + 24
```

Maxima

Esto define una función `exprod` que construye un producto de n términos, luego lo expande.

```
(%i35) exprod(n) := expand(product(x + i, i, 1, n)) $
```

Maxima

Siempre que usa la función, ejecutará las operaciones `product` y `expand`.

```
(%i36)  exprod(5);
(%o36)  x5 + 15 x4 + 85 x3 + 225 x2 + 274 x + 120
```

Las funciones que se definen en *Maxima* son esencialmente procedimientos que ejecutan las sentencias dadas por el usuario. Es posible incluir varios pasos en los procedimientos, separados por comas.

Maxima

El resultado que se obtiene de la función es simplemente la última expresión en el procedimiento. Note que debe ponerse paréntesis alrededor del procedimiento cuando se define.

```
(%i37)  cex(n, i) := ( t : exprod(n),
                    coeff(t, x^i) )$
```

Maxima

Esto “corre” el procedimiento.

```
(%i38)  cex(5, 3);
(%o38)  85
```

$(expr_1, expr_2, \dots)$	una secuencia de expresiones para evaluar (procedimiento)
<code>block([a, b, ...], proc)</code>	un procedimiento con variables locales a, b, \dots

Construcción de procedimientos.

Una buena idea es declarar, como locales, las variables que se usan dentro de los procedimientos, de modo que no interfieran con cálculos fuera de éstos. Puede hacerse esto estableciendo los procedimientos como *bloques*, en los cuales se da una lista de variables para que sean tratadas como locales.

Maxima

La función `cex` definida en (%i37) no es un bloque, así que el valor de `t` “escapa”, y existe incluso después de la evaluación de la función.

```
(%i39) t;
(%o39) x5 + 15 x4 + 85 x3 + 225 x2 + 274 x + 120
```

Maxima

Esta función es definida como un bloque con variable local `u`.

```
(%i40) ncex(n, i) :=
      block([u],
      u : exprod(n),
      coeff(u, xi) ) $
```

Maxima

La función devuelve el mismo resultado que la anteriormente definida.

```
(%i41) ncex(5, 3);
(%o41) 85
```

Maxima

Ahora, sin embargo, el valor de `u` no se escapa de la función.

```
(%i42) u
(%o42) u
```

Es posible asignar un valor inicial a una o más variables locales dentro de la lista de las mismas. También se puede definir una función como bloque sin declarar variables locales, para lo cual debe omitirse dicha lista.

Un bloque puede aparecer dentro de otro bloque. Las variables locales se inicializan cada vez que se entra dentro de un nuevo bloque. Las variables locales de un bloque se consideran globales dentro de otro anidado dentro del primero. Si una variable es no local dentro

de un bloque, su valor es el que le corresponde en el bloque superior. Este criterio se conoce con el nombre de “alcance dinámico”.

9.2 Reglas de transformación para funciones

Maxima permite al usuario definir sus propias reglas de transformación y patrones de comparación.

— *Maxima* —

Definición de la regla de transformación que reemplaza x por 3.

```
(%i43) defrule(regtran1, x, 3);
(%o43) regtran_1 : x → 3
```

— *Maxima* —

Aplicación de la regla de transformación `regtran1`

```
(%i44) apply1(1 + f(x) + f(y), regtran1);
(%o44) f(y) + f(3) + 1
```

— *Maxima* —

Puede definirse una regla de transformación para $f(x)$. Esta regla no afecta a $f(y)$.

```
(%i45) defrule(regtran2, f(x), p);
(%o45) regtran_2 : f(x) → p
(%i46) apply1(1 + f(x) + f(y), regtran2);
(%o46) f(y) + p + 1
```

— *Maxima* —

Esto define un patrón $f(t)$ que admite cualquier argumento para f .

```
(%i47) matchdeclare(t, true);
(%o47) done
(%i48) defrule(patron, f(t), t^2);
(%o48) patron : f(t) → t^2
```

Maxima

Aquí se aplica el patrón previamente definido.

```
(%i49) apply1(1 + f(x) + f(y), patron);
(%o49) y2 + x2 + 1
```

Maxima

Esto muestra todas las reglas, hasta aquí, definidas.

```
(%i50) disprule(all);
(%t51) regtran1 : x → 3
(%t52) regtran2 : f(x) → p
(%t53) patron : f(t) → t2
(%o53) [%t51, %t52, %t53]
```

Maxima

Con esta sentencia se borran todas las definiciones de las reglas `regtran1`, `regtran2` y `patron`.

```
(%i54) clear_rules();
(%o54) false
```

Maxima

Esto indica que todas las definiciones de las reglas han sido borradas.

```
(%i55) disprule(all);
(%o55) [ ]
```

Probablemente, el aspecto más potente de las reglas de transformación en *Maxima* es que ellas pueden involucrar expresiones no sólo literales, sino también patrones. Un patrón es una expresión genérica $f(t)$ para la cual se ha declarado el tipo de variable t con `matchdeclare`. Así, una regla de transformación para $f(t)$ especifica cómo debería ser transformada la función f con el tipo de argumento especificado. Nótese que, en contraste, una regla de transformación

para $f(x)$ sin realizar la declaración de la variable, especifica sólo la transformación de la expresión literal $f(x)$, y por ejemplo, no dice nada sobre la transformación de $f(y)$.

Siempre que se cumpla con la declaración especificada, es posible establecer reglas de transformación para expresiones de cualquier forma.

Maxima

Esto define una función de predicado que define el patrón de producto para un argumento.

```
(%i56) prodp(expr) := not atom(expr) and op(expr) = “*”;
(%o56) prodp(expr) :=  $\neg$  atom(expr)  $\wedge$  op(expr) = “*”
(%i57) matchdeclare(p,prodp);
(%o57) done
```

Maxima

Ahora se define una regla que transforme una función aplicada a un producto como la suma de los factores a los cuales se les ha aplicado la función.

```
(%i58) defrule(reg,f(p),apply(“+”,map(f,args(p))));
(%o58) reg : f(p)  $\rightarrow$  apply(+, map(f, args(p)))
```

Maxima

Luego, al aplicar la regla recién definida se aprecia el efecto producido.

```
(%i59) apply1(f(a*b)+f(c*d),reg);
(%o59) f(d) + f(c) + f(b) + f(a)
```

Maxima

Esto aplica la regla sin limitar el número de los factores en el argumento de f .

```
(%i60) apply1(f(a)+f(a*b*c)+f(c),reg);
(%o60) 2f(c) + f(b) + 2f(a)
```

Maxima

Esto combina la regla definida por el usuario con la función `expand` de *Maxima*.

```
(%i61) apply1(f(a) * f(a * b * c) * f(c), reg), expand;
(%o61) f(a) f^2(c) + f(a) f(b) f(c) + f^2(a) f(c)
```

9.3 Funciones definidas a partir de expresiones

En muchos casos, sobre todo en programación, resulta bastante útil poder definir una función a partir de una expresión dada para luego poder invocarla con facilidad y así evitar el uso reiterado de la función `ev` (ver sección 6.2).

<code>define(f(x₁, ..., x_n), <i>expr</i>)</code>	define una función de nombre <i>f</i> con argumentos x_1, \dots, x_n y cuerpo <i>expr</i>
<code>define(f[x₁, ..., x_n], <i>expr</i>)</code>	define una función array de nombre <i>f</i> con argumentos x_1, \dots, x_n y cuerpo <i>expr</i>

Definición de funciones a partir de expresiones.

Maxima

Esto almacena la expresión $x^2 + 1$ en la variable *ex*.

```
(%i62) ex : x^2 + 1;
(%o62) x^2 + 1
```

Maxima

Aquí se pretende definir la función *f* a partir de *ex*. No obstante, al realizar una evaluación no se obtiene el resultado esperado.

```
(%i63) f(x) := ex$
(%i64) f(8);
(%o64) x^2 + 1
```

Maxima

Por otra parte, al utilizar `define` para definir la función g a partir de ex si se obtiene un resultado satisfactorio.

```
(%i65) define(g(x), ex) $
(%i66) g(8);
(%o66) 65
```

Una gran utilidad de `define` se aprecia al definir funciones a partir de las derivadas de otras, las cuales serán evaluadas en valores numéricos.

Maxima

He aquí la definición de la función $f = x^2 + 1$.

```
(%i67) f(x) := x^2 + 1 $
```

Maxima

Ahora, a partir de f , se define “ f' ” como “ f' ” = $\frac{df}{dx}$.

```
(%i68) “f'”(x) := diff(f(x), x) $
```

Maxima

La evaluación simbólica de “ f' ” no presenta problema alguno.

```
(%i69) “f'”(t);
(%o69) 2t
```

Maxima

No obstante, la evaluación numérica no esta permitida para dicha función.

```
(%i70) “f'”(8);
diff: second argument must be a variable; found 8
#0: f '(x=8)
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

— *Maxima* —

Aquí se vuelve a definir “ f' ”, pero en este caso se utiliza la función `define` (recuerde que esta nueva definición anula a la anterior).

```
(%i71) define("f'(x), diff(f(x), x))$
```

— *Maxima* —

La evaluación simbólica es idéntica.

```
(%i72) "f'(t);  
(%o72) 2t
```

— *Maxima* —

Sin embargo, ya no hay dificultad en la evaluación numérica.

```
(%i73) "f'(8);  
(%o73) 16
```

Capítulo 10

Listas

10.1 Juntar objetos

Las listas son bloques de construcción básica para *Maxima* y *Lisp*¹. Todos los tipos de datos diferentes a los arreglos, tablas mixtas o números son representados como listas en *Lisp*.

Puede decirse que, en un nivel básico, lo que esencialmente hace una lista en *Maxima* es proporcionar una forma de agrupar varias expresiones de cualquier clase.

```
┌── Maxima ───────────────────────────────────────────────────────────────────────────────────┐
He aquí una lista de números.

(%i1) [2, 3, 4];
(%o1) [2, 3, 4]
```

```
┌── Maxima ───────────────────────────────────────────────────────────────────────────────────┐
Esto da una lista de expresiones simbólicas.

(%i2) x^% - 1;
(%o2) [x2 - 1, x3 - 1, x4 - 1]
```

¹Lisp (*List Processing*) es el lenguaje de programación de alto nivel en el que está programado *Maxima*.

Maxima

Es posible derivar estas expresiones.

```
(%i3) diff(%, x);
(%o3) [2 x, 3 x2, 4 x3]
```

Maxima

Y luego encontrar los valores cuando x es reemplazado por 3.

```
(%i4) %, x = 3;
(%o4) [6, 27, 108]
```

La mayoría de funciones matemáticas incorporadas en *Maxima* han sido implementadas “listables” de modo que actúen separadamente sobre cada elemento de una lista.

10.2 Generación de listas

Maxima permite crear listas de acuerdo a una cierta regla definida por el usuario. Para ello cuenta con la función incorporada `create_list`.

<code>create_list(f, i, i_{min}, i_{max})</code>	da una lista de valores con i variando de i_{min} a i_{max}
<code>create_list(f, i, list)</code>	da una lista de valores con i variando de acuerdo a cada elemento de $list$
<code>create_list(f, i, i_{min}, i_{max}, j, j_{min}, j_{max}, ...)</code>	genera una lista con cada índice $(i, j, ...)$ variando del valor mínimo al valor máximo que le han sido asociados
<code>create_list(f, i, list₁, j, list₂, ...)</code>	genera una lista con cada índice $(i, j, ...)$ variando de acuerdo a cada elemento de la lista que se le ha asociado

Funciones para generar de listas.

Maxima

Esto da una lista de los valores de i^2 , con i variando de 1 a 6.

```
(%i5) create_list(i^2, i, 1, 6);
(%o5) [1, 4, 9, 16, 25, 36]
```

Maxima

He aquí una lista de los valores de $\sin\left(\frac{n}{5}\right)$ para n variando de 0 a 4.

```
(%i6) create_list(sin(n/5), n, 0, 4);
(%o6) [0, sin(1/5), sin(2/5), sin(3/5), sin(4/5)]
```

Maxima

Esto da los valores numéricos de la tabla generada en (%i6).

```
(%i7) %, numer;
(%o7) [0, 0, 19866933079506, 0, 38941834230865,
0, 56464247339504, 0, 71735609089952]
```

Maxima

También puede hacerse tablas de fórmulas.

```
(%i8) create_list(x^i + 2 * i, i, 1, 5);
(%o8) [x + 2, x^2 + 4, x^3 + 6, x^4 + 8, x^5 + 10]
```

Maxima

`create_list` usa exactamente la misma notación para el iterador que las funciones `sum` y `product` que fueron mencionadas en la sección 7.4.

```
(%i9) product(x^i + 2 * i, i, 1, 5);
(%o9) (x + 2) (x^2 + 4) (x^3 + 6) (x^4 + 8) (x^5 + 10)
```

Maxima

Esto hace una lista con valores de x variando desde 0 hasta 1 en pasos de 0,25

```
(%i10) create_list(i/4, i, 1, 4), numer;
(%o10) [0,25, 0,5, 0,75, 1]
(%i11) create_list(sqrt(x), x, %);
(%o11) [0,5, 0,70710678118655, 0,86602540378444, 1]
```

Maxima

Es posible realizar otras operaciones en las listas que se obtienen con `create_list`.

```
(%i12) %^2 + 3;
(%o12) [3,25, 3,5, 3,75, 4]
```

Maxima

Esto hace una lista de $x^i + y^j$ con i variando desde 1 hasta 3 y j variando desde 1 hasta 2.

```
(%i13) create_list(x^i + y^j, i, 1, 3, j, 1, 2);
(%o13) [y + x, y^2 + x, y + x^2, y^2 + x^2, y + x^3, y^2 + x^3]
```

Maxima

Esto crea una lista conteniendo cuatro copias del símbolo x .

```
(%i14) create_list(x, i, 1, 4);
(%o14) [x, x, x, x]
```

Maxima

Esto da una lista de cuatro números pseudo aleatorios.

```
(%i15) create_list(random(1,0), i, 1, 4);
(%o15) [0,25223887668538, 0,41556272272148,
0,61257388925382, 0,84181265533592]
```

10.3 Elección de elementos de una lista

Los elementos de las listas son numerados en orden ascendente, empezando en 1. Por lo cual, es posible elegir un elemento de una lista en *Maxima* mediante su “índice”.

Para realizar la mencionada elección debe utilizarse adecuadamente la función `part`.

<code>part(list, i)</code> ó <code>list[i]</code>	el i -ésimo elemento de <i>list</i> (el primer elemento es <code>list[1]</code>)
<code>part(list, [i, j, ...])</code>	una lista formada por los elementos i, j, \dots de <i>list</i>
<code>part(list, i₁, ..., i_k)</code>	obtiene la parte de <i>list</i> que se especifica por los índices i_1, \dots, i_k (primero se obtiene la parte i_1 de <i>list</i> , después la parte i_2 del resultado anterior, y así sucesivamente)
<code>first(list)</code> , <code>second(list), ...</code> , <code>tenth(list)</code>	devuelve el primer, segundo, ..., décimo elemento de <i>list</i>
<code>last(list)</code>	devuelve el último elemento de <i>list</i>

Operaciones con elementos de una lista.

```

Maxima
-----
Esto extrae el tercer elemento de la lista.

(%i16) part([4, -1, 8, -6], 3);
(%o16) 8
    
```

```

Maxima
-----
Esto extrae una lista de elementos.

(%i17) part([4, -1, 8, -6], [2, 3, 1, 2, 3, 4, 1]);
(%o17) [-1, 8, 4, -1, 8, -6, 4]
    
```

Maxima

Esto asigna una lista en la variable `u`.

```
(%i18) u : [7, 2, 4, 6];
(%o18) [7, 2, 4, 6]
```

Maxima

Puede extraerse elementos de `u`.

```
(%i19) u [3];
(%o19) 4
```

Maxima

Pueden realizarse operaciones diversas con `u`.

```
(%i20) (u + 1)/(u - 6);
(%o20) [-3/4, -1/6, -6, 8]
```

Es posible crear listas multidimensionales mediante la anidación de listas en listas.

Maxima

Esto crea una lista 2×2 , y le da el nombre `m`.

```
(%i21) m : create_list(create_list(i - j, j, 1, 2),
i, 1, 2);
(%o21) [[0, -1], [1, 0]]
```

Maxima

Esto extrae la primera sublista de la lista de listas, `m`

```
(%i22) m [1];
(%o22) [0, -1]
```

Maxima

Esto extrae el segundo elemento de aquella sublista.

```
(%i23) % [2];
(%o23) -1
```

Maxima

Esto hace las dos operaciones juntas.

```
(%i24) part(m, 1, 2);
(%o24) -1
```

Maxima

Esto genera una lista tridimensional de $2 \times 2 \times 2$. Es una lista de listas de listas.

```
(%i25) create_list(create_list(create_list(i * j^2 * k^3,
k, 1, 2), j, 1, 2), i, 1, 2);
(%o25) [[[1, 8], [4, 32]], [[2, 16], [8, 64]]]
```

Maxima

Si no se anida `create_list` se obtiene una lista unidimensional.

```
(%i26) create_list(i * j^2 * k^3, i, 1, 2, j, 1, 2, k, 1, 2);
(%o26) [1, 8, 4, 32, 2, 16, 8, 64]
```

Al asignar una lista a una variable, puede usarse las listas en *Maxima* de modo similar a los “arrays” en otros lenguajes de programación. De esta manera, por ejemplo, es posible resetear un elemento de una lista asignando un valor a $u[i]$.

<code>part(u, i)</code> ó <code>u[i]</code>	extrae el i -ésimo elemento de la lista u
<code>u[i] : valor</code>	resetea el i -ésimo elemento de la lista u

Operando listas como arrays.

Maxima

Aquí hay una lista.

```
(%i27) u : [2, 1, 5, 7];
(%o27) [2, 1, 5, 7]
```

Maxima

Esto resetea el segundo elemento de la lista.

```
(%i28) u [2] : 0;
(%o28) 0
```

Maxima

Ahora la lista asignada a *u* se ha modificado.

```
(%i29) u;
(%o29) [2, 0, 5, 7]
```

10.4 Prueba y búsqueda de elementos de una lista

Maxima también tiene funciones que buscan y prueban elementos de listas, basándose en los valores de dichos elementos.

<code>sublist(<i>L</i>, <i>P</i>)</code>	devuelve la lista de elementos <i>x</i> de la lista <i>L</i> para los cuales el predicado <i>P(x)</i> es verdadero
<code>sublist_indices(<i>L</i>, <i>P</i>)</code>	devuelve los índices de los elementos <i>x</i> de la lista <i>L</i> para la cual el predicado <i>P(x)</i> es verdadero
<code>?position(<i>elem</i>, <i>L</i>)</code>	devuelve el índice que indica la posición que ocupa <i>elem</i> en la lista <i>L</i>
<code>member(<i>form</i>, <i>list</i>)</code>	prueba si <i>form</i> es un elemento de <i>list</i>

Funciones para la prueba y búsqueda de elementos de una lista.

<code>freeof(form, list)</code>	prueba si <i>form</i> no ocurre en ninguna parte <i>list</i>
<code>freeof(form₁, ..., form_n, list)</code>	equivale a <code>freeof(form₁, list) and ... and freeof(form_n, list)</code>

Funciones para la prueba y búsqueda de elementos de una lista.

— *Maxima* —

Esto da una lista de todos los elementos, de la lista $[a, 1, 3, b, 7]$, que son de tipo simbólico.

```
(%i30) sublist([a, 1, 3, b, 7], symbolp);
(%o30) [a, b]
```

— *Maxima* —

Esto da una lista de todas posiciones, de la lista $[a, 1, 3, b, 7]$, en las que se encuentran elementos de tipo simbólico.

```
(%i31) sublist_indices([a, 1, 3, b, 7], symbolp);
(%o31) [1, 4]
```

— *Maxima* —

En este caso se emplea una función anónima para definir un predicado, el cual indica que se quiere obtener una lista de todos los elementos, de la lista $[1, 2, 4, 7, 6, 2]$, que son mayores que 2.

```
(%i32) sublist([1, 2, 4, 7, 6, 2], lambda([h], h > 2));
(%o32) [4, 7, 6]
```

— *Maxima* —

Esto muestra que 4 es un elemento de $[11, 1, 2, 4, 5, 5]$.

```
(%i33) member(4, [11, 1, 2, 4, 5, 5]);
(%o33) true
```

Maxima

Por otra parte 3, no lo es.

```
(%i34) member(3, [11, 1, 2, 4, 5, 5]);
(%o34) false
```

Maxima

Esto muestra que 0 ocurre en alguna parte de $[[1, 2], [3, 0]]$.

```
(%i35) freeof(0, [[1, 2], [3, 0]]);
(%o35) false
```

10.5 Combinación de listas

Maxima permite combinar dos listas alternando sus elementos.

<pre>join(list₁, list₂)</pre>	crea una nueva lista con los elementos de las listas $list_1$ y $list_2$ alternados
-----------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------

Combinar listas.

Maxima

He aquí dos listas, de igual longitud, combinadas.

```
(%i36) join([1, 2], [a, b]);
(%o36) [1, a, 2, b]
```

Maxima

He aquí la combinación de dos listas de diferente longitud (*join* ignora los elementos sobrantes de la lista de mayor longitud).

```
(%i37) join([1, 2], [a, b, c, d]);
(%o37) [1, a, 2, b]
```

10.6 Reordenamiento de listas

El ordenamiento de listas también es permitido por *Maxima*.

<code>sort(list)</code>	ordena los elementos de <i>list</i> en forma ascendente
<code>sort(list, P)</code>	ordena los elementos de <i>list</i> de acuerdo con el predicado <i>P</i>
<code>reverse(list)</code>	invierte el orden de los elementos de <i>list</i>
<code>permutations(list)</code>	devuelve un conjunto con todas las permutaciones distintas de los miembros de <i>list</i>
<code>unique(list)</code>	devuelve <i>list</i> sin redundancias, es decir, sin elementos repetidos

Ordenamiento de listas.

— *Maxima* —

Esto ordena los elementos de una lista en forma estándar. En casos simples como éste el ordenamiento es alfabético o numérico.

```
(%i38) sort([d, b, c, a]);
(%o38) [a, b, c, d]
```

— *Maxima* —

Esto ordenada los elementos de la lista en forma descendente.

```
(%i39) sort([11, 1, 2, 4, 5, 5], ">");
(%o39) [11, 5, 5, 4, 2, 1]
```

— *Maxima* —

Esto invierte el orden de los elementos de la lista.

```
(%i40) reverse([d, b, c, a]);
(%o40) [a, c, b, d]
```

Maxima

Aquí se tienen todas las permutaciones de $[a, b, c]$.

```
(%i41) permutations([a, b, c]);
(%o41) {[a, b, c], [a, c, b], [b, a, c], [b, c, a], [c, a, b], [c, b, a]}
```

Maxima

De esta forma se eliminan los elementos repetidos en una lista.

```
(%i42) unique([11, 1, 2, 2, 4, 5, 5]);
(%o42) [1, 2, 4, 5, 11]
```

10.7 Agregar y quitar elementos de una lista

<code>append(list₁, list₂, ..., list_n)</code>	devuelve una lista cuyos elementos son los de la lista $list_1$ seguidos de los de $list_2, \dots, list_n$
<code>cons(elem, list)</code>	agrega $elem$ al inicio de la lista $list$
<code>endcons(elem, list)</code>	agrega $elem$ al final de la lista $list$
<code>delete(elem, list)</code>	borra $elem$ de la lista $list$
<code>rest(list, n)</code>	borra los primeros n elementos ($n > 0$) o los últimos $-n$ elementos ($n < 0$) de la lista $list$
<code>deleten(list, n)</code>	borra el n -ésimo elemento de la lista $list$

Agregar y quitar elementos de una lista.

Maxima

Aquí se genera una lista con los elementos de dos listas dadas.

```
(%i43) append([1, 2, 3], [a, b, c]);
(%o43) [1, 2, 3, a, b, c]
```

Maxima

Aquí se inserta x al inicio de la lista dada.

```
(%i44) cons(x, [a, b, c]);
(%o44) [x, a, b, c]
```

Maxima

Esto devuelve una lista dada con los dos primeros elementos borrados.

```
(%i45) rest([a, g, f, c, x], 2);
(%o45) [f, c, x]
```

Maxima

Esto devuelve una lista dada con los dos últimos elementos borrados.

```
(%i46) rest([a, g, f, c, x], -2);
(%o46) [a, g, f]
```

10.8 Reorganización de listas

<code>flatten(list)</code>	elimina todos los niveles que pueda tener la lista <i>list</i>
<code>partition(list, x)</code>	particiona la lista <i>list</i> en dos listas; una que contiene los elementos que no dependen de <i>x</i> , y otra, los que si dependen de <i>x</i>

Funciones para reorganizar listas anidadas.

Maxima

He aquí una lista a la que se le eliminan todos los niveles.

```
(%i47) flatten([7, 2, [3, [5]], 4]);
(%o47) [7, 2, 3, 5, 4]
```

Maxima

Esto particiona la lista $[a, b, a^2 + 1, c]$.

```
(%i48) partition([a,b,a^2+1,c],a);
(%o48) [[b,c],[a,a^2+1]]
```

10.9 Funciones adicionales para listas

<code>listp(<i>expr</i>)</code>	verifica si <i>expr</i> es una lista
<code>empty(<i>list</i>)</code>	verifica si <i>list</i> es una lista vacía
<code>length(<i>list</i>)</code>	devuelve la longitud de <i>list</i>
<code>apply(<i>f</i>, [<i>x</i>₁, ..., <i>x</i>_{<i>n</i>}])</code>	evalúa $f(x_1, \dots, x_n)$
<code>map(<i>f</i>, [<i>a</i>₁, ..., <i>a</i>_{<i>n</i>}])</code>	devuelve la lista $[f(a_1), \dots, f(a_n)]$
<code>map(<i>f</i>, [<i>a</i>₁, ..., <i>a</i>_{<i>n</i>}], [<i>b</i>₁, ..., <i>b</i>_{<i>n</i>}], ...)</code>	devuelve la lista $[f(a_1, b_1, \dots), \dots,$ $f(a_n, b_n, \dots)]$
<code>outermap(<i>f</i>, <i>list</i>₁, ..., <i>list</i>_{<i>n</i>})</code>	aplica la función <i>f</i> a cada uno de los elementos del producto cartesiano $list_1 \times list_2 \dots \times list_n$

Algunas funciones adicionales para listas.

Maxima

Con la función `length` es fácil obtener la longitud de una lista.

```
(%i49) length([7,9,0]);
(%o49) 3
```

Maxima

Aquí se usa la función `apply` para encontrar el elemento de mayor valor.

```
(%i50) apply(max,[11,1,2,4,5,5]);
(%o50) 11
```

Maxima

He aquí un ejemplo en el que se usa la función `map`.

```
(%i51) map(first, [[a, b], [c, d]]);  
(%o51) [a, c]
```

Maxima

Este es otro ejemplo en el que se usa la función `map`. Para usos como este debe recordarse que las listas deben tener la misma cantidad de elementos.

```
(%i52) map("+", [1, 2, 9], [-1, 3, 7]);  
(%o52) [0, 5, 16]
```

Maxima

He aquí un ejemplo en el que se usa la función `outermap`.

```
(%i53) outermap("^", [a, b], [c, d, e]);  
(%o53) [[ac, ad, ae], [bc, bd, be]]
```

Capítulo 11

Arrays

<code>array(nombre, dim₁, ..., dim_n)</code>	crea un array de dimensión n , que debe ser menor o igual que 5
<code>array(nombre, tipo, dim₁, ..., dim_n)</code>	crea un array con sus elementos del tipo especificado (el tipo puede ser <code>fixnum</code> o <code>flonum</code>)

Creación de arrays.

<code>listarray(A)</code>	devuelve una lista con los elementos del array A
<code>arrayinfo(A)</code>	devuelve información acerca del array A
<code>fillarray(A, B)</code>	rellena el array A con los valores de B , que puede ser una lista o, también, otro array

Algunas funciones para arrays.

— *Maxima* —

Esto define el array `u` de dimensión 2.

```
(%i1) array(u, 2);  
(%o1) u
```

Maxima

Esto indica que el array no tiene valores asignados.

```
(%i2) listarray(u);
(%o2) [#####, #####, #####]
```

Maxima

Esto asigna valores, a partir de una lista, al array.

```
(%i3) fillarray(u, [1, -7, 8]);
(%o3) u
```

Maxima

Esto permite visualizar los valores asignados.

```
(%i4) listarray(u);
(%o4) [1, -7, 8]
```

Maxima

Aquí se define el array ϕ .

```
(%i5) array(phi, 1, 2);
(%o5)  $\phi$ 
```

Maxima

Esto asigna valores a ϕ .

```
(%i6) phi[0,0]:-1$ phi[0,1]:1$ phi[0,2]:4$ phi[1,0]:4$
      phi[1,1]:7$ phi[1,2]:5$
```

Maxima

Aquí se tiene una lista con los valores asignados a ϕ .

```
(%i12) listarray(phi);
```

```
(%o12) [-1, 1, 4, 4, 7, 5]
```

— *Maxima* —

Esto da información acerca de ϕ

```
(%i13) arrayinfo(phi);
(%o13) [declared, 2, [1, 2]]
```

Si el usuario asigna un valor a una variable subindicada antes de declarar el array correspondiente, entonces se construye un array no declarado.

Los arrays no declarados, también conocidos por el nombre de “arrays de claves” (hashed arrays), son más generales que los arrays declarados. El usuario no necesita declarar su tamaño máximo y pueden ir creciendo de forma dinámica. Los subíndices de los arrays no declarados no necesariamente deben ser números.

— *Maxima* —

Esto asigna un valor a la variable **t** subindicada con **hola**.

```
(%i14) t[hola] : a;
(%o14) a
```

— *Maxima* —

Esto asigna un valor a la variable **t** subindicada con **adios**.

```
(%i15) t[adios] : b;
(%o15) b
```

— *Maxima* —

Ahora se muestran los valores asignados al array no declarado **t**.

```
(%i16) listarray(t);
(%o16) [b, a]
```

— *Maxima* —

Y también se muestra información con respecto a **t**.

```
(%i17) arrayinfo(t);  
(%o17) [hashed, 1, [adios], [hola]]
```

Capítulo 12

Matrices

12.1 Generación de Matrices

Las matrices en *Maxima* son expresiones que comprenden el operador `matrix` y cuyos argumentos son listas (ver sección 17.2). Esto indica que *Maxima* tiene establecida una diferencia entre una matriz y una lista de listas.

<code>matrix([a₁₁, a₁₂, ..., a_{1n}],</code> <code>..., [a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn}])</code>	devuelve una matriz de orden $m \times n$
<code>genmatrix(f, m, n)</code>	devuelve una matriz $m \times n$ generada a partir de f
<code>entermatrix(m, n)</code>	devuelve una matriz de orden $m \times n$, cuyos elementos son leídos de forma interactiva
<code>ident(n)</code>	devuelve la matriz identidad de orden n
<code>zeromatrix(m, n)</code>	devuelve una matriz rectangular $m \times n$ con todos sus elementos iguales a cero
<code>diagmatrix(n, elem)</code>	devuelve una matriz diagonal de orden n con los elementos de la diagonal todos ellos iguales a $elem$

Funciones para generar matrices.

<code>diag_matrix(d_1, d_2, \dots, d_n)</code>	devuelve una matriz diagonal con los elementos de la diagonal iguales a d_1, d_2, \dots, d_n
<code>vandermonde_matrix($[x_1, \dots, x_n]$)</code>	devuelve una matriz n por n , cuya i -ésima fila es $[1, x_i, x_i^2, \dots, x_i^{(n-1)}]$
<code>hilbert_matrix(n)</code>	devuelve la matriz de Hilbert n por n (si n no es un entero positivo, emite un mensaje de error)

Funciones para generar matrices.

```

Maxima
He aquí la definición de una matriz.

(%i1) matrix([3,1],[2,4]);
(%o1)  [ 3  1 ]
      [ 2  4 ]

```

```

Maxima
Una lista de listas no es interpretada como matriz.

(%i2)  [[3,1],[2,4]];
(%o2)  [[3,1],[2,4]]

```

```

Maxima
Con apply puede convertirse una lista de listas a matriz.

(%i3)  apply(matrix, [[3,1],[2,4]]);
(%o3)  [ 3  1 ]
      [ 2  4 ]

```

```

Maxima
Aquí se genera una matriz  $(a_{i,j}) \in \mathbb{M}_{3 \times 3} / a_{i,j} = i - 2j$ .

(%i4)  a[i,j] := i - 2 * j $
(%i5)  genmatrix(a, 3, 3);

```

$$(\%o5) \begin{bmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Maxima

Esto genera una matriz de Vandermonde simbólica.

$$(\%i6) \text{vandermonde_matrix}([x[0], x[1], x[2]]);$$

$$(\%o6) \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix}$$

Maxima

Esto genera una matriz de Vandermonde numérica.

$$(\%i7) \text{vandermonde_matrix}([2, 3, 5]);$$

$$(\%o7) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{bmatrix}$$

Maxima

He aquí una matriz de Hilbert de orden 3.

$$(\%i8) \text{hilbert_matrix}(3);$$

$$(\%o8) \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

12.2 Elegir elementos de matrices

$M[i]$ ó $\text{part}(M, i)$	devuelve la i -ésima fila de la matriz M
$M[i, j]$ ó $\text{part}(M, i, j)$	devuelve el elemento $M_{i,j}$ de la matriz M

Funciones para elegir elementos de matrices.

Maxima

Esto genera la matriz A mediante una función anónima.

```
(%i9) A: genmatrix(lambda([i, j], i - j), 3, 3);
(%o9) 
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```

Maxima

Aquí se selecciona el elemento $A_{1,2}$.

```
(%i10) A[1, 2];
(%o10) -1
```

Maxima

Esto devuelve una matriz identidad de orden 3.

```
(%i11) ident(3);
(%o11) 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```

Maxima

Esto selecciona la segunda fila de la matriz identidad.

```
(%i12) %[2];
(%o12) [0, 1, 0]
```

12.3 Operaciones matriciales

$A.B$	producto matricial
$\text{invert}(M)$	devuelve la inversa de la matriz M

Algunas operaciones matriciales.

$M^{\wedge} p$	exponenciación matricial no conmutativa
<code>determinant(M)</code>	devuelve el determinante de la matriz M
<code>mat_trace(M)</code>	devuelve la traza de la matriz cuadrada M
<code>transpose(M)</code>	devuelve la transpuesta de la matriz M
<code>minor(M, i, j)</code>	devuelve el menor (i, j) de la matriz M
<code>adjoint(M)</code>	devuelve la matriz adjunta de la matriz M
<code>addcol($M, list_1, \dots, list_n$)</code>	añade la(s) columna(s) dada(s) por la(s) lista(s) (o matrices) a la matriz M
<code>addrow($M, list_1, \dots, list_n$)</code>	añade la(s) fila(s) dada(s) por la(s) lista(s) (o matrices) a la matriz M
<code>col(M, i)</code>	devuelve la i -ésima columna de la matriz M . El resultado es una matriz de una sola columna
<code>row(M, i)</code>	devuelve la i -ésima fila de la matriz M . El resultado es una matriz de una sola fila
<code>rank(M, i, j)</code>	calcula el rango de la matriz M
<code>setelm(x, i, j, M)</code>	asigna el valor x al (i, j) -ésimo elemento de la matriz M y devuelve la matriz actualizada
<code>submatrix($i_1, \dots, i_m, M, j_1, \dots, j_n$)</code>	devuelve una nueva matriz formada a partir de la matriz M pero cuyas filas i_1, \dots, i_m y columnas j_1, \dots, j_n han sido eliminadas
<code>submatrix(M, j_1, \dots, j_n)</code>	
<code>echelon(M)</code>	devuelve la forma escalonada de la matriz M , obtenida por eliminación gaussiana
<code>triangularize(M)</code>	devuelve la forma triangular superior de la matriz M , obtenida por eliminación gaussiana

Algunas operaciones matriciales.

<code>rowop</code> (M, i, j, λ)	devuelve la matriz que resulta de realizar la transformación $F_i \leftarrow F_i - \lambda * F_j$ con las filas F_i y F_j de la matriz M
<code>rowswap</code> (M, i, j)	intercambia las filas i y j de la matriz M
<code>columnop</code> (M, i, j, λ)	devuelve la matriz que resulta de realizar la transformación $C_i \leftarrow C_i - \lambda * C_j$ con las columnas C_i y C_j de la matriz M
<code>columnswap</code> (M, i, j)	intercambia las columnas i y j de la matriz M
<code>kroncker_product</code> (A, B)	devuelve el producto de Kronecker de las matrices A y B

Algunas operaciones matriciales.

— *Maxima* —

He aquí una matriz 2×2 de variables simbólicas.

```
(%i13) A:matrix([a,b],[c,d]);
(%o13)  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 
```

— *Maxima* —

He aquí la transpuesta de A .

```
(%i14) transpose(A);
(%o14)  $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 
```

— *Maxima* —

Esto da la inversa de A en forma simbólica.

```
(%i15) invert(A);
(%o15)  $\begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$ 
```

— *Maxima* —

Esto da el determinante de A .

```
(%i16) determinant(A);
```

```
(%o16) a d - b c
```

— *Maxima* —

He aquí una matriz racional 3×3 .

```
(%i17) B: genmatrix(lambda([i, j], 1/(i + j - 1)), 3, 3);
```

```
(%o17) [ 1  1/2  1/3 ]
        [ 1/2  1/3  1/4 ]
        [ 1/3  1/4  1/5 ]
```

— *Maxima* —

Esto da su inversa.

```
(%i18) invert(B);
```

```
(%o18) [ 9  -36  30 ]
        [ -36  192 -180 ]
        [ 30 -180  180 ]
```

— *Maxima* —

Multiplicando la inversa con la matriz original se obtiene como resultado la matriz identidad.

```
(%i19) %B;
```

```
(%o19) [ 1  0  0 ]
        [ 0  1  0 ]
        [ 0  0  1 ]
```

— *Maxima* —

Aquí se define una matriz M de orden 4×5 .

```
(%i20) M: matrix([2, -1, 2, -1, -8], [2, -2, 3, -3, -20],
                 [1, 1, 1, 0, -2], [1, -1, 4, 3, 4]);
```

$$(\%o20) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

— Maxima —

Esto efectúa el intercambio de las filas 2 y 1 de la matriz M y devuelve la matriz resultante.

$$(\%i21) \text{ rowswap}(M, 2, 1);$$

$$(\%o21) \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & -3 & -20 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

— Maxima —

Esto realiza la transformación $F_2 \leftarrow F_2 + F_1$ en la matriz M y devuelve la matriz resultante.

$$(\%i22) \text{ rowop}(M, 2, 1, -1);$$

$$(\%o22) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 4 & -3 & 5 & -4 & -28 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

— Maxima —

He aquí el producto de Kronecker de dos matrices.

$$(\%i23) \text{ kronecker_product}(\text{matrix}([a, b], [c, d]),$$

$$\text{matrix}([1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]));$$

$$(\%o23) \begin{bmatrix} a & 2a & 3a & b & 2b & 3b \\ 4a & 5a & 6a & 4b & 5b & 6b \\ 7a & 8a & 9a & 7b & 8b & 9b \\ c & 2c & 3c & d & 2d & 3d \\ 4c & 5c & 6c & 4d & 5d & 6d \\ 7c & 8c & 9c & 7d & 8d & 9d \end{bmatrix}$$

12.4 Funciones adicionales para matrices

<code>matrix_size(M)</code>	devuelve una lista con dos elementos que constituyen el número de filas y columnas de la matriz M , respectivamente
<code>matrixp(expr)</code>	verifica si $expr$ es una matriz
<code>mat_norm(M, p)</code>	devuelve la p -norma de la matriz M . Los valores admisibles para p son 1, <code>inf</code> y <code>frobenius</code>
<code>addmatrices(f, A, B, ...)</code>	devuelve la matriz $(f(a_{i,j}, b_{i,j}, \dots))_{m \times n}$, donde $m \times n$ es el orden común de las matrices A, B, \dots
<code>mat_unblocker(M)</code>	si M es una matriz de bloques, deshace los bloques de un nivel
<code>outermap(f, M₁, ..., M_n)</code>	aplica la función f a cada uno de los elementos del producto cartesiano $M_1 \times M_2 \dots \times M_n$

Más funciones para matrices.

— *Maxima* —

He aquí la matriz D .

```
(%i24) d[i, j] := 1 + (-1)^(i + j)$
(%i25) D: genmatrix(d, 3, 4);
(%o25) 
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

```

— *Maxima* —

Esto devuelve una lista con el número de filas y columnas de la matriz D .

```
(%i26) matrix_size(D);
(%o26) [3, 4]
```

Maxima

Utilizando la función `matrixp` es posible comprobar que B es una expresión matricial.

```
(%i27) matrixp(D);
(%o27) true
```

Maxima

He aquí la norma de frobenius de la matriz B .

```
(%i28) mat_norm(D, frobenius);
(%o28) 2√6
```

Maxima

A continuación se definen las matrices A , B y C con elementos simbólicos indexados.

```
(%i29) A : genmatrix(a, 2, 3);
(%o29) [ a1,1 a1,2 a1,3
         a2,1 a2,2 a2,3 ]
(%i30) B : genmatrix(b, 2, 3);
(%o30) [ b1,1 b1,2 b1,3
         b2,1 b2,2 b2,3 ]
(%i31) C : genmatrix(c, 2, 3);
(%o31) [ c1,1 c1,2 c1,3
         c2,1 c2,2 c2,3 ]
```

Maxima

Este es el resultado obtenido al aplicar f mediante la función `addmatrices` a las matrices A , B y C .

```
(%i32) addmatrices(f, A, B, C);
(%o32) [ f(a1,1, b1,1, c1,1) f(a1,2, b1,2, c1,2) f(a1,3, b1,3, c1,3)
         f(a2,1, b2,1, c2,1) f(a2,2, b2,2, c2,2) f(a2,3, b2,3, c2,3) ]
```

Maxima

Si f es “+”, el resultado es $A + B + C$.

(%i33) `addmatrices(“+”, A, B, C);`

(%o33)
$$\begin{bmatrix} c_{1,1} + b_{1,1} + a_{1,1} & c_{1,2} + b_{1,2} + a_{1,2} & c_{1,3} + b_{1,3} + a_{1,3} \\ c_{2,1} + b_{2,1} + a_{2,1} & c_{2,2} + b_{2,2} + a_{2,2} & c_{2,3} + b_{2,3} + a_{2,3} \end{bmatrix}$$

Maxima

También puede utilizarse una función anónima para f . En este caso el resultado obtenido es el mismo que el que se obtuvo al aplicar “+”. No obstante, en casos como éste es mejor el uso de “+” ya que, por ejemplo, si hubiese sólo dos matrices habría que cambiar la función anónima por `lambda([x, y], x + y)`.

(%i34) `addmatrices(lambda([x, y, z], x + y + z), A, B, C);`

(%o34)
$$\begin{bmatrix} c_{1,1} + b_{1,1} + a_{1,1} & c_{1,2} + b_{1,2} + a_{1,2} & c_{1,3} + b_{1,3} + a_{1,3} \\ c_{2,1} + b_{2,1} + a_{2,1} & c_{2,2} + b_{2,2} + a_{2,2} & c_{2,3} + b_{2,3} + a_{2,3} \end{bmatrix}$$

Maxima

Con `outermap` y `mat_unblocker` también es posible obtener el producto de Kronecker de dos matrices.

(%i35) `outermap(“*”, matrix([a, b], [c, d]),
matrix([1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]));`

(%o35)
$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 2a & 3a \\ 4a & 5a & 6a \\ 7a & 8a & 9a \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b & 2b & 3b \\ 4b & 5b & 6b \\ 7b & 8b & 9b \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} c & 2c & 3c \\ 4c & 5c & 6c \\ 7c & 8c & 9c \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} d & 2d & 3d \\ 4d & 5d & 6d \\ 7d & 8d & 9d \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

(%i36) `mat_unblocker(%);`

(%o36)
$$\begin{bmatrix} a & 2a & 3a & b & 2b & 3b \\ 4a & 5a & 6a & 4b & 5b & 6b \\ 7a & 8a & 9a & 7b & 8b & 9b \\ c & 2c & 3c & d & 2d & 3d \\ 4c & 5c & 6c & 4d & 5d & 6d \\ 7c & 8c & 9c & 7d & 8d & 9d \end{bmatrix}$$

12.5 Matrices asociadas a sistemas de ecuaciones

<code>coefmatrix([eq₁, ..., eq_m], [x₁, ..., x_n])</code>	devuelve la matriz de coeficientes para las variables x_1, \dots, x_n del sistema de ecuaciones lineales eq_1, \dots, eq_m
<code>augcoefmatrix([eq₁, ..., eq_m], [x₁, ..., x_n])</code>	devuelve la matriz aumentada de coeficientes para las variables x_1, \dots, x_n del sistema de ecuaciones lineales eq_1, \dots, eq_m

Funciones para generar matrices asociadas a sistemas de ecuaciones.

— *Maxima* —

He aquí la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones lineales, dado.

```
(%i37) coefmatrix([2 * x - 3 * y = 1, x + y = 3], [x, y]);
(%o37)   $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 
```

— *Maxima* —

Esta es la matriz aumentada del mismo sistema anterior.

```
(%i38) augcoefmatrix([2 * x - 3 * y = 1, x + y = 3], [x, y]);
(%o38)   $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ 
```

— *Maxima* —

Aquí se hace la transformación $F_2 \leftarrow F_2 - \frac{1}{2}F_1$ en la matriz aumentada anterior. A partir de éste último resultado se deduce que la solución del sistema de ecuaciones lineales, dado, será $y = 1$ y $x = 2$.

```
(%i39) rowop(%o38, 2, 1, 1/2);
(%o39)   $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$ 
```

12.6 Autovalores y autovectores

<code>charpoly(M, x)</code>	calcula el polinomio característico vinculado a la matriz M , en términos de la variable x
<code>eigenvalues(M)</code>	devuelve una lista con dos sublistas, la primera de éstas conteniendo los valores propios de la matriz M y la segunda, conteniendo sus correspondientes multiplicidades
<code>eigenvectors(M)</code>	devuelve una lista con dos elementos; el primero está formado por <code>eigenvalues(M)</code> , el segundo es una lista de listas de vectores propios, una por cada valor propio, pudiendo haber uno o más vectores propios en cada lista

Obtención de autovalores y autovectores asociados a una matriz dada.

— *Maxima* —

He aquí una matriz 3×3 .

```
(%i40) c[i, j] := i + j + 1;
(%o40) ci, j := i + j + 1
(%i41) C : genmatrix(c, 3, 3);
(%o41) 
$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

```

— *Maxima* —

Éste es el polinomio característico, en términos de la variable x , asociado a la matriz C .

```
(%i42) charpoly(C, x), expand;
(%o42)  $-x^3 + 15x^2 + 6x$ 
```

— *Maxima* —

Aquí se tienen los valores propios, y su respectiva multiplicidad, asociados a la matriz C .

(%i43) `eigenvalues(C);`

(%o43) $\left[\left[-\frac{\sqrt{249}-15}{2}, \frac{\sqrt{249}+15}{2}, 0 \right], [1, 1, 1] \right]$

— *Maxima* —

Finalmente, se muestran los valores propios, con su respectiva multiplicidad, y vectores propios de la matriz C .

(%i44) `eigenvectors(C);`

(%o44) $\left[\left[\left[-\frac{\sqrt{249}-15}{2}, \frac{\sqrt{249}+15}{2}, 0 \right], [1, 1, 1] \right], \right. \\ \left. \left[\left[\left[1, -\frac{\sqrt{249}-19}{28}, -\frac{\sqrt{3}\sqrt{83}-5}{14} \right] \right], \right. \right. \\ \left. \left. \left[\left[1, \frac{\sqrt{249}+19}{28}, \frac{\sqrt{3}\sqrt{83}+5}{14} \right] \right], [[1, -2, 1]] \right] \right]$

Capítulo 13

Conjuntos

Los conjuntos en *Maxima* son expresiones que comprenden el operador `set` y cuyos argumentos son los elementos del mismo (ver sección 17.2). Esto indica que *Maxima* hace una diferencia entre conjuntos y listas, lo que permite trabajar con conjuntos cuyos elementos puedan ser también conjuntos o listas.

Maxima dispone de funciones para realizar operaciones con conjuntos, como la intersección o la unión. No obstante, debe tenerse en cuenta que los conjuntos deben ser finitos y definidos por enumeración.

13.1 Generación de conjuntos

<code>set(a_1, \dots, a_n)</code>	construye un conjunto cuyos elementos son a_1, \dots, a_n
<code>{a_1, \dots, a_n}</code>	equivale a <code>set(a_1, \dots, a_n)</code>
<code>set()</code>	genera un conjunto vacío
<code>{}</code>	equivale a <code>set()</code>
<code>makeset($f, vars, s$)</code>	genera un conjunto cuyos miembros se generan a partir de f , siendo $vars$ una lista de variables de f y s un conjunto o lista de listas

Funciones para generar conjuntos.

Maxima

He aquí un conjunto formado por los elementos a, b, c, d .

```
(%i1) {a, b, c, d};
(%o1) {a, b, c, d}
```

Maxima

Al ingresar un conjunto cuyos elementos están desordenados y repetidos, éstos son ordenados y unificados de forma automática.

```
(%i2) {c, e, f, f, a, b, c, d, a};
(%o2) {a, b, c, d, e, f}
```

Maxima

La función `makeset` permite generar un conjunto. En este caso se considera una función de dos variables, la cual es aplicada a una lista de listas.

```
(%i3) makeset(i/j, [i, j], [[1, a], [2, b], [3, c], [4, d]]);
(%o3) {1/a, 2/b, 3/c, 4/d}
```

Maxima

He aquí otro conjunto generado con `makeset`. Ahora se considera una función de una variable, la cual es aplicada a un conjunto de listas.

```
(%i4) makeset(x/2, [x], {[1], [2], [3], [4], [5]});
(%o4) {1/2, 1, 3/2, 2, 5/2}
```

Maxima

Las operaciones aritméticas son “listables”.

```
(%i5) x^ [1, 2, 3];
(%o5) [x, x^2, x^3]
```

Maxima

Sin embargo, las operaciones aritméticas no son “conjuntables”.

```
(%i6) x^{1,2,3};
(%o6) x^{1,2,3}
```

Maxima

La sustitución si es “conjuntable”, aunque siempre respetando la unificación.

```
(%i7) {x, x^2, x^3, x + 1}, x = 1;
(%o7) {1, 2}
```

13.2 Conversiones entre conjuntos y listas

<code>setify(list)</code>	forma un conjunto a partir de los miembros de la lista <i>list</i>
<code>fullsetify(list)</code>	sustituye los operadores de lista presentes en <i>conj</i> por operadores de conjuntos

Conversiones de listas a conjuntos.

<code>listify(conj)</code>	forma un conjunto a partir de los miembros del conjunto <i>conj</i>
<code>full_listify(conj)</code>	sustituye los operadores de conjunto presentes en <i>conj</i> por operadores de listas

Conversiones de conjuntos a listas.

Maxima

Esto convierte una lista en conjunto.

```
(%i8) setify([a, c, d, e]);
(%o8) {a, c, d, e}
```

Maxima

Esto convierte un conjunto en lista.

```
(%i9) listify({a, b, c, d});
(%o9) [a, b, c, d]
```

Maxima

Esto sustituye todos los operadores de conjuntos a operadores de listas.

```
(%i10) fullsetify([a, [b, c], [e, [f, g]], k);
(%o10) {a, {b, c}, {e, {f, g}}, k}
```

Maxima

Esto sustituye todos los operadores de listas a operadores de conjuntos.

```
(%i11) full_listify(%);
(%o11) [a, [b, c], [e, [f, g]], k]
```

Considerando que, cualquier lista puede convertirse a conjunto, entonces puede usarse `create_list` para generar una lista y luego convertir la lista obtenida a conjunto. De esta manera se tiene una forma indirecta para generar conjuntos.

13.3 Elección de elementos de un conjunto

<code>part(conj, i)</code>	devuelve el i -ésimo elemento del conjunto $conj$ respetando el ordenamiento y la unificación internos
<code>first(conj)</code> , <code>second(conj)</code> , ..., <code>tenth(conj)</code>	devuelve el primer, segundo, ..., décimo elemento de $conj$
<code>last(conj)</code>	devuelve el último elemento de $conj$

Selección de partes de un conjunto.

— *Maxima* —

Aquí se obtiene el primer elemento de un conjunto que ha sido ordenado y unificado internamente.

```
(%i12) part({b, c, c, d, a}, 1);
(%o12) a
```

— *Maxima* —

El quinto elemento no existe.

```
(%i13) part({b, c, c, d, a}, 5);
part: fell off the end.
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

13.4 Prueba y búsqueda de elementos de un conjunto

Existe una función específica para averiguar si un elemento pertenece a un conjunto, no obstante hay funciones genéricas alternativas para ello.

<code>subset(<i>conj</i>, <i>P</i>)</code>	extrae todos los elementos de un conjunto <i>conj</i> que satisfacen el predicado <i>P</i>
<code>subsetp(<i>conj</i>₁, <i>conj</i>₂)</code>	devuelve <i>true</i> si y sólo si $conj_1 \subseteq conj_2$
<code>elementp(<i>x</i>, <i>conj</i>)</code>	devuelve <i>true</i> si y sólo si <i>x</i> es elemento del conjunto <i>conj</i>
<code>member(<i>x</i>, <i>conj</i>)</code>	devuelve <i>true</i> si y sólo si <i>x</i> es miembro del conjunto <i>conj</i>
<code>freeof(<i>x</i>, <i>conj</i>)</code>	prueba si <i>x</i> no ocurre en ninguna parte <i>conj</i>
<code>freeof(<i>x</i>₁ . . . , <i>x</i>_{<i>n</i>}, <i>conj</i>)</code>	equivale a <code>freeof(<i>x</i>₁; <i>conj</i>) and . . . and freeof(<i>x</i>_{<i>n</i>}; <i>conj</i>)</code>

Prueba de elementos de un conjunto.

Maxima

Aquí se extrae, del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$, el subconjunto de todos los elementos t tales que $t < 4$.

```
(%i14) subset( {1, 2, 3, 4, 5, 7},  
              lambda( [t], is(t < 4) ));  
(%o14) {1, 2, 3}
```

Maxima

Aquí se extrae, del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$, el subconjunto de todos los elementos t tales que $\text{mod}(t, 3) = 1$.

```
(%i15) subset( {1, 2, 3, 4, 5, 7},  
              lambda( [t], is(mod(t, 3) = 1) ));  
(%o15) {1, 4, 7}
```

Maxima

Esto verifica una contención de conjuntos.

```
(%i16) subsetp({1, 2}, {5, 6, 7, 9, 1, 2});  
(%o16) true
```

Maxima

Esto verifica que el elemento 2 pertenece al conjunto $\{2, 4, 5, 7\}$.

```
(%i17) elementp(2, {2, 4, 5, 7});  
(%o17) true
```

Maxima

La función genérica *member* realiza los mismo.

```
(%i18) member(2, {2, 4, 5, 7});  
(%o18) true
```

Maxima

La función genérica *freeof* indica que 2 forma parte del conjunto {2, 4, 5, 7}.

```
(%i19) freeof(2, {2, 4, 5, 7});
(%o19) false
```

Maxima

La función genérica *freeof* indica que 6 y 5 no forman parte del conjunto {1, 2, 3}.

```
(%i20) freeof(6, 5, {1, 2, 3});
(%o20) true
```

13.5 Agregar y quitar elementos de un conjunto

Es posible agregar y/o quitar elementos de un conjunto dado mediante dos funciones específicas de *Maxima*.

<code>adjoin(<i>x</i>, <i>conj</i>)</code>	devuelve el conjunto <i>conj</i> con el elemento <i>x</i> insertado
<code>disjoin(<i>x</i>, <i>conj</i>)</code>	devuelve el conjunto <i>conj</i> sin el elemento <i>x</i>

Funciones para agregar y quitar elementos de un conjunto.

Maxima

Aquí se unen {2} y {1, 4, 7}.

```
(%i21) adjoin(2, {1, 4, 7});
(%o21) {1, 2, 4, 7}
```

Maxima

Esto elimina el elemento 4 de {1, 4, 7}.

```
(%i22) disjoin(4, {1, 4, 7});
(%o22) {1, 7}
```

13.6 Reorganización de conjuntos

<code>flatten(<i>conj</i>)</code>	elimina todos los niveles en <i>conj</i>
<code>set_partitions(<i>conj</i>)</code>	devuelve el conjunto de todas las particiones de <i>conj</i>
<code>set_partitions(<i>conj</i>, <i>n</i>)</code>	devuelve un conjunto con todas las descomposiciones de <i>conj</i> en <i>n</i> conjuntos no vacíos disjuntos

Reorganización de conjuntos anidados.

— *Maxima* —

He aquí un conjunto al que se le eliminan todos los niveles.

```
(%i23) flatten({4, {1, 3}, {4, {7, 8}}, 10});
(%o23) {1, 3, 4, 7, 8, 10}
```

— *Maxima* —

Esto da todas las particiones del conjunto $\{a, b, c\}$.

```
(%i24) set_partitions(a, b, c);
(%o24) {{{a}, {b}, {c}}, {{a}, {b, c}}, {{a, b}, {c}},
        {{a, b, c}}, {{a, c}, {b}}}
```

— *Maxima* —

He aquí todas las descomposiciones del conjunto $\{a, b, c\}$ en dos conjuntos no vacíos disjuntos.

```
(%i25) set_partitions(a, b, c, 2);
(%o25) {{{a}, {b, c}}, {{a, b}, {c}}, {{a, c}, {b}}}
```

13.7 Operaciones con conjuntos

Las más comunes operaciones matemáticas con conjuntos están implementadas en *Maxima*.

<code>union(<i>conj</i>₁, ..., <i>conj</i>_{<i>n</i>})</code>	devuelve la unión de los conjuntos <i>conj</i> ₁ , ..., <i>conj</i> _{<i>n</i>}
<code>intersection(<i>conj</i>₁, ..., <i>conj</i>_{<i>n</i>})</code>	devuelve la intersección de los conjuntos <i>conj</i> ₁ , ..., <i>conj</i> _{<i>n</i>}
<code>setdifference(<i>conj</i>₁, <i>conj</i>₂)</code>	devuelve la diferencia de los conjuntos <i>conj</i> ₁ , <i>conj</i> ₂
<code>powerset(<i>conj</i>)</code>	devuelve el conjunto potencia de <i>conj</i>
<code>subsetp(<i>conj</i>₁, <i>conj</i>₂)</code>	devuelve <i>true</i> si y sólo si el conjunto <i>conj</i> ₁ es un subconjunto de <i>conj</i> ₂
<code>setequalp(<i>conj</i>₁, <i>conj</i>₂)</code>	devuelve <i>true</i> si y sólo si los conjuntos <i>conj</i> ₁ y <i>conj</i> ₂ son iguales
<code>symmdifference(<i>conj</i>₁, <i>conj</i>₂)</code>	devuelve la diferencia simétrica de los conjuntos <i>conj</i> ₁ , <i>conj</i> ₂
<code>cartesian_product(<i>conj</i>₁, ..., <i>conj</i>_{<i>n</i>})</code>	devuelve el producto cartesiano de los conjuntos <i>conj</i> ₁ , ..., <i>conj</i> _{<i>n</i>} en forma de listas
<code>disjointp(<i>conj</i>₁, <i>conj</i>₂)</code>	devuelve <i>true</i> si y sólo si los conjuntos <i>conj</i> ₁ y <i>conj</i> ₂ son disjuntos
<code>equiv_classes(<i>conj</i>, <i>F</i>)</code>	devuelve el conjunto de las clases de equivalencia del conjunto <i>conj</i> respecto de la relación de equivalencia <i>F</i>

Operaciones con conjuntos.

— *Maxima* —

Aquí se definen los conjuntos *A* y *B*.

```
(%i26) A : {a, b, c, d} $
```

```
(%i27) B : {c, d, e, f, g} $
```

— *Maxima* —

Esto da la unión de *A* y *B*.

```
(%i28) union(A, B);
```

```
(%o28) {a, b, c, d, e, f, g}
```

Maxima

Y esto la intersección.

```
(%i29) intersection(A,B);
(%o29) {c, d}
```

Maxima

La diferencia $A - B$ se calcula así.

```
(%i30) setdifference(A,B);
(%o30) {a, b}
```

Maxima

Esto devuelve la diferencia simétrica $B \ominus A$.

```
(%i31) symmdifference(B,A);
(%o31) {a, b, e, f, g}
```

Maxima

He aquí el conjunto potencia del conjunto A .

```
(%i32) powerset(A);
(%o32) {{}, {a}, {a, b}, {a, b, c}, {a, b, c, d}, {a, b, d}, {a, c},
{a, c, d}, {a, d}, {b}, {b, c}, {b, c, d}, {b, d}, {c}, {c, d},
{d}}
```

Maxima

Esto da el producto cartesiano $A \times B$.

```
(%i33) cartesian_product(A,B);
(%o33) {a, c}, {a, d}, {a, e}, {a, f}, {a, g}, {b, c}, {b, d}, {b, e}, {b, f},
{b, g}, {c, c}, {c, d}, {c, e}, {c, f}, {c, g}, {d, c}, {d, d}, {d, e},
{d, f}, {d, g}
```

Maxima

Esto indica que los conjuntos A y B no son disjuntos.

```
(%i34) disjointp(A,B);
(%o34) false
```

Maxima

En este ejemplo, las clases de equivalencia son números que difieren en un múltiplo de 3.

```
(%i35) equiv_classes({1,2,3,4,5,6,7}, lambda([s,t],
mod(s-t,3)=0));
(%o35) {{1,4,7},{2,5},{3,6}}
```

13.8 Funciones adicionales para conjuntos

<code>setp(<i>expr</i>)</code>	devuelve <i>true</i> si y sólo si <i>expr</i> es un conjunto de <i>Maxima</i>
<code>empty(<i>conj</i>)</code>	devuelve <i>true</i> si y sólo si <i>conj</i> es el conjunto vacío
<code>cardinality(<i>conj</i>)</code>	devuelve el número de elementos del conjunto <i>conj</i>
<code>map(<i>f</i>, {<i>a</i>₁, ..., <i>a</i>_{<i>n</i>}})</code>	devuelve $\{f(a_1), \dots, f(a_n)\}$
<code>map(<i>f</i>, {<i>a</i>₁, ..., <i>a</i>_{<i>n</i>}}, {<i>b</i>₁, ..., <i>b</i>_{<i>n</i>}}, ...)</code>	devuelve el conjunto $\{f(a_1, b_1, \dots), \dots, f(a_n, b_n, \dots)\}$, siempre que los conjuntos estén bien ordenados

Algunas funciones adicionales.

Maxima

He aquí el cardinal de un conjunto.

```
(%i36) cardinality({a,b,c,a});
(%o36) 4
```

Maxima

Para conjuntos bien ordenados, al aplicar la función `map`, se obtiene un resultado acorde con el ordenamiento de tales conjuntos.

```
(%i37) map(f, {a, b, c}, {x, y, z});  
(%o37) {f(a, x), f(b, y), f(c, z)}
```

Maxima

En este caso primero son ordenados los conjuntos y luego devuelve un resultado que coincide con el de (%o37) .

```
(%i38) map(f, {c, a, b}, {y, x, z});  
(%o38) {f(a, x), f(b, y), f(c, z)}
```

Capítulo 14

Gráficos

Maxima no ha sido programado para elaborar sus propios gráficos, de modo que alternativamente utiliza un programa externo que realiza esta tarea. El usuario se limita a ordenar el tipo de gráfico deseado y *Maxima* se encarga de comunicárselo al programa gráfico que esté activo en ese momento, que por defecto será *Gnuplot*. La otra aplicación gráfica que utiliza *Maxima* es *Openmath*¹.

Las funciones `plot2d` y `plot3d`² son funciones para obtener gráficos que están definidas en el propio núcleo de *Maxima* (téngase presente que existen otras funciones similares definidas en un paquete llamado `draw`³).

Lo antes mencionado ocasiona que los gráficos generados con las funciones `plot2d` y `plot3d` se muestren en una ventana aparte del cuaderno de trabajo actual. No obstante, en contraparte, *wxMaxima* incorpora funciones alternativas, cuyos nombres se obtienen anteponiendo `wx` a `plot2d` y `plot3d`, respectivamente. La diferencia con las anteriores es que éstas funciones devuelven todos los gráficos en el cuaderno de trabajo actual.

¹Tanto *Gnuplot* como *Openmath* son softwares libres y una copia de cada uno de ellos es distribuida conjuntamente con *Maxima*.

²Con `plot2d` y `plot3d` es posible dar instrucciones tanto a *Gnuplot* como a *Openmath* sin que sea necesario tener conocimiento alguno de la sintaxis de estos programas.

³El paquete `draw` (ver el capítulo 15) está orientado exclusivamente a *Gnuplot*. Éste incorpora las funciones `draw2d` y `draw3d`, las cuales dan resultados similares a `plot2d` y `plot3d`. Además incorpora funciones para graficar funciones definidas implícitamente.

14.1 Gráficos básicos

Por comodidad, la mayoría de los ejemplos de esta sección se ejecutarán con las funciones incorporadas en *wxMaxima*; sin embargo, todos estos ejemplos pueden ser ejecutados sin ningún problema con las funciones estándar de *Maxima*.

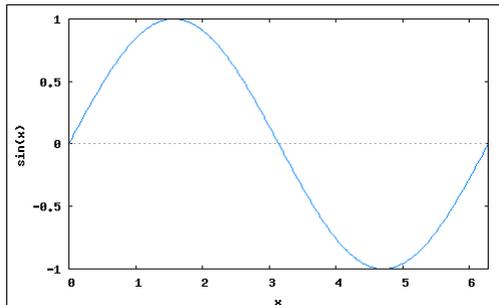
<code>plot2d(f, [x, x_{min}, x_{max}])</code>	muestra un gráfico de $y = f(x)$, con $x_{min} \leq x \leq x_{max}$, en una ventana independiente
<code>plot2d([f₁, ..., f_n], [x, x_{min}, x_{max}])</code>	muestra un gráfico de $y = f_1(x), \dots, y = f_n(x)$, con $x_{min} \leq x \leq x_{max}$, en una ventana independiente
<code>wxplot2d(f, [x, x_{min}, x_{max}])</code>	muestra un gráfico de $y = f(x)$, con $x_{min} \leq x \leq x_{max}$, en el cuaderno de trabajo actual
<code>wxplot2d([f₁, ..., f_n], [x, x_{min}, x_{max}])</code>	muestra un gráfico de $y = f_1(x), \dots, y = f_n(x)$, con $x_{min} \leq x \leq x_{max}$, en el cuaderno de trabajo actual

Trazado básico de funciones.

— *Maxima* —

Esto traza un gráfico de $\sin(x)$ como una función de x . Para x variando desde 0 hasta 2π .

```
(%i1) wxplot2d(sin(x), [x, 0, 2 * %pi]);
(%t1)
```



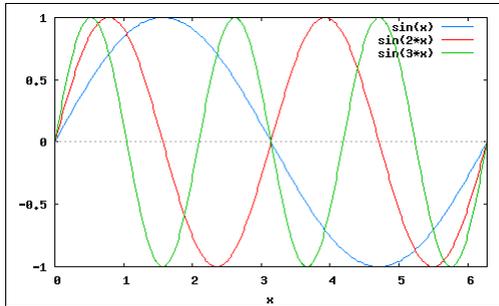
```
(%o1)
```

Maxima

Puede darse una lista de funciones para que sean trazadas. Por defecto, a cada función se le asigna un color específico.

```
(%i2) wxplot2d([sin(x), sin(2 * x), sin(3 * x)],
[x, 0, 2 * %pi]);
```

```
(%t2)
```



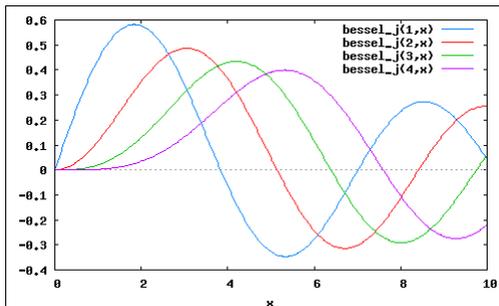
```
(%o2)
```

Maxima

Aquí se utiliza la función `create_list` para generar una lista de las funciones de Bessel, $J_n(x)$, con n variando desde 1 hasta 4. Luego se devuelve la gráfica de dichas funciones.

```
(%i3) wxplot2d(create_list(bessel_j(n, x), n, 1, 4),
[x, 0, 10]);
```

```
(%t3)
```



```
(%o3)
```

14.2 Opciones

Hay muchas opciones para escoger en el trazado de gráficos. La mayoría de las veces, la aplicación gráfica invocada por *Maxima* probablemente tomará opciones bastante buenas. Sin embargo, si se quiere obtener los mejores dibujos posibles para objetivos particulares, debería ayudarse a la aplicación en particular en la elección de algunas de sus opciones.

Hay un mecanismo general para especificar opciones en las funciones de *Maxima*. Cada opción tiene un nombre definido. Como últimos argumentos de una función, como `plot2d` (`wxplot2d`), se puede incluir una secuencia de la forma `[nombre, valor]` para especificar los valores de varias opciones. A cualquier opción para la cual no se indique un valor explícito se le asigna su valor por defecto.

<code>plot2d(f, [x, x_{min}, x_{max}], [opcion, valor])</code>	devuelve un gráfico, especificando un valor particular para una opción, en otra ventana
--------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------

Elección de una opción para el trazado de un gráfico.

<i>Opción</i>	<i>Val. por defecto</i>	<i>Descripción</i>
<code>y</code>	no presenta	rango vertical del gráfico
<code>nticks</code>	29	número inicial de puntos utilizados por el procedimiento adaptativo para la representación de funciones
<code>adapt_depth</code>	10	número máximo de particiones utilizado por el algoritmo adaptativo de representación gráfica
<code>xlabel</code>	<code>x</code>	etiqueta del eje horizontal en gráficos 2d
<code>ylabel</code>	nombre de la función <i>f</i> , dada	etiqueta del eje vertical en gráficos 2d

Algunas de las opciones de `plot2d` (`wxplot2d`).

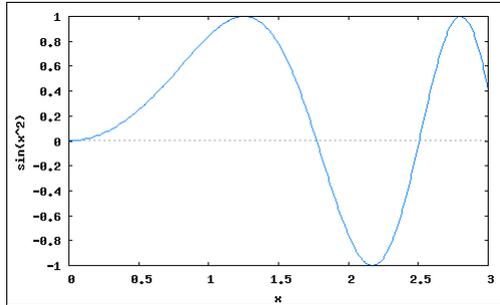
<i>Opción</i>	<i>Val. por defecto</i>	<i>Descripción</i>
<code>logx</code>	no presenta	hace que el eje horizontal en los gráficos 2d se dibuje en la escala logarítmica (no necesita de parámetros adicionales)
<code>logy</code>	no presenta	hace que el eje vertical en los gráficos 2d se dibuje en la escala logarítmica (no necesita de parámetros adicionales)
<code>legend</code>	nombre de la función f , dada	etiquetas para las expresiones de los gráficos 2d. Si hay más expresiones que etiquetas, éstas se repetirán
<code>style</code>	<code>lines,1,1</code>	estilos a utilizar para las funciones o conjuntos de datos en gráficos 2d
<code>gnuplot_preamble</code>	“ ”	introduce instrucciones de gnuplot antes de que se haga el dibujo
<code>plot_format</code>	<code>gnuplot</code>	determina qué programa gráfico se va a utilizar
<code>gnuplot_term</code>	<code>default</code>	selecciona el terminal a utilizar por Gnuplot; algunos valores posibles para el terminal son: <i>dumb</i> , <i>png</i> , <i>jpg</i> , <i>eps</i> , <i>pdf</i> , <i>gif</i> , etc. (la opción <code>gnuplot_term</code> únicamente puede utilizarse con <code>plot2d</code>)
<code>plot_realpart</code>	<code>false</code>	si <code>plot_realpart</code> vale <code>true</code> , se representará la parte real de un valor complejo
<code>run_viewer</code>	<code>true</code>	controla si el visor apropiado para la salida gráfica debe ejecutarse o no

Algunas de las opciones de `plot2d` (`wxplot2d`).

Maxima

He aquí un gráfico para el cual todas las opciones tienen asignados sus valores por defecto.

```
(%i4) wxplot2d(sin(x^2), [x, 0, 3]);
(%t5)
```

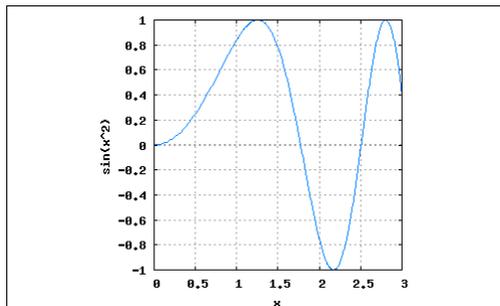


```
(%o4)
```

Maxima

La instrucción `set size ratio 1` iguala las escalas para los ejes x e y ; y la instrucción `set grid` añade una rejilla al gráfico. Ambas instrucciones corresponden a la opción `gnuplot_preamble`.

```
(%i5) wxplot2d(sin(x^2), [x, 0, 3], [gnuplot_preamble,
"set size ratio 1;set grid"]);
(%t5)
```



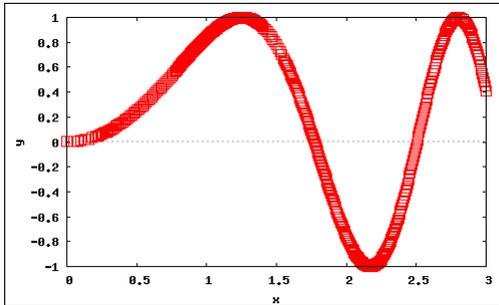
```
(%o5)
```

Maxima

Esto especifica el estilo del gráfico y la etiqueta para el eje y .

```
(%i6) wxplot2d(sin(x^2), [x, 0, 3], [style, [points, 3, 2, 7]],
[ylabel, y]);
```

```
(%t6)
```



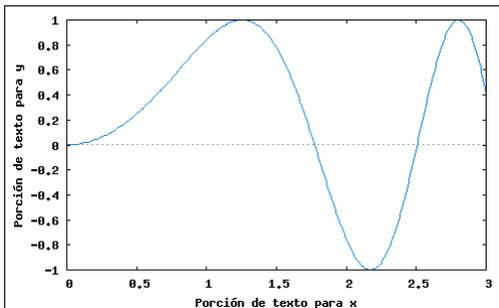
```
(%o6)
```

Maxima

Las expresiones que se dan como etiquetas puede ser cualquier porción de texto, pero ésta debe ponerse entre comillas.

```
(%i7) wxplot2d(sin(x^2), [x, 0, 3],
[xlabel, "Porción de texto para x"],
[ylabel, "Porción de texto para y"]);
```

```
(%t7)
```

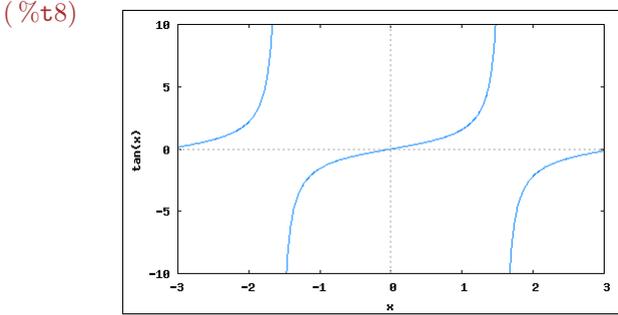


```
(%o7)
```

— *Maxima* —

Es posible trazar funciones que tienen singularidades. Para este efecto resulta bastante útil la opción `y` que permite indicar el rango.

```
(%i8) wxplot2d(tan(x), [x, -3, 3], [y, -10, 10]);
plot2d: some values were clipped.
```



```
(%o8)
```

14.3 Gráficos de puntos y líneas

Con `plot2d` (`wxplot2d`) pueden graficarse puntos del plano (aislados) o poligonales que unen puntos del plano.

<code>plot2d([discrete, [x₁, y₁], ..., [x_n, y_n]], [style, points])</code>	devuelve el gráfico de los puntos aislados $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$
<code>plot2d([discrete, x₁, ..., x_n], [y₁, ..., y_n]], [style, points])</code>	devuelve el gráfico de los puntos aislados $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$
<code>plot2d([discrete, [x₁, y₁], ..., [x_n, y_n]], [style, lines])</code>	devuelve el gráfico de una poligonal que une los puntos $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$

Gráficos de puntos aislados y poligonales.

```

plot2d([ discrete, devuelve el gráfico de una poligonal
[x1, ..., xn], [y1, ..., yn] ], que une los puntos (x1, y1), ... (xn, yn)
[style, lines])

plot2d([ discrete, devuelve el gráfico de una poligonal
[[x1, y1], ..., [xn, yn]] ]) que une los puntos (x1, y1), ... (xn, yn)

plot2d([ discrete, devuelve el gráfico de una poligonal
[x1, ..., xn], [y1, ..., yn] ]) que une los puntos (x1, y1), ... (xn, yn)
)

```

Gráficos de puntos aislados y poligonales.

— *Maxima* —

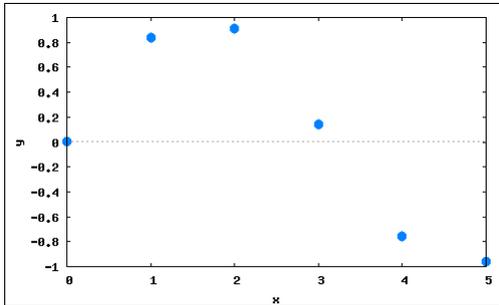
De esta forma se grafica una lista de puntos aislados.

```

(%i9) pts : create_list([i, sin(i)], i, 0, 5);
(%o9) [[0, 0], [1, sin(1)], [2, sin(2)], [3, sin(3)], [4, sin(4)],
[5, sin(5)]]

(%i10) wxplot2d([discrete, pts], [style, points]);
(%t10)

```



```

(%o10)

```

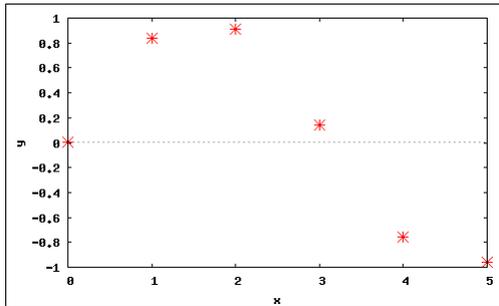
Cabe destacar que los estilos `points` y `lines` también aceptan opciones. Éstas deben ingresarse como una secuencia de tres números enteros positivos de la forma `[points n1, n2, n3]` (en el caso de `points`), o dos números enteros positivos de la forma `[lines n1, n2]` (en el caso de `lines`). En ambos casos el primer valor, n_1 , corresponde al tamaño de los puntos o grosor de la línea, según sea el caso; el segundo, n_2 , al color ($1 \equiv azul$, $2 \equiv rojo$, $3 \equiv verde$, $4 \equiv violeta$, $5 \equiv negro$, $6 \equiv celeste$). Finalmente para `points` está el tercer valor, n_3 ,

que corresponde a la forma en que se visualiza el punto (1 \equiv disco, 2 \equiv círculo, 3 \equiv cruz, 4 \equiv aspa, 5 \equiv asterisco, 6 \equiv cuadrado relleno, 7 \equiv cuadrado sin rellenar, 8 \equiv triángulo relleno, 9 \equiv triángulo sin rellenar, 10 \equiv triángulo relleno invertido, 11 \equiv triángulo sin rellenar invertido, 12 \equiv rombo relleno, 13 \equiv rombo sin rellenar).

Maxima

Aquí se muestran los puntos de la salida %o9 con opciones que cambian el tamaño, color y forma de los mismos.

```
(%i11) wxplot2d([discrete,pts],[style,[points,3,2,5]]);
(%t11)
```

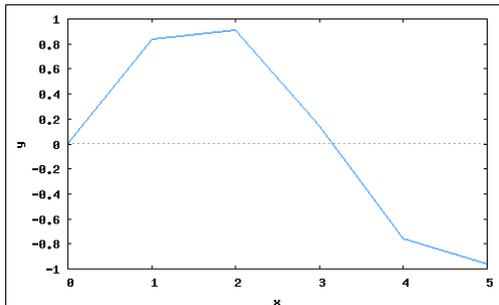


```
(%o11)
```

Maxima

Aquí se muestran los puntos de la salida %o9 unidos por una línea quebrada.

```
(%i12) wxplot2d([discrete,pts],[style,lines]);
(%t12)
```



```
(%o12)
```

14.4 Gráficos paramétricos y polares

```

plot2d([parametric,      traza un gráfico paramétrico
        f_x, f_y, [t, t_min, t_max]])
        plot2d([      traza varias curvas paramétricas juntas
[parametric, f_x, f_y,
  [t, t_min, t_max]],
[parametric, g_x, g_y,
  [s, s_min, s_max]], ...])

```

Gráficos de curvas definidas en forma paramétrica.

```

        plot2d(f(t),      traza un gráfico polar
        [t, t_min, t_max],
[gnuplot_preamble,
  "set polar"])
plot2d([f(t), g(t), ...]      traza varias curvas polares juntas
        [t, t_min, t_max],
[gnuplot_preamble,
  "set polar"])

```

Gráficos de curvas definidas en forma polar.

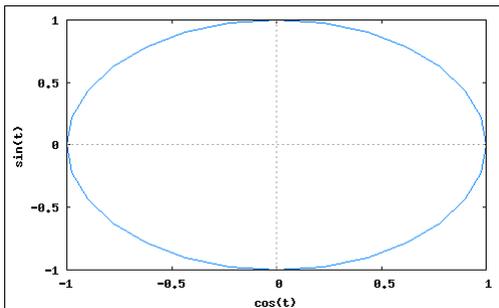
— *Maxima* —

Esto devuelve la gráfica de la curva $t \rightarrow (\cos(t), \sin(t))$ para $t \in [0, 2\pi]$.

```

(%i13) wxplot2d([parametric, cos(t), sin(t), [t, 0, 2 * %pi]]);
(%t13)

```



```

(%o13)

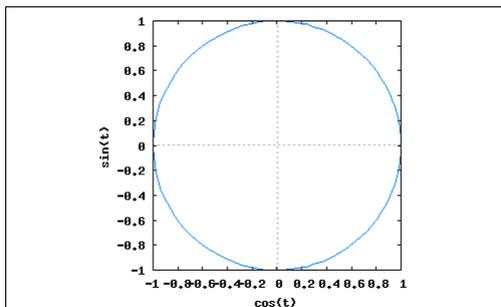
```

Maxima

Utilizando las opciones adecuadas es posible mejorar la presentación de la salida %o12.

```
(%i14) wxplot2d(
[parametric, cos(t), sin(t), [t, 0, 2 * %pi]],
[gnuplot_preamble, "set size ratio 1"],
[nticks, 100]
);
```

(%t14)



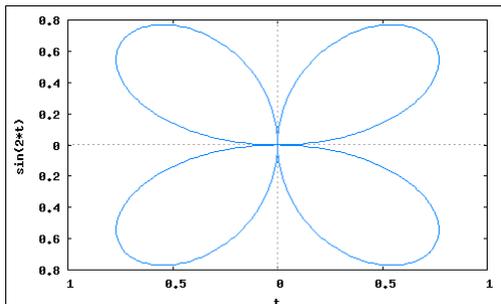
(%o14)

Maxima

Esto devuelve la gráfica de $\rho = \text{sen}(2t)$.

```
(%i15) wxplot2d(sin(2 * t), [t, 0, 2 * %pi],
[gnuplot_preamble, "setpolar"], [x, -1, 1]);
```

(%t15)



(%o15)

14.5 Combinación de gráficos

Adicionalmente, la función `plot2d` (`wxplot2d`) permite combinar varios tipos de gráficos (salvo los polares) y presentarlos en un mismo sistema coordenado.

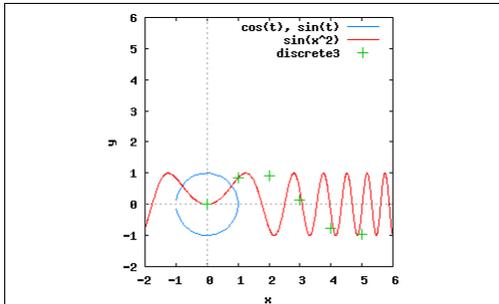
— *Maxima* —

Aquí se combinan varios tipos de gráficos.

```
(%i16) pts : create_list([i, sin(i)], i, 0, 5) $
(%i17) wxplot2d([
[parametric, cos(t), sin(t)], [t, 0, 2 * %pi],
sin(x^2),
[discrete, pts]],
[x, -2, 6], [y, -2, 6],
[style, lines, lines, points],
[gnuplot_preamble, "set size ratio 1"]);
```

`plot2d`: expression evaluates to non-numeric value everywhere in plotting range.

```
(%t17)
```



```
(%o17)
```

14.6 Gráficos de superficies tridimensionales

Para graficar superficies en \mathbb{R}^3 se utiliza la función `plot3d` (`wxplot3d`). Es preciso mencionar que, al utilizar la función `wxplot3d` el gráfico resultante será mostrado en el cuaderno de trabajo actual; no obstante, se pierde la interacción en tiempo real con el gráfico. Esto no sucede si se utiliza la función `plot3d`, ya que en este caso basta con

hacer clic sobre la figura y, sin soltar el botón del mouse, arrastrarlo para que la superficie gire en tiempo real.

<pre>plot3d(f, [x, x_min, x_max], [y, y_min, y_max])</pre>	<p>muestra un gráfico de $z = f(x, y)$, con $x_{min} \leq x \leq x_{max}$ y $y_{min} \leq y \leq y_{max}$, en una ventana independiente; en esta ventana es posible interactuar en tiempo real con dicho gráfico</p>
<pre>wxplot3d(f, [x, x_min, x_max], [y, y_min, y_max])</pre>	<p>muestra un gráfico de $z = f(x, y)$, con $x_{min} \leq x \leq x_{max}$ y $y_{min} \leq y \leq y_{max}$, en el cuaderno de trabajo actual y no hay interacción en tiempo real con el gráfico</p>

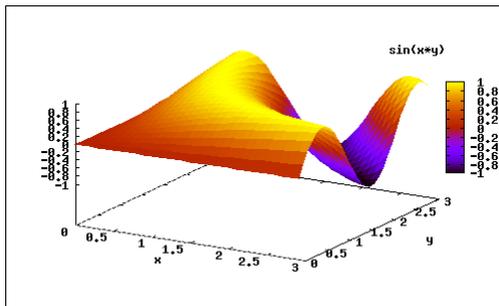
Trazado básico de funciones 3D.

Al igual que `plot2d` (`wxplot2d`), la función `plot3d` (`wxplot3d`) también incluye una serie de opciones para obtener los mejores dibujos posibles.

— *Maxima* —

Esto traza un gráfico de la función $f(x, y) = \sin(xy)$.

```
(%i18) wxplot3d(sin(x * y), [x, 0, 3], [y, 0, 3]);
(%t18)
```



```
(%o18)
```

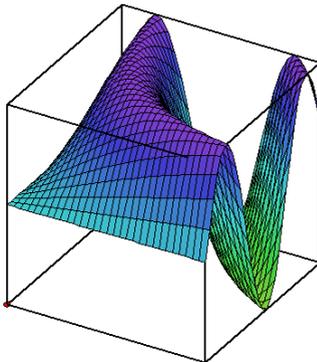
<i>Opción</i>	<i>Val. por defecto</i>	<i>Descripción</i>
<code>grid</code>	<code>30,30</code>	establece el número de puntos de la retícula a utilizar en las direcciones x e y
<code>transform_xy</code>	<code>false</code>	permite que se realicen transformaciones en los gráficos de tres dimensiones
<code>gnuplot_term</code>	<code>default</code>	selecciona el terminal a utilizar por Gnuplot; algunos valores posibles son: <i>dumb</i> , <i>png</i> , <i>jpg</i> , <i>eps</i> , <i>pdf</i> , <i>gif</i> , etc. (la opción <code>gnuplot_term</code> sólo funciona con <code>plot3d</code>)
<code>gnuplot_preamble</code>	<code>“ ”</code>	introduce instrucciones de gnuplot antes que se haga el dibujo
<code>plot_format</code>	<code>gnuplot</code>	determina qué programa gráfico se va a utilizar

Algunas de las opciones de `plot3d` (`wxplot3d`)

— *Maxima* —

Esto traza un gráfico de $f(x, y) = \sin(xy)$ con el programa gráfico `openmath`.

```
(%i19) plot3d(sin(x * y), [x, 0, 3], [y, 0, 3],
[plot_format, openmath]);
(%o19)
```

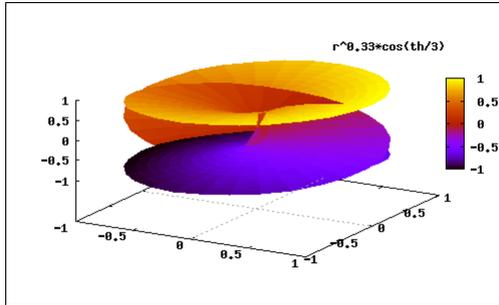


— *Maxima* —

Esto traza un gráfico tridimensional de la superficie definida por $r^{0.33} \cos(\frac{th}{3})$ en coordenadas cilíndricas⁴

```
(%i20) wxplot3d(r^ .33 * cos(th/3),
[r, 0, 1], [th, 0, 6 * %pi],
[grid, 12, 80],
[transform_xy, polar_to_xy]);
```

(%t20)



(%o20)

`plot3d` (`wxplot3d`) también permite trazar la gráfica de una superficie definida en forma paramétrica; sin embargo, no permite graficar curvas en \mathbb{R}^3 .

<code>plot3d</code> ($[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$, $[u, u_{min}, u_{max}]$, $[v, v_{min}, v_{max}]$)	traza el gráfico de una superficie paramétrica en una ventana independiente, siendo posible la interacción en tiempo real con dicho gráfico
<code>wxplot3d</code> ($[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$, $[u, u_{min}, u_{max}]$, $[v, v_{min}, v_{max}]$)	traza el gráfico de una superficie paramétrica en el cuaderno de trabajo actual, siendo imposible la interacción en tiempo real con dicho gráfico

Trazado básico de superficies definidas en forma paramétrica.

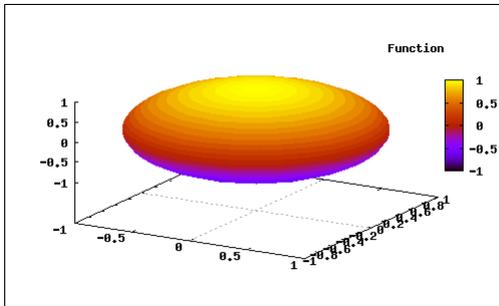
⁴En este caso se ha realizado una transformación de coordenadas. El usuario puede definir sus propias transformaciones usando la función `make_transform(vars, fx, fy, fz)`. Por ejemplo, aquí se ha usado la transformación `polar_to_xy`: `make_transform([r, th, z], r * cos(th), r * sin(th), z)`.

Maxima

Esto devuelve la gráfica de la esfera unitaria definida paraméricamente mediante $(u, v) \rightarrow (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$, $0 \leq u \leq 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.

```
(%i21) wxplot3d([cos(u) * cos(v), sin(u) * cos(v), sin(v)],
[u, 0, 2 * %pi], [v, -%pi/2, %pi/2]);
```

```
(%o21)
```



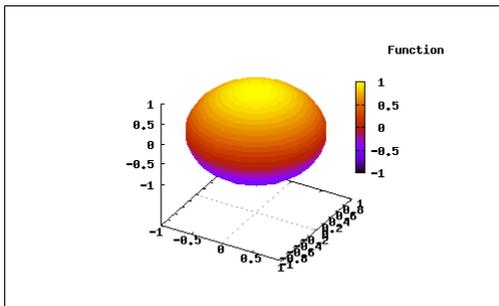
```
(%o21)
```

Maxima

Utilizando las opciones adecuadas es posible mejorar la presentación de la salida %o21.

```
(%i22) wxplot3d([cos(u) * cos(v), sin(u) * cos(v), sin(v)],
[u, 0, 2 * %pi], [v, -%pi/2, %pi/2],
[gnuplot_preamble, "set size ratio 1"]);
```

```
(%t22)
```



```
(%o22)
```

14.7 Gráficos de densidad y contornos

Un gráfico de contorno le da esencialmente un “mapa topográfico” de una función. Los contornos unen puntos sobre la superficie que tienen la misma altura. El valor por defecto permite obtener contornos correspondientes a una secuencia de valores de z igualmente espaciados.

<pre>plot3d(f(x, y), [x, x_min, x_max], [y, y_min, y_max], [gnuplot_preamble, "set pm3d map"])</pre>	<p>traza un gráfico de densidad de $f(x, y)$ en el rectángulo $[x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}]$</p>
<pre>contour_plot(f(x, y), [x, x_min, x_max], [y, y_min, y_max])</pre>	<p>dibuja las curvas de nivel de $f(x, y)$ en el rectángulo $[x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}]$ (cualesquiera otros argumentos adicionales se tratan como en <code>plot3d</code>)</p>

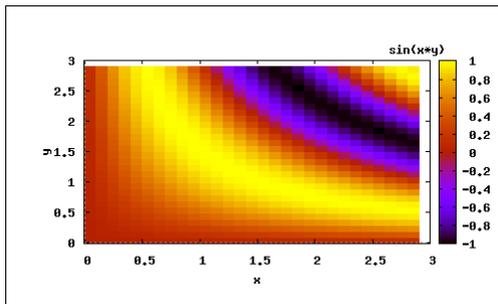
Gráficos de contornos.

— *Maxima* —

Esto traza un gráfico de densidad de la función $f(x, y) = \sin(xy)$ en el rectángulo $[0, 3] \times [0, 3]$.

```
(%i23) wxplot3d(sin(x * y), [x, 0, 3], [y, 0, 3],
               [gnuplot_preamble, "set pm3d map"]);
```

```
(%t23)
```

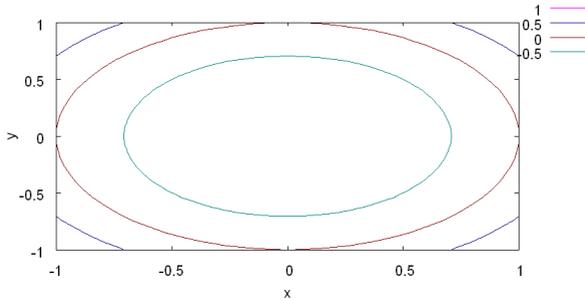


```
(%o23)
```

Maxima

He aquí un gráfico de contorno de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

```
(%i24) contour_plot(x^2 + y^2 - 1, [x, -1, 1], [y, -1, 1]);
(%o24)
```



14.8 Gráficos animados

También es posible crear animaciones, aunque únicamente en el entorno de *wxMaxima*. Para tal fin se utiliza la función `with_slider`⁵ con la cual se genera un gráfico idéntico al que se genera con `wxplot2d`, sin embargo dicho gráfico puede ser animado seleccionándolo y pulsando luego el botón Comenzar animación, del cuadro de controles, de la barra de herramientas.

Maxima

Cuadro de controles, ubicado en la barra de herramientas, para la animación de gráficos.



`with_slider` función para animar gráficos de `wxplot2d`

Obtención de gráficos animados.

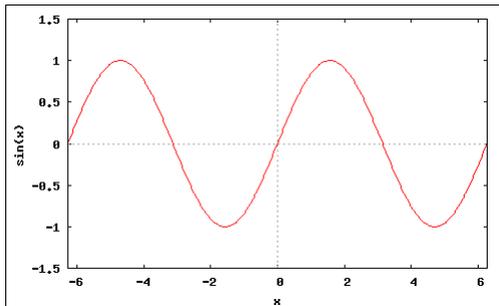
⁵Es importante señalar que adicionalmente están incluidas las funciones `with_slider_draw` y `with_slider_draw3d` relacionadas con las funciones `draw` y `draw3d` del paquete `draw`.

Maxima

Esto genera un gráfico listo para ser animado. Para conseguir la animación primero se selecciona el gráfico y luego se pulsa el botón , del cuadro de controles, y automáticamente ésta es generada. Para detenerla basta pulsar el botón , del mismo cuadro. También es posible navegar a través de cada cuadro de la animación con tan sólo arrastrar a voluntad el botón , después de haber seleccionado el gráfico.

```
(%i25) with_slider(a, [0, 1, 2, 3, 4, 5], sin(x + a),
[x, -2 * %pi, 2 * %pi], [y, -1, 5, 1, 5], [color, red]);
```

```
(%t25)
```



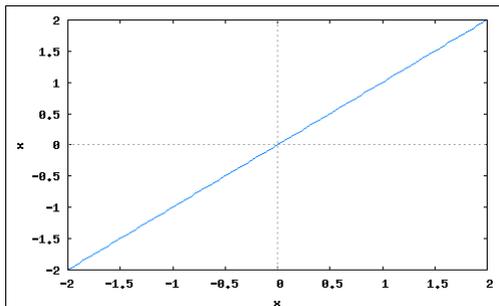
```
(%o25)
```

Maxima

He aquí otro gráfico listo para animar.

```
(%i26) with_slider(f, [x, x^2, x^3, x^4], f, [x, -2, 2]);
```

```
(%t26)
```



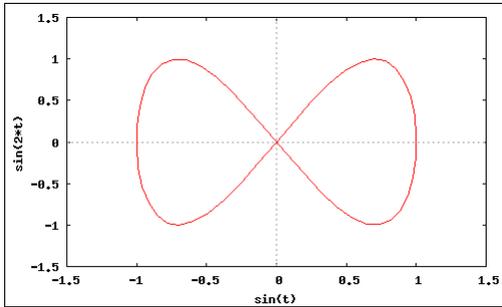
```
(%o26)
```

— *Maxima* —

Este es un gráfico más listo para animar.

```
(%i27) with_slider(a, [0, 1, 2, 3, 4, 5],
[parametric, sin(t), sin(2 * (t + a)), [t, 0, 2 * %pi]],
[x, -1.5, 1.5], [y, -1.5, 1.5], [color, red], [nticks, 50]);
```

(%o27)



(%o27)

Capítulo 15

Gráficos con draw

El paquete **draw** se distribuye conjuntamente con *Maxima* y constituye una interfaz que comunica de manera muy eficiente *Maxima* con *Gnuplot*. Este paquete incorpora una considerable variedad de funciones y opciones que permiten obtener la representación de un amplio número de objetos gráficos bidimensionales y tridimensionales.

Para poder utilizar el paquete **draw** es preciso cargarlo en la memoria, y para ello se utiliza la función **load** (ver sección 3.7).

<code>load(draw) \$</code>	“carga” (inicializa) el paquete draw
<code>draw(gr2d, ..., gr3d, ..., opciones)</code>	representa gráficamente una serie de escenas; sus argumentos son objetos <i>gr2d</i> y/o <i>gr3d</i> , junto con algunas opciones. Por defecto, las escenas se representan en una columna
<code>draw2d(opciones, objeto_gráfico, ...)</code>	esta función es un atajo para <code>draw(gr2d(opciones, objeto_gráfico, ...))</code>
<code>draw3d(opciones, objeto_gráfico, ...)</code>	esta función es un atajo para <code>draw(gr3d(opciones, objeto_gráfico, ...))</code>

Inicialización del paquete **draw** y descripción de sus tres funciones principales.

15.1 Objetos gráficos bidimensionales

<code>points</code> ($[[x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots]$)	puntos bidimensionales
<code>points</code> ($[x_1, x_2, \dots], [y_1, y_2, \dots]$)	puntos bidimensionales
<code>points</code> ($[y_1, y_2, \dots]$)	equivale a <code>points</code> ($[[1, y_1], [2, y_2], \dots]$)
<code>points</code> (<code>matrix</code> ($[x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots$))	puntos bidimensionales
<code>polygon</code> ($[[x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots]$)	polígono
<code>polygon</code> ($[x_1, x_2, \dots], [y_1, y_2, \dots]$)	polígono
<code>rectangle</code> ($[x_1, y_1], [x_2, y_2]$)	rectángulo de vértices opuestos (x_1, y_1) y (x_2, y_2)
<code>vector</code> ($[p_1, p_2], [v_1, v_2]$)	vector (v_1, v_2) con punto de aplicación (p_1, p_2)
<code>label</code> ($[cadena, x, y], \dots$)	etiquetas para gráficos bidimensionales
<code>ellipse</code> ($x_c, y_c, a, b, ang_1, ang_2$)	sector elíptico de centro (x_c, y_c) con semiejes horizontal y vertical a y b , respectivamente, comenzando en el ángulo ang_1 y trazando un arco de amplitud igual al ángulo ang_2
<code>explicit</code> ($f(x), x, x_{min}, x_{max}$)	función explícita f cuya variable x toma valores desde x_{min} hasta x_{max}
<code>implicit</code> ($E(x, y), x, x_{min}, x_{max}, y, y_{min}, y_{max}$)	expresión implícita E a ser representada en el rectángulo $[x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}]$
<code>parametric</code> ($f_x, f_y, t, t_{min}, t_{max}$)	curva paramétrica bidimensional, cuyo parámetro t toma valores desde t_{min} hasta t_{max}
<code>polar</code> ($r(\theta), \theta, \theta_{min}, \theta_{max}$)	función polar r cuya variable θ toma valores desde θ_{min} hasta θ_{max}

Principales objetos gráficos bidimensionales incorporados en `draw`.

Las funciones `draw`, `draw2d` y `draw3d` devuelven las salidas gráficas en una ventana de *Gnuplot*, aparte de la ventana de trabajo actual. No obstante el entorno gráfico *wxMaxima* permite utilizar las funciones `wxdraw`, `wxdraw2d` y `wxdraw3d` que devuelven las salidas en el cuaderno de trabajo actual. Debe tenerse presente que al utilizar la función `wxdraw3d`, el punto de vista de la gráfica obtenida no puede ser cambiado en tiempo real.

En este capítulo se van a mostrar los resultados mediante las funciones `wxdraw`, `wxdraw2d` y `wxdraw3d`, pero todos los ejemplos mostrados pueden ser ejecutados, sin ningún problema, con las funciones `draw`, `draw2d` y `draw3d`, según sea el caso.

```

Maxima
-----
Aquí se genera una lista de listas. Los elementos de la misma, generados aleatoriamente, representan las coordenadas de puntos del plano.

(%i1) p : create_list([random(20), random(50)], k, 1, 10);
(%o1) [[9, 9], [3, 39], [6, 26], [16, 3], [0, 21], [12, 9], [9, 18], [6, 45],
      [13, 43], [7, 28]]

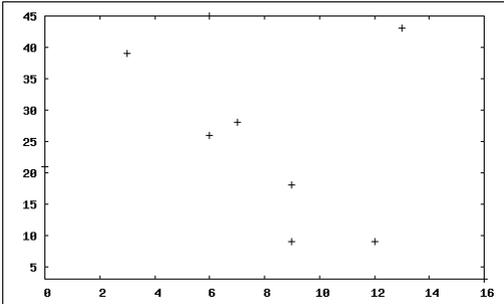
```

```

Maxima
-----
Después de aplicar la función points a la variable p, en la que se han almacenado los puntos, se obtiene un objeto gráfico el cual puede graficarse con draw2d.

(%i2) wxdraw2d(points(p));
(%t2)

```



```

(%o2) [gr2d(points)]

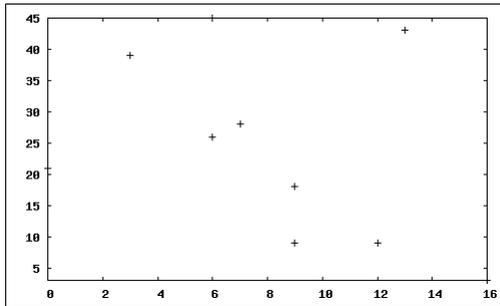
```

Maxima

Con `gr2d` y `draw` siempre se obtendrá el mismo resultado que con `draw2d`.

```
(%i3) wxdraw(gr2d(points(p)));
```

```
(%t3)
```



```
(%o3) [gr2d(points)]
```

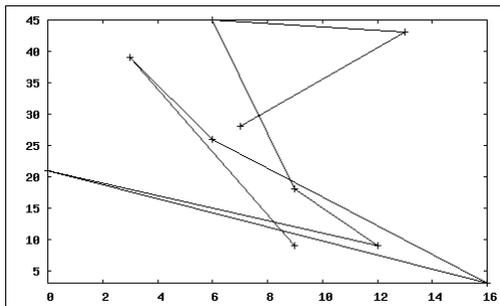
`draw` no cuenta con una función específica, como *line*, para definir el objeto geométrico línea; simplemente se asigna el valor `true` a la opción `points_joined` para unir los puntos dados mediante segmentos.

Maxima

Gráfica de los puntos p unidos mediante segmentos.

```
(%i4) wxdraw2d(
points_joined = true,
points(p) );
```

```
(%t4)
```

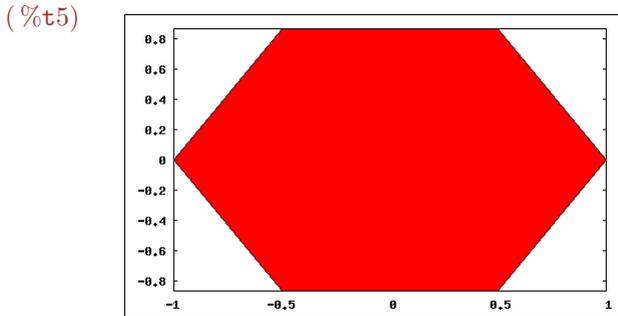


```
(%o4) [gr2d(points)]
```

Maxima

Así se visualiza la gráfica de un hexágono.

```
(%i5) wxdraw2d(  
      polygon(  
        [1/2, sqrt(3)/2], [-1/2, sqrt(3)/2], [-1, 0],  
        [-1/2, -sqrt(3)/2], [1/2, -sqrt(3)/2], [1, 0]  
      )  
)
```

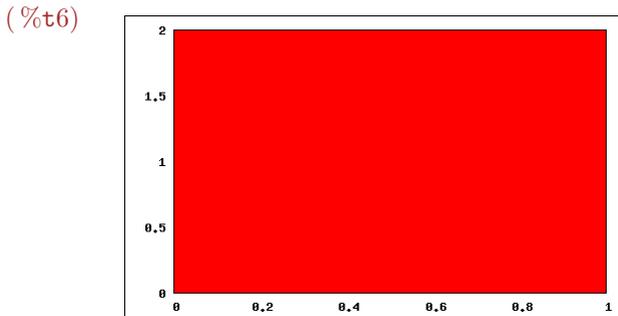


```
(%o5) [gr2d(polygon)]
```

Maxima

Y así, la gráfica de un rectángulo.

```
(%i6) wxdraw2d(  
      rectangle([0, 0], [1, 2])  
      );
```



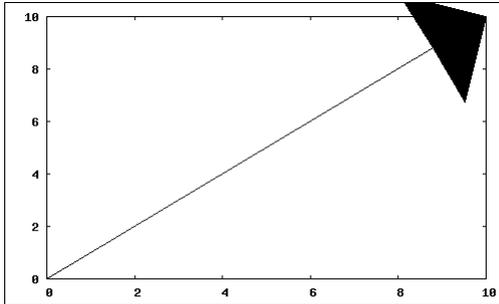
```
(%o6) [gr2d(rectangle)]
```

Maxima

De esta manera se obtiene la gráfica del vector $(10, 10)$, cuyo punto de aplicación es el origen.

```
(%i7) wxdraw2d(
      vector([0, 0], [10, 10])
    );
```

```
(%t7)
```



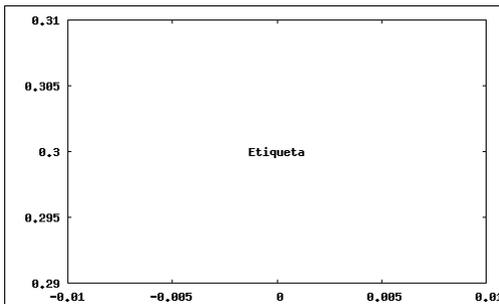
```
(%o7) [gr2d(vector)]
```

Maxima

Para insertar texto en un punto cualquiera de un gráfico se utiliza la función `label`. En este caso el punto de inserción es $(0, 0 \cdot 3)$.

```
(%i8) wxdraw2d(
      label(["Etiqueta", 0, 0.3])
    );
```

```
(%t8)
```



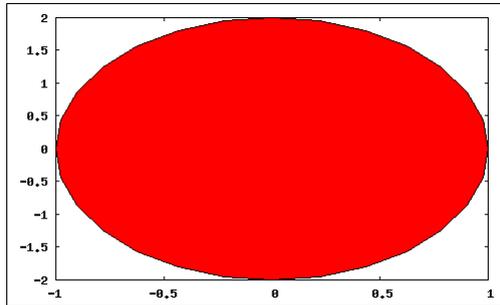
```
(%o8) [gr2d(label)]
```

Maxima

Esto devuelve la gráfica de un sector elíptico, de 0° a 360° , cuyo centro es el origen, su semieje horizontal es 1, su semieje vertical es 2.

```
(%i9) wxdraw2d(  
      ellipse(0, 0, 1, 2, 0, 360)  
      );
```

```
(%t9)
```



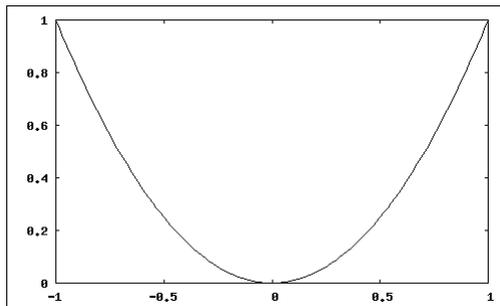
```
(%o9) [gr2d(ellipse)]
```

Maxima

De esta manera se obtiene la gráfica de la función $x \rightarrow x^2$, con $-1 \leq x \leq 1$.

```
(%i10) wxdraw2d(  
      explicit(x^2, x, -1, 1)  
      );
```

```
(%t10)
```



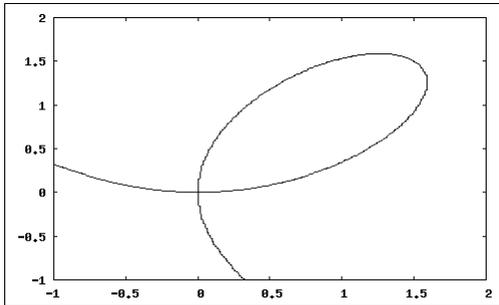
```
(%o10) [gr2d(explicit)]
```

Maxima

Esto muestra la gráfica de la ecuación $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ en el rectángulo $[-1, 2] \times [-1, 2]$.

```
(%i11) wxdraw2d(
        implicit(x^3 + y^3 - 3 * x * y = 0, x, -1, 2, y, -1, 2)
        );
```

```
(%t11)
```



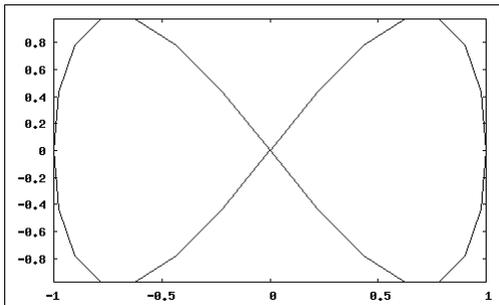
```
(%o11) [gr2d(implicit)]
```

Maxima

Aquí se muestra la gráfica de la curva definida en forma paramétrica mediante $t \rightarrow (\sin(t), \sin(2t))$, con $0 \leq t \leq 2\pi$.

```
(%i12) wxdraw2d(
        parametric(sin(t), sin(2 * t), t, 0, 2 * %pi)
        );
```

```
(%t12)
```



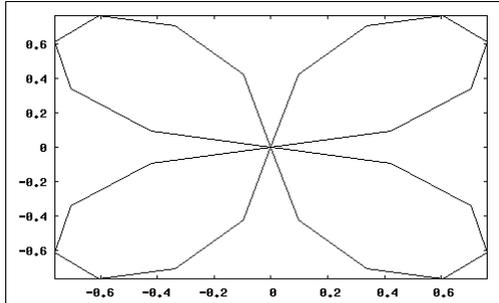
```
(%o12) [gr2d(parametric)]
```

Maxima

Aquí se muestra la gráfica de la función definida en coordenadas polares mediante $t \rightarrow \text{sen}(t)$, tal que $0 \leq t \leq 2\pi$.

```
(%i13) wxdraw2d(
      polar(sin(2 * t), t, 0, 2 * %pi)
    );
```

```
(%t13)
```



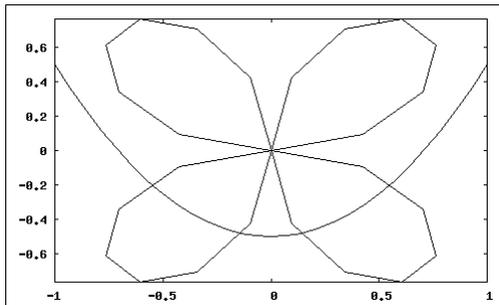
```
(%o13) [gr2d(polar)]
```

Maxima

Combinar objetos gráficos bidimensionales es sencillo con `draw2d`.

```
(%i14) wxdraw2d(
      parametric(t, t^2 - 1/2, t, -1, 1),
      polar(sin(2 * t), t, 0, 2 * %pi)
    );
```

```
(%t14)
```



```
(%o14) [gr2d(parametric, polar)]
```

15.2 Opciones para los objetos gráficos bidimensionales

15.2.1 Opciones locales

Las opciones locales sólo son relevantes para objetos gráficos específicos y para tal efecto deben digitarse antes de dicho objeto. Si una opción gráfica es digitada antes de un objeto gráfico al cual no corresponde, no se produce ningún mensaje de error, simplemente la gráfica se muestra sin presentar alteración alguna.

<i>Opción</i>	<i>Val. por defecto</i>	<i>Descripción</i>
<code>point_size</code>	1	establece el tamaño de los puntos dibujados (debe ser un número no negativo)
<code>point_type</code>	1	indica la forma que tendrán los puntos aislados
<code>point_joined</code>	<code>false</code>	indica si los puntos aislados se unen mediante segmentos o no

Opciones de `draw2d` para el objeto gráfico `points`.

<i>Opción</i>	<i>Val. por defecto</i>	<i>Descripción</i>
<code>nticks</code>	29	indica el número de puntos a utilizar para generar las gráficas
<code>border</code>	<code>true</code>	especifica si debe dibujarse el borde o no
<code>transparent</code>	<code>false</code>	establece si el polígono debe rellenarse o no
<code>fill_color</code>	<code>red</code>	especifica el color del relleno del polígono

Opciones de `draw2d` para los objetos gráficos bidimensionales `polygon` y `rectangle`.

<i>Opción</i>	<i>Val. por defecto</i>	<i>Descripción</i>
<code>head_both</code>	<code>false</code>	indica si el vector será bidireccional o no
<code>head_length</code>	2	indica, en las unidades del eje x , la longitud de las flechas de los vectores
<code>head_angle</code>	45	indica el ángulo, en grados, entre la flecha y el segmento del vector
<code>head_type</code>	<code>filled</code>	especifica cómo se habrán de dibujar las flechas de los vectores
<code>unit_vectors</code>	<code>false</code>	especifica si los vectores se dibujan con módulo unidad

Opciones de `draw2d` para el objeto gráfico `vector`.

<i>Opción</i>	<i>Val. por defecto</i>	<i>Descripción</i>
<code>label_alignment</code>	<code>center</code>	especifica el color que tendrá el vector
<code>label_orientation</code>	<code>horizontal</code>	especifica el color que tendrá el vector

Opciones de `draw2d` para el objeto gráfico `label`.

<i>Opción</i>	<i>Val. por defecto</i>	<i>Descripción</i>
<code>nticks</code>	29	indica el número de puntos a utilizar para generar las gráficas
<code>adapt_depth</code>	10	indica el número máximo de particiones utilizadas por la rutina gráfica adaptativa

Opciones de `draw2d` para el objeto gráfico `explicit`.

<i>Opción</i>	<i>Val. por defecto</i>	<i>Descripción</i>
<code>filled_func</code>	<code>false</code>	establece cómo se van a rellenar las regiones limitadas por las gráficas
<code>fill_color</code>	<code>red</code>	especifica el color para rellenar las regiones limitadas por las gráficas

Opciones de `draw2d` para el objeto gráfico `explicit`.

<i>Opción</i>	<i>Val. por defecto</i>	<i>Descripción</i>
<code>ip_grid</code>	<code>[50,50]</code>	establece la rejilla del primer muestreo para la gráfica
<code>ip_grid_in</code>	<code>[5,5]</code>	establece la rejilla del segundo muestreo para la gráfica

Opciones de `draw2d` para el objeto gráfico `implicit`.

<i>Opción</i>	<i>Val. por defecto</i>	<i>Descripción</i>
<code>nticks</code>	<code>29</code>	indica el número de puntos a utilizar para generar las gráficas

Opciones de `draw2d` para los objetos gráficos bidimensionales `parametric` y `polar`.

15.2.2 Opciones locales genéricas

Las opciones locales genéricas son opciones comunes a todos los objetos gráficos bidimensionales. Aunque hay excepciones que cabe destacar, por ejemplo las opciones `line_width` y `line_type` que, por razones obvias, únicamente no son relevantes con los objetos gráficos `point` y `label`. Tampoco la opción `color` es relevante con el objeto gráfico `label`, esto constituye una falla que será corregida cuando se incorpore, a *Maxima*, la versión 4.3 de *Gnuplot*.

<i>Opción</i>	<i>Val. por defecto</i>	<i>Descripción</i>
<code>color</code>	<code>black</code>	especifica el color para dibujar líneas, puntos y bordes de polígonos
<code>line_width</code>	<code>1</code>	indica el ancho de las líneas a dibujar
<code>line_type</code>	<code>solid</code>	indica cómo se van a dibujar las líneas (valores posibles son <code>solid</code> y <code>dots</code>)
<code>key</code>	<code>solid</code>	indica la clave del gráfico en la leyenda

Opciones locales genéricas de `draw2d`.

15.2.3 Opciones globales

Las opciones globales se caracterizan porque afectan a toda la escena y su posición dentro de la descripción de ésta no reviste importancia.

<i>Opción</i>	<i>Val. por defecto</i>	<i>Descripción</i>
<code>proportional_axes</code>	<code>none</code>	indica si una escena bidimensional se dibujará con los ejes proporcionales a sus longitudes relativas (valores posibles: <code>none</code> y <code>xy</code>)
<code>xrange</code>	<code>auto</code>	permite especificar un intervalo para x (valores posibles: <code>auto</code> y $[x_{min}, x_{max}]$)
<code>yrange</code>	<code>auto</code>	permite especificar un intervalo para y (valores posibles: <code>auto</code> y $[y_{min}, y_{max}]$)
<code>logx</code>	<code>false</code>	permite especificar si el eje x se dibujará en la escala logarítmica

Algunas opciones globales de `draw2d`.

<i>Opción</i>	<i>Val. por defecto</i>	<i>Descripción</i>
<code>logy</code>	<code>false</code>	permite especificar si el eje y se dibujará en la escala logarítmica
<code>terminal</code>	<code>screen</code>	selecciona el terminal a utilizar por <i>Gnuplot</i> (valores posibles son: <code>screen</code> , <code>png</code> , <code>jpg</code> , <code>eps</code> , <code>eps_color</code> , <code>pdf</code> , <code>pdfcairo</code> , <code>gif</code> , <code>animated_gif</code> , <code>wxt</code> y <code>aquaterm</code>)
<code>file_name</code>	<code>maxima_out</code>	indica el nombre del fichero en el que los terminales <code>png</code> , <code>jpg</code> , <code>eps</code> , <code>eps_color</code> , <code>pdf</code> , <code>pdfcairo</code> , etc. guardarán el gráfico
<code>font</code>	<code>""</code>	permite seleccionar el tipo de fuente a utilizar por el terminal
<code>font</code>	<code>12</code>	permite seleccionar el tamaño de la fuente a utilizar por el terminal
<code>grid</code>	<code>false</code>	permite especificar si se dibujará una rejilla sobre xy
<code>title</code>	<code>""</code>	almacena una cadena con el título de la escena
<code>xlabel</code>	<code>""</code>	almacena una cadena con la etiqueta del eje x
<code>ylabel</code>	<code>""</code>	almacena una cadena con la etiqueta del eje y
<code>xtics</code>	<code>auto</code>	controla la forma en la que se dibujarán las marcas del eje x (valores posibles: <code>auto</code> , <code>none</code> , <code>[inicio, inc, fin]</code> , <code>{n₁, n₂, ...}</code> y también <code>{["label1", n₁], ["label1", n₁], ...}</code>)

Algunas opciones globales de `draw2d`.

<i>Opción</i>	<i>Val. por defecto</i>	<i>Descripción</i>
<code>xtics_axis</code>	<code>false</code>	indica si las marcas y sus etiquetas se dibujan sobre el propio eje x , o se colocan a lo largo del borde del gráfico
<code>ytics</code>	<code>auto</code>	similar que <code>xtics</code> pero con el eje y
<code>ytics_axis</code>	<code>false</code>	similar que <code>xtics_axis</code> pero con el eje y
<code>xaxis</code>	<code>false</code>	especifica si se dibujará el eje x
<code>xaxis_width</code>	<code>1</code>	indica el ancho del eje x
<code>xaxis_type</code>	<code>dots</code>	indica cómo se debe dibujar el eje x (valores admisibles: <code>solid</code> y <code>dots</code>)
<code>xaxis_color</code>	<code>black</code>	indica el color para el eje x
<code>yaxis</code>	<code>false</code>	especifica si se dibujará el eje y
<code>yaxis_width</code>	<code>1</code>	indica el ancho del eje y
<code>yaxis_type</code>	<code>dots</code>	similar que <code>xaxis_type</code> pero con el eje y
<code>yaxis_color</code>	<code>black</code>	indica el color para el eje y
<code>file_bgcolor</code>	<code>"ffffff"</code>	establece el color de fondo (en código hexadecimal <i>rgb</i>) para los terminales <code>png</code> , <code>jpg</code> y <code>gif</code>
<code>delay</code>	<code>5</code>	establece el retraso en centésimas de segundo entre imágenes en los ficheros <code>gif</code> animados
<code>eps_width</code>	<code>12</code>	indica el ancho (en <i>cm</i>) del archivo Postscript generado por los terminales <code>eps</code> y <code>eps_color</code>
<code>eps_height</code>	<code>12</code>	indica el largo (en <i>cm</i>) del archivo Postscript

Algunas opciones globales de `draw2d`.

<i>Opción</i>	<i>Val. por defecto</i>	<i>Descripción</i>
<code>pdf_width</code>	21 · 0	especifica el ancho (en <i>cm</i>) del documento PDF generado por los terminales <code>pdf</code> y <code>pdfcairo</code>
<code>pdf_height</code>	29 · 7	especifica el largo (en <i>cm</i>) del documento PDF
<code>pic_width</code>	640	especifica la anchura del fichero de imagen de bits generado por los terminales <code>png</code> y <code>jpg</code>
<code>pic_height</code>	640	especifica el largo del fichero de imagen de bits
<code>user_preamble</code>	“”	inserta código <i>Gnuplot</i>

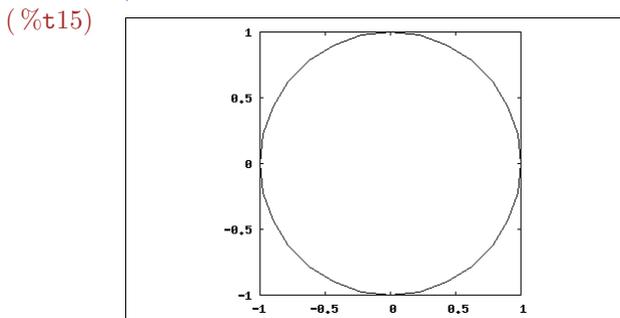
Algunas opciones globales de `draw2d`.

15.2.4 Ejemplos ilustrativos

— *Maxima* —

Aquí se usa `user_preamble` para insertar código *Gnuplot*. El resultado, en este caso, equivale a asignar el valor `xy` a la opción `proportional_axes`.

```
(%i15) wxdraw2d(
  parametric(cos(t), sin(t), t, 0, 2 * %pi),
  user_preamble = "set size ratio 1"
);
```



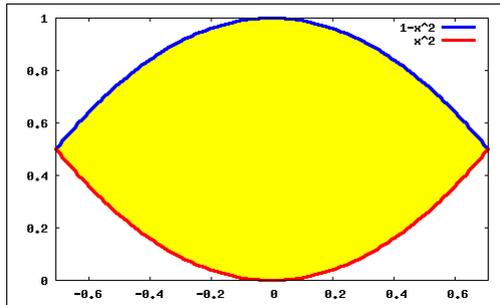
```
(%o15) [gr2d(parametric)]
```

Maxima

He aquí la región encerrada por las parábolas $y = x^2$ y $y = 1 - x^2$.

```
(%i16) wxdraw2d(
filled_func = x^2,
fill_color = yellow,
explicit(1 - x^2, x, -sqrt(2)/2, sqrt(2)/2),
filled_func = false,
line_width = 3,
key = "1 - x^2",
color = blue,
explicit(1 - x^2, x, -sqrt(2)/2, sqrt(2)/2),
key = "x^2",
color = red,
explicit(x^2, x, -sqrt(2)/2, sqrt(2)/2)
);
```

```
(%t16)
```



```
(%o16) [gr2d(explicit, explicit, explicit)]
```

Maxima

Aquí se resuelve un sistema de ecuaciones para encontrar los puntos de intersección de las curvas definidas por $x^2 + y^2 = 1$ y $y - 2x^2 + \frac{3}{2} = 0$.

```
(%i17) sol : solve([x^2 + y^2 = 1, y - 2 * x^2 + 3/2 = 0], [x, y]);
(%o17) [[ [x = -sqrt(5+5)/2^(3/2), y = (sqrt(5)-1)/4], [x = sqrt(5+5)/2^(3/2), y = (sqrt(5)-1)/4],
[ [x = -sqrt(5-sqrt(5))/2^(3/2), y = -(sqrt(5)+1)/4], [x = sqrt(5-sqrt(5))/2^(3/2), y = -(sqrt(5)+1)/4] ] ]
```

Maxima

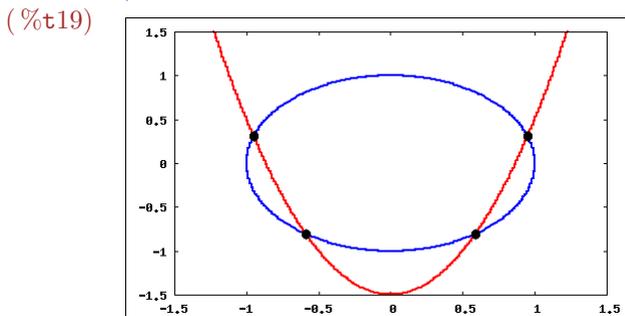
Esto almacena las coordenadas de los puntos de intersección, previamente calculados, en la variable `pts`.

```
(%i18) pts : map(lambda([h], subst(h, [x, y])), sol);
(%o18) [[[-sqrt(5+5)/2^(3/2), sqrt(5-1)/4], [sqrt(5+5)/2^(3/2), sqrt(5-1)/4], [-sqrt(5-sqrt(5))/2^(3/2), -sqrt(5+1)/4],
[ sqrt(5-sqrt(5))/2^(3/2), -sqrt(5+1)/4 ]]]
```

Maxima

He aquí un gráfico de las curvas definidas por $x^2 + y^2 = 1$ y $y - 2x^2 + \frac{3}{2} = 0$ y los respectivos puntos de intersección.

```
(%i19) wxdraw2d(
line_width = 2,
color = blue,
implicit(x^2 + y^2 = 1, x, -1.5, 1.5, y, -1.5, 1.5),
color = red,
implicit(y - 2 * x^2 + 3/2 = 0, x, -1.5, 1.5,
y, -1.5, 1.5)
color = black
point_size = 1,5,
point_type = 7,
points(pts),
);
```



```
(%o19) [gr2d(parametric)]
```

Maxima

Aquí se define la curva paramétrica \mathbf{a} .

```
(%i20) a(t) := [t, sin(t)]$
```

Maxima

Esto define el campo vectorial tangente asociado a la curva \mathbf{a} .

```
(%i21) define("a'"(t), diff(a(t), t))$
```

Maxima

Aquí se construyen la lista \mathbf{T} de vectores tangentes a la curva \mathbf{a} y la lista \mathbf{P} de puntos de aplicación de éstos. Los valores t_0 , para tal construcción, son tomados de la lista $\mathbf{t0}$.

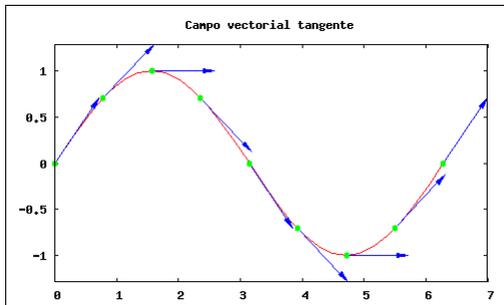
```
(%i22) t0 : create_list(i * %pi/4, i, 0, 8)$
(%i23) T : create_list(vector(a(i), "a'"(i)), i, t0)$
(%i24) P : map(a, t0)$
```

Maxima

Este gráfico muestra la curva \mathbf{a} , un conjunto de vectores unitarios tangentes a ésta y los puntos de aplicación de los mismos.

```
(%i25) wxdraw2d(
  title = "Campo vectorial tangente",
  color = red,
  parametric(t, sin(t), t, 0, 2 * %pi),
  color = blue,
  head_length = 0.2,
  head_angle = 10,
  unit_vectors = true,
  T[1], T[2], T[3], T[4], T[5], T[6], T[7], T[8], T[9],
  color = green,
  point_type = 7,
  points(P)
);
```

(%t25)



(%o25) [gr2d(parametric, vector, vector, vector, vector, vector, vector, vector, vector, vector, points)]

Maxima

A continuación se construye la lista N de vectores normales a la curva a.

(%i26) $J(v) := [-\text{last}(v), \text{first}(v)]$

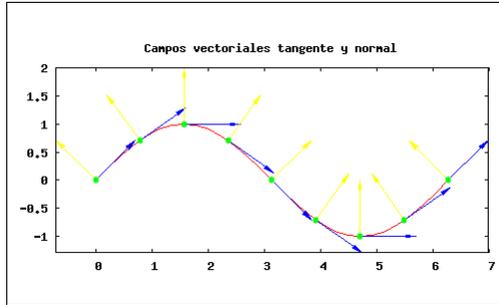
(%i27) $N : \text{create_list}(\text{vector}(a(i), J("a"(i))), i, t0)$

Maxima

Este gráfico muestra la curva a, un conjunto de vectores unitarios tangentes a la curva, un conjunto de vectores unitarios normales a la misma y los puntos de aplicación de los vectores.

(%i28) wxdraw2d(
 title = "Campos vectoriales tangente y normal",
 color = red,
 parametric(t, sin(t), t, 0, 2 * %pi),
 color = blue, head_length = 0.2, head_angle = 10,
 unit_vectors = true,
 T[1], T[2], T[3], T[4], T[5], T[6], T[7], T[8], T[9],
 color = yellow,
 N[1], N[2], N[3], N[4], N[5], N[6], N[7], N[8], N[9],
 color = green, point_type = 7,
 points(P),
 proportional_axes = xy
)\$

```
(%t28)
```

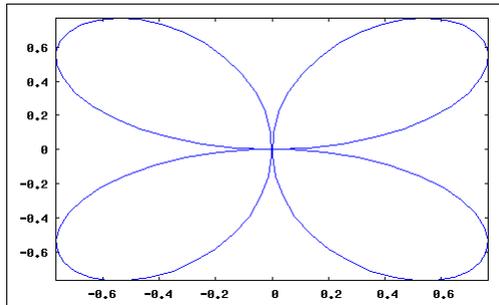


```
Maxima
```

He aquí un gráfico polar mejorado.

```
(%i29) wxdraw2d( color = blue, nticks = 100,  
polar(sin(2 * t), t, 0, 2 * %pi) );
```

```
(%t29)
```



```
(%o29) [gr2d(polar)]
```

15.3 Objetos gráficos tridimensionales

```
points([[x1, y1, z1], puntos tridimensionales  
[x2, y2, z2], ...])  
points([x1, x2, ...], puntos tridimensionales  
[y1, y2, ...], [z1, z2, ...])
```

Principales objetos gráficos tridimensionales incorporados en `draw`.

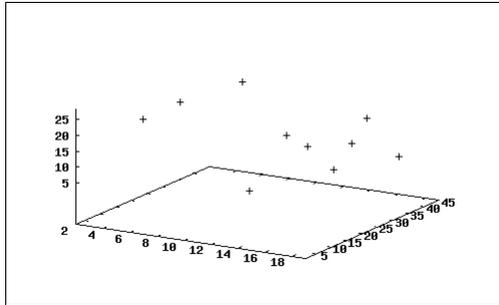
<code>points(matrix([x_1, y_1, z_1], [x_2, y_2, z_2], ...))</code>	puntos tridimensionales
<code>vector([p_1, p_2, p_3], [v_1, v_2, v_3])</code>	vector (v_1, v_2, v_3) con punto de aplicación (p_1, p_2, p_3)
<code>label([cadena, x, y, z], ...)</code>	etiquetas para gráficos tridimensionales
<code>explicit($f(x, y)$, x, x_{min}, x_{max}, y, y_{min}, y_{max})</code>	función explícita f cuyas variables satisfacen $x_{min} \leq x \leq x_{max}$ y $y_{min} \leq y \leq y_{max}$
<code>implicit($E(x, y, z)$, x, x_{min}, x_{max}, y, y_{min}, y_{max}, z, z_{min}, z_{max})</code>	expresión implícita E a ser representada en el paralelepípedo $[x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}] \times [z_{min}, z_{max}]$
<code>parametric(f_x, f_y, f_z, t, t_{min}, t_{max})</code>	curva paramétrica tridimensional, cuyo parámetro t satisface $t_{min} \leq t \leq t_{max}$
<code>parametric_surface($f_x, f_y, f_z, u, u_{min}, u_{max}$, v, v_{min}, v_{max})</code>	superficie definida paraméricamente, cuyos parámetros satisfacen $u_{min} \leq u \leq u_{max}$ y $v_{min} \leq v \leq v_{max}$
<code>cylindrical($r(z, \theta)$, z, z_{min}, z_{max}, $\theta, \theta_{min}, \theta_{max}$)</code>	función cilíndrica r cuyas variables satisfacen $z_{min} \leq z \leq z_{max}$ y $\theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{max}$
<code>spherical($r(\phi, \theta)$, $\phi, \phi_{min}, \phi_{max}$, $\theta, \theta_{min}, \theta_{max}$)</code>	función esférica r cuyas variables satisfacen $\phi_{min} \leq \phi \leq \phi_{max}$ y $\theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{max}$
<code>mesh($m, x_0, y_0, ancho, largo$)</code>	define un gráfico tridimensional de la matriz m (los valores z se toman de m , las abscisas van desde x_0 hasta $x_0 + ancho$ y las ordenadas desde y_0 hasta $y_0 + largo$)
<code>tube($f_x, f_y, f_z, f_r, t, t_{min}, t_{max}$)</code>	superficie tubular de radio f_r , generada a partir de una curva paramétrica tridimensional, cuyo parámetro t satisface $t_{min} \leq t \leq t_{max}$

Principales objetos gráficos tridimensionales incorporados en `draw`.

Maxima

Aquí se genera, en forma aleatoria, un conjunto de puntos tridimensionales. Luego se muestra la gráfica de los dichos puntos.

```
(%i30) p : create_list(map(random,[20, 50, 30]),k, 1, 10)$
(%i31) wxdraw3d( points(p) );
(%t31)
```

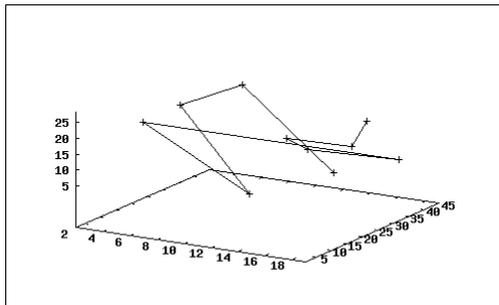


```
(%o31) [gr3d(points)]
```

Maxima

Asignando el valor `true` a la opción `plot_joined` se obtiene la poligonal que une los puntos almacenados en `p`.

```
(%i32) wxdraw3d(
points_joined = true,
points(p)
);
(%t32)
```



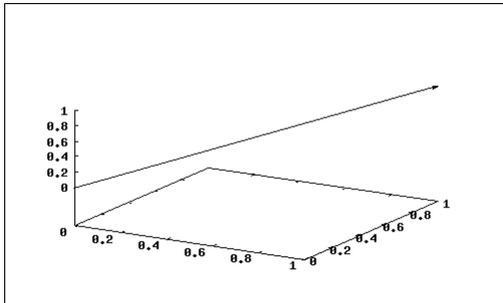
```
(%o32) [gr3d(points)]
```

Maxima

Aquí se muestra la gráfica del vector cuyo punto de aplicación es el origen y cuya parte vectorial es $(1, 1, 1)$.

```
(%i33) wxdraw3d(
vector([0, 0, 0], [1, 1, 1])
);
```

(%t33)



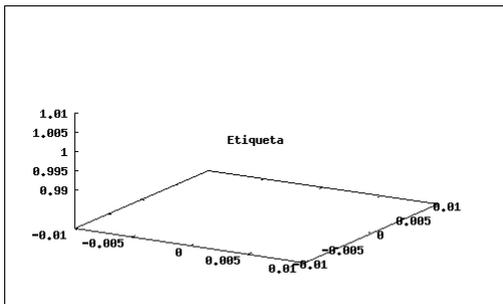
```
(%o33) [gr3d(vector)]
```

Maxima

He aquí un texto insertado en el punto $(0, 0, 1)$.

```
(%i34) wxdraw3d(
label(["Etiqueta", 0, 0, 1])
);
```

(%t34)



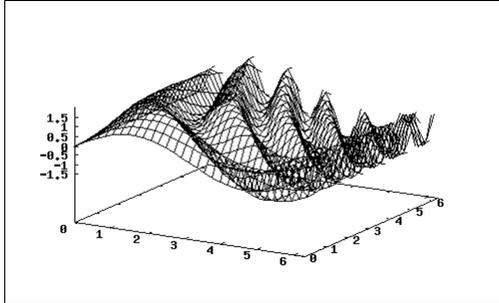
```
(%o34) [gr3d(label)]
```

Maxima

Esto muestra la gráfica de la función $(x, y) \rightarrow \sin x + \sin(xy)$, con $0 \leq x \leq 2\pi$ y $0 \leq y \leq 2\pi$.

```
(%i35) wxdraw3d(
explicit(sin(x) + sin(x*y), x, 0, 2 * %pi, y, 0, 2 * %pi)
);
```

```
(%t35)
```



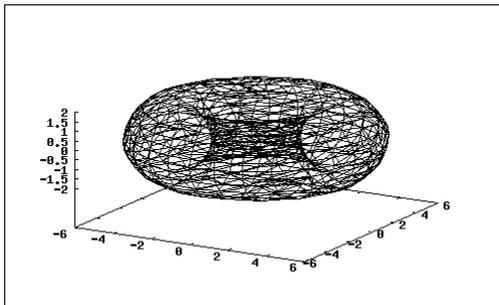
```
(%o35) [gr3d(explicit)]
```

Maxima

Aquí se muestra la gráfica de la superficie generada a partir de la ecuación $(\sqrt{x^2 + y^2} - 4)^2 + z^2 = 4$, con $-6 \leq x \leq 6$, $-6 \leq y \leq 6$ y $-2 \leq z \leq 2$.

```
(%i36) wxdraw3d(
implicit((sqrt(x^2 + y^2) - 4)^2 + z^2 = 4, x, -6, 6,
y, -6, 6, z, -2, 2) );
```

```
(%t36)
```



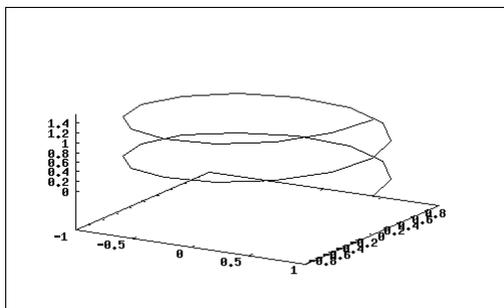
```
(%o36) [gr3d(implicit)]
```

Maxima

Esta es la gráfica de la curva $t \rightarrow (\cos t, \sin t, \frac{t}{8})$, con $0 \leq t \leq 4\pi$.

```
(%i37) wxdraw3d(
parametric(cos(t), sin(t), t/8, t, 0, 4 * %pi)
);
```

```
(%t37)
```



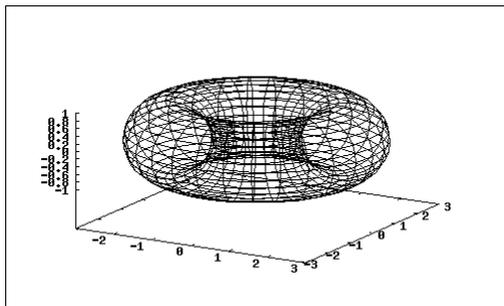
```
(%o37) [gr3d(parametric)]
```

Maxima

Aquí se muestra la gráfica de la superficie definida por $(u, v) \rightarrow ((2 + \cos v) \cos u, (2 + \cos v) \sin u, \sin v)$, con $0 \leq u \leq 2\pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$.

```
(%i38) wxdraw3d(
parametric_surface((2 + cos(v)) * cos(u),
(2 + cos(v)) * sin(u), sin(v),
u, 0, 2 * %pi, v, 0, 2 * %pi) );
```

```
(%t38)
```



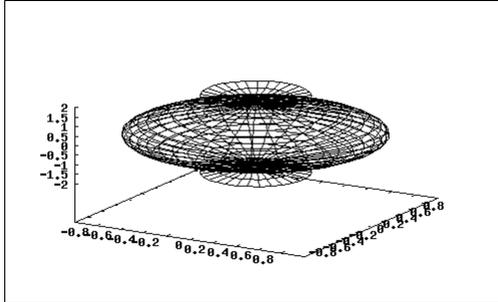
```
(%o38) [gr3d(parametric_surface)]
```

Maxima

Esta es la gráfica de la superficie definida en coordenadas cilíndricas mediante $(z, t) \rightarrow \cos z$, con $-2 \leq z \leq 2$ y $0 \leq t \leq 2\pi$.

```
(%i39) wxdraw3d(
      cylindrical(cos(z), z, -2, 2, t, 0, 2 * %pi)
      );
```

```
(%t39)
```



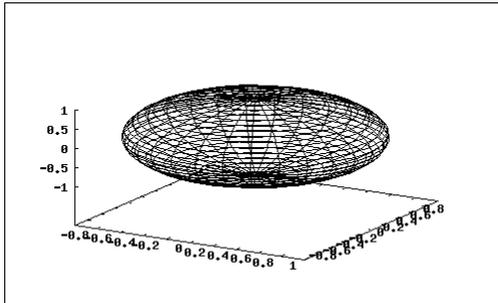
```
(%o39) [gr3d(cylindrical)]
```

Maxima

He aquí la gráfica de la superficie definida en coordenadas esféricas mediante $(a, t) \rightarrow 1$, con $0 \leq a \leq 2\pi$ y $0 \leq t \leq \pi$.

```
(%i40) wxdraw3d(
      spherical(1, a, 0, 2 * %pi, t, 0, %pi)
      );
```

```
(%t40)
```

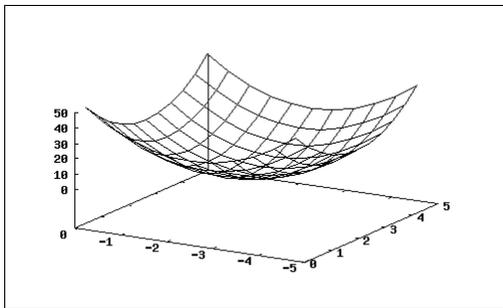


```
(%o40) [gr3d(spherical)]
```

Maxima

Esta es la gráfica de un objeto geométrico tridimensional de tipo `mesh`.

```
(%i41) m : apply(matrix, create_list(create_list(k^2 + i^2,
                                         k, -5, 5), i, -5, 5)) $
(%i41) wxdraw3d( mesh(m, 0, 0, -5, 5) );
(%t41)
```

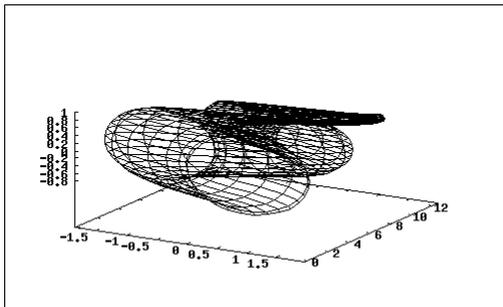


```
(%o41) [gr3d(mesh)]
```

Maxima

He aquí la gráfica de la superficie tubular, de radio $\cos\left(\frac{t}{10}\right)^2$, generada por la curva $t \rightarrow (\cos t, t, 0)$, con $0 \leq t \leq 4\pi$.

```
(%i42) wxdraw3d(
tube(cos(t), t, 0, cos(t/10)^2, t, 0, 4 * %pi)
);
(%t42)
```



```
(%o42) [gr3d(tube)]
```

15.4 Opciones para objetos gráficos tridimensionales

15.4.1 Opciones locales

Para los objetos gráficos `points` y `label` las opciones locales son las mismas en `draw2d` y `draw3d`. En cambio para el objeto gráfico `vector` las opciones `head_length` y `head_angle` únicamente son relevantes en `draw2d` (vea la subsección 15.2.1). Por este motivo, en esta sección, no se presentan tablas de opciones para los tres objetos gráficos mencionados.

<i>Opción</i>	<i>Val. por defecto</i>	<i>Descripción</i>
<code>xu_grid</code>	30	indica el número de coordenadas de x para formar la rejilla de puntos muestrales
<code>yv_grid</code>	30	indica el número de coordenadas de y para formar la rejilla de puntos muestrales

Opciones de `draw3d` para `explicit`, `parametric_surface`, `cylindrical`, `spherical` y `tube`.

<i>Opción</i>	<i>Val. por defecto</i>	<i>Descripción</i>
<code>x_voxel</code>	10	indica el número de voxels en la dirección x a utilizar por el algoritmo implementado
<code>y_voxel</code>	10	indica el número de voxels en la dirección y a utilizar por el algoritmo implementado
<code>z_voxel</code>	10	indica el número de voxels en la dirección z a utilizar por el algoritmo implementado

Opciones de `draw3d` para `implicit`.

<i>Opción</i>	<i>Val. por defecto</i>	<i>Descripción</i>
<code>nticks</code>	29	indica el número de puntos a utilizar para generar las gráficas

Opciones de `draw3d` para `parametric`.

15.4.2 Opciones locales genéricas

Vea la subsección 15.2.2.

15.4.3 Opciones globales

A excepción de la opción `proportional_axes` todas las opciones globales de `draw2d` son las mismas de `draw3d` (vea la subsección 15.2.3). Además `draw3d` incorpora opciones que complementan, de forma natural, las incorporadas en `draw2d`. Por ejemplo, están las opciones `zrange`, `logz`, `zlabel`, `zticks`, `zaxis`, `zaxis_type` y `zaxis_color`. Otras opciones se describen a continuación.

<i>Opción</i>	<i>Val. por defecto</i>	<i>Descripción</i>
<code>xyplane</code>	<code>false</code>	coloca el plano xy en escenas tridimensionales (para el valor <code>false</code> , el plano xy se coloca automáticamente; en cambio, si toma un valor real, éste intersectará con el eje z a ese nivel)
<code>rot_vertical</code>	60	indica el ángulo (en grados) de la rotación vertical (alrededor del eje x) para situar el punto del observador en las escenas tridimensionales (el ángulo debe pertenecer al intervalo $[0, 180]$)

Algunas opciones globales de `draw3d`.

<i>Opción</i>	<i>Val. por defecto</i>	<i>Descripción</i>
<code>rot_horizontal</code>	30	indica el ángulo (en grados) de la rotación horizontal (alrededor del eje z) para situar el punto del observador en las escenas tridimensionales (el ángulo debe pertenecer al intervalo $[0, 360]$)
<code>axis_3d</code>	<code>true</code>	indica si los ejes x , y y z , tradicionales, permanecerán visibles
<code>palette</code>	<code>color</code>	es un vector de longitud tres con sus componentes tomando valores enteros en el rango desde -36 a $+36$; cada valor es un índice para seleccionar una fórmula que transforma los niveles numéricos en las componentes cromáticas rojo, verde y azul (<code>palette = gray</code> y <code>palette = color</code> son atajos para <code>palette = [3,3,3]</code> y <code>palette = [7,5,15]</code> , respectivamente)
<code>enhanced3d</code>	<code>false</code>	si <code>enhanced3d</code> vale <code>true</code> , los objetos gráficos se colorearán activando el modo <code>pm3d</code> de <i>Gnuplot</i> . Si se da una expresión a <code>enhanced3d</code> (excepto en <code>implicit</code>), ésta se utilizará para asignar colores de acuerdo con el valor de <code>palette</code> ; las variables de esta expresión deben ser las mismas que luego se utilicen para la descripción de la superficie

Algunas opciones globales de `draw3d`.

<i>Opción</i>	<i>Val. por defecto</i>	<i>Descripción</i>
<code>surface_hide</code>	<code>false</code>	establece si las partes ocultas se mostrarán o no en las superficies
<code>contour</code>	<code>none</code>	permite decidir dónde colocar las líneas de nivel (valores posibles: <code>none</code> , <code>base</code> , <code>surface</code> , <code>both</code> y <code>map</code>)
<code>contour_levels</code>	<code>5</code>	controla cómo se dibujarán las líneas de nivel (valores posibles: <code>n</code> , <code>[inicio, inc, fin]</code> y <code>{n₁, n₂, ...}</code>)

Algunas opciones globales de `draw3d`.

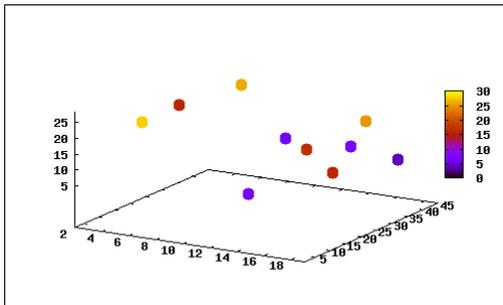
15.4.4 Ejemplos ilustrativos

— *Maxima* —

Aquí se han cambiado los valores por defecto de dos opciones de `draw3d`. El resultado se aprecia al mostrar los puntos generados en `(%i30)`.

```
(%i43) wxdraw2d(
enhanced3d = true,
point_type = 7, point_size = 2,
points(p)
);
```

(%t43)



```
(%o43) [gr3d(points)]
```

Maxima

Esto define una curva, algunos puntos sobre ésta y algunos vectores tangentes a la misma.

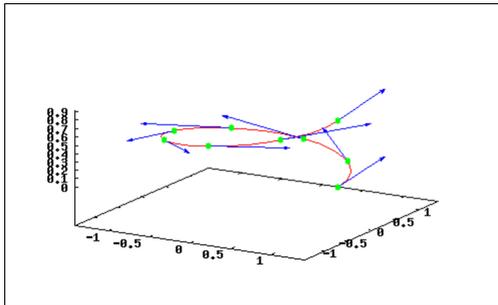
```
(%i44) a(t) := [cos(t), sin(t), t/8] $
(%i45) define("a'"(t), diff(a(t), t)) $
(%i46) t0 : create_list(i * %pi/4, i, 0, 8) $
(%i47) T : create_list(vector(a(i), "a'"(i)), i, t0) $
(%i48) P : map(a, t0) $
```

Maxima

He aquí la gráfica de todos los objetos gráficos tridimensionales previamente definidos.

```
(%i49) wxdraw3d(
color = red,
parametric(t, sin(t), t/8, t, 0, 2 * %pi),
color = blue,
head_angle = 10,
unit_vectors = true,
T[1], T[2], T[3], T[4], T[5], T[6], T[7], T[8], T[9],
color = green,
point_type = 7,
points(P)
);
```

(%t49)



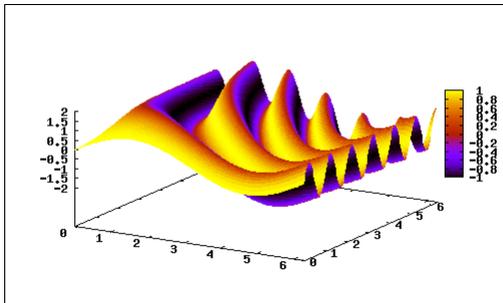
```
(%o49) [gr3d(parametric, vector, vector, vector, vector,
vector, vector, vector, vector, vector, points)]
```

Maxima

Esta es la gráfica de (%t35) después de cambiar algunas opciones.

```
(%i50) wxdraw3d( xu_grid = 150, yv_grid = 150,
enhanced3d = cos(x * y),
explicit(sin(x) + sin(x * y), x, 0, 2 * %pi, y, 0, 2 * %pi)
);
```

(%t50)



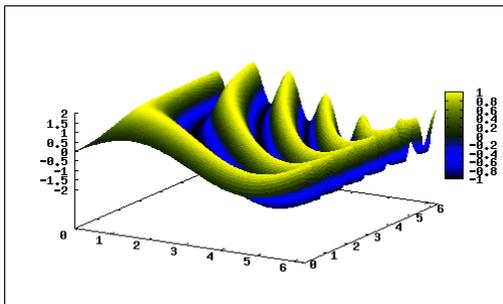
```
(%o50) [gr3d(explicit)]
```

Maxima

Esta es la gráfica de (%t35) después de más cambios de opciones.

```
(%i51) wxdraw3d( xu_grid = 150, yv_grid = 150,
palette = [6, 5, 15], enhanced3d = sin(x * y),
explicit(sin(x) + sin(x * y), x, 0, 2 * %pi, y, 0, 2 * %pi)
);
```

(%t51)



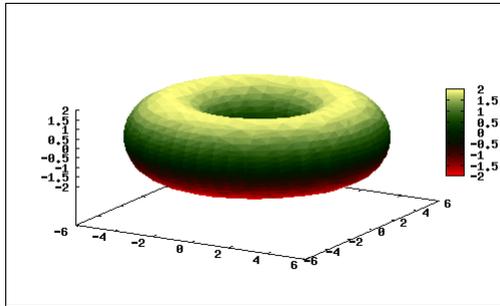
```
(%o51) [gr3d(explicit)]
```

Maxima

He aquí la superficie obtenida en (%t36) .

```
(%i52) wxdraw3d(
x_voxel = 17,
y_voxel = 17,
z_voxel = 15,
palette = [12, 5, 27],
enhanced3d = true,
implicit((sqrt(x^2 + y^2) - 4)^2 + z^2 = 4, x, -6, 6,
y, -6, 6, z, -2, 2)
);
```

(%t52)



(%o52) [gr3d(implicit)]

15.5 Fijación de valores para opciones

En algunas ocasiones se requiere dibujar varios gráficos con las mismas opciones y para evitar escribirlas en cada escena puede optarse por fijar, inicialmente, los valores deseados para dichas opciones. Para hacer factible esto `draw` cuenta con una función específica.

<pre>set_draw_defaults(opción gráfica, . . . , opción gráfica, . . .)</pre>	fija los valores para las opciones gráficas del usuario (llamando a la función sin argumentos se borran las opciones fijadas por el usuario)
-----------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Fijando valores para opciones.

Maxima

Aquí se fijan los valores de algunas opciones.

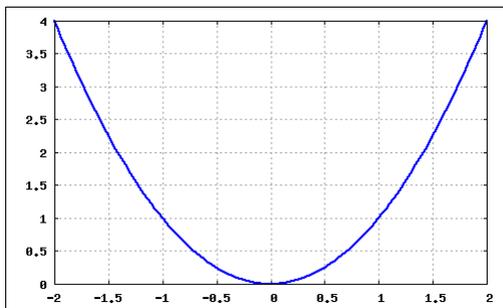
```
(%i53) set_draw_defaults(
        surface_hide = true,
        color = blue,
        grid = true,
        line_width = 2
    );
```

Maxima

A continuación se grafica una parábola sin especificaciones para ninguna opción.

```
(%i54) wxdraw2d(
        explicit(x^2, x, -2, 2)
    );
```

(%t54)



```
(%o54) [gr2d(explicit)]
```

15.6 Gráficos múltiples

<i>Opción</i>	<i>Val. por defecto</i>	<i>Descripción</i>
<code>columns</code>	1	indica el número de columnas a considerar cuando se realizan gráficos múltiples

Opción para gráficos múltiples.

Maxima

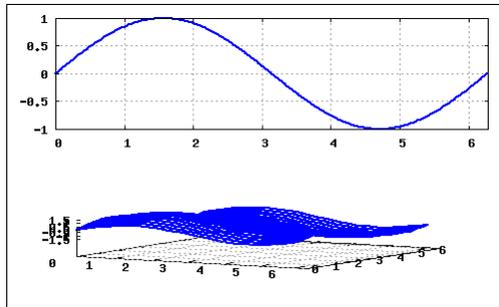
Esto define dos escenas una bidimensional y otra tridimensional.

```
(%i55) f1: gr2d(explicit(sin(x), x, 0, 2 * %pi)) $
(%i56) f2: gr3d(explicit(sin(x) + sin(y), x, 0, 2 * %pi,
y, 0, 2 * %pi)) $
```

Maxima

Con `draw` la dos escenas previas se presentan por defecto en una sola columna.

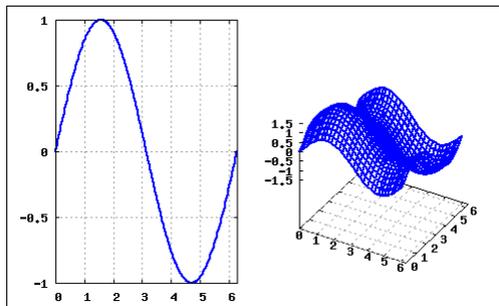
```
(%i57) wxdraw(f1, f2) $
(%t57)
```



Maxima

Con la opción `columns` es posible cambiar el número de columnas.

```
(%i58) wxdraw(f1, f2, columns = 2) $
(%t58)
```



Maxima

De esta manera se borran las opciones que fueron fijadas en `(%i51)`.

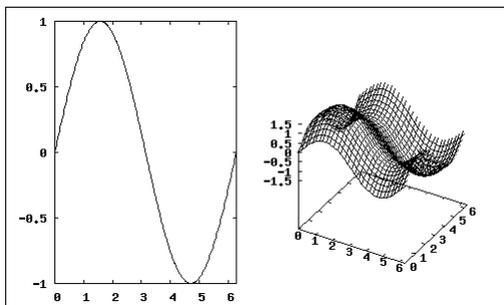
```
(%i59) set_draw_defaults()$
```

Maxima

El aspecto de las gráficas luce ahora diferente, pues se han restituido los valores por defecto de las opciones.

```
(%i60) wxdraw(f1,f2,columns = 2)$
```

```
(%t60)
```



15.7 Gráficos animados

Del mismo modo que en la sección 14.8 se pueden crear animaciones únicamente en el entorno de *wxMaxima*. En este caso se utilizan las funciones `with_slider_draw` y `with_slider_draw3d` con las cuales se generan gráficos idénticos a los que se generan con `wxplot2d` y `wxplot3d`, respectivamente, sin embargo tales gráficos pueden ser animados después de seleccionarlos y pulsar, luego, el botón Comenzar animación, del cuadro de controles, de la barra de herramientas.

Maxima

Cuadro de controles, ubicado en la barra de herramientas, para la animación de gráficos.



<code>with_slider_draw</code>	función para animar gráficos de <code>wxdraw2d</code>
<code>with_slider_draw3d</code>	función para animar gráficos de <code>wxdraw3d</code>

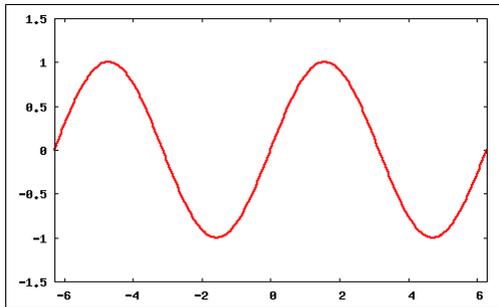
Obtención de gráficos animados con `draw`.

Maxima

Esto genera un gráfico listo para ser animado. Para conseguir la animación primero se selecciona el gráfico y luego se pulsa el botón , del cuadro de controles, y automáticamente ésta es generada. Para detenerla basta pulsar el botón , del mismo cuadro. También es posible navegar a través de cada cuadro de la animación con tan sólo arrastrar a voluntad el botón , después de haber seleccionado el gráfico.

```
(%i61) with_slider_draw(
a, [0, 1, 2, 3, 4, 5],
color = red, line_width = 2, yrange = [-1.5, 1.5],
explicit(sin(x + a), x, -2 * %pi, 2 * %pi)
);
```

(%t61)



(%o61)

Maxima

A continuación se define la función infija `"/**"` para calcular el producto vectorial.

```
(%i62) infix("/ **") $
(%i63) "/ **"(a, b) := [a[2] * b[3] - b[2] * a[3],
b[1] * a[3] - a[1] * b[3], a[1] * b[2] - b[1] * a[2]] $
```

Maxima

Esto define la curva \mathbf{a} , su primera derivada y su segunda derivada.

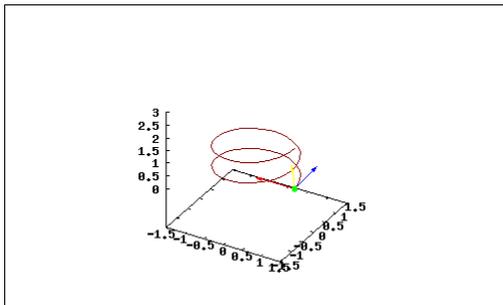
```
(%i64) a(t) := [cos(t), sin(t), t/8] $
(%i65) define("a'"(t), diff(a(t), t)) $
(%i66) define("a''"(t), diff(a(t), t, 2)) $
```

Maxima

Al animar la siguiente secuencia de cuadros se visualiza el triedro de Frenet recorriendo la curva \mathbf{a} .

```
(%i67) with_slider_draw3d(
t, create_list(i * %pi/4, i, 0, 16),
color = dark - red, nticks = 50,
parametric(cos(u), sin(u), u/8, u, 0, 4 * %pi),
unit_vectors = true,
color = blue,
vector(a(t), "a'"(t)),
color = yellow,
vector(a(t), "a'"(t) / "a''"(t)),
color = red,
vector(a(t), ("a'"(t) / "a''"(t)) / "a'"(t)),
color = green, point_type = 7,
points([a(t)]),
xrange = [-1.5, 1.5], yrange = [-1.5, 1.5],
zrange = [0, 3],
user_preamble = "set size ratio 1");
```

(%t67)



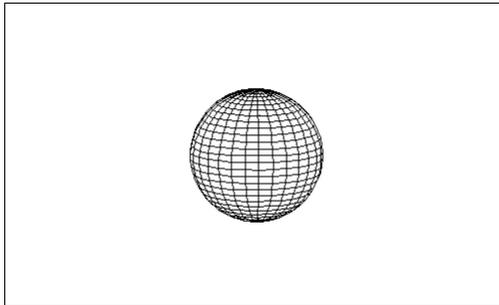
(%o67)

Maxima

Esta es la animación de un morfismo entre la esfera y el toro.

```
(%i68) with_slider_draw3d(
a, create_list(i/8, i, 0, 8),
surface_hide = true,
user_preamble = "set size ratio 1",
xtics = false, ytics = false, ztics = false,
axis_3d = false,
rot_vertical = 80, rot_horizontal = 100,
parametric_surface(
(1 - a) * cos(t) * sin(u/2) - (a * sin(u))/3,
(a * sin(t) * (2 - cos(u)))/3 +
(1 - a) * sin(t) * sin(u/2),
(a * cos(t) * (2 - cos(u)))/3 + (1 - a) * cos(u/2),
t, 0, 2 * %pi, u, 0, 2 * %pi)
);
```

(%t68)



(%o68)

Capítulo 16

Archivos y operaciones externas

16.1 Generación de expresiones y archivos T_EX

Si el usuario quiere combinar su trabajo con material existente en T_EX, puede encontrar conveniente usar la función `tex` para convertir expresiones de *Maxima* en forma conveniente de entrada para T_EX. El resultado que así se obtiene es un fragmento de código que puede incluirse en un documento mayor, pero que no puede ser procesado aisladamente.

<code>tex(expr)</code>	imprime en la consola la representación en T _E X de <i>expr</i>
<code>tex(expr, false)</code>	devuelven el código T _E X en formato de cadena
<code>tex(expr, destino)</code>	añade la salida al archivo <i>destino</i>

Salidas de *Maxima* para T_EX

— *Maxima* —

He aquí una expresión, impresa en forma estándar de *Maxima*.

```
(%i1) (x + y)^2/sqrt(x * y);  
(%o1) 
$$\frac{(y + x)^2}{\sqrt{x y}}$$

```

— *Maxima* —

He aquí la expresión previa en forma de entrada para T_EX.

```
(%i2) tex(%);
$${{\left(y+x\right)^2}\over{\sqrt{x\,y}}}\$
(%o2) false
```

— *Maxima* —

Esto añade la expresión $\frac{(y+x)^2}{\sqrt{xy}}$, traducida a T_EX, al archivo `ejemplo.tex` ubicado en `d:/maximatex/`.

```
(%i3) tex((x+y)^2/sqrt(x*y),
         "d:/maximatex/ejemplo.tex");
(%o3) false
```

<code>texput(a,f)</code>	establece el formato, en T _E X, del átomo <i>a</i> , el cual puede ser un símbolo o el nombre de un operador
<code>get_tex_environment(op)</code>	devuelve el entorno T _E X que se aplica al operador <i>op</i> . Si no se ha asignado ningún entorno, devolverá el que tenga por defecto
<code>set_tex_environment(op,antes,después)</code>	asigna el entorno T _E X al operador <i>op</i>
<code>get_tex_environment_default()</code>	devuelve el entorno T _E X que se aplica a expresiones para las cuales el operador de mayor rango no tiene entorno T _E X asignado
<code>set_tex_environment_default(antes,después)</code>	asigna el entorno T _E X por defecto

Salidas de *Maxima* para T_EX

Maxima

De esta forma se asigna código T_EX para una variable.

```
(%i4) texput(s,“\sqrt{2}”);
(%o4) \sqrt{2}
```

Maxima

Ahora puede usarse la asignación anterior para generar más código T_EX.

```
(%i5) tex(s + 1/2);
$$\sqrt{2}+{(1)\over{2}}$$
(%o5) false
```

Maxima

El entorno T_EX aplicado, por defecto, a expresiones, en *Maxima*, es \$\$ \$\$.

```
(%i6) tex(3/4);
$${{3}\over{4}}$$
(%o6) false
```

Maxima

Con la función `set_tex_environment_default` es posible cambiar el entorno T_EX. En este caso se ha anulado todo entorno.

```
(%i7) set_tex_environment_default(“ “, ” ”);
(%o7) [ ]
```

Maxima

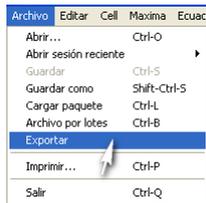
He aquí el resultado del nuevo código T_EX.

```
(%i8) tex(3/4);
{{3}\over{4}}
(%o8) false
```

Además de traducir expresiones individuales a T_EX, *Maxima* también traduce cuadernos completos a documentos pdf L^AT_EX. Para ello el usuario debe digitar el nombre que asignará al archivo resultante, así como la respectiva extensión, `tex`, en la casilla Nombre de la ventana Exportar que aparece después de elegir la opción Exportar del menú Archivo.

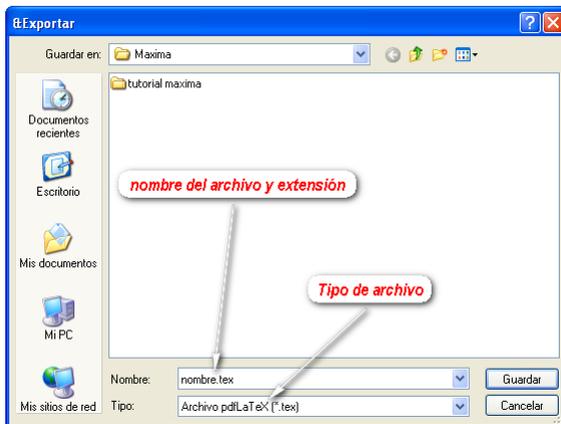
— *Maxima* —

Primer paso para exportar un cuaderno.



— *Maxima* —

Exportando un cuaderno como documento pdf L^AT_EX



16.2 Generación de archivos HTML

Adicionalmente, *Maxima* brinda capacidades para convertir cuadernos completos a páginas web. El proceso que debe seguirse para la traducción es el mismo que se siguió en la página 227, pero en este caso la extensión será `html`.

16.3 Generación de expresiones Lisp y Fortran

Si el usuario tiene programas escritos en Lisp o Fortran, puede ser que quiera tomar fórmulas que ha generado en *Maxima* e insertarlas en el código original de sus programas. *Maxima* permite convertir expresiones matemáticas en expresiones Lisp y Fortran.

<pre> :lisp \$%in escribe para Lisp la expresión a la que hace referencia la etiqueta %in fortran(expr) escribe expr para Fortran </pre>

Salidas de *Maxima* para Lisp y Fortran.

— *Maxima* —

Aquí se obtienen expresiones para Lisp y Fortran.

```

(%i9)  x^2 + 2 * x + 1;
(%o9)  x2 + 2x + 1
(%i10) :lisp $%i7;
((MPLUS) ((MEXPT) $X 2) ((MTIMES) 2 $X) 1)
(%i11) fortran(x^2 + 2 * x + 1);
      x * *2 + 2 * x + 1
(%o11) done

```

Capítulo 17

Programación con *Maxima*

La elaboración de programas con el lenguaje de programación de *Maxima* permite al usuario definir sus propias funciones. De esta manera se hace posible la automatización de secuencias de operaciones que son útiles para abordar la solución de un determinado tipo de problema.

Además, es posible implementar varias funciones, relacionadas con cierto tema, y guardarlas en un solo archivo que luego se pueda ejecutar sin necesidad de visualizar todo el código elaborado. A tal archivo se le conoce como *paquete*¹ de funciones.

17.1 Operadores relacionales y lógicos

De manera similar que cualquier lenguaje de programación *Maxima* incluye operadores relacionales y lógicos, así como estructuras de control (que se utilizan para controlar el flujo del programa en una rutina).

En *Maxima*, los operadores lógicos pueden ser *infijos* o *prefijos*. Un operador recibe el nombre de infijo cuando éste debe escribirse entre los operandos, por ejemplo el operador `and` cuya sintaxis es *p and q*, para ciertos operandos *p* y *q*. Por otra parte, un operador prefijo es

¹Del inglés *package*. Un paquete es almacenado en forma automática por *Maxima* como archivo de extensión `lisp` y el código es convertido internamente al lenguaje de programación `Lisp`.

aquel que debe escribirse antes del operando, por ejemplo el operador **not** cuya sintaxis es **not** *p*, para cierto operando *p*.

Cabe destacar que, en *Maxima*, casi todos los operadores lógicos son infijos y únicamente hay un operador lógico prefijo.

<i>Operador</i>	<i>Símbolo</i>	<i>Tipo</i>
menor que	<	operador relacional infijo
menor o igual que	<=	operador relacional infijo
igualdad (sintáctica)	=	operador relacional infijo
negación de =	#	operador relacional infijo
igualdad (por valor)	equal	operador relacional infijo
negación de equal	notequal	operador relacional infijo
mayor o igual que	>=	operador relacional infijo
mayor que	>	operador relacional infijo
y	and	operador lógico infijo
o	or	operador lógico infijo
no	not	operador lógico prefijo

Operadores relacionales y lógicos.

<i>Controlador</i>	<i>Descripción</i>
if	permite, mediante una condición, que se ejecute o no se ejecute determinada tarea o línea de código
for	es utilizado para generar una repetición de instrucciones entre un número inicial y un número final que deben ser indicados o, también, entre un conjunto de elementos de una lista
while	repetirá sin detenerse un determinado código mientras se cumpla una condición
unless	repetirá sin detenerse un determinado código hasta que se cumpla una condición
do	se utiliza para realizar iteraciones con for , while y unless

Principales estructuras de control.

Maxima

He aquí un ejemplo sencillo en el que se muestra la sintaxis de `if`.

```
(%i1)  if 2 = 3 then 1;
(%o1)  false
(%i2)  if 3 = 3 then 1;
(%o2)  1
```

Maxima

En este ejemplo se añade el resultado ha obtener en caso de que la condición sea falsa.

```
(%i3)  if 2 = 3 then 1 else 3;
(%o3)  3
```

Téngase en cuenta que las expresiones consideradas en los ejemplos de las entradas `(%i1)` y `(%i2)` equivalen a las expresiones:

`if 2 = 3 then 1 else false` y `if 3 = 3 then 1 else false`, respectivamente.

Maxima

Aquí se obtiene el valor ligado a la expresión verdadera más próxima (en este caso `3 = 3`). Si todas las expresiones fuesen falsas, entonces se obtendría el último valor (en este caso `4`).

```
(%i4)  if 2 = 3 then 1 elseif 3 = 3 then 5 else 4;
(%o4)  5
```

Maxima

Mediante este otro ejemplo se muestra la sintaxis de `for`.

```
(%i5)  for i : 1 thru 5 step 2 do print(i);
1
3
5
(%o5)  done
```

Maxima

Si no se indica el paso (incremento) se asume uno, por defecto.

```
(%i6) for i : 1 thru 5 do print(i);
1
2
3
(%o6) done
```

Maxima

Para inicializar el contador en `while` se utiliza `for`.

```
(%i7) for i : 1 while i <= 3 do print(i);
1
2
3
(%o7) done
```

Maxima

Para inicializar el contador en `unless` también se utiliza `for`.

```
(%i8) for i : 1 unless i >= 4 do print(i);
1
2
3
(%o8) done
```

17.2 Operadores y argumentos

Casi todo en *Maxima* es un objeto de la forma

$$\mathbf{fun}(a_1, \dots, a_n),$$

es decir, una expresión que comprende un operador como **fun** y los argumentos de éste, a_1, \dots, a_n . Las funciones `op` y `args` permiten averiguar la estructura de las expresiones.

<code>op(<i>expr</i>)</code>	permite obtener el operador de la expresión <i>expr</i>
<code>args(<i>expr</i>)</code>	permite obtener una lista cuyos elementos son los argumentos de la expresión <i>expr</i>

Obtención del operador y de los argumentos de una expresión.

— *Maxima* —

Aquí se define la expresión $a + b$, la cual es almacenada en la variable `expr`.

```
(%i9) expr : a + b;
(%o9) b + a
```

— *Maxima* —

A continuación, con la primera operación se obtiene el operador de la expresión previamente definida; y en la segunda, se obtiene una lista con los argumentos de dicha expresión.

```
(%i10) op(expr);
(%o10) +
(%i11) args(expr);
(%o11) [b, a]
```

— *Maxima* —

Es posible “reconstruir” la expresión usando la función `apply`.

```
(%i12) apply(op(expr), args(expr));
(%o12) b + a
```

— *Maxima* —

Esto define otra expresión.

```
(%i13) expr : ejemplo(x, y, z);
(%o13) ejemplo(x, y, z)
```

Maxima

Aquí, nuevamente, se obtienen el operador y los argumentos de la expresión.

```
(%i14) op(expr);
(%o14) ejemplo
(%i15) args(expr);
(%o15) [x, y, z]
```

Maxima

También es posible “reconstruir” la última expresión usando la función `apply`.

```
(%i16) apply(op(expr), args(expr));
(%o16) ejemplo(x, y, z)
```

Maxima

Algunas expresiones (`plot2d`, `integrate`, etc.) requieren de una comilla simple.

```
(%i17) expr : 'plot2d(x^2, [x, -1, 1]);
(%o17) plot2d(x^2, [x, -1, 1])
```

Maxima

Ahora si es posible obtener el operador y los argumentos de la expresión.

```
(%i18) op(expr);
(%o18) plot2d
(%i19) args(expr);
(%o19) [x^2, [x, -1, 1]]
```

Maxima

También las listas y los conjuntos son objetos de la forma `fun(a1, ..., an)`. Aquí se almacena una lista cualquiera en la variable `expr`.

```
(%i20) expr : [a, b, c, d];
(%o20) [a, b, c, d]
```

— *Maxima* —

Del mismo modo que en los ejemplos anteriores se obtienen el operador y una lista con los argumentos.

```
(%i21) op(expr);
(%o21) [
(%i22) args(expr);
(%o22) [a, b, c, d]
```

17.3 Programación funcional

La *programación funcional* es la programación que pone énfasis en el uso de funciones. *Maxima* incluye las funciones predefinidas `apply`, `map`, `lambda` que permiten apreciar la potencia de la programación funcional.

<code>apply(f, [expr₁, ..., expr_n])</code>	construye y evalúa la expresión $f(arg_1, \dots, arg_n)$
<code>map(f, expr₁, ..., expr_n)</code>	devuelve una expresión cuyo operador principal es el mismo que aparece en las expresiones $expr_1, \dots, expr_n$ pero cuyas subpartes son los resultados de aplicar f a cada una de las subpartes de las expresiones
<code>lambda([x₁, ..., x_m], expr₁, ..., expr_n)</code>	define y devuelve una expresión lambda (es decir, una función anónima) con argumentos x_1, \dots, x_m ; la cual devuelve el valor $expr_n$
<code>lambda([[L]], expr₁, ..., expr_n)</code>	define y devuelve una expresión lambda con argumento opcional L ; la cual devuelve el valor $expr_n$
<code>lambda([x₁, ..., x_m, [L]], expr₁, ..., expr_n)</code>	define y devuelve una expresión lambda con argumentos x_1, \dots, x_m , argumento opcional L ; la cual devuelve el valor $expr_n$

Funciones predefinidas para programación funcional.

Maxima

Aquí se define la función G , la cual es aplicada luego a una lista cuyos elementos pasan a ser los argumentos de G .

```
(%i23) G(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 $
(%i24) apply(G, [x - y, a + b, u]);
(%o24) (x - y)^2 + u^2 + (b + a)^2
```

Maxima

En este caso se aplica la función predefinida `min`.

```
(%i25) apply(min, [7, 9, 3, 4]);
(%o25) 3
```

Maxima

Esto define la función F y luego la mapea en una lista.

```
(%i26) F(x) := x^3 - 1 $
(%i27) map(F, [2, 3, 5, a]);
(%o27) [7, 26, 124, a^3 - 1]
```

Maxima

Aquí se muestra la definición de una función lambda f , la misma que posee dos argumentos.

```
(%i28) f : lambda([x, y], x + y) $
(%i29) f(a, b);
(%o29) b + a
```

Maxima

Ahora se define una función lambda con argumento opcional.

```
(%i30) f : lambda([ [x] ], x^2) $
(%i31) f(p);
(%o31) [p^2]
```

```
(%i32) f(p,q,r,s,t);
(%o32) [p2,q2,r2,s2,t2]
```

— *Maxima* —

En este ejemplo se define una función lambda con dos argumentos y un argumento opcional. Luego esta función es evaluada en tres argumentos y se obtiene una lista con el resultado esperado, no obstante al evaluar la función en más argumentos se obtiene una lista con tantos elementos como argumentos adicionales hay.

```
(%i33) f : lambda([ x,y, [z] ], x * z + y) $
(%i34) f(p,q,r);
(%o34) [p r + q]
(%i35) f(p,q,r,s,t,u,v,w);
(%o35) [p r + q,p s + q,p t + q,p u + q,p v + q,p w + q]
```

17.4 Implementación del paquete: ejemplo

En esta sección se implementará el paquete `ejemplo`, que incorporará las funciones `triangulo` y `circunferencia`.

— *Maxima* —

Aquí se define la función `triangulo`. Esta función permite calcular el área de un triángulo y el baricentro de un conjunto de puntos de \mathbb{R}^2 , dados. Además, si los puntos son colineales, devuelve el mensaje: *Los puntos son colineales*.

```
(%i36) triangulo(pts) :=
block([f : lambda([h], endcons(1,h)), pts1,M,d,a],
  pts1 : map(f,pts),
  M : apply(matrix,pts1),
  d : determinant(M),
  a : abs(d/2),
  if d = 0 then string("Los puntos son colineales")
  else
    (b : apply("+",pts)/3,
     [sconcat(Area," : ",a," ",u^2),
      sconcat(Baricentro," : ",b)])
) $
```

Maxima

Dado el conjunto de puntos del plano $\{(1, 2), (3, -1), (2, 3)\}$, no colineales, la función `triangulo` devuelve el área y las coordenadas del baricentro del triángulo definido por los puntos dados.

```
(%i37) p : [ [1, 2], [3, -1], [2, 3] ] $
(%i38) triangulo(p);
(%o38) [ Area : 5/2 u^2, Baricentro : [2, 4/3] ]
```

Maxima

Para visualizar los gráficos se utilizará el paquete `draw`.

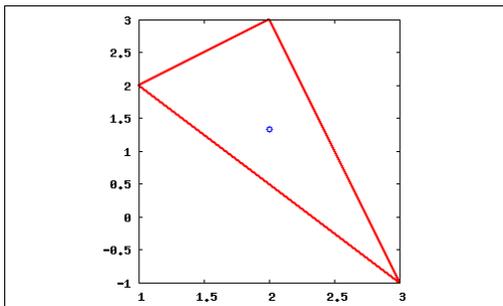
```
(%i39) load(draw) $
```

Maxima

Esto muestra la gráfica del triángulo previamente analizado, conjuntamente con el punto que corresponde al baricentro del mismo.

```
(%i40) wxdraw2d(
color = red, fill_color = white, line_width = 2,
polygon(p),
point_type = 6, color = blue,
points([ [2, 4/3] ]),
user_preamble = "set size ratio 1"
);
```

```
(%t40)
```



```
(%o40) [gr2d(polygon,points)]
```

Maxima

Puesto que, en este caso, los puntos del conjunto $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ son colineales, la función `triangulo` devuelve un mensaje indicando éste hecho.

```
(%i41) p : [ [1, 1], [2, 2], [3, 3] ] $
(%i42) triangulo(p);
(%o42) “Los puntos son colineales”
```

Maxima

Aquí se define la función `circunferencia` que permite obtener la ecuación de la circunferencia definida por tres puntos dados.

```
(%i43) circunferencia(pts) :=
block([f : lambda([h], endcons(1, h)),
      g : lambda([h], cons(h[1]^2 + h[2]^2, h)),
      pts1, M, d, eq],
      pts1 : map(f, pts),
      M : apply(matrix, pts1),
      d : determinant(M),
      if d = 0 then string(“Los puntos son colineales”)
      else
        (aux : map(g, cons([x, y, 1], pts1)),
         M : apply(matrix, aux),
         d : determinant(M),
         eq : expand(d),
         expand(eq/coeff(eq, x^2) = 0)
        )
      ) $
```

Maxima

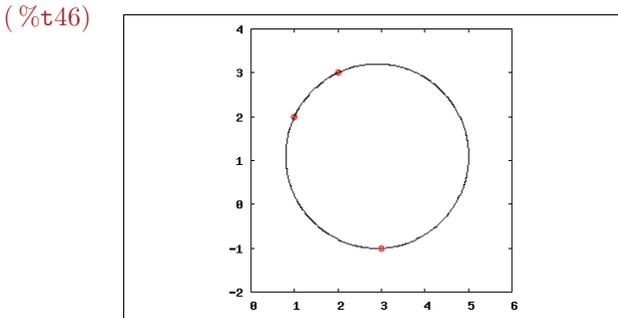
Dado el conjunto de puntos del plano $\{(1, 2), (3, -1), (2, 3)\}$, no colineales, la función `circunferencia` devuelve la ecuación de la circunferencia definida por estos puntos.

```
(%i44) p : [ [1, 2], [3, -1], [2, 3] ] $
(%i45) circunferencia(p);
(%o45)  $y^2 - \frac{11y}{5} + x^2 - \frac{29x}{5} + \frac{26}{5} = 0$ 
```

Maxima

Esto muestra la gráfica de la circunferencia previamente analizada, conjuntamente con los puntos que la definen.

```
(%i46) wxdraw2d(
  implicit(circunferencia(p), x, 0, 6, y, -2, 4),
  point_type = 6, color = red, point_size = 1,
  points(p),
  user_preamble = "set size ratio 1" );
```



```
(%o46) [gr2d(polygon,points)]
```

Maxima

Igual que con la función `triangulo`, para el conjunto de puntos del plano $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$, la función `circunferencia` devuelve un mensaje indicando que éstos son colineales.

```
(%i47) p : [ [1, 1], [2, 2], [3, 3] ] $
(%i48) circunferencia(p);
(%o48) "Los puntos son colineales"
```

Hasta aquí se han definido, y se ha verificado el correcto funcionamiento de, las funciones `triangulo` y `circunferencia`. Seguidamente se guardará la definición de estas funciones en un fichero de nombre *ejemplo* y de extensión *lisp*, el cual constituirá un ejemplo de un paquete de funciones definido por el usuario.

Naturalmente, si el usuario desea puede copiar solamente la definición de las citadas funciones y luego guardarlas sin necesidad de

copiar y ejecutar los ejemplos.

```

┌── Maxima ───────────────────────────────────────────────────────────────────────────────────┐
Esto guarda todas las funciones definidas por el usuario en el archivo ejemplo.lisp.
El directorio donde se guardará el fichero es indicado por el usuario, en este caso
éste es: d:/maximapackages.

```

```

(%i49) save("d:/maximapackages/ejemplo.lisp",
          functions) $

```

Una vez que se ha guardado la definición de las funciones en el mencionado fichero es posible inicializarlo como si se tratara de cualquier paquete incorporado en *Maxima*.

En este caso se asume que el usuario ha cerrado el cuaderno de trabajo actual de *Maxima* y luego ha abierto un nuevo cuaderno desde el cual inicializará el paquete `ejemplo.lisp`.

```

┌── Maxima ───────────────────────────────────────────────────────────────────────────────────┐
Esto inicializa el paquete ejemplo.lisp desde el directorio en el que se guardó.

```

```

(%i1) load("d:/maximapackages/ejemplo.lisp") $

```

```

┌── Maxima ───────────────────────────────────────────────────────────────────────────────────┐
Ahora es posible ejecutar cualquiera de las funciones incorporadas en el paquete
ejemplo.lisp sin necesidad de exponer el código del mismo.

```

```

(%i2) p : [ [0, 0], [2, 0], [1, sqrt(3)] ] $
(%i3) triangulo(p);
(%o3) [ Area : sqrt(3) u^2, Baricentro : [1, 1/sqrt(3)] ]

```

Bibliografía

- [1] Fokker, J. PROGRAMACIÓN FUNCIONAL. <http://people.cs.uu.nl/jeroen/courses/fpsp.pdf> (1996).
- [2] Rodríguez, J. R. MAXIMA CON WXMAXIMA: SOFTWARE LIBRE EN EL AULA DE MATEMÁTICAS. <http://knuth.uca.es/repos/maxima> (2007).
- [3] Rodríguez, M. y Villate, J. MANUAL DE MAXIMA ver. 5.18. <http://maxima.sourceforge.net/es/documentation.html> (2009).
- [4] Rodríguez, M. PRIMEROS PASOS EN MAXIMA. www.telefonica.net/web2/biomates/maxima/max.pdf (2008).
- [5] Rodríguez, M. SOFTWARE MATEMÁTICO BÁSICO: MAXIMA. www.telefonica.net/web2/biomates/maxima/i-math.pdf (2008).
- [6] Rodríguez, M. MAXIMA: UNA HERRAMIENTA DE CÁLCULO. <http://softwarelibre.uca.es/cursos/maxima/cadiz.pdf> (2006).