# RESOLUCIÓN MODELO DESCENTRALIZADO

**Contenido**

## A1. Resolución Modelo Descentralizado

## A.2 Consumidores:

$$
\begin{gathered}
Max \quad \beta \ln c_{1_t} + \gamma \ln(a_t + A_t^{com}) + (1+\theta)^{(-1)}\left(\beta \ln c_{2_{(t+1)}} + \gamma \ln\left(a_{(t+1)} + A_{(t+1)}^{com}\right)\right) \\
s.a \quad c_{1_t} + s_t + m_t = w_t \\
c_{2_{(t+1)}} = \left(1 + r_{(t+1)}\right) s_t \\
A_{(t+1)} = (1-b)A_t + b\bar{A} - P_t + \omega M_t \\
A_t = a_t + A_t^{com} \\
u'_A > 0;\ u''_A < 0 \\
u'_c > 0;\ u''_c < 0;\ \lim_{c \to \infty} u'_c = \infty
\end{gathered}
$$

El problema del consumidor queda totalmente definido con el siguiente lagranjiano:

$$
\mathcal{L} = \left[\beta \ln c_{1t} + \gamma \ln(a_t + A_t^{com}) + (1+\theta)^{(-1)}\left(\beta \ln c_{2_{(t+1)}} + \gamma \ln\left(a_{(t+1)} + A_{(t+1)}^{com}\right)\right)\right] + \lambda_t\left[c_{1t} + \frac{c_{2(t+1)}}{1 + r_{(t+1)}} + m_t - w_t\right]
$$

CPO:

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_{1_t}} = \frac{\beta}{c_{1\,t}} + \lambda_t = 0 \qquad (1.1)
$$

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_{2_{(t+1)}}} = \frac{\beta}{(1+\theta)c_{2\,(t+1)}} + \frac{\lambda_t}{1 + r_{(t+1)}} = 0 \qquad (1.2)
$$

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m_t} = \frac{(1+\theta)^{-1}\gamma \frac{\omega}{(1+n)}}{\left(\bar{A}_{(t+1)} + a_{(t+1)}\right)} + \lambda_t = 0 \qquad (1.3)
$$

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} = c_{1_t} + \frac{c_{2(t+1)}}{1 + r_{(t+1)}} + m_t - w_t = 0 \qquad (1.4)
$$

(1.1) y (1.2)

$$c_{2(t+1)} = \frac{(1 + r_{(t+1)})}{(1+\theta)} c_{1t}$$ [1] (1.5)

(1.5) en (1.4)

$$c_{1_t} = \frac{(1+\theta)}{(2+\theta)}(w_t - m_t) \quad (1.6)$$

$$c_{2_{(t+1)}} = \frac{(1 + r_{(t+1)})}{(2+\theta)}(w_t - m_t) \quad (1.7)$$

$$s_t = \frac{w_t - m_t}{(2+\theta)} \quad (1.8)$$

(1.1) y (1.3)

$$\frac{\omega\gamma}{(1+\theta)(1+n)\left(A^{-}_{(t+1)} + a_{(t+1)}\right)} = \frac{\beta}{c_{1\,t}}$$

Recordando que:

$$a_{(t+1)} = \frac{(1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a + \omega m_t}{(1+n)}$$

Tenemos:

$$\frac{\omega\gamma}{\beta} c_{1_t} = (1+\theta)\left[(1+n)A^{com}_{(t+1)} + (1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a + \omega m_t\right] \quad (1.9)$$

(1.6) en (1.9)

$$\frac{\omega\gamma}{\beta}\left[\frac{(1+\theta)}{(2+\theta)}(w_t - m_t)\right] = (1+\theta)\left[(1+n)A^{com}_{(t+1)} + (1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a + \omega m_t\right]$$

$$m_t = \frac{\left(w_t - \frac{(2+\theta)\beta}{\omega\gamma}\left[(1+n)A^{com}_{(t+1)} + (1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a\right]\right)}{(2+\theta)\frac{\beta}{\gamma} + 1} \quad (1.10)$$

Ahora obtendremos el equilibrio Nash-Cournot para el nivel mt reemplazando: $A_t^{com} = A_{(t+1)} - a_{(t+1)}$ en (1.10).

[1] $c_{2_t} = \frac{(r_{neta(t+1)})}{(1+\theta)} c_1 t$, en el caso de considerar una tasa de depreciación de 1.

$$\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}+1\right)m_t = w_t - \frac{(2+\theta)\beta}{\omega\gamma}\left[(1+n)(A_{(t+1)} - a_{(t+1)}) + (1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a\right] \quad (1.11)$$

De nuevo se recuerda que:

$$a_{(t+1)} = \frac{(1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a + \omega m_t}{(1+n)}$$

Tengo:

$$\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}+1\right)m_t = w_t - \frac{(2+\theta)\beta}{\omega\gamma}\left[N_{(t+1)}\left((1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a + \omega m_t\right) - \omega m_t\right]$$

$$m_t = \frac{w_t - \frac{(2+\theta)\beta}{\omega\gamma}\left[N_{(t+1)}\left((1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a\right)\right]}{\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}+1\right) + (2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}(N_{(t+1)} - 1)} \quad (1.12)$$

La ecuación (1.12) es el nivel de mt individual, que escoge de manera no cooperativa, cada uno de los consumidores en el tiempo t. Sus características son las siguientes:

$$\frac{dm_t}{dw_t} > 0; \frac{dm_t}{dk_t^a} > 0; \frac{dm_t}{d\left(ek_t^a\right)} = \frac{dm_t}{d\left(p_t\right)} > 0; \frac{dm_t}{dA_t} < 0; \frac{dm_t}{d\bar{A}} < 0; \frac{dm_t}{dN_t} \gtrless 0$$

## A.3. Firmas:

Cada firma representativa maximiza su beneficio, que está dado por:

$$\max_{K_t, L_t} L_t^{(1-a)} K_t^a - w_t L - r_t K_t; \; L = 1 \quad (1.13)$$

$$F_t(L_t, K_t) = L_t^{(1-a)} K_t^a = Lf(K_t/L_t) = Lf(k_t) = k_t^a \quad (1.14)$$

$$k > 0 \Rightarrow f(k) > 0, f'(k) > 0, f''(k) < 0$$

$$Inada \quad f(0) = 0; \lim_{(k\to 0)} f'(k) = +\infty; \lim_{(k\to +\infty)} f'(k) < 1$$

CPO:

$$F_L(K_t, L_t) = w_t; \quad F_K(K_t, L_t) = r_t$$

En términos per-cápita:

$$k_t^a - k_t(a)k_t^{(a-1)} = w_t;\ (1-a)k_t^a = w_t \quad (1.15)$$

$$ak_t^{(a-1)} = r_t \quad (1.16)$$

## A.4. Equilibrio del mercado de bienes:

El equilibrio del mercado de bienes requiere que la demanda de bienes en cada período sea igual a la oferta, o alternamente, que la inversión sea igual al ahorro:

$$K_{(t+1)} - K_t = N_t s_t(.) - K_t$$

En términos per-cápita:

$$(1+n)k_{t+1} = s_t(.) \quad (1.17)$$

Reemplazando (1.8) en (1.17) tenemos:

$$(1+n)k_{t+1} = \left[\frac{w_t - m_t}{2+\theta}\right] \quad (1.18)$$

## A.5. Dinámicas y estado estacionario:

### Comportamiento del capital:

Reemplazo (1.12) en (1.18)

$$k_{t+1} = \frac{w_t - \left[\dfrac{w_t - \dfrac{(2+\theta)\beta}{\omega\gamma}\left[N_{(t+1)}\left((1-b)a_t + \dfrac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a\right)\right]}{\left((2+\theta)\dfrac{\beta}{\gamma}+1\right) + (2+\theta)\dfrac{\beta}{\gamma}(N_{(t+1)}-1)}\right]}{(1+n)(2+\theta)} \quad (1.19)$$

Ahora, reemplazo (1.15) en (1.19):

$$k_{t+1} = \frac{(1-a)k_t^a - \left[\dfrac{(1-a)k_t^a - \dfrac{(2+\theta)\beta}{\omega\gamma}\left[N_{(t+1)}\left((1-b)a_t + \dfrac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a\right)\right]}{\left((2+\theta)\dfrac{\beta}{\gamma}+1\right) + (2+\theta)\dfrac{\beta}{\gamma}(N_{(t+1)}-1)}\right]}{(1+n)(2+\theta)} \quad (1.20)$$

$$k_{t+1} = \frac{(1-a)k_t^a\left(\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}+1\right) + (2+\theta)(N_{(t+1)}-1)\right) - \left[(1-a)k_t^a - \frac{(2+\theta)\beta}{\omega\gamma}\left[N_{(t+1)}\left((1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a\right)\right]\right]}{(1+n)(2+\theta)\left(\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}+1\right) + (2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}(N_{(t+1)}-1)\right)} \quad (1.21)$$

$$\Delta k_{t+1} = k_{t+1} - k_t = \frac{(1-a)k_t^a\left(\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}+1\right)+(2+\theta)(N_{(t+1)}-1)\right)-\left[(1-a)k_t^a-\frac{(2+\theta)\beta}{\omega\gamma}\left[N_{(t+1)}\left((1-b)a_t+\frac{b\bar{A}}{N_t}-ek_t^a\right)\right]\right]}{(1+n)(2+\theta)\left(\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}+1\right)+(2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}(N_{(t+1)}-1)\right)} - k_t$$

$$k_{t+1} = \mathcal{H}(k_t,\ a_t) \quad (1.22)$$

**Evolución del medioambiente:**

$$a_{(t+1)} = \frac{(1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a + \omega m_t}{(1+n)} \quad (1.23)$$

Reemplazo (1.12) en (1.23)

$$a_{(t+1)} = \frac{(1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a + \omega\left[\frac{(1-a)k_t^a - \frac{(2+\theta)\beta}{\omega\gamma}\left[N_{(t+1)}\left((1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a\right)\right]}{\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}+1\right)+(2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}(N_{(t+1)}-1)}\right]}{(1+n)} \quad (1.24)$$

$$\Delta a_{(t+1)} = a_{(t+1)} - a_t = \frac{(1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a + \omega\left[\frac{(1-a)k_t^a - \frac{(2+\theta)\beta}{\omega\gamma}\left[N_{(t+1)}\left((1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a\right)\right]}{\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}+1\right)+(2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}(N_{(t+1)}-1)}\right]}{(1+n)} - a_t$$

$$a_{(t+1)} = \frac{\left(\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}+1\right)+(2+\theta)(N_{(t+1)}-1)\right)\left((1-b)a_tN_t+\frac{b\bar{A}}{N_t}-ek_t^aN_t\right)+\left[\omega N_t(1-a)k_t^a-\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma}N_t\left[N_{(t+1)}\left((1-b)a_t+\frac{b\bar{A}}{N_t}-ek_t^a\right)\right]\right]}{\left(\left(\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma}+1\right)+(2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}(N_{(t+1)}-1)\right)(1+n)N_t} - a_t$$

$$a_{(t+1)} = \mho(k_t,\ a_t) \quad (1.25)$$

**Crecimiento Poblacional:**

$$N_t = (1+n)N_{(t+1)} \quad (1.26)$$

## A.6. Estado estacionario:

Se considera una población estacionaria N, con una tasa de crecimiento cero (n=0). En estado estacionario, se tiene: $a_t,\ a_{t+1} = a^*$ y $k_{t+1} = k_t = k^*$.

Ahora, se recuerda la ecuación y se reformula en términos del estado estacionario:

$$m_t = \frac{(1+n)a_{(t+1)} - (1-b)a_t - \frac{b\bar{A}}{N_t} + ek_t^a}{\omega} \quad (1.27)$$

$$m_t = \frac{a^* - (1-b)a^* - \frac{bA}{N} + ek^{*a}}{\omega} \quad [2](1.28)$$

Se sabe, por definición, que b está entre 0 y 1. Entonces, si se considera una población –N estacionaria- suficientemente grande se tiene que:

$$\frac{b\bar{A}}{N} \approx 0 \quad [3].$$

Para un valor de $\bar{A}$, que sea cercano a los niveles de consumo per-cápita. Se debe recordar, que por la definición del índice ambiental, $\bar{A}$ puede tomar cualquier valor no negativo.

El modelo está caracterizado por un sistema de dos ecuaciones en diferencia de primer grado, no lineales.

Para encontrar su estado estacionario tendremos un sistema de dos ecuaciones no lineales, en las variables a* y k*.

En estado estacionario, reemplazamos (1.15) y (1.28) en la ecuación (1.18), que caracteriza al capital y se tiene:

$$k^* = \frac{(1-a)k^{*a} - \left[\frac{a^* - (1-b)a^* + ek^{*a}}{\omega}\right]}{(2+\theta)} \quad . \ (1.29)$$

Se reordenan los términos:

$$k^* = \frac{\omega(1-a)k^{*a} - ba^* - ek^{*a}}{(2+\theta)\omega}$$

$$(2+\theta)\omega k^* = \omega(1-a)k^{*a} - ba^* - ek^{*a}.$$

Tenemos:

---

[2] No se debe confundir la variable a*, que es la calidad ambiental en términos per-cápita con el parámetro a que es la participación del capital dentro del producto.

[3] Esta aproximación permite tener una solución analítica, ya que en caso contrario el capital estacionario estará dado por un polinomio del tipo: $\sigma k^{*a} + \phi k^* + \mu = 0;\ 0 < a < 1$. Es decir, se requeriría establecer un valor numérico para el parámetro a y utilizar métodos numéricos. Efectivamente, se realizan simulaciones numéricas del modelo. El error de la aproximación de la solución aquí presentada es decreciente en N, creciente en b y en $\bar{A}$. Claramente, es una muy buena aproximación si consideramos que la población puede ser arbitrariamente grande, mientras que los otros parámetros no.

$$(2+\theta)\omega k^* = k^{*a}[\omega(1-a)-e]-ba^* \quad (1.30)$$

Ahora, se toma la ecuación que caracteriza al medioambiente (1.23) y junto a las ecuaciones (1.15) y (1.12), se obtiene:

$$a^* = (1-b)a^* - ek^{*a} + \omega\left[\frac{(1-a)k^{*a} - \frac{(2+\theta)\beta}{\omega\gamma}\left[N((1-b)a^* - ek^{*a})\right]}{\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}+1\right)+(2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}(N-1)}\right]. \quad (1.31)$$

Se reordena los términos:

$$b\left[\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}+1\right)+(2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}(N-1)\right]a^* =$$

$$-ek^{*a}\left[\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}+1\right)+(2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}(N-1)\right]+\omega\left[(1-a)k^{*a}-\frac{(2+\theta)\beta}{\omega\gamma}\left[N((1-b)a^*-ek^{*a})\right]\right]$$

Se prosigue:

$$b\left[\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}+1\right)+(2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}(N-1)\right]a^* =$$

$$-\frac{(2+\theta)\beta N(1-b)a^*}{\omega\gamma}-ek^{*a}\left[\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}+1\right)+(2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}(N-1)\right]+\left[\omega(1-a)+\frac{e(2+\theta)\beta N}{\gamma}\right]k^{*a}$$

Ahora se tiene:

$$b\left[\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}+1\right)+(2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}(N-1)\right]a^* = \ldots$$

$$\ldots = -\frac{(2+\theta)\beta N(1-b)a^*}{\omega\gamma}+\left[\omega(1-a)+\frac{e(2+\theta)\beta N}{\gamma}-e\left[\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}+1\right)+(2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}(N-1)\right]\right]k^{*a}$$

$$b\left[\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}+1\right)+(2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}(N-1)+\frac{(2+\theta)\beta N(1-b)}{\omega\gamma}\right]a^* = \ldots$$

$$\ldots = \left[\omega(1-a)+\frac{e(2+\theta)\beta N}{\gamma}-e\left[\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}+1\right)+(2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}(N-1)\right]\right]k^{*a}$$

$$\left[\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma}(N-b)+b\left[\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma}+1\right]\right]a^* = \ldots$$

$$\ldots = \left[\omega(1-a)+\frac{e(2+\theta)\beta N}{\gamma}-e\left[\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}+1\right)+(2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}(N-1)\right]\right]k^{*a}$$

$$\left[N\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma}+b\right]a^* = \ldots$$

$$\ldots = \left[\omega(1-a) + e\left[\frac{(2+\theta)\beta N}{\gamma} - \left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}+1\right) + (2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}(N-1)\right]\right]k^{*a}$$

Se obtiene así:

$$\left[N\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma}+b\right]a^* = \left[\omega(1-a)-e\right]k^{*a}$$

$$a^* = k^{*a}\left[[\omega(1-a)-e]\Big/\left[N\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma}+b\right]\right] \quad (1.32)$$

Se reemplaza (1.32) en (1.30):

$$(2+\theta)\omega k^* = k^{*a}\left[\omega(1-a)-e\right] - k^{*a}b\left[[\omega(1-a)-e]\Big/\left[N\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma}+b\right]\right]$$

Se ordena los términos:

$$(2+\theta)\omega k^* = k^{*a}\left[\omega(1-a)-e-b\left[[\omega(1-a)-e]\Big/\left[N\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma}+b\right]\right]\right]$$

Se obtiene el polinomio:

$$k^{*a}\left[\omega(1-a)-e-b\left[[\omega(1-a)-e]\Big/\left[N\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma}+b\right]\right]\right]-(2+\theta)\omega k^* = 0 \quad .(1.33)$$

Se extrae factor común:

$$k^{*a}\left[\left[\omega(1-a)-e-b\left[\frac{[\omega(1-a)-e]}{\left[N\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma}+b\right]}\right]\right]-(2+\theta)\omega k^{*(1-a)}\right] = 0$$

Directamente, se obtiene un estado estacionario:

$$\boxed{k^* = 0;\ a^* = 0.}$$

Se trabaja con los corchetes y con un poco de manipulación algebraica se tiene el segundo estado estacionario:

$$\left[\left[\omega(1-a)-e-b\left[\frac{[\omega(1-a)-e]}{\left[N\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma}+b\right]}\right]\right]-(2+\theta)\omega k^{*(1-a)}\right] = 0$$

$$\left[\omega(1-a)-e-b\left[\frac{[\omega(1-a)-e]}{\left[N\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma}+b\right]}\right]\right]=(2+\theta)\omega k^{*(1-a)}$$

$$\left[\frac{\left[\omega(1-a)-e-b\left[\frac{[\omega(1-a)-e]}{\left[N\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma}+b\right]}\right]\right]}{(2+\theta)\omega}\right]^{\frac{1}{(1-a)}}=k^*$$

$$k^*=\left[\frac{N\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma}\left[\omega(1-a)-e\right]}{\left[N\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma}+b\right](2+\theta)\omega}\right]^{\frac{1}{(1-a)}} \quad (1.34)$$

Para que este estado estacionario exista y sea diferente de cero, se requiere que $\omega(1-\alpha)>e$.

Ahora, reemplazo (1.34) en (1.32):

$$a^*=\left[\frac{N\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma}\left[\omega(1-a)-e\right]}{\left[N\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma}+b\right](2+\theta)\omega}\right]^{\frac{a}{(1-a)}}\left[\frac{[\omega(1-a)-e]}{\left[N\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma}+b\right]}\right] (1.35)$$

Es claro que si k* existe –es positivo-, a* será positivo, ya que se cumple $\omega(1-\alpha)>e$.

Reordenando los términos tenemos:

$$\boxed{\begin{aligned} k^* &= \left[\frac{N\beta[\omega(1-\alpha)-e]}{[N(2+\theta)\beta+\gamma b]\omega}\right]^{\frac{1}{(1-\alpha)}} \\ a^* &= \left[\frac{N\beta[\omega(1-\alpha)-e]}{[N(2+\theta)\beta+b\gamma]\omega}\right]^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}}\left[\frac{[\omega(1-\alpha)-e]}{\left[N\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma}+b\right]}\right] \end{aligned}}$$

Esta solución puede ser directamente extendida al caso en que la existe un factor tecnológico $\tau$ que multiplica a la función de producción:

$$k^* = \left[\frac{\tau N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma}\left[\omega(1-\alpha) - e\right]}{\left[N\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b\right](2+\theta)\omega}\right]^{\frac{1}{(1-\alpha)}}$$

$$a^* = \left[\frac{\tau N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma}\left[\omega(1-\alpha) - e\right]}{\left[N\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b\right](2+\theta)\omega}\right]^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}}\left[\frac{\tau[\omega(1-\alpha) - e]}{\left[N\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b\right]}\right]$$

## A.7 Dinámica local

El modelo se puede caracterizar por dos ecuaciones en diferencias de primer grado en dos variables. Este sistema es no lineal, pero sus dinámicas pueden analizarse localmente con una aproximación lineal:

$$k_{t+1} = \mathcal{H}(k_t, a_t) \quad (1.36)$$
$$a_{(t+1)} = \mho(k_t, a_t) \quad (1.37)$$

$$\begin{bmatrix} k_t - k^* \\ a_t - a^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_{(t-1)} - k^* \\ a_{(t-1)} - a^* \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

$$a_{11} = \frac{\partial \mathcal{H}(k^*, a^*)}{\partial k_t};\ a_{12} = \frac{\partial \mathcal{H}(k^*, a^*)}{\partial a_t}$$

$$a_{21} = \frac{\partial \mho(k^*, a^*)}{\partial k_t};\ a_{22} = \frac{\partial \mho(k^*, a^*)}{\partial a_t}$$

$$J = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Ahora se procede a obtener las derivadas parciales y se obtiene:

$$a_{11} = \frac{\partial \mathcal{H}(k^*, a^*)}{\partial k_t} = \frac{(1-\alpha)\alpha k^{*(\alpha-1)}}{(2+\theta)} - \frac{(1-\alpha)\alpha k^{*(\alpha-1)}}{(2+\theta)\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)} - \frac{\frac{(2+\theta)\beta}{\omega\gamma}Ne\alpha k^{*(\alpha-1)}}{(2+\theta)\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)}$$

$$a_{11} = \frac{\partial \mathcal{H}(k^*, a^*)}{\partial k_t} = \alpha k^{(\alpha-1)}\frac{(2+\theta)\beta N((\omega(1-\alpha)-e))}{\omega\gamma\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)} \quad (1.39)$$

$$a_{12} = \frac{\partial \mathcal{H}(k^*, a^*)}{\partial a_t} = \frac{N\beta(2+\theta)(1-b)}{(2+\theta)\omega\gamma\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)}$$

$$a_{12} = \frac{\partial \mathcal{H}(k^*, a^*)}{\partial a_t} = \frac{N\beta(1-b)}{\omega\gamma\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)} \quad (1.40)$$

$$a_{21} = \frac{\partial \mho(k^*, a^*)}{\partial k_t} = \frac{\alpha k^{(\alpha-1)}(-e)\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)}{\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)} + \frac{w\alpha(1-a)k^{(\alpha-1)}}{\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)} + \frac{(2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}Ne\alpha k^{(\alpha-1)}}{\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)}$$

$$a_{21} = \frac{\partial \mho(k^*, a^*)}{\partial k_t} = \alpha k^{(\alpha-1)}\frac{((\omega(1-\alpha)-e))}{\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)} \quad (1.41)$$

$$a_{22} = \frac{\partial \mho(k^*, a^*)}{\partial a_t} = (1-b) - \frac{(1-b)(2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N}{\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)}$$

$$a_{22} = \frac{\partial \mho(k^*, a^*)}{\partial a_t} = \frac{(1-b)}{\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)} \quad (1.42)$$

Las dinámicas del modelo cerca del estado estacionario (k,a), queda determinado por la siguiente matriz:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\alpha k^{(\alpha-1)}\beta N((\omega(1-\alpha)-e))}{\omega\gamma\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)} & \frac{N\beta(1-b)}{\omega\gamma\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)} \\ \frac{(\alpha k^{(\alpha-1)}(\omega(1-\alpha)-e))}{\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)} & \frac{(1-b)}{\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)} \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

Ahora caracterizamos la matriz:

$$TrJ = a_{11} + a_{22}$$

$$TrJ = \frac{\alpha k^{(\alpha-1)}\beta N((\omega(1-\alpha)-e))}{\omega\gamma\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)} + \frac{(1-b)}{\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)} \quad (1.44)$$

$$DetJ = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$$

$$DetJ = \frac{\alpha k^{(\alpha-1)}\beta N((\omega(1-\alpha)-e))}{\omega\gamma\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)} \cdot \frac{(1-b)}{\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)} - \ldots$$

$$-\left[\frac{N\beta(1-b)}{\omega\gamma\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)} \cdot \frac{(\alpha k^{(\alpha-1)}(\omega(1-\alpha)-e))}{\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)}\right]$$

$$DetJ = 0 \quad (1.45)$$¨

El polinomio característico tiene dos autovalores o eigenvalores:¨

$$P(\mu) = \mu^2 - T\mu + D$$

$$\mu_1 = TrJ$$

$$\mu_2 = 0$$

El caso no-hiperbólico requiere que el valor absoluto de cualquier de los autovalores sea igual a 1 (de La Croix & Michel, 2002). En primer lugar, reemplazamos k estacionario en la traza (1.44) y se iguala a 1:

$$\frac{\alpha(N\beta(2+\theta)+b\gamma)+(1-b)\gamma}{((2+\theta)\beta N+\gamma)} = 1$$

$$\alpha = \frac{(N\beta(2+\theta)+b\gamma)}{((2+\theta)\beta N+b\gamma)} = 1$$

Por la forma de la función de producción escogida, este caso está excluído del dominio del parámetro $\alpha$ : $0 < \alpha < 1$ . Alternamente, igualamos la traza y se iguala a -1:´

$$\frac{\alpha(N\beta(2+\theta)+b\gamma)+(1-b)\gamma}{((2+\theta)\beta N+\gamma)} = -1$$

$$\alpha = \frac{-N\beta(2+\theta)+(2-b)\gamma}{(N\beta(2+\theta)+b\gamma)} < 0$$

Este caso también queda descartado. Ahora, debido a $\mu_1 = Tr J$ es menor a 1 en valor absoluto y $\mu_2 = 0$ también, el modelo es localmente estable. Alternamente, se puede analizar las dinámicas en base a la traza y determinante de J (de La Croix & Michel, 2002). Una condición necesaria y suficiente es:

$$|1+D| > |T|, \quad |D| < 1$$

La matriz J cumple con esta especificación. Ahora podemos determinar que el modelo es localmente estable.

## B. Simulaciones numéricas

### B.1 Modelo descentralizado básico

Las simulaciones numéricas muestran diferentes tipos de convergencias, para ciertas combinaciones de parámetros. Se adjunta la hoja electrónica en Excel, para reproducción de las simulaciones. Se presentan algunos resultados:

Los parámetros que se van a utilizar tienen la siguiente nomenclatura:

| | |
|---|---|
| T | factor tecnológico |
| Be | Preferencia por consumo |
| Y | Preferencia por ambiente |
| b | Velocidad de estabilización natural |
| e | grado de contaminación del producto |
| p | impaciencia por consumir |
| a | participación del capital en el producto |
| n | crecimiento poblacional |
| w | eficiencia de abatimiento ambiental |
| k* | capital estacionario |
| a* | ambiente estacionario |
| a(0) | ambiente per-cápita inicial |
| N(0) | Población inicial |
| k(0) | capital inicial |
| Ae | Índice de valoración ambiental natural |

Varios de los parámetros utilizados no se han fijado para reproducir las características de una economía real. Esto se deja para trabajos futuros. Se recuerda sin embargo, los rangos determinados para cada uno de ellos en el capítulo IV. Para los parámetros microeconómicos estándar se han fijado de acuerdo a parámetros estándar de la literatura de generaciones traslapadas (Blanchard & Fischer, 1989; de La Croix & Michel, 2002). Para el parámetro de grado de contaminación de la economía se utiliza como proxy la eficiencia energética del Ecuador en algunos casos (Falconí, 2002). La población se fija en un nivel estacionario, debido a que el problema poblacional es complejo y requiere ser endogenizado. El objetivo de este ejercicio es mostrar la complejidad de las dinámicas del modelo y caracterizar el tipo de convergencias.

**Caso 1:**

| | |
|---|---|
| T | 1 |
| Be | 0.5 |
| Y | 0.1 |
| b | 0.9 |
| e | 0.59 |
| p | 0 |
| a | 0.33 |
| n | 0 |
| w | 1 |
| k* | 0.007505246 |
| a* | 1.50019E-14 |
| | |
| a(0) | 50 |
| N(0) | 1E+11 |
| k(0) | 0 |
| Ae | 100 |

Además, se demuestra que para un valor arbitrariamente alto de población estacionaria, el estado estacionario analítico -derivado en el capítulo IV- tiene un error cercano a cero. Como se puede ver en la siguiente tabla:

| | | |
|---|---|---|
| a* | 1.50105E-14 | -0.05734% |
| k* | 0.007505245 | 0.00001% |

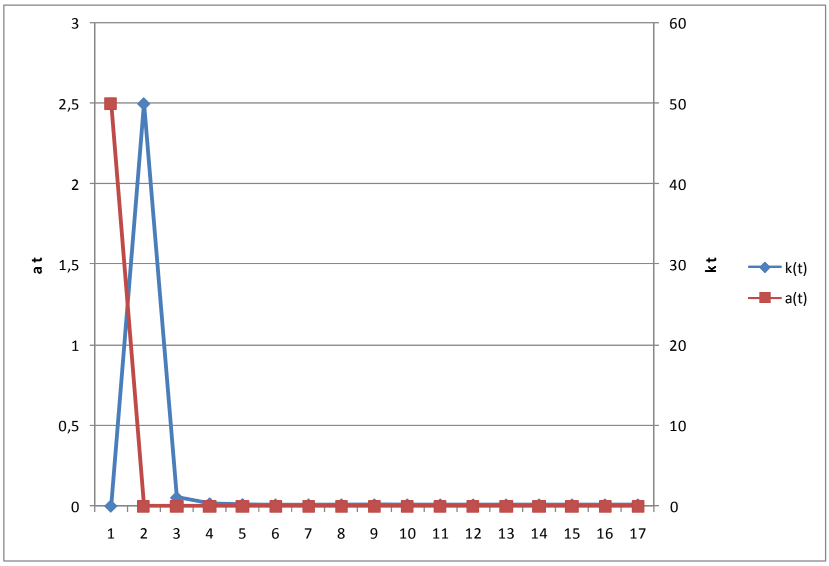
Dónde se presenta el estado estacionario calculado desde la especificación derivada en el capítulo IV y además el error relativo, que es cercano a cero.

Ahora se presenta, los resultados de la solución centralizada para los mismos valores de los parámetros, y con un R de cero, o de regla de oro:

| | |
|---|---|
| R | 0.0000000000 |
| k* | 0.0505235552 |
| a* | 0.0144353016 |

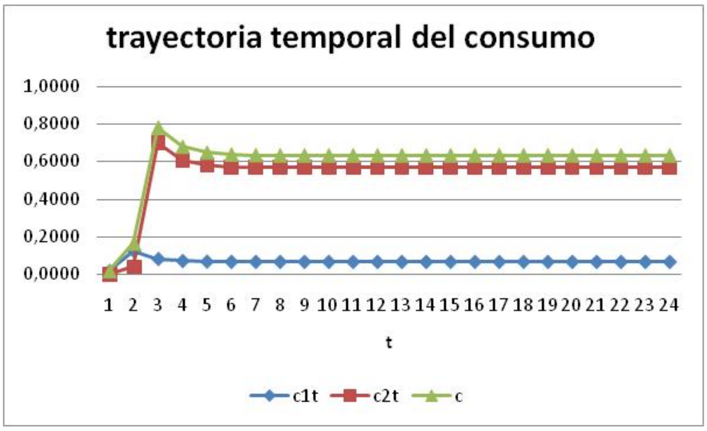
Esta economía sobre-acumula capital físico y sobre-degrada el medioambiente. No es eficiente en términos de Pareto.

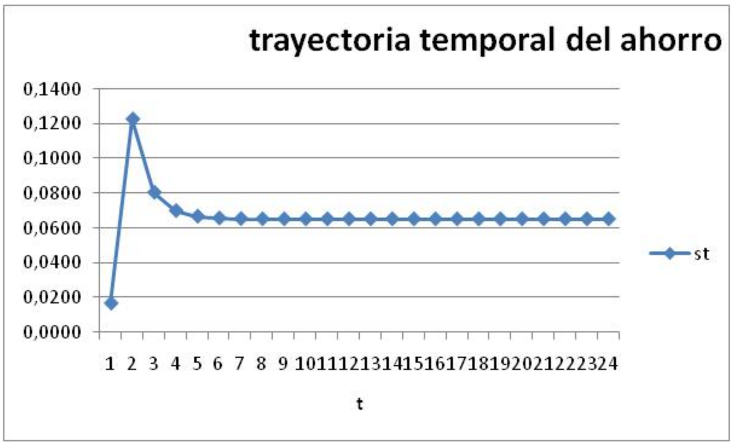
La convergencia de las trayectorias para kt y at se observa en el siguiente gráfico:




La convergencia de kt es no monotónica y muestra un pico que corresponde a una generación que aprovecha de su posición inicial para tener un alto nivel de consumo a costa del bienestar de las demás. Se debe recordar que cada t, representa 20 o 30 años. En este caso se puede observar que las primeras generaciones que tienen poco capital y una dotación alta de ambiente, explotan el medioambiente de manera excesiva. Esto les permite aumentar sus ingresos y aumentar su capital, sin embargo, esto disminuye permanentemente el nivel de calidad ambiental e inclusive el capital de las siguientes generaciones. Este, podría ser el caso de un boom de recursos naturales. Al tener muchos recursos naturales y poco capital, se obtienen ingresos de la explotación de los recursos pero esto no es sostenible en el largo plazo. La economía descentralizada es incapaz de utilizar la alta dotación de ambiente para convertirla en capital físico. Así, una economía con más recursos naturales será más inequitativa a nivel intergeneracional que otra con pocos recursos naturales.

Una curva de Kutznets ambiental no puede ser derivada directamente, debido a la naturaleza discreta, con tiempos de 30 años. Sin embargo, la variable mt sigue este patrón. Cuándo la economía tiene bajo capital es negativa, al aumentar el capital disminuye. Esto coincide con el hecho de que ciertas variables como la deforestación, disminuyan al aumentar la riqueza de la economía. A largo plazo, se mantiene la tendencia de una menor degradación que inclusive se convierte en mantenimiento ambiental. No obstante, el nivel total de calidad ambiental baja permanentemente, debido a la contaminación que es directamente proporcional a la producción. Posible extensiones, pueden incluir un parámetro e endógeno, que sea función del progreso tecnológico. Esto se observa directamente en la simulación en la hoja electrónica.



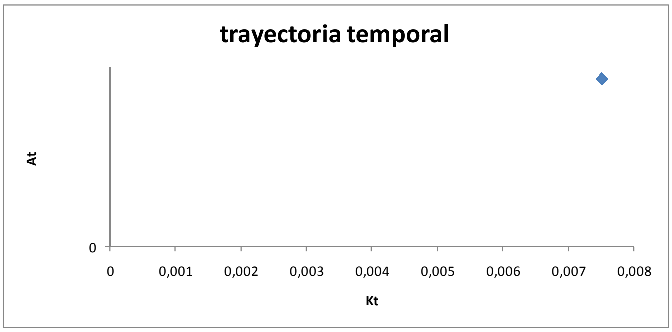

Las trayectorias temporales o dinámicas del consumo y del ahorro siguen el mismo patrón que el capital físico de la economía. Esto significa que las primeras generaciones consumen mucho más que las últimas –y a expensas de estas-. El ahorro también sube pero este ahorro es insuficiente para mantener el nivel de capital alcanzado por las generaciones que explotan el medioambiente. Esta afirmación puede ser observada en la trayectoria dinámica del capital que alcanza un nivel estacionario con un nivel menor a aquel de las primeras generaciones.

**Análisis de convergencia local:**

Como sustituto del análisis de digrama de fase, que no es posible debido a la complejidad de las dinámicas del presente modelo se utiliza una simulación con una hoja electrónica. Debido a la naturaleza discreta del modelo de generaciones traslapadas, este procedimiento nos proporciona una imagen muy buena del funcionamiento del modelo (Shone, 2002).

Se parte del estado estacionario, es decir, fijando como condiciones iniciales, los valores de estado estacionario:

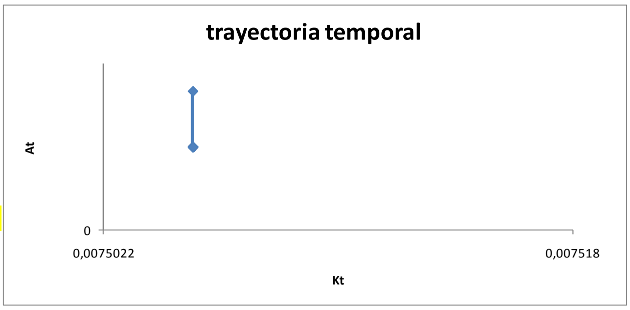
| | |
|---|---|
| T | 1 |
| Be | 0.5 |
| Y | 0.1 |
| b | 0.9 |
| e | 0.59 |
| p | 0 |
| a | 0.33 |
| n | 0 |
| w | 1 |
| k* | 0.007505246 |
| a* | 1.50019E-14 |
| | |
| a(0) | 1.50019E-14 |
| N(0) | 1E+11 |
| k(0) | 0.007505246 |
| Ae | 100 |




Ahora se realizan pequeñas perturbaciones cercanas al estado estacionario:

1. Una perturbación positiva del nivel de a(0)

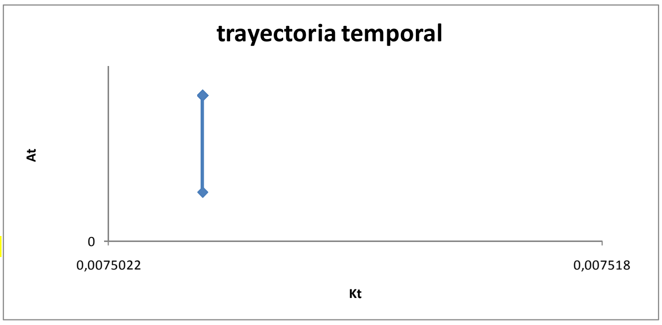
| | |
|---|---|
| T | 1 |
| Be | 0.5 |
| Y | 0.1 |
| b | 0.9 |
| e | 0.59 |
| p | 0 |
| a | 0.33 |
| n | 0 |
| w | 1 |
| k* | 0.007505246 |
| a* | 1.50019E-14 |
| | |
| a(0) | 2.50E-14 |
| N(0) | 1E+11 |
| k(0) | 0.007505246 |
| Ae | 100 |




Converge de manera lineal.

2. Una perturbación negativa del nivel de a(0)

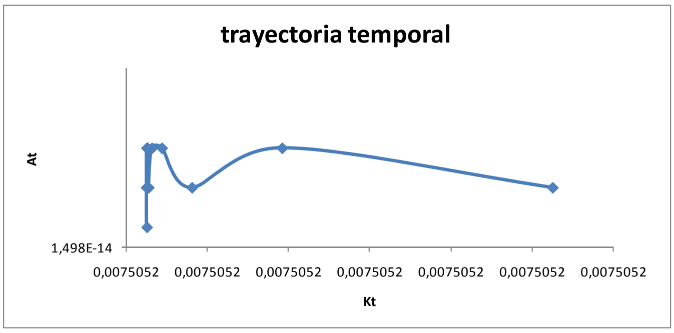
| | |
|---|---|
| T | 1 |
| Be | 0.5 |
| Y | 0.1 |
| b | 0.9 |
| e | 0.59 |
| p | 0 |
| a | 0.33 |
| n | 0 |
| w | 1 |
| k* | 0.007505246 |
| a* | 1.50019E-14 |
| | |
| a(0) | 5.00E-15 |
| N(0) | 1E+11 |
| k(0) | 0.007505246 |
| Ae | 100 |




Converge de manera lineal.

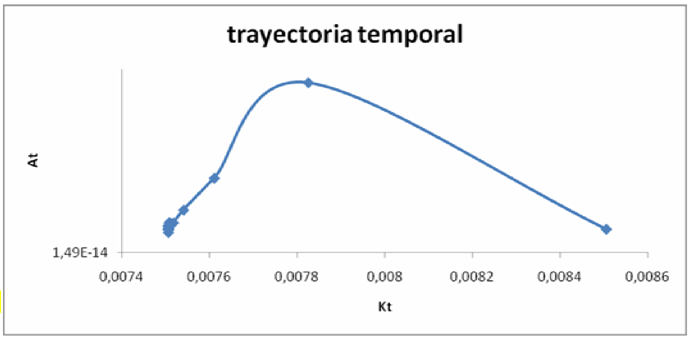
3. Una perturbación positiva del nivel de k(0)

| | |
|---|---|
| T | 1 |
| Be | 0.5 |
| Y | 0.1 |
| b | 0.9 |
| e | 0.59 |
| p | 0 |
| a | 0.33 |
| n | 0 |
| w | 1 |
| k* | 0.007505246 |
| a* | 1.50019E-14 |
| | |
| a(0) | 1.50E-14 |
| N(0) | 1E+11 |
| k(0) | 0.007505246 |
| Ae | 100 |




La convergencia es no monotónica, aún para un cambio de 1 en sexto decimal. Para evitar, que la trayectoria sea generada por la naturaleza aproximada de los cálculos de la hoja electrónica, debido a los niveles cercanos a cero del nivel estacionario, se realiz un perturbación mayor en el tercer decimal:

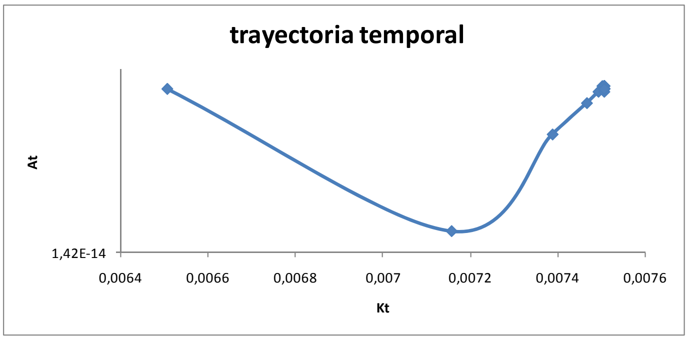
| | |
|---|---|
| T | 1 |
| Be | 0.5 |
| Y | 0.1 |
| b | 0.9 |
| e | 0.59 |
| p | 0 |
| a | 0.33 |
| n | 0 |
| w | 1 |
| k* | 0.007505246 |
| a* | 1.50019E-14 |
| | |
| a(0) | 1.50E-14 |
| N(0) | 1E+11 |
| k(0) | 0.008505246 |
| Ae | 100 |




Es convergente, pero lo hace no monotónicamente. Es una dinámica no lineal.

4. Una perturbación negativa del nivel de k(0)

| | |
|---|---|
| T | 1 |
| Be | 0.5 |
| Y | 0.1 |
| b | 0.9 |
| e | 0.59 |
| p | 0 |
| a | 0.33 |
| n | 0 |
| w | 1 |
| k* | 0.007505246 |
| a* | 1.50019E-14 |
| | |
| a(0) | 1.50E-14 |
| N(0) | 1E+11 |
| k(0) | 0.006505246 |
| Ae | 100 |

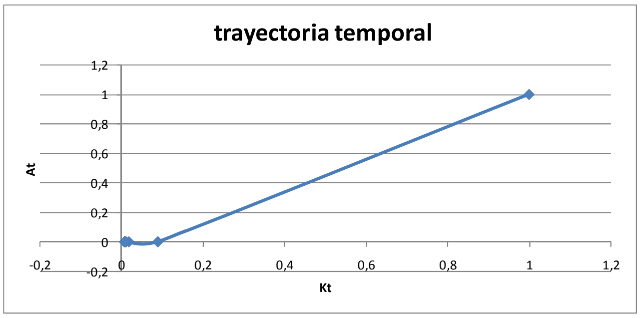


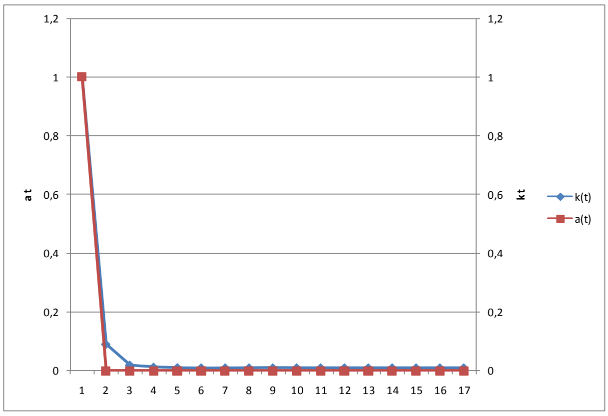

Es convergente, pero lo hace no monotónicamente. Es una dinámica no lineal.

**Estabilidad global:**

Bajo estos parámetros la economía muestra gran estabilidad. Es interesante notar que debido a las fuerzas contrarias que existen, un nivel arbitrariamente alto de capital o medioambiente convergen al mismo estado estacionario que uno bajo. Se debe notar que con especificaciones diferentes de la función de utilidad y la de ahorro, se podría obtener varios estados estacionarios, en cuyo caso, estas condiciones iniciales juegan un papel muy importante(John & Pecchenino, 1994). Esta característica se explica, debido a que un alto nivel de capital produce un alto nivel de contaminación. Es decir, degrada el medioambiente, esto exige gastos en mantenimiento ambiental, lo que disminuye los recursos para ahorrar y que a su vez disminuye el nivel de capital en el siguiente período, y así consecutivamente, hasta alcanzar el nivel estacionario. Esto se aprecia en los siguientes gráficos:

| | |
|---|---|
| T | 1 |
| Be | 0.5 |
| Y | 0.1 |
| b | 0.9 |
| e | 0.59 |
| p | 0 |
| a | 0.33 |
| n | 0 |
| w | 1 |
| k* | 0.007505246 |
| a* | 1.50019E-14 |
| | |
| a(0) | 1 |
| N(0) | 1E+11 |
| k(0) | 1 |
| Ae | 100 |



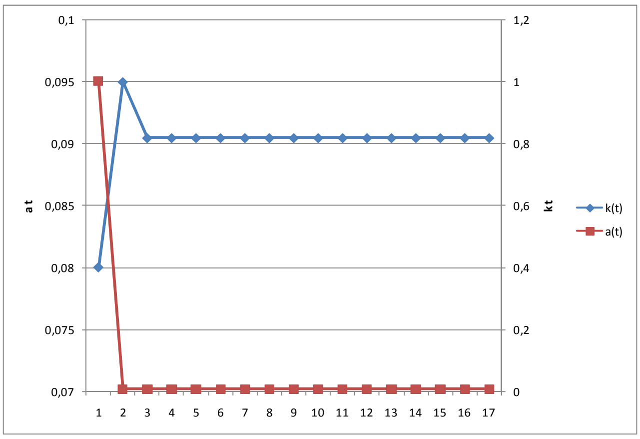




Debido a la escala, se pierden las características no monotónicas cercanas al estado estacionario.

**Caso 2:**

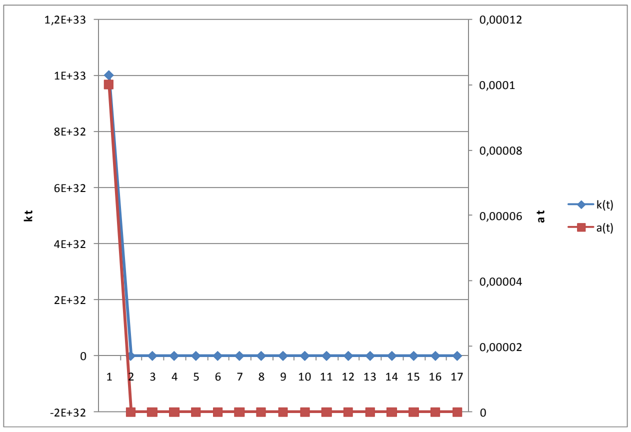
El presente modelo presenta bifurcaciones o cambios en la dinámica estructural bajo ciertas combinaciones de parámetros. Se presentan algunos casos:

| | |
|---|---|
| T | 1 |
| Be | 0.1 |
| Y | 0.9 |
| b | 0.99 |
| e | 0.10 |
| p | 0.1 |
| a | 0.9 |
| n | 0 |
| w | 1 |
| k* | 0.090448129 |
| a* | 0.008140332 |
| | |
| a(0) | 1 |
| N(0) | 100 |
| k(0) | 0.08 |
| Ae | 20 |




Si se tiene una participación del capital muy alta, en este caso del 0.9, la economía colapasa bajo ciertos niveles muy altos de capital y niveles bajos de medioambiente. Esto significa, que en ese caso el daño ambiental producido no puede ser revertido por inversión ambiental. Es una curiosidad teórica que ilustra, como cambia la estrutura dinámica del modelo si cambian los parámetros:

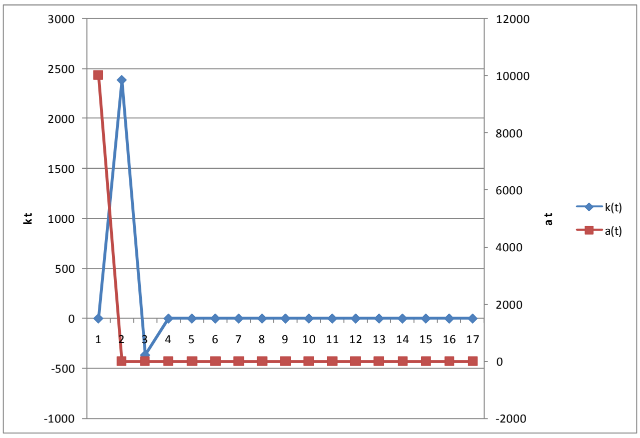
| | |
|---|---|
| T | 1 |
| Be | 0.1 |
| Y | 0.9 |
| b | 0.99 |
| e | 0.10 |
| p | 0.1 |
| a | 0.9 |
| n | 0 |
| w | 1 |
| k* | #¡NUM! |
| a* | #¡NUM! |
| | |
| a(0) | 0.0001 |
| N(0) | 100 |
| k(0) | 1E+33 |
| Ae | 1 |




**Caso 3:**

Como se determinó en el Capítulo IV, si el grado de contaminación del producción es demasiado alto y la eficiencia del abatimiento ambiental es muy baja –su radio e/w es igual a (1-a) o mayor, entonces la economía colapsa, después de pocos períodos:

| | |
|---|---|
| T | 1 |
| Be | 0.1 |
| Y | 0.9 |
| b | 0.5 |
| e | 0.80 |
| p | 0.1 |
| a | 0.9 |
| n | 0 |
| w | 1 |
| k* | #¡NUM! |
| a* | #¡NUM! |
| | |
| a(0) | 10000 |
| N(0) | 100000000 |
| k(0) | 1 |
| Ae | 1 |

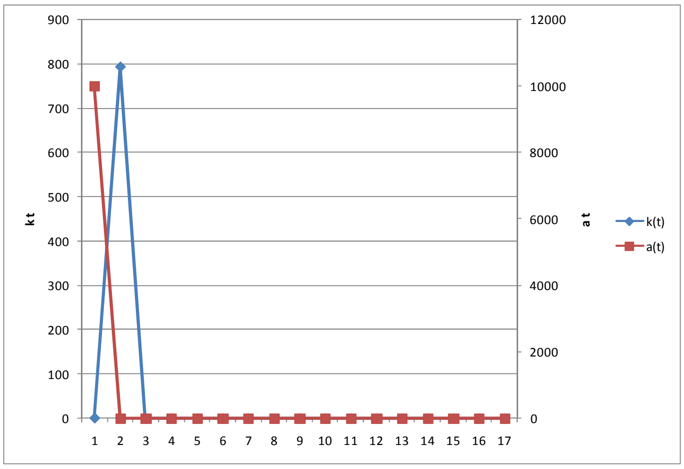



En este caso, los agentes actúan de manera similar al CASO 1, explotando su alta dotación de recursos naturales para aumentar su producto y su consumo, pero debido a que la producción es sucia –e es alto-, entonces la economía colapsa. Esto se debe ver como una catástrofe ambiental que conlleva a una catástrofe económica. Se puede ilustrar esto con ejemplos de sequías provocadas por excesiva deforestación o por la destrucción de un ecosistema, que afectan directamente la economía. Cabe mencionar, que el planificador central puede evitar en este caso el colapso de la economía, aunque se tenga niveles muy bajos de capital y calidad ambiental:

| | |
|---|---|
| R | 0.0000000000 |
| k* | 0.0098493029 |
| a* | 0.0005183867 |

El mismo e, puede generar un estado estacionario positivo si w es suficientemente alto; es decir, la tecnología de abatimiento –y el rendimiento natural-:

| | |
|---|---|
| T | 1 |
| Be | 0.1 |
| Y | 0.9 |
| b | 0.5 |
| e | 0.30 |
| p | 0.1 |
| a | 0.9 |
| n | 0 |
| w | 3 |
| k* | 7.93651E-10 |
| a* | 2.14286E-16 |
| | |
| a(0) | 10000 |
| N(0) | 100000000 |
| k(0) | 1 |
| Ae | 1 |




De nuevo la convergencia es no monotónica y tampoco es sustentable, ni eficiente:

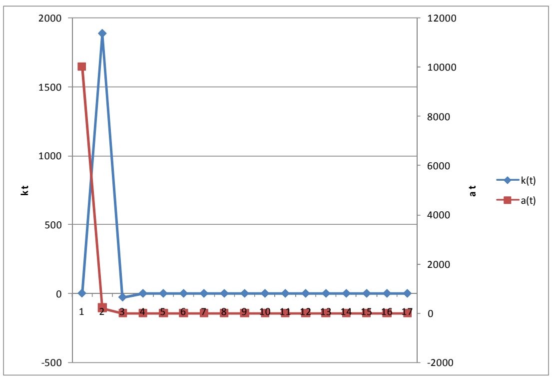
| | |
|---|---|
| R | 0.0000000000 |
| k* | 0.1215766546 |
| a* | 0.0191963163 |

En este caso se sub-acumula capital y se sobre-degrada el medioambiente.

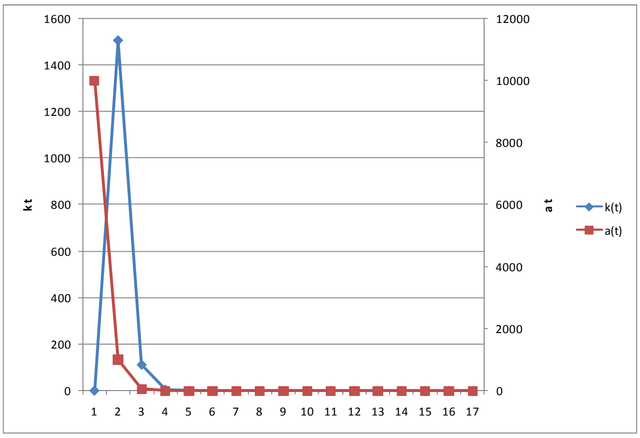
## B.2 Modelo con crecimiento poblacional

Cuándo se considera un crecimiento poblacional positivo, las dinámicas son similares pero la economía tiende al colapso:

| | |
|---|---|
| T | 1 |
| Be | 0.9 |
| Y | 0.1 |
| b | 0.5 |
| e | 0.30 |
| p | 0.1 |
| a | 0.9 |
| n | 0.2 |
| w | 1 |
| k* | #¡NUM! |
| a* | #¡NUM! |
| | |
| a(0) | 10000 |
| N(0) | 1 |
| k(0) | 1 |
| Ae | 1 |

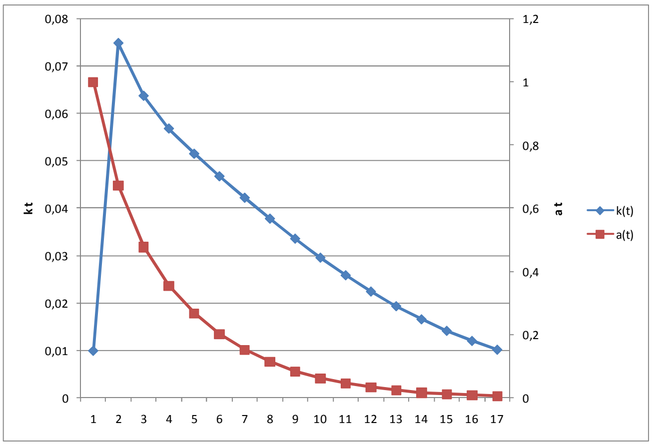


| | |
|---|---|
| T | 1 |
| Be | 0.6 |
| Y | 0.4 |
| b | 0.5 |
| e | 0.30 |
| p | 0.1 |
| a | 0.9 |
| n | 0.2 |
| w | 1 |
| k* | #¡NUM! |
| a* | #¡NUM! |
| | |
| a(0) | 10000 |
| N(0) | 1 |
| k(0) | 1 |
| Ae | 1 |



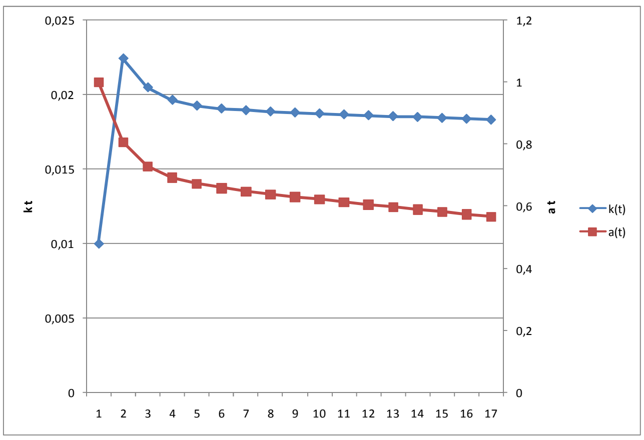

Esto nos dice, que si las preferencias son más verdes con los mismos parámetros, en presencia de crecimiento poblacional, se puede lograr que la economía exista por más tiempo. Aún así, colapsa.

| | |
|---|---|
| T | 1 |
| Be | 0.1 |
| Y | 0.9 |
| b | 0.5 |
| e | 0.30 |
| p | 0.1 |
| a | 0.9 |
| n | 0.2 |
| w | 1 |
| k* | #¡NUM! |
| a* | #¡NUM! |
| | |
| a(0) | 1 |
| N(0) | 1 |
| k(0) | 0.01 |
| Ae | 1 |




En el caso optimista de gran limpieza de tecnologías y alta eficiencia de abatimiento ambiental se tiene:

| | |
|---|---|
| T | 1 |
| Be | 0.1 |
| Y | 0.9 |
| b | 0.5 |
| e | 0.01 |
| p | 0.1 |
| a | 0.9 |
| n | 0.01 |
| w | 4 |
| k* | 0.001955978 |
| a* | 0.002296751 |
| | |
| a(0) | 1 |
| N(0) | 1 |
| k(0) | 0.01 |
| Ae | 1 |



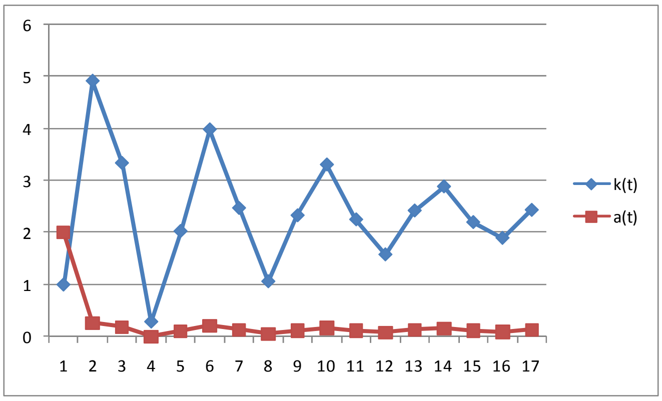
En este caso con niveles extremadamente altos no se tiene un estado estacionario como se observa del gráfico, sino que el colapso puede demorarse un período muy largo.

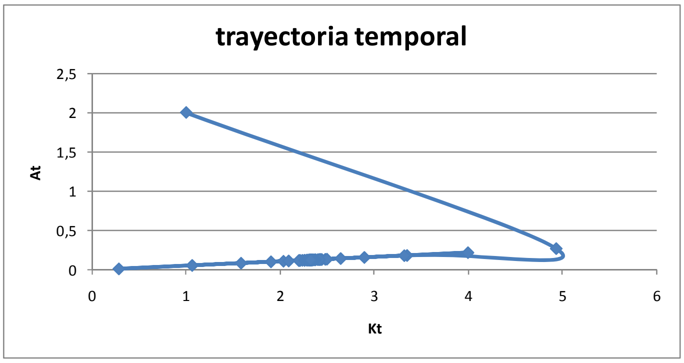
## B.3. Crecimiento endógeno:

El panorama presentado es poco optimista para mantener un crecimiento sostenido en el tiempo, de manera descentralizada, sin embargo, una extensión para incluir externalidades positivas en la producción o crecimiento endógeno, mejora las perspectivas:

### CASO 4:

| | |
|---|---|
| T | 20 |
| Be | 0.9 |
| Y | 0.1 |
| b | 0.2 |
| e | 1.00 |
| p | 0.3 |
| a | 0.1 |
| n | 0 |
| w | 1 |
| k* | 2.319587629 |
| a* | 0.128865979 |
| a(0) | 2 |
| N(0) | 2 |
| k(0) | 1 |
| Ae | 100 |



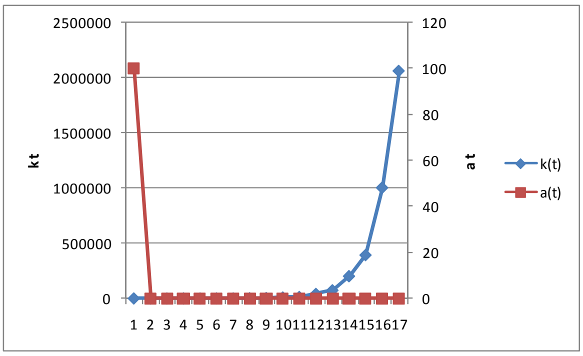




En este caso, con un radio de 1 de e/w, la economía tiende a un estado estacionario positivo. Sin embargo, las externalidades negativas generan los ciclos –aún cuándo N es bajo para disminuir las externalidades de la tragedia de los comunes-.Este resultado muestra que en los casos en los cuáles una economía con crecimiento endógeno es sucia –w bajo y e alto-, no se puede tener un crecimiento positivo ilimitado –como es el caso de los modelos estándar de crecimiento endógeno-.

**CASO 5:**

En caso de que el radio e/w sea menor a 1 se pude tener el caso de un nivel creciente de capital con un nivel positivo de medioambiente:

| | |
|---|---|
| T | 20 |
| Be | 0.9 |
| Y | 0.1 |
| b | 0.2 |
| e | 0.30 |
| p | 0.3 |
| a | 0.2 |
| n | 0 |
| w | 1 |
| k* | 9.8813E+122 |
| a* | 1.0977E+111 |
| k(-1) | 0 |
| a(0) | 100 |
| N(0) | 1E+11 |
| k(0) | 1 |
| Ae | 100 |

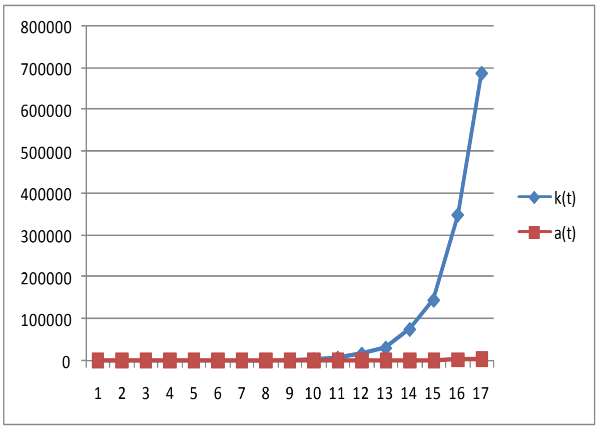



Se puede observar que la externalidad positiva de la producción más que compensa a las externalidades negativas de la contaminación. Sin embargo, esto no excluye que se haya lugar para mejorar la eficiencia de las trayectorias, mediante políticas para incentivar las externalidades positivas y controlar las externalidades negativas.

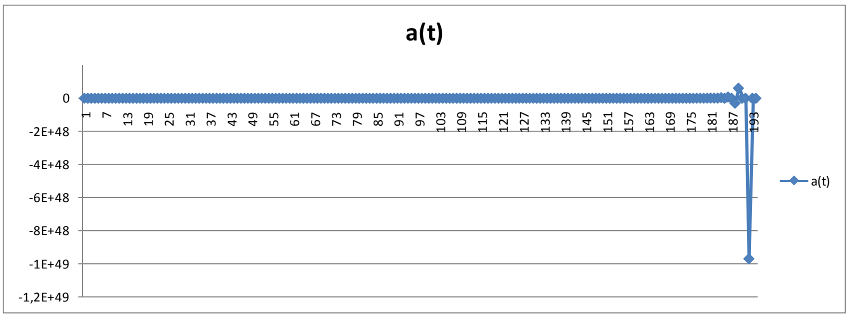
**CASO 6:**

Si se considera crecimiento poblacional y también crecimiento endógeno tenemos:

| | |
|---|---|
| T | 20 |
| Be | 0.9 |
| Y | 0.1 |
| b | 0.2 |
| e | 0.30 |
| p | 0.3 |
| a | 0.1 |
| n | 0.2 |
| w | 1 |
| k* | 2.3799E+116 |
| a* | -5.833E+100 |
| k(-1) | 0 |
| a(0) | 2 |
| N(0) | 1 |
| k(0) | 1 |
| Ae | 100 |




En esta economía se tiene niveles crecientes de capital y niveles estables de medioambiente, aunque bajos. Sin embargo, a largo plazo la economía colapsa. No obstante, a largo plazo no los parámetros pueden cambiar y se puede por ejemplo mejorar la limpieza de las tecnologías. Así, se puede tener un crecimiento siempre positivo, aún en presencia de externalidades negativas y de crecimiento poblacional geométrico. De nuevo, este resultado no significa que se pueda realizar mejoras de eficiencia mediante la intervención estatal, que es la principal intuición del modelo básico.




El modelo básico, no intenta explicar el crecimiento económico de un país. Para hacerlo se debe incluir el crecimiento endógeno con capital humano y otras modificaciones. El objetivo principal es establecer que el crecimiento se ve afectado por el medioambiente, y buscar las fuentes de ineficiencia y de inequidad. Al incluir, el medioambiente se puede observar también que el bienestar no sólo consiste en la riqueza económica sino en un medioambiente sano. Además, se observó que una alta dotación de recursos naturales no afecta el nivel de estado estacionario de una economía. Las primeras generaciones tienen un mayor bienestar aprovechándose de las demás generaciones, debido a su posición privilegiada. Esto puede explicar de manera endógena los llamados booms de recursos naturales que causan un auge económico seguido de contracción de la economía.

## C. Comando Central

### C.1 Comando Central –considerando depreciación- d es 1:

$$Max \quad \sum_{t=0}^{\infty} (1+R)^{-t-1}\left[u(c_{1_t}, A_t) + (1+\theta)^{-1}u(c_{2_{t+1}}, A_{t+1})\right] \quad (1.46)$$

Sujeto a[4]:

$$s.a. \quad K_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha} = K_{t+1} + Nc_{1_t} + Nc_{2_t} + M_t$$

$$A_{(t+1)} = (1-b)A_t + b\bar{A} - P_t + \omega M_t$$

Utilizando, la ecuación paramétrica de la utilidad:

$$Max \quad \sum_{t=0}^{\infty} (1+R)^{-t-1}\left[\beta \ln c_{1_t} + \gamma \ln A_t + (1+\theta)^{(-1)}\left(\beta \ln c_{2_{(t+1)}} + \gamma \ln A_{(t+1)}\right)\right]$$

$$s.a. \quad k_t^{\alpha} = k_{t+1} + c_{1_t} + c_{2_t} + m_t \quad (1.47)$$

$$A_{(t+1)} = (1-b)A_t + b\bar{A} - P_t + \omega M_t$$

$$A_{(t+1)} = (1-b)A_t + b\bar{A} - eN \cdot k_t^{\alpha} + \omega \cdot Nm_t \quad (1.48)$$

Para solucionar el modelo, se reemplaza las restricciones en la función objetivo. El método utilizado aquí es similar al de Blanchard & Fischer (1989). Por facilidad notacional, se expresará las condiciones de primer orden –CPO-, en términos de la ecuación general de la utilidad. Ahora:

$$\ldots + [u(c_{1_{t-1}}, A_{t-1}) + (1+\theta)^{-1}u(c_{2_t}, A_t)] + (1+R)^{-1}[u(c_{1_t}, A_t) + (1+\theta)^{-1}u(c_{2_{t+1}}, A_{t+1})] + \ldots$$

---

[4] Para el análisis del comando central se considera el caso de $n = 0, N_t = N_{t+1} = N$.

$$= \ldots + u[k_{t-1}^{\alpha} - k_t - c_{2_{t-1}} - m_{t-1}, A_{t-1}] + \ldots$$

$$\ldots + (1+\theta)^{-1} u(c_{2_t}, A_t) + (1+R)^{-1} u[k_t^{\alpha} - k_{t+1} - c_{2_t} - m_t, A_t] + \ldots$$

$$\ldots + (1+R)^{-1}(1+\theta)^{-1} u(c_{2_{t+1}}, [(1-b)A_t + b\bar{A} - eN \cdot k_t^{a} + \omega \cdot Nm_t]) + \ldots$$

Se deriva la función objetivo, para las variables de estado, kt y at y para las variables de control ct y mt. Tenemos cuatro CPO:

$$A_t : (1+\theta)^{-1} u_2(c_{2_t}, A_t) + (1+R)^{-1} u_2(c_{1_t}, A_t) + \ldots$$

$$\ldots + (1+R)^{-1}(1+\theta)^{-1} u_2(c_{2_{t+1}}, A_{t+1})(1-b) + (1+R)^{-2} u_2(c_{1_{t+1}}, A_{t+1})(1-b) = 0 \quad (1.49)$$

$$c_{2_t} : (1+\theta)^{-1} u_1(c_{2_t}, A_t) - (1+R)^{-1} u_1(c_{1_t}, A_t) = 0 \quad (1.50)$$

$$k_t : -u_1(c_{1_{t-1}}, A_{t-1}) + (1+R)^{-1}(\alpha k_t^{\alpha-1}) u_1(c_{1_t}, A_t) + \ldots$$

$$\ldots + (1+R)^{-1}(1+\theta)^{-1} u_2(c_{2_{t+1}}, A_{t+1})(-eN\alpha k_t^{\alpha-1}) + \ldots$$

$$\ldots + (1+R)^{-2} u_2(c_{1_{t+1}}, A_{t+1})](-eN\alpha k_t^{\alpha-1}) = 0 \quad (1.51)$$

$$m_t : -(1+R)^{-1} u_1(c_{1_t}, A_t) + (1+R)^{-1}(1+\theta)^{-1} u_2(c_{2_{t+1}}, A_{t+1})(\omega N) + \ldots$$

$$\ldots + (1+R)^{-2} u_2(c_{1_{t+1}}, A_{t+1})(\omega N) = 0 \quad (1.52)$$

Ahora el sistema queda completamente determinado, para encontrar una solución, se utiliza la ecuación logarítimica paramétrica, y las CPO quedan determinadas así:

La condición (1.77):

$$A_t : (1+\theta)^{-1} \frac{\gamma}{A_t} + (1+R)^{-1} \frac{\gamma}{A_t} + \ldots$$

$$\ldots + (1+R)^{-1}(1+\theta)^{-1} \frac{\gamma}{A_{t+1}}(1-b) + (1+R)^{-2} \frac{\gamma}{A_{t+1}}(1-b) = 0$$

Un poco de manipulación:

$$\frac{1}{A_t}\left(\frac{\gamma}{(1+\theta)}+\frac{\gamma}{(1+R)}\right)=-\frac{1}{A_{t+1}}\left(\frac{\gamma(1-b)}{(1+R)(1+\theta)}+\frac{\gamma(1-b)}{(1+R)^2}\right)$$

$$\frac{A_{t+1}}{A_t}=\frac{(b-1)}{(1+R)}\quad(1.53)$$

Reemplazando (1.81) en la restricción medioambiental:

$$\frac{(b-1)}{(1+R)}A_t=(1-b)A_t+b\bar{A}-P_t+\omega M_t$$

Ahora se tiene, la ecuación centralizada para mt:

$$M_t=\left[(b-1)A_t\frac{2+R}{(1+R)}A_t-b\bar{A}+P_t\right]/\omega$$

En téminos per-cápita:

$$m_t=\left[(b-1)A_t\frac{2+R}{(1+R)}A_t-b\bar{A}+P_t\right]/\omega N$$

$$m_t=\left[(b-1)A_t\frac{2+R}{(1+R)}-b\bar{A}+eNk_t^{\alpha}\right]/\omega N\quad(1.54)$$

$$\frac{dm_t}{d(P_t)}>0;\ \frac{dm_t}{dA_t}<0;\ \frac{dm_t}{dA^{-}}<0;\ \frac{dm_t}{dN}\gtrless 0$$

El planificador central no respeta la elección de mt individual.

La condición (1.78):

$$c_{2_t}:(1+\theta)^{-1}\frac{\beta}{c_{2t}}-(1+R)^{-1}\frac{\beta}{c_{1t}}=0$$

$$c_{1_t}=\frac{(1+\theta)}{(1+R)}c_{2_t}\quad(1.55)$$

La condición (1.79):

$$k_t:\ -\frac{\beta}{c_{1\,t-1}}+(1+R)^{-1}(\alpha k_t^{\alpha-1})\frac{\beta}{c_{1t}}+\ldots$$

$$... + (1+R)^{-1}(1+\theta)^{-1}\frac{\gamma}{A_{t+1}}(-eN\alpha k_t^{\alpha-1}) + ...$$

$$... + (1+R)^{-2}\frac{\gamma}{A_{t+1}}(-eN\alpha k_t^{\alpha-1}) = 0 \quad (1.56)$$

La condición (1.80):

$$m_t: -(1+R)^{-1}\frac{\beta}{c_{1t}} + (1+R)^{-1}(1+\theta)^{-1}\frac{\gamma}{A_{t+1}}(\omega N) + ...$$

$$... + (1+R)^{-2}\frac{\gamma}{A_{t+1}}(\omega N) = 0$$

$$\frac{\beta}{(1+R)}\frac{1}{c_{1t}} = \frac{1}{A_{t+1}}\gamma\omega N\frac{(2+R+\theta)}{(1+R)^2(1+\theta)}$$

$$A_{t+1} = c_{1_t}\left[\frac{\omega N\gamma}{\beta}\frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)(1+R)}\right] \quad (1.57)$$

Usando (1.81) y (1.85):

$$A_t = c_{1_t}\left[\frac{\omega N\gamma(2+R+\theta)}{\beta(1+\theta)(b-1)}\right] \quad (1.58)$$

Retomando (1.84):

$$k_t: -\frac{\beta}{c_{1\,t-1}} + \frac{(\alpha k_t^{\alpha-1})\beta}{c_{1t}(1+R)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{A_{t+1}(1+R)(1+\theta)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{A_{t+1}(1+R)^2} = 0$$

Ahora sustituyo (1.85) en (1.84):

$$-\frac{\beta}{c_{1\,t-1}} + \frac{(\alpha k_t^{\alpha-1})\beta}{c_{1t}(1+R)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{c_{1_t}\left[\frac{\omega N\gamma}{\beta}\frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)(1+R)}\right](1+R)(1+\theta)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{c_{1_t}\left[\frac{\omega N\gamma}{\beta}\frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)(1+R)}\right](1+R)^2} = 0$$

$$-\frac{\beta}{c_{1\,t-1}} + \frac{(\alpha k_t^{\alpha-1})\beta}{c_{1t}(1+R)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{c_{1_t}\left[\frac{\omega N\gamma}{\beta}\frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)(1+R)}\right](1+R)(1+\theta)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{c_{1_t}\left[\frac{\omega N\gamma}{\beta}\frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)(1+R)}\right](1+R)^2} = 0$$

$$-\frac{\beta}{c_{1\,t-1}} + \frac{(\alpha k_t^{\alpha-1})\beta}{c_{1t}(1+R)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{c_{1_t}\left[\frac{\omega N\gamma}{\beta}(2+R+\theta)\right]} + \frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{c_{1_t}\left[\frac{\omega N\gamma}{\beta}\frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)}\right](1+R)} = 0$$

$$\frac{\beta}{c_{1\,t-1}} = \frac{1}{c_{1t}}\left[\frac{(\alpha k_t^{\alpha-1})\beta}{(1+R)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{\left[\frac{\omega N\gamma}{\beta}(2+R+\theta)\right]} + \frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{\left[\frac{\omega N\gamma}{\beta}\frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)}\right](1+R)}\right] \quad (1.59)$$

Ahora tomo la ecuación (1.59):

$$-\frac{\beta}{c_{1t-1}} = \frac{\beta}{c_{1t-1}}\left(\alpha k_t^{\alpha-1}\frac{(\omega - e)}{\omega(1+R)}\right)$$

$$-\frac{1}{c_{1t-1}} = \frac{1}{c_{1t}}\left(\alpha k_t^{\alpha-1}\frac{(\omega - e)}{\omega(1+R)}\right) \quad (1.60)$$

Reemplazando (1.60) en (1.55), se tiene:

$$c_{2_t} = c_{1t-1}\frac{\left(\alpha k_t^{\alpha-1}\frac{(\omega-e)}{\omega(1+R)}\right)}{(1+\theta)} \quad (1.61)$$

### C.1.2 Estado estacionario y regla de oro –considerando depreciación- d es 1:

Se realiza el análisis de estado estacionario en (1.87):

$$c_1^*;\ c_2^*;\ k^* = c_1;\ c_2;\ k$$

$$\frac{\beta}{c_1} = \frac{1}{c_1}\left[\frac{(\alpha k^{\alpha-1})\beta}{(1+R)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k^{\alpha-1})}{\left[\frac{\omega N\gamma}{\beta}(2+R+\theta)\right]} + \frac{\gamma(-eN\alpha k^{\alpha-1})}{\left[\frac{\omega N\gamma}{\beta}\frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)}\right](1+R)}\right]$$

$$-\beta + \left[\frac{(\alpha k^{\alpha-1})\beta}{(1+R)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k^{\alpha-1})}{\left[\frac{\omega N\gamma}{\beta}(2+R+\theta)\right]} + \frac{\gamma(-eN\alpha k^{\alpha-1})}{\left[\frac{\omega N\gamma}{\beta}\frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)}\right](1+R)}\right] = 0$$

$$-\beta + \frac{\beta\alpha k^{\alpha-1}}{(1+R)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k^{\alpha-1})}{\left[\frac{\omega N\gamma}{\beta}(2+R+\theta)\right]} + \frac{\gamma(-eN\alpha k^{\alpha-1})}{\left[\frac{\omega N\gamma}{\beta}\frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)}\right](1+R)} = 0$$

$$-\beta + \frac{\beta\alpha k^{\alpha-1}}{(1+R)} + \frac{(-e\beta\alpha k^{\alpha-1})}{\omega(1+R)} = 0$$

$$-\beta + \alpha k^{\alpha-1}\frac{\beta(\omega - e)}{\omega(1+R)} = 0$$

$$-\beta(1+R) + \alpha k^{\alpha-1}\frac{\beta(\omega - e)}{\omega} = 0$$

$$\frac{\omega(1+R)}{(\omega - e)} = \alpha k^{\alpha-1}$$

Obtenemos la siguiente condición, que establece que el rendimiento marginal del capital –tasa de interés-, en estado estacionario. Esta es la regla de oro modificada. Cabe notar que si R es igual a cero, es la regla de oro del capital:

$$\frac{\omega(1+R)}{(\omega-e)} = \alpha k^{\alpha-1} = f'(k_{oro}) \quad (1.62)$$

Cabe notar que la regla de oro no está totalmente determinada pues falta la condición de la calidad medioambiental. Ahora se prosige obteniendo el capital estacionario que cumple con la regla de oro modificada:

$$\left[\frac{\omega(1+R)}{\alpha(\omega-e)}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}} = k$$

$$\left[\frac{\alpha(\omega-e)}{\omega(1+R)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} = k \quad (1.63)$$

La existencia de este estado estacionario se garantiza si $\omega > e$:; esta condición es similar a la condición de existencia en el caso descentralizado y muestra los límites que impone la introducción de variables ambientales al modelo de generaciones traslapadas. En el caso de que $\omega = e$, tenemos un capital estacionario de cero - $k = 0$-, una solución trivial.

Ahora se analizará el efecto del descuento intergeneracional en el nivel de capital estacionario:

$$\frac{dk}{dR} = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{\alpha(\omega-e)}{\omega(1+R)}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{\alpha(e-\omega)}{\omega(1+R)^2} \quad (1.64)$$

$$\frac{dk}{dR} < 0; w > e$$

El caso de R cero o equidad intergeneracional, nos da el capital dorado, que garantiza la sostenibilidad débil del modelo. En el caso de que todas las generaciones sean consideradas como iguales por el planificador central –R igual a cero-, tenemos el capital dorado -$k_{oro}$-:

$$\left[\frac{\alpha(\omega-e)}{\omega}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} = k_{oro};\ R=0 \quad (1.65)$$

Para caracterizar la era de dorada de la economía se debe establecer el nivel dorado del medioambiente. Ahora se recuerda (1.82):

$$m_t = \left[(b-1)A_t\frac{2+R}{(1+R)} - b\bar{A} + eNk_t^{\alpha}\right] / \omega N$$

Se reemplaza (1.86) en (1.82):

$$m_t = \left[(b-1)c_{1_t}\left[\frac{\omega N\gamma(2+R+\theta)}{\beta(1+\theta)(b-1)}\right]\frac{2+R}{(1+R)} - b\bar{A} + eNk_t^{\alpha}\right] / \omega N$$

$$m = \left[c_1\left[\frac{\omega N\gamma(2+R+\theta)}{\beta(1+\theta)}\right]\frac{2+R}{(1+R)} - b\bar{A} + eNk^{\alpha}\right] / \omega N \quad (1.66)$$

En estado estacionario (1.83):

$$c_2 = \frac{(1+R)}{(1+\theta)}c_1$$

Además en la restricción:

$$k^{\alpha} = k + c_1 + c_2 + m$$

Ahora reemplazo (1.95), (1.83) en la restricción, en estado estacionario:

$$-k^{\alpha} + k + c_1 + \frac{(1+R)}{(1+\theta)}c_1 + \frac{\left[\left[c_1\frac{\omega N\gamma(2+R+\theta)}{\beta(1+\theta)}\right]\frac{2+R}{(1+R)} - b\bar{A} + eNk^{\alpha}\right]}{\omega N} = 0$$

$$S \equiv \frac{\gamma(2+R+\theta)}{\beta(1+\theta)}$$

$$c_1\left(1+\frac{(1+R)}{(1+\theta)}+S\frac{(2+R)}{(1+R)}\right)=k^{\alpha}\left(1-\frac{e}{\omega}\right)-k+\frac{b\bar{A}}{\omega N}$$

$$c_1=\frac{\left[k^{\alpha}(\frac{w-e}{\omega})-k+\frac{b\bar{A}}{\omega N}\right]}{\left(1+\frac{(1+R)}{(1+\theta)}+S\frac{(2+R)}{(1+R)}\right)} \quad (1.67)$$

La ecuación (1.96) caracteriza el consumo de los jóvenes en estado estacionario, en el comando central. Es directo derivar el consumo de los viejos:

$$c_2=\frac{(1+R)}{(1+\theta)}\frac{\left[k^{\alpha}(\frac{w-e}{\omega})-k+\frac{b\bar{A}}{\omega N}\right]}{\left(1+\frac{(1+R)}{(1+\theta)}+S\frac{(2+R)}{(1+R)}\right)} \quad (1.68)$$

La calidad ambiental estacionaria se obtiene reemplazando (1.67) en (1.57):

$$A=c_1\left[\frac{\omega N\gamma}{\beta}\frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)(1+R)}\right] \quad (1.69)$$

En términos per-cápita en el estado estacionario[5]:

$$A=\frac{\left[k^{\alpha}\left(\frac{w-e}{\omega}\right)-k+\frac{b\bar{A}}{\omega N}\right]}{\left(1+\frac{(1+R)}{(1+\theta)}+S\frac{(2+R)}{(1+R)}\right)}\left[\frac{\omega N\gamma}{\beta}\frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)(1+R)}\right]$$

$$a=\frac{\left[k^{\alpha}\left(\frac{w-e}{\omega}\right)-k+\frac{b\bar{A}}{\omega N}\right]}{\left(1+\frac{(1+R)}{(1+\theta)}+\left[\frac{\gamma(2+R+\theta)}{\beta(1+\theta)}\right]\frac{(2+R)}{(1+R)}\right)}\left[\frac{\omega\gamma}{\beta}\frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)(1+R)}\right] \quad (1.70)$$

Esta ecuación determina el nivel estacionario del comando central, para la calidad medioambiental per-cápita.

[5] No se debe confundir el superíndice a –alpha- que es la contribución del capital al producto de la variable a, que es el estado estacionario per-cápita del nivel de calidad ambiental. Se debe tener cuidado, por la similitud de los caracteres utilizados.

$$a = \frac{\left[k^{\alpha}\left(\frac{w-e}{\omega}\right) - k + \frac{b\bar{A}}{\omega N}\right]}{\left(1 + \frac{1}{(1+\theta)} + \left[\frac{\gamma(2+\theta)}{\beta(1+\theta)}\right]2\right)}\left[\frac{\omega\gamma}{\beta}\frac{(2+\theta)}{(1+\theta)}\right] \quad (1.71)$$

La era dorada de la economía, queda determinada por el nivel de capital dorado y calidad ambiental dorada, así:

$$\left[\frac{\alpha(\omega - e)}{\omega}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} = k_{oro}$$

$$\left[k^{\alpha}\left(\frac{w-e}{\omega}\right) - k + \frac{b\bar{A}}{\omega N}\right]\left[\frac{\omega\gamma}{\beta + 2\gamma}\right] = a_{oro}$$

## C.2 Comando central sin depreciación

$$Max \quad \sum_{t=0}^{\infty}(1+R)^{-t-1}\left[u(c_{1_t}, A_t) + (1+\theta)^{-1}u(c_{2_{t+1}}, A_{t+1})\right] \quad (1.72)$$

Sujeto a[6]:

$$s.a. \quad K_t + K_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha} = K_{t+1} + Nc_{1_t} + Nc_{2_t} + M_t \quad (1.73)$$

$$A_{(t+1)} = (1-b)A_t + b\bar{A} - P_t + \omega M_t \quad (1.74)$$

Utilizando, la ecuación paramétrica de la utilidad:

$$Max \quad \sum_{t=0}^{\infty}(1+R)^{-t-1}\left[\beta\ln c_{1_t} + \gamma\ln A_t + (1+\theta)^{(-1)}\left(\beta\ln c_{2_{(t+1)}} + \gamma\ln A_{(t+1)}\right)\right]$$

$$s.a. \quad k_t + k_t^{\alpha} = k_{t+1} + c_{1_t} + c_{2_t} + m_t \quad (1.75)$$

$$A_{(t+1)} = (1-b)A_t + b\bar{A} - P_t + \omega M_t$$

$$A_{(t+1)} = (1-b)A_t + b\bar{A} - eN\cdot k_t^{a} + \omega\cdot Nm_t \quad (1.76)$$

[6] Para el análisis del comando central se considera el caso de $n = 0, N_t = N_{t+1} = N$.

Para solucionar el modelo, se reemplaza las restricciones en la función objetivo. El método utilizado aquí es similar al de Blanchard & Fischer (1989). Por facilidad notacional, se expresará las condiciones de primer orden –CPO-, en términos de la ecuación(1.72). Ahora:

$$\ldots + [u(c_{1_{t-1}}, A_{t-1}) + (1+\theta)^{-1}u(c_{2_t}, A_t)] + (1+R)^{-1}[u(c_{1_t}, A_t) + (1+\theta)^{-1}u(c_{2_{t+1}}, A_{t+1})] + \ldots$$

$$= \ldots + u[k_{t-1} + k_{t-1}^{\alpha} - k_t - c_{2_{t-1}} - m_{t-1}, A_{t-1}] + \ldots$$

$$\ldots + (1+\theta)^{-1}u(c_{2_t}, A_t) + (1+R)^{-1}u[k_t + k_t^{\alpha} - k_{t+1} - c_{2t} - m_t, A_t] + \ldots$$

$$\ldots + (1+R)^{-1}(1+\theta)^{-1}u(c_{2_{t+1}}, [(1-b)A_t + b\bar{A} - eN \cdot k_t^{a} + \omega \cdot Nm_t]) + \ldots$$

Se deriva la función objetivo, para las variables de estado, kt y at y para las variables de control ct y mt. Tenemos cuatro CPO:

$$A_t : (1+\theta)^{-1}u_2(c_{2_t}, A_t) + (1+R)^{-1}u_2(c_{1_t}, A_t) + \ldots$$

$$\ldots + (1+R)^{-1}(1+\theta)^{-1}u_2(c_{2_{t+1}}, A_{t+1})(1-b) + (1+R)^{-2}u_2(c_{1_{t+1}}, A_{t+1})(1-b) = 0 \quad (1.77)$$

$$c_{2_t} : (1+\theta)^{-1}u_1(c_{2_t}, A_t) - (1+R)^{-1}u_1(c_{1_t}, A_t) = 0 \quad (1.78)$$

$$k_t : -u_1(c_{1_{t-1}}, A_{t-1}) + (1+R)^{-1}(1+\alpha k_t^{\alpha-1})u_1(c_{1_t}, A_t) + \ldots$$

$$\ldots + (1+R)^{-1}(1+\theta)^{-1}u_2(c_{2_{t+1}}, A_{t+1})(-eN\alpha k_t^{\alpha-1}) + \ldots$$

$$\ldots + (1+R)^{-2}u_2(c_{1_{t+1}}, A_{t+1})](-eN\alpha k_t^{\alpha-1}) = 0 \quad (1.79)$$

$$m_t : -(1+R)^{-1}u_1(c_{1_t}, A_t) + (1+R)^{-1}(1+\theta)^{-1}u_2(c_{2_{t+1}}, A_{t+1})(\omega N) + \ldots$$

$$\ldots + (1+R)^{-2}u_2(c_{1_{t+1}}, A_{t+1})(\omega N) = 0 \quad (1.80)$$

Ahora el sistema queda completamente determinado, para encontrar una solución, se utiliza la ecuación logarítimica paramétrica, y las CPO quedan determinadas así:

La condición (1.77):

$$A_t : (1+\theta)^{-1}\frac{\gamma}{A_t} + (1+R)^{-1}\frac{\gamma}{A_t} + \ldots$$

$$\ldots + (1+R)^{-1}(1+\theta)^{-1}\frac{\gamma}{A_{t+1}}(1-b) + (1+R)^{-2}\frac{\gamma}{A_{t+1}}(1-b) = 0$$

Un poco de manipulación:

$$\frac{1}{A_t}\left(\frac{\gamma}{(1+\theta)} + \frac{\gamma}{(1+R)}\right) = -\frac{1}{A_{t+1}}\left(\frac{\gamma(1-b)}{(1+R)(1+\theta)} + \frac{\gamma(1-b)}{(1+R)^2}\right)$$

$$\frac{A_{t+1}}{A_t} = \frac{(b-1)}{(1+R)} \quad (1.81)$$

Reemplazando (1.81) en la restricción:

$$\frac{(b-1)}{(1+R)}A_t = (1-b)A_t + b\bar{A} - P_t + \omega M_t$$

Ahora se tiene, la ecuación centralizada para mt:

$$M_t = \left[(b-1)A_t\frac{2+R}{(1+R)}A_t - b\bar{A} + P_t\right]/\omega$$

En téminos per-cápita:

$$m_t = \left[(b-1)A_t\frac{2+R}{(1+R)}A_t - b\bar{A} + P_t\right]/\omega N$$

$$m_t = \left[(b-1)A_t\frac{2+R}{(1+R)} - b\bar{A} + eNk_t^{\alpha}\right]/\omega N \quad (1.82)$$

$$\frac{dm_t}{d(P_t)} > 0;\ \frac{dm_t}{dA_t} < 0;\ \frac{dm_t}{dA^-} < 0;\ \frac{dm_t}{dN} \gtrless 0$$

El planificador central no respeta la elección de mt individual.

La condición (1.78):

$$c_{2_t}:\ (1+\theta)^{-1}\frac{\beta}{c_{2t}}-(1+R)^{-1}\frac{\beta}{c_{1t}}=0$$

$$c_{1_t}=\frac{(1+\theta)}{(1+R)}c_{2_t} \quad (1.83)$$

Esta ecuación, muestra como el planificador asigna el consumo entre las generaciones que están viviendo en el mimo tiempo t.

La condición (1.79):

$$k_t:\ -\frac{\beta}{c_{1\ t-1}}+(1+R)^{-1}(1+\alpha k_t^{\alpha-1})\frac{\beta}{c_{1t}}+\ldots$$

$$\ldots+(1+R)^{-1}(1+\theta)^{-1}\frac{\gamma}{A_{t+1}}(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})+\ldots$$

$$\ldots+(1+R)^{-2}\frac{\gamma}{A_{t+1}}(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})=0 \quad (1.84)$$

La condición (1.80):

$$m_t:\ -(1+R)^{-1}\frac{\beta}{c_{1t}}+(1+R)^{-1}(1+\theta)^{-1}\frac{\gamma}{A_{t+1}}(\omega N)+\ldots$$

$$\ldots+(1+R)^{-2}\frac{\gamma}{A_{t+1}}(\omega N)=0$$

$$\frac{\beta}{(1+R)}\frac{1}{c_{1t}}=\frac{1}{A_{t+1}}\gamma\omega N\frac{(2+R+\theta)}{(1+R)^2(1+\theta)}$$

$$A_{t+1}=c_{1_t}\left[\frac{\omega N\gamma}{\beta}\frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)(1+R)}\right] \quad (1.85)$$

Usando (1.81) y (1.85):

$$A_t=c_{1t}\left[\frac{\omega N\gamma(2+R+\theta)}{\beta(1+\theta)(b-1)}\right] \quad (1.86)$$

Retomando (1.84):

$$k_t:\ -\frac{\beta}{c_{1\ t-1}}+\frac{(1+\alpha k_t^{\alpha-1})\beta}{c_{1t}(1+R)}+\frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{A_{t+1}(1+R)(1+\theta)}+\frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{A_{t+1}(1+R)^2}=0$$

Ahora sustituyo (1.85) en (1.84):

$$-\frac{\beta}{c_{1\ t-1}}+\frac{(1+\alpha k_t^{\alpha-1})\beta}{c_{1t}(1+R)}+\frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{c_{1_t}\left[\frac{\omega N\gamma}{\beta}\frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)(1+R)}\right](1+R)(1+\theta)}+\frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{c_{1_t}\left[\frac{\omega N\gamma}{\beta}\frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)(1+R)}\right](1+R)^2}=0$$

$$-\frac{\beta}{c_{1\ t-1}}+\frac{(1+\alpha k_t^{\alpha-1})\beta}{c_{1t}(1+R)}+\frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{c_{1_t}\left[\frac{\omega N\gamma}{\beta}\frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)(1+R)}\right](1+R)(1+\theta)}+\frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{c_{1_t}\left[\frac{\omega N\gamma}{\beta}\frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)(1+R)}\right](1+R)^2}=0$$

$$-\frac{\beta}{c_{1\ t-1}}+\frac{(1+\alpha k_t^{\alpha-1})\beta}{c_{1t}(1+R)}+\frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{c_{1_t}\left[\frac{\omega N\gamma}{\beta}(2+R+\theta)\right]}+\frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{c_{1_t}\left[\frac{\omega N\gamma}{\beta}\frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)}\right](1+R)}=0$$

$$\frac{\beta}{c_{1\ t-1}}=\frac{1}{c_{1t}}\left[\frac{(1+\alpha k_t^{\alpha-1})\beta}{(1+R)}+\frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{\left[\frac{\omega N\gamma}{\beta}(2+R+\theta)\right]}+\frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{\left[\frac{\omega N\gamma}{\beta}\frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)}\right](1+R)}\right] \quad (1.87)$$

Factorando y reordenando los términos:

$$\frac{\beta}{c_{1\ t-1}}=\frac{1}{c_{1t}}\left[\frac{\beta}{(1+R)}+\alpha k_t^{\alpha-1}\frac{\beta(\omega-e)}{\omega(1+R)}\right] \quad (1.88)$$

$$\beta\frac{c_{1t}}{c_{1\ t-1}}=\left[\frac{\beta(\omega+\alpha k_t^{\alpha-1}(\omega-e))}{\omega(1+R)}\right]$$

$$c_{1t}=\left[\frac{(\omega+\alpha k_t^{\alpha-1}(\omega-e))}{\omega(1+R)}\right]c_{1\ t-1} \quad (1.89)$$

Reemplazo (1.89) en la condición (1.83):

$$\left[\frac{(\omega+\alpha k_t^{\alpha-1}(\omega-e))}{\omega(1+R)}\right]c_{1\ t-1}=\frac{(1+\theta)}{(1+R)}c_{2_t}$$

$$\left[\frac{(\omega+\alpha k_t^{\alpha-1}(\omega-e))}{\omega}\right]c_{1\ t-1}=(1+\theta)c_{2_t}$$

$$\left[\frac{(\omega+\alpha k_t^{\alpha-1}(\omega-e))}{(1+\theta)\omega}\right]c_{1\ t-1}=c_{2t}$$

Ahora obtenemos la ecuación que caracteriza la asiganción de consumo entre los dos períodos de vida de la misma generación:

$$\left[\frac{\left(1+\alpha k_t^{\alpha-1}\frac{(\omega-e)}{\omega}\right)}{(1+\theta)}\right] c_{1\,t-1} = c_{2t} \tag{1.90}$$

Esta condición, cambia en el comando central, respecto a la solución estándar del modelo de generaciones traslpadas sin medioambiente, ya que la asignación del consumo entre la juventud y la vejez no es equivalente a la solución descentralizada -(1.5)–[7].

### C.2.1 Estado estacionario y regla de oro

Se realiza el análisis de estado estacionario en (1.87):

$$c_1^*;\ c_2^*;\ k^* = c_1;\ c_2;\ k$$

$$\frac{\beta}{c_1} = \frac{1}{c_1}\left[\frac{(1+\alpha k^{\alpha-1})\beta}{(1+R)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k^{\alpha-1})}{\left[\frac{\omega N\gamma}{\beta}(2+R+\theta)\right]} + \frac{\gamma(-eN\alpha k^{\alpha-1})}{\left[\frac{\omega N\gamma}{\beta}\frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)}\right](1+R)}\right]$$

$$-\beta + \left[\frac{(1+\alpha k^{\alpha-1})\beta}{(1+R)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k^{\alpha-1})}{\left[\frac{\omega N\gamma}{\beta}(2+R+\theta)\right]} + \frac{\gamma(-eN\alpha k^{\alpha-1})}{\left[\frac{\omega N\gamma}{\beta}\frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)}\right](1+R)}\right] = 0$$

$$-\beta + \frac{\beta}{(1+R)} + \frac{\beta\alpha k^{\alpha-1}}{(1+R)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k^{\alpha-1})}{\left[\frac{\omega N\gamma}{\beta}(2+R+\theta)\right]} + \frac{\gamma(-eN\alpha k^{\alpha-1})}{\left[\frac{\omega N\gamma}{\beta}\frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)}\right](1+R)} = 0$$

$$-\beta + \frac{\beta}{(1+R)} + \alpha k^{\alpha-1}\frac{\beta(\omega-e)}{\omega(1+R)} = 0$$

$$-\beta(1+R) + \beta + \alpha k^{\alpha-1}\frac{\beta(\omega-e)}{\omega} = 0$$

$$-\beta R + \alpha k^{\alpha-1}\frac{\beta(w-e)}{\omega} = 0$$

$$\frac{\omega R}{(\omega-e)} = \alpha k^{\alpha-1}$$

[7] Cuándo se iguala la tasa de interés con el producto margina del capital en t, la condición de primer orden del problema de la firma, en el modelo estándar de generaciones traslapadas se respeta la desición descentralizada.

Obtenemos la siguiente condición, que establece que el rendimiento marginal del capital –tasa de interés-, en estado estacionario. Esta es la regla de oro modificada[8]:

$$\frac{\omega R}{(\omega - e)} = \alpha k^{\alpha - 1} = f'(k_{oro}) \quad (1.91)$$

Cabe notar que la edad de oro no está totalmente determinada pues falta la condición de la calidad medioambiental. Ahora se prosige obteniendo el capital estacionario que cumple con la regla de oro modificada:

$$\left[\frac{\omega R}{\alpha(\omega - e)}\right]^{\frac{1}{\alpha - 1}} = k$$

$$\left[\frac{\alpha(\omega - e)}{\omega R}\right]^{\frac{1}{1 - \alpha}} = k \quad (1.92)$$

$$\omega > e,\ R > 0, k > 0$$

$$\omega = e,\ k = 0$$

La existencia de este estado estacionario se garantiza si $\omega > e$:; esta condición es similar a la condición de existencia de un estado estacionario no trivial, en el caso descentralizado - $\omega(1 - \alpha) > e$ -.

Ahora se analizará el efecto del descuento intergeneracional en el nivel de capital estacionario:

$$\frac{dk}{dR} = \frac{1}{1 - \alpha}\left[\frac{\alpha(\omega - e)}{\omega R}\right]^{\frac{\alpha}{1 - \alpha}} \frac{\alpha(e - \omega)}{\omega R^2} \quad (1.93)$$

[8] Con un poco de algebra se demuestra que si e es igual a cero, o no hay contaminación, entonces tenemos la regla de oro es $f'(k^*) = R$, que es idéntica a la regla de oro en el modelo de generaciones traslapadas sin medioambiente. Este resultado se debe a que la versión del modelo de generaciones traslapadas sin medioambiente es un caso especial en el cuál no existe contaminación –lo que es imposible-.

$$\frac{dk}{dR} < 0; w > e$$

En el caso de que todas las generaciones sean consideradas como iguales por el planificador central –R igual a cero-, tenemos el capital dorado de equidad intergeneracional -$k_{oro}$-:

$$k_{oro} = 0, R = 0 \quad (1.94)$$

Esta solución no es trivial, ya que la economía se convierte en una economía de cosecha. El consumo y la calidad medioambiental son positivos.

Para caracterizar la era de dorada de la economía se debe establecer el nivel dorado del medioambiente. Ahora se recuerda (1.82):

$$m_t = \left[(b-1)A_t\frac{2+R}{(1+R)} - b\bar{A} + eNk_t^{\alpha}\right]/\omega N$$

Se reemplaza (1.86) en (1.82):

$$m_t = \left[(b-1)c_{1_t}\left[\frac{\omega N\gamma(2+R+\theta)}{\beta(1+\theta)(b-1)}\right]\frac{2+R}{(1+R)} - b\bar{A} + eNk_t^{\alpha}\right]/\omega N$$

$$m = \left[c_1\left[\frac{\omega N\gamma(2+R+\theta)}{\beta(1+\theta)}\right]\frac{2+R}{(1+R)} - b\bar{A} + eNk^{\alpha}\right]/\omega N \quad (1.95)$$

En estado estacionario (1.83):

$$c_2 = \frac{(1+R)}{(1+\theta)}c_1$$

Además, en la restricción:

$$k + k^{\alpha} = k + c_1 + c_2 + m$$

Ahora reemplazo (1.95), (1.83) en la restricción, en estado estacionario:

$$-k^{\alpha}+c_1+\frac{(1+R)}{(1+\theta)}c_1+\frac{\left[\left[c_1\frac{\omega N\gamma(2+R+\theta)}{\beta(1+\theta)}\right]\frac{2+R}{(1+R)}-b\bar{A}+eNk^{\alpha}\right]}{\omega N}=0$$

$$S\equiv\frac{\gamma(2+R+\theta)}{\beta(1+\theta)}$$

$$c_1\left(1+\frac{(1+R)}{(1+\theta)}+S\frac{(2+R)}{(1+R)}\right)=k^{\alpha}\left(1-\frac{e}{\omega}\right)+\frac{b\bar{A}}{\omega N}$$

$$c_1=\frac{\left[k^{\alpha}(\frac{w-e}{\omega})+\frac{b\bar{A}}{\omega N}\right]}{\left(1+\frac{(1+R)}{(1+\theta)}+S\frac{(2+R)}{(1+R)}\right)} \quad (1.96)$$

La ecuación (1.96) caracteriza el consumo de los jóvenes en estado estacionario, en el comando central. Es fácil derivar el consumo de los viejos:

$$c_2=\frac{(1+R)}{(1+\theta)}\frac{\left[k^{\alpha}(\frac{w-e}{\omega})+\frac{b\bar{A}}{\omega N}\right]}{\left(1+\frac{(1+R)}{(1+\theta)}+S\frac{(2+R)}{(1+R)}\right)} \quad (1.97)$$

La calidad ambiental se obtiene de la ecuación (1.85):

$$A_{t+1}=c_{1_t}\left[\frac{\omega N\gamma}{\beta}\frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)(1+R)}\right]$$

$$A=c_1\left[\frac{\omega N\gamma}{\beta}\frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)(1+R)}\right] (1.98)$$

$$a=\frac{\left[k^{\alpha}(\frac{w-e}{\omega})+\frac{b\bar{A}}{\omega N}\right]}{\left(1+\frac{(1+R)}{(1+\theta)}+\left[\frac{\gamma(2+R+\theta)}{\beta(1+\theta)}\right]\frac{(2+R)}{(1+R)}\right)}\left[\frac{\omega\gamma}{\beta}\frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)(1+R)}\right] (1.99)$$

La identidad (1.99) determina el nivel estacionario del comando central, para la calidad medioambiental per-cápita. La condición de existencia es la misma del capital estacionario. Se tiene, el nivel de calidad ambiental que satisface la regla de oro modificada. Es difícil determinar el efecto de R sobre el nivel de calidad ambiental per-cápita[9]. Sin embargo, la ecuación (1.98) es idéntica a la solución de la era dorada. Entonces se puede tener directamente la segunda condición, para caracterizar totalmente la era dorada de la economía dónde se tiene el mayor nivel de consumo y calidad ambiental que no afectan el consumo de las demás generaciones –cuándo R es cero-:

$$a_{oro} = \frac{\left[k^{\alpha}\left(\frac{w-e}{\omega}\right) + \frac{b\bar{A}}{\omega N}\right]}{\left(1 + \frac{1}{(1+\theta)} + \left[\frac{\gamma(2+\theta)}{\beta(1+\theta)}\right]2\right)}\left[\frac{\omega\gamma}{\beta}\frac{(2+\theta)}{(1+\theta)}\right]$$

$$a_{oro} = \frac{\left[k^{\alpha}\left(\frac{w-e}{\omega}\right) + \frac{b\bar{A}}{\omega N}\right]\omega\gamma}{\beta + 2\gamma} \qquad (1.100)$$

La era dorada de la economía, con equidad intergeneracional perfecta, queda determinada por el nivel de capital dorado y calidad ambiental dorada, así:

$$k_{oro} = 0, R = 0$$

$$a_{oro} = \frac{\left[k^{\alpha}\left(\frac{w-e}{\omega}\right) + \frac{b\bar{A}}{\omega N}\right]\omega\gamma}{\beta + 2\gamma}$$

$$A^{-}_{oro} < A^{-}$$

$$m = \frac{2(b-1)A - bA^{-}}{w}N < 0$$

$$c_1 + c_2 = -m$$

$$c_1 = \frac{(1+\theta)}{(2+\theta)}(-m)$$

$$c_2 = \frac{1}{(2+\theta)}(-m)$$

Este resultado dice, que un planificador central que da igual peso a cada generación, dadas las tecnologías, restricciones y preferencias –y sin depreciación-, en un modelo de generaciones traslapadas, establece una

[9] Se realizan simulaciones numéricas para diferentes combinaciones de parámetros.

economía de cosecha en estado estacionario. Es decir, hay lugar para políticas extremas de decrecimiento o simplemente no se debe acumular capital[10].

## D. Regla de oro verde o edad de oro

Se debe encontrar los niveles mantenibles de manera indefinida para los cuales se maximiza la utilidad –en estado estacionario-. Ahora, el problema se establece así:

$$Max \quad U$$

$$Max[u(c_1, A) + (1+\theta)^{-1}u(c_2, A)]$$

Sujeto a:

$$(1-\delta)k + f(k) = k + c_1 + c_2 + m$$

$$f(k) = \delta k + c_1 + c_2 + m$$

$$bA = b\bar{A} - eN \cdot k^a + \omega \cdot Nm$$

Se utiliza la técnica del Lagranjiano:

$$\mathcal{L} = [u(c_1, A) + (1+\theta)^{-1}u(c_2, A)] + \lambda(bA - bA^{-} + eNf(k) - \omega N(f(k) - \delta k - c_1 - c_2)) \quad (1.101)$$

CPO:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = 0, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} = 0, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} = 0, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = u_1(c_1, A) + \omega N\lambda = 0 \quad (1.102)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} = (1+\theta)^{-1}u_1(c_2, A) + \omega N\lambda = 0 \quad (1.103)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} = \lambda eNf'(k) - \lambda\omega Nf'(k) + \lambda\omega N\delta = 0;\ \delta = 0{,}1 \quad (1.104)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} = u_2(c_1, A) + (1+\theta)^{-1}u_2(c_2, A) + \lambda b = 0 \quad (1.105)$$

[10] Es claro que poblaciones de la Amazonía o de África, viven en economías de cosecha. Estas economías son claramente más igualitarias y son sostenibles. Pero son también más pobres y vulnerables al ataque de otras poblaciones.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = (bA - b\bar{A} + eNf(k) - \omega N(f(k) - \delta k - c_1 - c_2)) = 0 \quad (1.106)$$

Utilizando las condiciones (1.102) y (1.103):

$$u_1(c_1, A) = (1 + \theta)^{-1} u_1(c_2, A) \quad (1.107)$$

De (1.104) tengo la condición:

$$\lambda N(ef'(k) - \omega f'(k) + \omega\delta) = 0; \delta = 0,1$$

Los dos casos considerados en esta investigación son la ausencia de depreciación y la depreciación total del capital. Ahora manipulando los términos:

$$(ef'(k) - \omega f'(k) + \omega\delta) = 0$$
$$(\omega - e)f'(k) = \omega\delta; \delta = 0,1$$
$$f'(k) = \frac{\omega\delta}{(\omega - e)}; \delta = 0,1 \quad (1.108)$$

La condición (1.108), para los dos casos considerados se transforma en:

$$f'(\bar{k}) = 0; \bar{\delta} = 0 \quad (1.109)$$
$$f'(k) = \frac{\omega}{(\omega - e)}; \delta = 1 \quad (1.110)$$

Ahora tomamos la condición (1.102) y la sustituimos en (1.105):

$$u_2(c_1, A) + (1 + \theta)^{-1} u_2(c_2, A) - \frac{u_1(c_1, A)}{\omega N} b = 0 \quad (1.111)$$

Se establece que cualquier economía –modelo- que en estado estacionario, cumpla simultáneamente con (1.107), (1.108) y (1.111), satisface la condición de la regla de oro verde o edad de oro.

Las condiciones (1.107) y (1.108) son cumplidas por el comando central y son directamente observables en las condiciones de primer orden, cuando R es cero o no hay descuento intergeneracional. La condición (1.111) requiere utilizar una función de utilidad específica, para poder observarla. Utilizando la función logarítmica utilizada a través del presente trabajo se tiene:

$$\frac{\gamma}{A}\left(1 + (1+\theta)^{-1}\right) = \frac{\beta}{\omega N b c_1} \quad (1.112)$$

Reordenando los términos se obtiene:

$$c_1 \frac{\gamma \omega b}{\beta} \frac{(2+\theta)}{(1+\theta)} = a \quad (1.113)$$

La condición (1.113), es cumplida por el comando central en sus condiciones de primer orden –mt-, cuándo R es cero – y para cualquier valor de la tasa de depreciación-. Ahora, queda demostrado que la única solución que cumple la regla de oro verde o edad de oro es el comando central sin descuento intertemporal –R es cero-.

## E. Análisis de óptimo paretiano:

Por la anterior discusión, y suponiendo la convexidad de la frontera de pareto, tenemos:

$$\forall\ (k_{cen},\ a_{cen}) \quad \exists\ R \geq 0 \Rightarrow k_{cen} = k_{des};\ a_{cen} = a_{des} \quad (1.114)$$[11]

Debido a que la proposición (1.114) es de tipo universal, se requiere un contraejemplo[12], para probar que es falsa:

$$\exists\ (k_{cen},\ a_{cen}) \quad para \quad un \quad R \geq 0 \Rightarrow k_{cen} \neq k_{des};\ a_{cen} \neq a_{des} \quad (1.115)$$

## E.1 Demostración para el caso de total depreciación:

La mejor asignación es la correspondiente a la regla de oro, o R el comando central cuándo R es cero. Se demuestra que la asignación dorada domina a la descentralizada.

Para que la asignación descentralizada sea óptimo en el sentido de pareto debe cumplirse que:

$$k_{cen} = k_{des};\ a_{cen} = a_{des}$$

Cuándo el comando central considera un R de cero, es decir, llega a su nivel dorado en estado estacionario.

Se considera el caso en que $k_{cen} = k_{des}$ . Esta condición es suficiente para el caso estándar sin medioambiente. Sin embargo, en este caso falta la segunda condición de medioambiente para la era dorada.

$$k_{des}^{*} = \left[\frac{N\beta[\omega(1-\alpha)-e]}{[N(2+\theta)\beta+\gamma b]\omega}\right]^{\frac{1}{(1-\alpha)}}$$

$$\left[\frac{\alpha(\omega-e)}{\omega}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} = k_{oro};\ R = 0$$

---

[11] Para todo solución centralizada, existe un R positivo o cero, tal que la solución descentralizada es igual a la centralizada. Esto es una reformulación del los dos teoremas del bienestar. Si se cumple esta proposición, la asignación descentralizada estará sobre la frontera de Pareto.

[12] Ya que la negación de una proposición universal es una proposición existencial.

$$k_{des}^{*} = k_{oro}$$

Tenemos que:

$$\left[\frac{\alpha(\omega - e)}{\omega}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left[\frac{N\beta[\omega(1-\alpha) - e]}{[N(2+\theta)\beta + \gamma b]\omega}\right]^{\frac{1}{(1-\alpha)}}$$

Lo que no se puede excluir, dado el rango de los parámetros. Es decir, la economía descentralizada puede alcanzar el nivel dorado de capital. No obstante, falla al cumplir la segunda condición de la regla de oro verde o era dorada:

Se demuestra así, por contradicción o reducción al absurdo:

$$a_{oro} = a_{des}$$

$$a_{des}^{*} = k_{des}^{*a}\left[\frac{[\omega(1-a) - e]}{\left[N\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b\right]}\right]$$

$$k_{des}^{*} = k_{oro}$$

$$a_{des}^{*} = k_{oro}^{\alpha}\left[\frac{[\omega(1-a) - e]}{\left[N\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b\right]}\right]$$

$$a_{des}^{*} = \left[\frac{\alpha(\omega - e)}{\omega}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left[\frac{[\omega(1-a) - e]}{\left[N\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b\right]}\right]$$

$$a_{oro} = \left[k_{oro}^{\alpha}\left(\frac{w-e}{\omega}\right) - k + \frac{b\bar{A}}{\omega N}\right]\left[\frac{\omega\gamma}{\beta + 2\gamma}\right]$$

$$\left[k_{oro}^{\alpha}\left(\frac{w-e}{\omega}\right) - k_{oro} + \frac{b\bar{A}}{\omega N}\right]\left[\frac{\omega\gamma}{\beta + 2\gamma}\right] = k_{oro}^{\alpha}\left[\frac{[\omega(1-a) - e]}{\left[N\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b\right]}\right]$$

$$\left[k_{oro}^{\alpha}\left(\frac{w-e}{\omega}\right)-k_{oro}+\frac{b\bar{A}}{\omega N}\right]\left[\frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma}\right]=k_{oro}^{\alpha}\left[\frac{[\omega(1-a)-e]}{\left[N\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma}+b\right]}\right]$$

$$\left[k_{oro}^{\alpha}\left(\frac{w-e}{\omega}\right)-k_{oro}\right]\left[\frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma}\right]=k_{oro}^{\alpha}\left[\frac{[\omega(1-a)-e]}{\left[N\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma}+b\right]}\right]-\frac{b\bar{A}}{\omega N}\left[\frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma}\right]$$

$$\left[k_{oro}^{\alpha}\left(\frac{w-e}{\omega}\right)-k_{oro}\right]\left[\frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma}\right]=k_{oro}^{\alpha}\left[\frac{[\omega(1-a)-e]}{\left[N\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma}+b\right]}\right]-\frac{b\bar{A}}{\omega N}\left[\frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma}\right]$$

$$k_{oro}^{\alpha}\left[\left(\frac{w-e}{\omega}\right)-k_{oro}^{1-\alpha}\right]\left[\frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma}\right]=k_{oro}^{\alpha}\left[\frac{[\omega(1-a)-e]}{\left[N\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma}+b\right]}\right]-\frac{b\bar{A}}{\omega N}\left[\frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma}\right]$$

$$k_{oro}^{\alpha}\left[\left(\frac{w-e}{\omega}\right)-\left[\frac{\alpha(\omega-e)}{\omega}\right]\right]\left[\frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma}\right]=k_{oro}^{\alpha}\left[\frac{[\omega(1-a)-e]}{\left[N\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma}+b\right]}\right]-\frac{b\bar{A}}{\omega N}\left[\frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma}\right]$$

$$k_{oro}^{\alpha}\left[(1-\alpha)\left(\frac{w-e}{\omega}\right)\right]\left[\frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma}\right]=k_{oro}^{\alpha}\left[\frac{[\omega(1-a)-e]}{\left[N\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma}+b\right]}\right]-\frac{b\bar{A}}{\omega N}\left[\frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma}\right]$$

$$k_{oro}^{\alpha}\left[\left(\frac{(1-\alpha)(w-e)}{\omega}\right)\right]\left[\frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma}\right]+\frac{b\bar{A}}{\omega N}\left[\frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma}\right]>k_{oro}^{\alpha}\left[\frac{[\omega(1-a)-e]}{\left[N\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma}+b\right]}\right]$$

$$\left[\left(\frac{(1-\alpha)(w-e)}{\omega}\right)\right]\left[\frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma}\right]+\frac{b\bar{A}}{\omega N}\left[\frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma}\right]>\left[\frac{[\omega(1-a)-e]}{\left[N\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma}+b\right]}\right] \quad (1.116)$$

$$a_{cen} \neq a_{des}$$

$$a_{cen} > a_{des}$$

Queda demostrado, que la asignación descentralizada de estado estacionario no es óptimo de pareto, pues se sobredegrada el medioambiente o se submantiene el medioambiente. Esto ocurre por las externalidades e imperfecciones de mercado.

Para mostrar el efecto de la tragedia de los comunes sobre la eficiencia de la economía descentralizada se tiene que:

$$a_{des} = 0, N \to \infty$$

$$a_{oro} = k_{oro}^{\alpha}\left[\left(\frac{(1-\alpha)(w-e)}{\omega}\right)\right]\left[\frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma}\right], N \to \infty$$

Lo mismo ocurre para el caso de que la impaciencia por consumir hoy tienda al infinito. Esto significa que se da un peso de cero al futuro.

$$a_{cen} > a_{des}, N \to \infty, \theta \to \infty$$

Estos casos extremos, sirven para ilustrar que una población grande y una impaciencia alta afectan negativamente a la eficiencia de la economía y reducen el nivel de calidad ambiental hasta su nivel de cero.

Para demostrar que un gobierno de vida corta o un mecanismo de cooperación intrageneracional que elimine la tragedia de los comunes, aún cuándo la impaciencia por consumir hoy sea cero; es incapaz de alcanzar el óptimo de pareto se tiene –de (1.116)-:

$$\left[\left(\frac{(1-\alpha)(w-e)}{\omega}\right)\right]\left[\frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma}\right]+\frac{b\bar{A}}{\omega}\left[\frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma}\right] > \left[\frac{\gamma[\omega(1-a)-e]}{[2\beta+\gamma b]}\right], N = 1, \theta = 0$$

$$a_{cen} > a_{des}, N \to 1, \theta \to 0$$

## E.2 Demostración para el caso sin depreciación:

La mejor asignación es la correspondiente a la regla de oro, o cuándo R es cero:

$$k_{cen} = k_{des};\ a_{cen} = a_{des}$$

La primera parte de esta condición requiere que:

$$k_{des}^{*} = \left[\frac{N\beta[\omega(1-\alpha)-e]}{[N(2+\theta)\beta+\gamma b]\omega}\right]^{\frac{1}{(1-\alpha)}}$$

$$k_{cen}^{*} = 0, R = 0$$

$$k_{des}^{*} = 0$$

$$0 = \left[\frac{N\beta[\omega(1-\alpha)-e]}{[N(2+\theta)\beta+\gamma b]\omega}\right]^{\frac{1}{(1-\alpha)}}$$

Esto está permitido dentro del rango de los parámetros. Ahora, la segunda parte de la condición requiere que:

$$a_{cen} = a_{des}$$

$$a_{des}^{*} = k_{des}^{*a}\left[\frac{[\omega(1-a)-e]}{\left[N\frac{(2+\theta)\beta}{\gamma}+b\right]}\right]$$

$k_{des}^{*} = 0 \quad a_{des}^{*} = 0$ [13]

Pero se tiene:

$$a_{cen} = \frac{2b\gamma}{(\beta+2\gamma)N}A^{-},\ R = 0, k_{cen} = 0$$

$$a_{cen} \neq a_{des}$$

Queda demostrado que la asignación en estado estacionario del modelo descentralizado, no es óptima en el sentido débil de pareto.

## F. Análisis de equidad intergeneracional

[13] La solución trivial descentralizada de estado estacionario.

Una función de bienestar especial, permite ver las actitudes sobre la equidad, ajustando un solo parámetro es la función de elasticidad constante de sustitución –CES-; o también conocidad como de aversión relativa al riesgo, en este caso aversión a la desigualdad –CARA-.  Es fácil mostrar, que la solución del planificador central desarrollada aquí, cuándo R es cero, es equivalente al caso de una función de bienestar social CES o CRRA, cuándo la elasticidad o alternativamente la aversión a la desigualda tiende a cero. Si la aversión a la desigualda es infinita este tipo de función se transforma en la función de bienestar de Leontief. Este tipo de funciones de bienestar social –Leontief, ha sido utilizada como una interpretación del principio de equidad rawlsiana.

Se parte de una función de tipo CES. Ahora el problema queda definido así:

$$Max \quad \sum_{t=0}^{\infty}\left[u(c_{1_t}, A_t) + (1+\theta)^{-1}u(c_{2_{t+1}}, A_{t+1})\right]^{(1-\rho)}$$

$$s.a. \quad k_t + k_t^{\alpha} = k_{t+1} + c_{1_t} + c_{2_t} + m_t$$

$$A_{(t+1)} = (1-b)A_t + b\bar{A} - eN \cdot k_t^{a} + \omega \cdot Nm_t$$

Si desarrollamos la sumatoria de la función de bienestar objetivo obtenemos la siguiente serie:

$$\dots + [u(c_{1_{t-1}}, A_{t-1}) + (1+\theta)^{-1}u(c_{2_t}, A_t)]^{(1-\rho)} + [u(c_{1_t}, A_t) + (1+\theta)^{-1}u(c_{2_{t+1}}, A_{t+1})]^{(1-\rho)} + \dots$$

De manera análoga al problema del comando central utilitarista, se procede a sustituir las restricciones en la función objetivo y se obtiene las condiciones de primer orden:

$$A_t : (1-\rho)U_{t-1}^{-\rho}(1+\theta)^{-1}u_2(c_{2_t}, A_t) + (1-\rho)U_t^{-\rho}u_2(c_{1_t}, A_t) + \dots \quad (1.117)$$

$$\dots + (1-\rho)U_t^{-\rho}(1+\theta)^{-1}u_2(c_{2_{t+1}}, A_{t+1})(1-b) + (1-\rho)U_{t+1}^{-\rho}u_2(c_{1_{t+1}}, A_{t+1})(1-b) = 0$$

$$c_{2_t} : (1-\rho)U_{t-1}^{-\rho}(1+\theta)^{-1}u_1(c_{2_t}, A_t) - (1-\rho)U_t^{-\rho}u_1(c_{1_t}, A_t) = 0 \quad (1.118)$$

$$k_t : \; -(1-\rho)U_{t-1}^{-\rho}u_1(c_{1_{t-1}}, A_{t-1}) + (1-\rho)U_t^{-\rho}(1+\alpha k_t^{\alpha-1})u_1(c_{1_t}, A_t) + \dots$$

$$\ldots + (1-\rho)U_t^{-\rho}(1+\theta)^{-1}u_2(c_{2_{t+1}}, A_{t+1})(-eN\alpha k_t^{\alpha-1}) + \ldots$$

$$\ldots + (1-\rho)U_{t+1}^{-\rho}u_2(c_{1_{t+1}}, A_{t+1})](-eN\alpha k_t^{\alpha-1}) = 0 \quad (1.119)$$

$$m_t : (1-\rho)U_t^{-\rho}u_1(c_{1_t}, A_t) + (1-\rho)U_t^{-\rho}(1+\theta)^{-1}u_2(c_{2_{t+1}}, A_{t+1})(\omega N) + \ldots$$

$$\ldots + (1-\rho)U_{t+1}^{-\rho}u_2(c_{1_{t+1}}, A_{t+1})(\omega N) = 0 \quad (1.120)$$

En el caso en que el parámetro p sea cero, tenemos que las condiciones de primer orden de este problema; son idénticas a las condiciones de primer orden del comando central utilitario cuando R es igual a cero –R=0-[14]. Esta afirmación se puede observar de manera directa al reemplazar en las condiciones de primer orden de este problema[15]. Este resultado, implica que una en estado estacionario, la economía que garantiza la equidad –en un sentido de utilitarista- entre generaciones, es decir, que resulta de la solución del problema cuándo la aversión a la desigualdad es cero, es precisamente la regla de oro y además soluciona el comando central cuando R es cero –es eficiente-[16].

En el caso de que la aversión a la desigualdad sea infinita. En este caso se considera que niveles bajos de estos dos acervos pueden implicar una amenaza para la existencia de los individuos. La función de bienestar de Leontief ha sido utilizada para implementar el principio de la equidad rawlsiana a nivel intergeneracional (Mas-Collel, Whinston, & Green, 1995; Arrow, 1973; Pezzey & Toman, 2002; Solow, 1974).

La función de Leontief es un caso límite (Mas-Collel et al., 1995):

$$W = \sum_{t=0}^{\infty} U_t^{1-\rho} \equiv \min(U_t) \Leftrightarrow p \to \infty \quad (1.121)$$

[14] Esto incluye tanto el caso con depreciación total o sin depreciación.
[15] Todos los términos Ut-1, Ut, Ut-1, desaparecen de las CPO. Los términos (1-p), desaparecen también.
[16] Estos resultados son ciertos en el caso de una población estacionaria N.

Ahora tomo la ecuación (1.118) y reordeno los términos:

$$c_{2_t} : (1-\rho)U_{t-1}^{-\rho}(1+\theta)^{-1}u_1(c_{2_t}, A_t) = (1-\rho)U_t^{-\rho}u_1(c_{1_t}, A_t)$$

$$U_{t-1}^{-\rho}(1+\theta)^{-1}u_1(c_{2_t}, A_t) = U_t^{-\rho}u_1(c_{1_t}, A_t)$$

$$U_{t-1}^{-\rho}(1+\theta)^{-1}\frac{u_1(c_{2_t}, A_t)}{u_1(c_{1_t}, A_t)} = U_t^{-\rho}$$

$$\left[U_{t-1}^{-\rho}(1+\theta)^{-1}\frac{u_1(c_{2_t}, A_t)}{u_1(c_{1_t}, A_t)}\right]^{\frac{1}{-\rho}} = \left[U_t^{-\rho}\right]^{\frac{1}{-\rho}}$$

$$U_{t-1}\left[(1+\theta)^{-1}\frac{u_1(c_{2_t}, A_t)}{u_1(c_{1_t}, A_t)}\right]^{\left(\frac{1}{-\rho}\right)} = U_t$$

$$U_{t-1} = U_t,\ p \to \infty \quad (1.122)$$

La condición (1.122), implica que el nivel de utilidad debe ser el mismo para todas las generaciones. Es decir, se tiene perfecta igualdad intergeneracional. Las demás condiciones de primer orden quedan indefinidas pues implican operaciones con cero e infinito. La maximización de un función social de tipo Leontief, que es equivalente a una preferencia extrema del planificador por la equidad intergeneracional, requiere que la utilidad intergeneracional se mantenga constante. Una solución directa implica aplicar el caso límite para la solución general de la CES[17].

Una economía con una alta dotación de capital y recursos naturales puede ser igualitaria y tener altos niveles de consumo. Claramente, este enfoque no nos dice nada sobre como se acumuló el capital en primer lugar. Si la economía tiene un nivel bajo de capital y recursos naturales estará atrapada en bajos niveles de consumo y calidad ambiental[18]. En el presente modelo, un mayor nivel de capital produce más contaminación, por este motivo el planificador tiene que ajustar la

[17] Este es un problema complejo que no se intentará solucionar, por la presencia del infinito tanto en la sumatoria como en los términos de la sumatoria. Algunos términos de las CPO quedan indefinidos.
[18]Como posibles ejemplos, podemos a los países europeos que han combinado sistemas de mercado con alta acumulación de capital en una parte de su historia, para luego implantar sistemas de seguridad social que tienen como objetivo mejorar la equidad.

inversión y mt hasta alcanzar un estado estacionario y mantener a la economía permanentemente en ese nivel.

$$Max \quad \min(U_t) \quad (1.123)$$

$$s.a. \quad k_t + k_t^{\alpha} = k_{t+1} + c_{1_t} + c_{2_t} + m_t$$

$$W = \sum_{t=0}^{\infty} U_t^{1-\rho} \equiv \min(U_t) \Leftrightarrow p \to \infty$$

Se define la función de utilidad del ciclo de vida de la generación nacida en el tiempo t –Ut-:

$$U_t = [u(c_{1_t}, A_t) + (1+\theta)^{-1} u(c_{2_{t+1}}, A_{t+1})]$$

$$U_{t-1} = U_t$$

$$U_{equidad} = \left[\beta \ln c_{1t} + \gamma \ln A_t + (1+\theta)^{(-1)} \left(\beta \ln c_{2_{(t+1)}} + \gamma \ln A_{(t+1)}\right)\right]$$

Se estudia sólo el estado estacionario:

$$c_{it} = c_i, \; i = 1,2$$

$$A_t = A_{t+1} = A_e$$

Se recuerda la ecuación de movimiento del medioambiente:

$$A_{(t+1)} = (1-b)A_t + b\bar{A} - eN \cdot k_t^{a} + \omega \cdot Nm_t \, , \; A_t = A_{t+1} = A_e$$

$$\frac{bA_e - b\bar{A} + eN \cdot k_t^{a}}{\omega \cdot N} = m_t$$

$$\delta k_t + k_t^{\alpha} = k_{t+1} + c_1 + c_2 + m_t$$

$$\delta k_t + k_t^{\alpha} = k_{t+1} + c_1 + c_2 + \frac{bA_e - b\bar{A} + eN \cdot k_t^{a}}{\omega \cdot N}$$

$$\delta k_t + k_t^{\alpha}\left(1 - \frac{e}{\omega}\right) - k_{t+1} = c_1 + c_2 + \frac{bA_e - b\bar{A}}{\omega \cdot N}$$

$$\delta k_t + k_t^{\alpha}\left(1 - \frac{e}{\omega}\right) - k_{t+1} = c_1 + c_2 + \frac{bA_e - b\bar{A}}{\omega \cdot N}$$

$$\delta k_t + k_t^{\alpha}\left(1 - \frac{e}{\omega}\right) - k_{t+1} = c_1 + c_2 + \frac{bA_e - b\bar{A}}{\omega \cdot N} \quad (1.124)$$

Esta ecuación, es la ecuación de movimiento del capital que mantiene fijos los niveles de consumo y de medioambiente.

El estado estacionario de este problema se encuentra, resolviendo la siguiente ecuación:

$$\delta k + k^{\alpha}\left(1 - \frac{e}{\omega}\right) - k = c_1 + c_2 + \frac{bA_e - b\bar{A}}{\omega \cdot N}$$

Esta poliniomio no lineal no tiene solución analítica directa, para el caso de que el capital se deprecie totalmente,[19] se pueden realizar simulaciones numéricas. Pero en el caso de que el capital no se deprecie, se tiene:

$$k^{\alpha}\left(1 - \frac{e}{\omega}\right) = c_1 + c_2 + \frac{bA_e - b\bar{A}}{\omega \cdot N}$$

$$k^{\alpha}\left(1 - \frac{e}{\omega}\right) = c_1 + c_2 + \frac{bA_e - b\bar{A}}{\omega \cdot N}$$

$$k^{\alpha}\left(\frac{w - e}{\omega}\right) = c_1 + c_2 + \frac{bA_e - b\bar{A}}{\omega \cdot N}$$

$$k^{\alpha} = \frac{c_1 + c_2 + \frac{bA_e - b\bar{A}}{\omega \cdot N}}{\left(\frac{w - e}{\omega}\right)}$$

$$k^{\alpha} = \frac{\omega(c_1 + c_2) + \frac{bA_e - b\bar{A}}{N}}{(w - e)}$$

[19] En este caso, d es la depreciación neta, que es distinta a la d de la regla de oro: d_neta=(1-d_bruta)

$$k = \left[ \frac{\omega(c_1 + c_2) + \frac{bA_e - b\bar{A}}{N}}{(w - e)} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (1.125)$$

El nivel de capital estacionario está dado por (1.125). En este caso se toma como exógeno al nivel de consumo y al nivel de medioambiente. Cuándo el planificador central llega a este nivel de capital, se mantiene. Como podemos ver, en esta economía perfectamente igualitaria, el capital deberá cubrir los niveles de consumo y mantenerse en tal nivel que el medioambiente se mantenga en el nivel Ae.

Para saber la eficiencia de esta asignación, se observa:

$$k^{\alpha} = \frac{c_1 + c_2 + \frac{bA_e - b\bar{A}}{\omega \cdot N}}{(\frac{w - e}{\omega})}$$

$$\left[ \frac{\alpha(\omega - e)}{\omega} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} = k_{oro};\ R = 0$$

$$\left[ \frac{\omega}{\alpha(\omega - e)} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} = k_{oro};\ R = 0$$

$$\left[ \frac{\omega}{(\omega - e)} \right] = \alpha k_{oro}^{\alpha-1};\ R = 0$$

$$\frac{k_{oro}}{\alpha} = \left[ c_1 + c_2 + \frac{bA_e - b\bar{A}}{\omega \cdot N} \right] \quad (1.126)$$

$$k^{\alpha} = \left[ c_1 + c_2 + \frac{bA_e - b\bar{A}}{\omega \cdot N} \right] \cdot \alpha k_{oro}^{\alpha-1} \quad (1.127)$$

De la condición (1.126), se demuestra que la asignación igualitaria es alcanzable o posible. De (1.127), se infiere que aunque Ae sea fijada en el nivel dorado de la economía, la asignación igualitaria puede no ser eficiente.

## G. Análisis de sostenibilidad ambiental

Para completar, la discusión desde la sostenibilidad débil, se utiliza el tratamiento de Chichilnisky (1997). Chichilnisky (1997), prueba que una función de utilidad que cumple con estas características, tiene la siguiente especificación :

$$W(\{u_t\}) = \sum_{t=1}^{\infty} \lambda_t u_t + \lim_{t \to \infty} u_t \quad (1.128).$$

Esta función de bienestar social, requiere que se solucione como dos problemas separados. La primera parte es idéntica al problema centralizado, que ya se se resolvió. La segunda parte, requiere que se maximice el $\lim_{t \to \infty} u_t$ , sujeto a las trayectorias posibles –dadas por el primer problema-. Esto implica, que se encuentre los niveles mantenibles de manera indefinida de los argumentos de U(c,A) (Beltratti, Chichilnisky, & Heal, 1993). Esto es análogo a encontrar la regla de oro de capital y del medioambiente:

$$Max \quad \lim_{t \to \infty} U_t$$

$$Max \quad U$$

$$Max[u(c_1, A) + (1+\theta)^{-1} u(c_2, A)]$$

$$f(k) = \delta k + c_1 + c_2 + m$$

$$bA = b\bar{A} - eN \cdot k^a + \omega \cdot Nm$$

Entonces, la única asignación que satisface estos dos problemas simultáneamente, es la suma no descontada de las utilidades intergeneracionales. Es decir, la asignación del comando central cuando R es cero. Ahora queda demostrado que la economía descentralizada no es sostenible, pues no puede alcanzar la asignación del comando central no descontada. También, se demuestra que la solución descentralizada sin descuento intertemporal es sustentable y es equitativa. Esta conclusión, sobre la equivalencia de sostenibilidad, equidad y eficiencia, no puede generalizarse para cualquier especificación funcional de la utilidad y de la producción (Beltratti et al., 1993; Chichilnisky, 1997).

**F. Extensión del modelo descentralizado con crecimiento endógeno:**

El modelo con crecimiento endógeno, debe ser visto como una versión dinámica del modelo AK. En este caso, la tecnología dependerá del capital del período anterior. Esto puede ser interpretado, como buenas prácticas industriales, difusión de conocimiento y otro tipo de externalidades positivas a la producción. El cambio fundamental en el modelo descentralizado está en el problema de la firma:

$$F_t(\tau, L_t, K_t) = \tau L_t^{(1-a)} K_t^a = \tau L f(K_t/L_t) = L f(k_t) = \tau k_t^a$$

$$\tau = \tau^- k_{t-1}^{1-\alpha}$$

$$f_t(\tau, k_t) = \tau k_t^\alpha = \tau^- k_{t-1}^{1-\alpha} k_t^\alpha$$

$$k_{t-1} = k_t = k$$

$$f_t(\tau, k) = \tau^- k$$

Las condiciones de primer orden del problema de maximización del beneficio sujeto a los costos y la función de producción son:

$$cpo \quad F_L(\tau, K_t, L_t) = w_t; \quad F_K(\tau, K_t, L_t) = r_t$$

$$\tau k_t^a - \tau k_t(a) k_t^{(a-1)} = w_t; \ (1-a)\tau k_t^a = w_t$$

$$(1-a)(\tau^- k_{t-1}^{1-\alpha}) k_t^a = w_t$$

$$a(\tau^- k_{t-1}^{1-\alpha}) k_t^{(a-1)} = r_t$$

Ahora, las ecuaciones que determinan el equilibrio dinámico, se modifican así[20]:

$$k_{t+1} = \frac{(1-a)(\tau^{-}k_{t-1}^{1-\alpha})k_t^{a} - \left[\frac{(1-a)(\tau^{-}k_{t-1}^{1-\alpha})k_t^{\alpha} - \frac{(2+\theta)\beta}{\omega\gamma}\left[N_{(t+1)}\left((1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^{a}\right)\right]}{\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}+1\right) + (2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}(N_{(t+1)}-1)}\right]}{(1+n)(2+\theta)}$$

$$a_{(t+1)} = \frac{(1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - e\tau^{-}k_{t-1}^{1-\alpha}k_t^{a} + \omega\left[\frac{(1-a)\tau^{-}k_{t-1}^{1-\alpha}k_t^{a} - \frac{(2+\theta)\beta}{\omega\gamma}\left[N_{(t+1)}\left((1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - e\tau^{-}k_{t-1}^{1-\alpha}k_t^{a}\right)\right]}{\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}+1\right) + (2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}(N_{(t+1)}-1)}\right]}{(1+n)}$$

El factor $\tau^{-}$, sirve para poder escalar al modelo. Se puede fijar en $\tau^{-} = 1$, sin pérdida de generalidad. La tecnología se ha endogenizado. Este problema es matemáticamente complejo –ecuaciones en diferencias de segundo grado, no lineal-. Para ver los resultados numéricos, refererise al apéndice B de simulaciones numéricas.

[20] Estas ecuaciones son las que se utilizan en las simulaciones de la hoja de cálculo electrónica de Excel.

## 9. BIBLIOGRAFÍA:


Blanchard, O., & Fischer, S. (1989). *Lectures on Macroeconomics*. Cambridge/MA: MIT Press.

de La Croix, D., & Michel, P. (2002). *A Theory of Economic Growth: Dynamics and Policy in Overlapping Generations*: Cambridge University Press.

Mas-Collel, A., Whinston, M. D., & Green, J. (1995). *Microeconomic Theory*: Oxford University Press.

Shone, R. (2002). Economic Dynamics

Arrow, K. J. (1973). Rawls's principle of just saving. *Swedish Journal of Economics, 75*(4), 323–335.

Beltratti, A., Chichilnisky, G., & Heal, G. (1993). Sustainable Growth and the Green Golden Rule. *NBER Working Paper No. 4430*.

Chichilnisky, G. (1997). What is sustainable development? *Land Economics, 73*(4), 467.

Falconí, F. (2002). La desmaterialización de la economía. *Ecuador Debate*, 121-133.

John, A., & Pecchenino, R. (1994). An Overlapping Generations Model of Growth and the Environment. *Economic Journal, 104*(427), 1393-1410.

Pezzey, J. C. V., & Toman, M. A. (2002). The Economics of Sustainability: A Review of Journal Articles. *Resources for the Future Discussion Paper,* 02–03.

Solow, R. (1974). Intergenerational Equity and Exhaustible Resources. *Review of Economics Studies, Symposium on the Economics of Exhaustible Resources*.