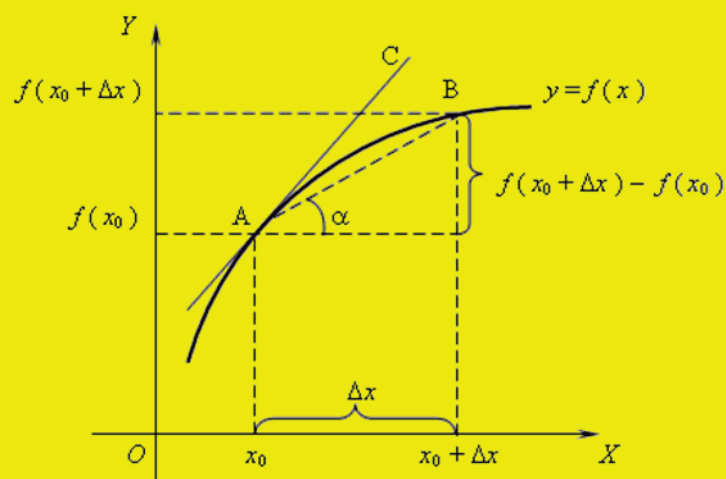


CÁLCULO I

Limites, Derivadas e Integrais

→ Exercícios Resolvidos e Comentados ←



Marcelo Santos
Chaves

1371

Limites, derivadas e integrais

Marcelo Santos Chaves



Editado por la Fundación Universitaria Andaluza Inca Garcilaso para eumed.net

Derechos de autor protegidos. Solo se permite la impresión y copia de este texto para uso personal y/o académico.

Este libro puede obtenerse gratis solamente desde

<http://www.eumed.net/libros-gratis/2014/1371/index.htm>

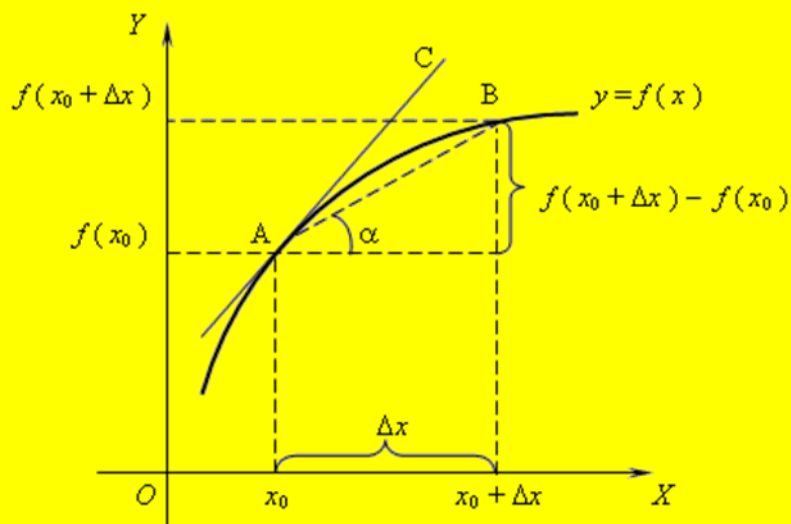
Cualquier otra copia de este texto en Internet es ilegal.

CAPA DO LIVRO

CÁLCULO I

Limites, Derivadas e Integrais

→Exercícios Resolvidos e Comentados←



Marcelo Santos Chaves

CÁLCULO I: LIMITES, DERIVADAS E INTEGRAIS
Exercícios Resolvidos e Comentados

MARCELO SANTOS CHAVES

**Belém-PA
Janeiro2014**

C512c Chaves, Marcelo Santos

Cálculo I: Limites, Derivadas e Integrais (exercícios resolvidos e comentados).

93p. :il. Color. ; 21x30 cm.

Inclui referências

ISBN-13: 978-84-16036-29-5

1. Matemática. 2. Cálculo Diferencial e Integral. 3. Exercícios. 4. I.
Título.

CDD 510

A modesta contribuição que aqui segue transcrita dedico ao infinito Deus que nos concedeu o dom da vida e ao meu paizinho e professor Otávio, in memoriam, pela intransigência e perseverança na moldagem de minha educação e qualificação acadêmica. Que este livro seja a expressão do profundo amor que nos une, nesta vida e na outra.

EPÍGRAFES

“Se eu enxerguei mais longe, foi por estar de pé sobre ombros de gigantes.”

sir Isaac Newton

"Um nome pode permitir que sejas lembrado, mas apenas as ideias o tornaram um imortal."

Marcelo Santos Chaves

APRESENTAÇÃO

No Brasil as evidências quanto ao fracasso na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) são elevadas, causando visíveis prejuízos no aproveitamento de discentes da área das ciências exatas, ao ponto de conduzi-los a sucessivas reprovações ou até mesmo ocasionando o seu jubramento (desligamento compulsório do curso). Essas são as conclusões de Bressan (2009), Rezende (2003), Frota (2001), Baruffi (1999) entre outros. Face a este cenário desfavorável na *práxis* do ensino superior, um dos grandes desafios na área de ciências exatas atualmente é, sem sombra de dúvidas, encontrar formas de superar o fracasso no ensino do Cálculo. E é sob tal motivação que o presente trabalho se propõe a constituir-se em um escopo sistemático de técnicas de resolução de problemas sobre Limites, Derivadas e Integrais, ambicionando uma ilustração didática e objetiva capaz de transpor o conhecimento científico para um conhecimento capaz de tornar-se efetivamente ensinável.

PRESENTATION

In Brazil the evidence about the failure in the discipline of Differential and Integral Calculus (CDI) are generally high, causing visible damage in the exploitation of students in the area of exact sciences, to the point of leading them to successive failures or even causing the your jubilamento (off course). These are the findings of Bressan (2009), Rezende (2003), Frota (2001), Baruffi (1999) among others. Against this unfavorable scenario in the praxis of higher education a major challenge in the field of exact sciences is currently without a doubt, find ways to overcome failure in the teaching of calculus. And under such motivation is that this paper proposes to form themselves into a systematic scope of technical troubleshooting on Limits, Derivatives and Integrals, coveting a didactic illustration and objectively able to translate scientific knowledge into a knowledge capable of making be effectively taught.

.

PRESENTACIÓN

En Brasil, la evidencia sobre el fracaso en la disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) son generalmente altos , causando daños visibles en la explotación de los estudiantes en el área de las ciencias exactas , hasta el punto de llevarlos a los sucesivos fracasos o incluso causar la Su jubilamento (por supuesto) . Estas son las conclusiones de Bressan (2009), Rezende (2003), Frota (2001), Baruffi (1999) entre otros. Frente a este escenario desfavorable en la praxis de la educación superior un gran reto en el campo de las ciencias exactas es actualmente , sin duda , encontrar la manera de superar el fracaso en la enseñanza del cálculo . Y bajo esa motivación es que este trabajo se propone constituirse en un ámbito de aplicación sistemática de la solución de problemas técnicos de límites, derivadas e integrales , codiciar una ilustración didáctica y objetivamente capaces de traducir el conocimiento científico en un saber capaz de hacer enseñar con eficacia.

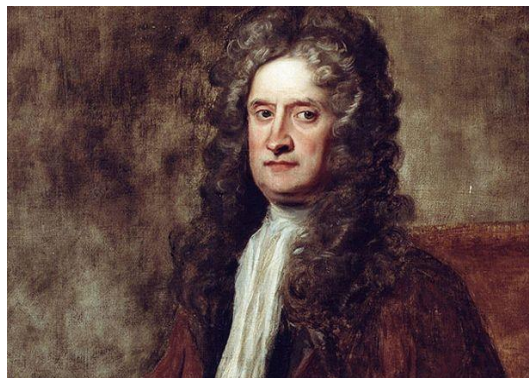
SUMÁRIO

| | |
|---|-----------|
| Um pouco sobre História do Cálculo..... | 11 |
| Capítulo I – Estudo dos Limites..... | 12 |
| 1. Limites e Continuidades..... | 13 |
| 1.1 Limites Laterais..... | 20 |
| 1.2 Limites no Infinito e Limites Infinitos..... | 27 |
| 1.2.1 Limites no Infinito..... | 27 |
| 1.2.2 Limites Infinitos..... | 32 |
| 1.3 Limites Exponenciais..... | 34 |
| 1.4 Limites Trigonométricos..... | 40 |
| Capítulo II – Estudo das Derivadas..... | 49 |
| 2. Derivada de uma Função..... | 50 |
| 2.1 Regras de Derivação..... | 50 |
| 2.1.1 Derivação pela Regra do Produto..... | 50 |
| 2.1.2 Derivação pela Regra do Quociente..... | 51 |
| 2.1.3 Derivação pela Regra da Potência..... | 52 |
| 2.2 Derivação de Funções Particulares..... | 53 |
| 2.2.1 Derivação de Função Exponencial..... | 53 |
| 2.2.2 Derivação de Função Exponencial de Base e | 54 |
| 2.2.3 Derivação de um Logaritmo Natural..... | 54 |
| 2.2.4 Derivação de Função Logarítmica..... | 55 |
| 2.3 Derivação de Funções Trigonométricas..... | 55 |
| 2.4 Derivação de Funções Trigonométricas Inversas..... | 57 |
| 2.5 Derivações de Ordem Sucessivas..... | 58 |
| 2.6 Derivações Híbridas..... | 58 |
| 2.6.1 Envolvendo Regra da Potência e Quociente..... | 58 |
| 2.6.2 Envolvendo Regra da Potência e Produto..... | 59 |
| 2.6.3 Envolvendo Regra do Quociente e Função Exponencial na base e | 60 |
| 2.6.4 Envolvendo Regra do Produto e Função Exponencial na base e | 60 |
| 2.6.5 Envolvendo Logaritmo Natural e Regra do Quociente..... | 60 |
| 2.6.6 Envolvendo Funções Trigonométricas e Regra do Quociente | 61 |
| 2.6.7 Envolvendo Funções Trigonométricas e Regra do Logaritmo Natural..... | 62 |
| 2.6.8 Envolvendo Funções Trigonométricas Inversas e Regra da Função Composta..... | 62 |
| 2.6.9 Envolvendo Funções Trigonométricas Inversas e Regra da Função Potência..... | 63 |
| 2.6.10 Envolvendo Funções Trigonométricas Inversas e Regra do Logaritmo Natural..... | 63 |
| 2.6.11 Envolvendo Funções Trigonométricas Inversas e Regra da Função Exponencial..... | 63 |
| 2.6.12 Envolvendo Funções Trigonométricas Inversas e Regra da Função Composta..... | 64 |

| | |
|---|----|
| Capítulo III – Estudo das Integrais | 65 |
| 3.Integrais Indefinidas | 66 |
| 3.1 Regras de Integração | 66 |
| 3.1.1 Pelo Teorema Fundamental do Cálculo..... | 66 |
| 3.1.2 Para uma Função Exponencial..... | 66 |
| 3.1.3 Para uma Função Exponencial de base e | 66 |
| 3.1.4 Para Deslocamento de uma Constante..... | 67 |
| 3.1.5 Para uma Função Logaritmo Natural..... | 67 |
| 3.1.6 Para uma Soma e Subtração..... | 67 |
| 3.1.7 Veja algumas Resoluções..... | 68 |
| 3.2 Técnicas de Integração | 69 |
| 3.2.1 Método da Substituição..... | 69 |
| 3.2.2 Método Integração por Partes..... | 70 |
| 3.2.2.1 Obtenção de Formulas de Redução..... | 71 |
| 3.2.3 Aplicações envolvendo as Técnicas de Integração..... | 73 |
| Referências Bibliográficas | 89 |
| Apêndices | 90 |
| Apêndice A: Tabela de Identidades Trigonométricas..... | 91 |
| Apêndice B: Tabela de Derivadas Usuais..... | 92 |
| Apêndice C: Tabela de Integrais..... | 93 |

UM POUCO SOBRE A HISTORIA DO CALCULO

É bastante comum nos depararmos com literaturas que ratificam um entendimento. O de que *sir* Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) foram os criadores do Cálculo Diferencial e Integral (CDI). Mas será possível tomar ao pé da letra tal assertiva enquanto verdade? Stewart (2010), por exemplo, pontifica que as ideias fundamentais por trás da integração foram examinadas há pelo menos 2500 anos pelos antigos gregos, tais como Eudócio e Arquimedes. Além disso, assim como Alarcón *et. al*



sir Isaac Newton

(2005), sabemos que os métodos para encontrar as tangentes foram criadas, entre outros, por Pierre de Fermat (1601-1665) e Isaac Barrow (1630-1677). Da



Isaac Barrow

mesma forma, concordamos com Almeida (2003) na constatação de que Barrow, na condição de professor em Cambridge que exerceu grande influência sobre Newton, foi o pioneiro no entendimento quanto à existência de uma relação inversa entre a derivação e a integração. Assim, concluímos que, o que Newton e Leibniz fizeram não tratou-se de uma criação genuína na acepção da palavra, e sim utilizaram a relação descoberta por Barrow, para constituírem o *Teorema Fundamental do Cálculo*, e assim desenvolver o CDI enquanto disciplina matemática sistemática e ensinável. Portanto, é sob estes termos e ressalvas que atribuímos a Newton e a Leibniz a primazia no desenvolvimento do CDI.

CAPÍTULO I

ESTUDO DOS LIMITES

1. LIMITES E CONTINUIDADES

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

Solução:

$$\text{Faça } \rightarrow u^3 = x$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} f(u) = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^3 - 1}{\sqrt[3]{u^3} - 1}$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} f(u) = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^3 - 1}{u - 1}$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} f(u) = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{(u-1) \cdot (u^2 + u + 1)}{(u-1)}$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} f(u) = \lim_{u \rightarrow 1} (u^2 + u + 1)$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} f(u) = 1^2 + 1 + 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} f(u) = 1$$

$$2) \lim_{e \rightarrow 0} f(x) = \frac{\sqrt{x+e} - \sqrt{x}}{e}$$

Solução:

$$\lim_{e \rightarrow 0} f(x) = \lim_{e \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{x+e} - \sqrt{x}}{e} \right] \times \left[\frac{\sqrt{x+e} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+e} + \sqrt{x}} \right]$$

$$\lim_{e \rightarrow 0} f(x) = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+e})^2 - (\sqrt{x})^2}{e \times (\sqrt{x+e} + \sqrt{x})}$$

$$\lim_{e \rightarrow 0} f(x) = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{x+e-x}{e \times (\sqrt{x+e} + \sqrt{x})}$$

$$\lim_{e \rightarrow 0} f(x) = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{e}{e \times (\sqrt{x+e} + \sqrt{x})}$$

$$\lim_{e \rightarrow 0} f(x) = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x+e} + \sqrt{x})}$$

$$\lim_{e \rightarrow 0} f(x) = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x+0} + \sqrt{x})}$$

$$\lim_{e \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{x})}$$

$$\lim_{e \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\lim_{e \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$\lim_{e \rightarrow 0} f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{4x}$$

$$\lim_{e \rightarrow 0} f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x}$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}$$

Solução:

$$\text{Faça } \rightarrow x = u^3$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} f(u) = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^3 - 1}{u - \sqrt{u^3}}$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} f(u) = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^3 - 1}{u - u\sqrt{u}}$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} f(u) = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^3 - 1}{u - u\sqrt{u}} \cdot \frac{u + u\sqrt{u}}{u + u\sqrt{u}}$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} f(u) = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{(u^3 - 1) \cdot (u + u\sqrt{u})}{u^2 - (u\sqrt{u})^2}$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} f(u) = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{(u^3 - 1) \cdot (u + u\sqrt{u})}{u^2 - u^3}$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} f(u) = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{(u-1) \cdot (u^2 + u + 1) \cdot (u + u\sqrt{u})}{-u^2 \cdot (u-1)}$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} f(u) = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{(u^2 + u + 1) \cdot (u + u\sqrt{u})}{-u^2}$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} f(u) = \frac{(1^2 + 1 + 1) \cdot (1 + 1\sqrt{1})}{-1^2}$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} f(u) = -\frac{3 \times 2}{1}$$

$$\underline{\lim_{u \rightarrow 1} f(u) = -6}$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$$

Solução:

$$\text{Faça } \rightarrow u = \sqrt[3]{x+1} \Leftrightarrow x = u^3 - 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u - 1}{u^3 - 1}$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(u-1)}{(u-1) \cdot (u^2 + u + 1)}$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{(u^2 + u + 1)}$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = \frac{1}{1^2 + 1 + 1}$$

$$\underline{\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = 1}$$

$$5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$$

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{3}}{\sqrt{x+3} + \sqrt{3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+3})^2 - (\sqrt{3})^2}{x \cdot (\sqrt{x+3} + \sqrt{3})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+3-3}{x \cdot (\sqrt{x+3} + \sqrt{3})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x \cdot (\sqrt{x+3} + \sqrt{3})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{(\sqrt{0+3} + \sqrt{3})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{4 \times 3}$$

$$\underline{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\sqrt{3}}{6}}$$

$$6) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 3x^3}{8x + 2}$$

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 3x^3}{8x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \left(\frac{5}{x} - 3x^2 \right)}{x \cdot \left(8 + \frac{2}{x} \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(5 \cdot \frac{1}{x} - 3x^2 \right)}{\left(8 + 2 \cdot \frac{1}{x} \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{[5 \cdot 0 - 3 \cdot (+\infty)^2]}{(8 + 2 \cdot 0)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{-\infty}{8}$$

$$\underline{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty}$$

$$7) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x^3 + 2}{7x^3 + 3}$$

Solução:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x^3 + 2}{7x^3 + 3} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3 \cdot \left(5 - \frac{2}{x^3}\right)}{x^3 \cdot \left(7 + \frac{3}{x^3}\right)} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\left(5 - 2 \cdot \frac{1}{x^3}\right)}{\left(7 + 3 \cdot \frac{1}{x^3}\right)} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \frac{-(5 - 2 \cdot 0)}{(7 + 3 \cdot 0)} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \frac{-5}{7} \end{aligned}$$

$$8) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$$

Solução:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \left[\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}\right]}{x \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \frac{\sqrt{1 + 0}}{1 + 0} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \frac{1}{1} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 1 \end{aligned}$$

$$9) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$$

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1})^2 - (\sqrt{x^2 - 1})^2}{\sqrt{x^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} + \sqrt{x^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - (x^2 - 1)}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 + 1}{x \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right) + x \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x}}{x \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{2 \cdot 0}{\sqrt{1 + 0} + \sqrt{1 - 0}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{0}{1 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{0}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$10) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 - 1} - x)$$

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 - 1} - x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1}) \cdot x - x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(\sqrt{x^2 - 1}) \cdot x - x^2 \right] \cdot \frac{(\sqrt{x^2 - 1}) \cdot x + x^2}{(\sqrt{x^2 - 1}) \cdot x + x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[(\sqrt{x^2 - 1}) \cdot x]^2 - (x^2)^2}{(\sqrt{x^2 - 1}) \cdot x + x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 1) \cdot x^2 - x^4}{x^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + 1 \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^2 - x^4}{x^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + 1 \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + 1 \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\frac{\sqrt{x^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}}{x} + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\frac{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} + 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - 0} + 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{-1}{1 + 1} \Rightarrow$$

$$\underline{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}}$$

$$11) \quad \lim_{v \rightarrow +\infty} f(v) = \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{v\sqrt{v} - 1}{3v - 1}$$

Solução:

$$\text{Faça } v = x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sqrt{x^2} - 1}{3x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cdot x - 1}{3x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 1}{3x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cdot \left(x - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \cdot \left(3 - \frac{1}{x^2}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \frac{1}{x^2}}{3 - \frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{+\infty - 0}{3 - 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{+\infty}{3}$$

$$\underline{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

$$12) \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{8 - x^3}$$

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{8 - x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{8 - x^3} \cdot \frac{(-1)}{(-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2)^2 - (4^2) \cdot (-1)}{x^3 - 8}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 4) \cdot (x^2 - 4) \cdot (-1)}{x^3 - 2^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 4) \cdot (x^2 - 2^2) \cdot (-1)}{(x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 2^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 4) \cdot (x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (-1)}{(x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 4)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 4) \cdot (x + 2) \cdot (-1)}{(x^2 + 2x + 4)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{(2^2 + 4) \cdot (2 + 2) \cdot (-1)}{(2^2 + 2 \cdot 2 + 4)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{8 \times 4 \times (-1)}{4 + 4 + 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{-32}{12}$$

$$\underline{\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\frac{8}{3}}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

Solução:

$$\text{Faça } \rightarrow x = t^6$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{t^6} - 1}{\sqrt{t^6} - 1}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 - 1}{t^3 - 1}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 - 1^2}{t^3 - 1^3}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t+1) \cdot (t-1)}{(t-1) \cdot (t^2 + 1 \cdot t + 1^2)}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t+1}{t^2 + t + 1}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} f(t) = \frac{1+1}{1^2 + 1 + 1}$$

$$\underline{\lim_{t \rightarrow 1} f(t) = \frac{2}{3}}$$

1.1 LIMITES LATERAIS

1) Dado $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{se } x < 1 \\ -1, & \text{se } x = 1 \\ 3 - x, & \text{se } x > 1 \end{cases}$, calcule os limites das funções e esboce o gráfico.

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 4 = 1^2 - 4 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3 - x = 3 - 1 = 2$$

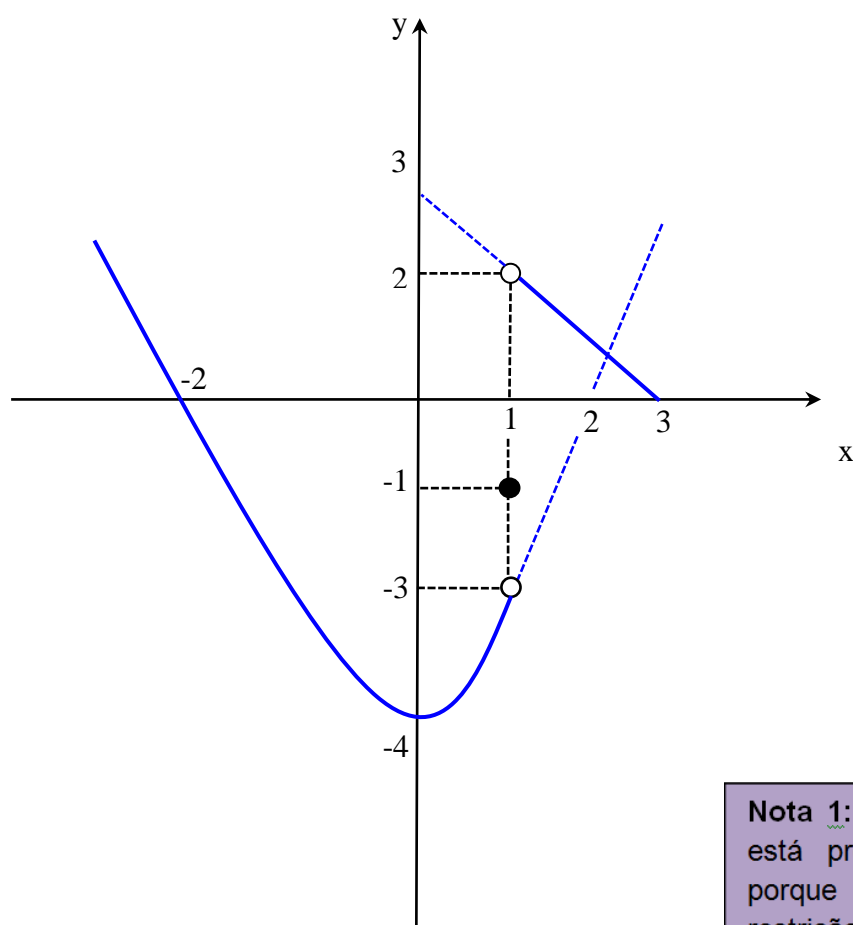
Como: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, Então $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \text{Não Existe}$

Agora vamos estabelecer os pontos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{se } x < 1 \rightarrow (1, -3) \\ -1, & \text{se } x = 1 \rightarrow (1, -1) \\ 3 - x, & \text{se } x > 1 \rightarrow (1, 2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 - 4 &\rightarrow \text{Parábola} & f(x) = 3 - x &\rightarrow \text{reta} \\ x^2 - 4 = 0 & & 3 - x = 0 & \\ x^2 = 4 & & x = 3 & \\ x = \sqrt{4} & & & \\ x = \pm 2 & & & \end{aligned}$$

Esboço do Gráfico (Ráio x)



Nota 1: A Parábola descrita no gráfico está preenchida até o ponto $(1, -3)$, porque a função $x^2 - 4$ possui uma restrição $x < 1$.

Nota 2: A Reta descrita no gráfico está preenchida a partir o ponto $(1, 2)$, porque a função $3 - x$ possui uma restrição $x > 1$.

2) Dado $f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & \text{se } x > 1 \\ 2, & \text{se } x = 1 \\ 4x + 1, & \text{se } x < 1 \end{cases}$, calcule os limites das funções e esboce o gráfico.

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3x - 2 = 3 \cdot 1 - 2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 4x + 1 = 4 \cdot 1 + 1 = 5$$

Como: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, Então $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \text{Não Existe}$

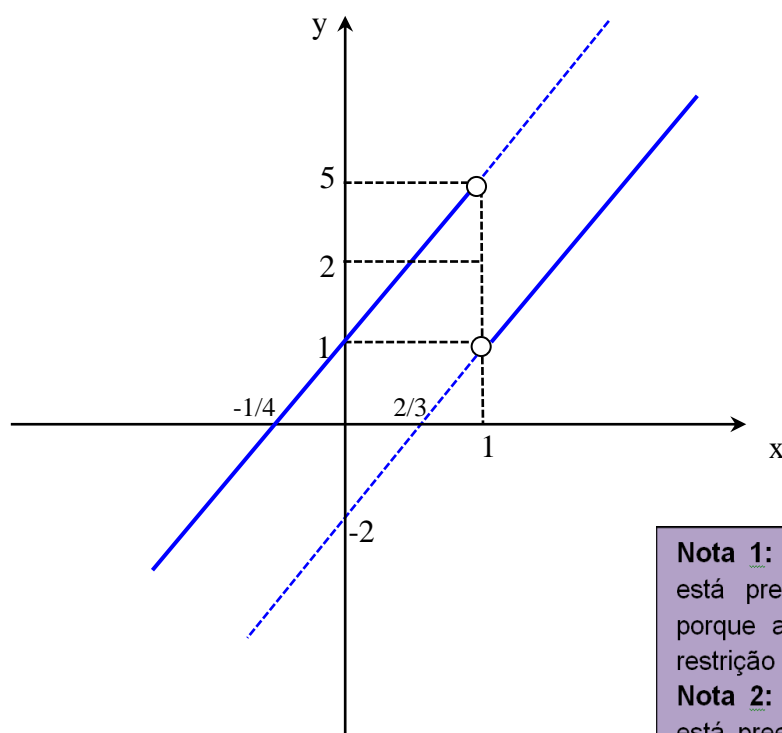
Vamos estabelecer os pontos:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & \text{se } x > 1 \rightarrow (1, 1) \\ 2, & \text{se } x = 1 \rightarrow (1, 2) \\ 4x + 1, & \text{se } x < 1 \rightarrow (1, 5) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x - 2 \rightarrow \text{reta} \\ 3x - 2 &= 0 \\ x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x + 1 \rightarrow \text{reta} \\ 4x + 1 &= 0 \\ x &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Esbouço do Gráfico (Raio x)



Nota 1: A 1ª Reta descrita no gráfico está preenchida até o ponto (1, 5), porque a função $4x + 1$ possui uma restrição $x < 1$.

Nota 2: A 2ª Reta descrita no gráfico está preenchida a partir o ponto (1, 1), porque a função $3x - 2$ possui uma restrição $x > 1$.

3) Dado $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{se } x < 2 \\ 2, & \text{se } x = 2 \\ 9 - x^2, & \text{se } x > 2 \end{cases}$, calcule os limites das funções e esboce o gráfico.

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 9 - x^2 = 9 - 2^2 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$$

$$\text{Como: } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), \text{ Então } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$

Vamos estabelecer os pontos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{se } x < 2 \rightarrow (2, 5) \\ 2, & \text{se } x = 2 \rightarrow (2, 2) \\ 9 - x^2, & \text{se } x > 2 \rightarrow (2, 5) \end{cases}$$

$$f(x) = x^2 + 1 \rightarrow \text{Parábola} \quad f(x) = 9 - x^2 \rightarrow \text{Parábola}$$

$$x^2 + 1 = 0$$

$$9 - x^2 = 0$$

$$x = \sqrt{-1}$$

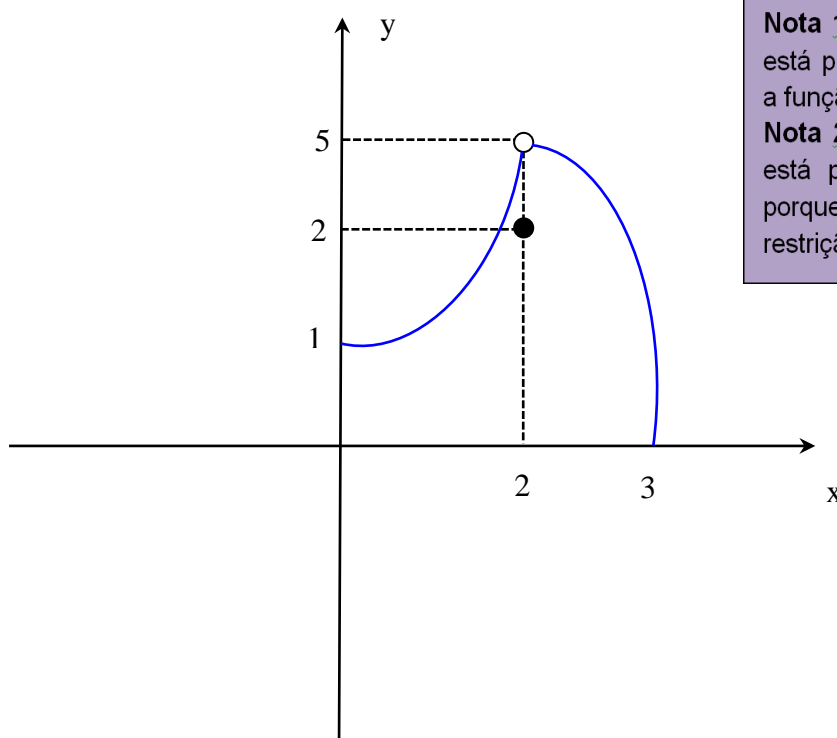
$$x = \sqrt{9}$$

$$x = \pm i$$

$$x = \pm 3$$

Não há raízes para função

Esboço do Gráfico (Raio x)



Nota 1: A 1ª Parábola descrita no gráfico está preenchida até o ponto (2, 5), porque a função $x^2 + 1$ possui uma restrição $x < 2$.
Nota 2: A 2ª Parábola descrita no gráfico está preenchida a partir o ponto (2, 5), porque a função $9 - x^2$ possui uma restrição $x > 2$.

4) Dado $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 3 \\ 3x-7, & x > 3 \end{cases}$, calcule os limites abaixo e esboce o gráfico.

$$a) \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x); \quad d) \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x);$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x); \quad e) \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x);$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} f(x); \quad f) \lim_{x \rightarrow 5} f(x).$$

Solução:

$$a) \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3 - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \underline{2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 3x - 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3 \cdot 3 - 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \underline{2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

$$\text{Seja } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x), \text{ temos: } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \underline{2}$$

Nas alternativas a seguir veja que para $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$, temos x para valores maiores que **3**, pois sua tendência é **5**, logo, somente a função $3x - 7$ satisfaz $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$, pois sua restrição é definida para $x > 3$. Façamos então:

$$d) \quad \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} 3x - 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 3 \cdot 5 - 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \underline{8}$$

$$e) \quad \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} 3x - 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 3 \cdot 5 - 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \underline{8}$$

$$f) \quad \lim_{x \rightarrow 5} f(x)$$

$$\text{Seja } \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x), \text{ temos: } \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \underline{8}$$

Esbouço do Gráfico:

Vamos estabelecer os pontos para $x \rightarrow 3$:

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 3 \rightarrow (3, 2) \\ 3x-7, & x > 3 \rightarrow (3, 2) \end{cases}$$

$$f(x) = x-1 \rightarrow \text{reta}$$

$$x-1=0$$

$$x=1$$

$$f(x) = 3x-7 \rightarrow \text{reta}$$

$$3x-7=0$$

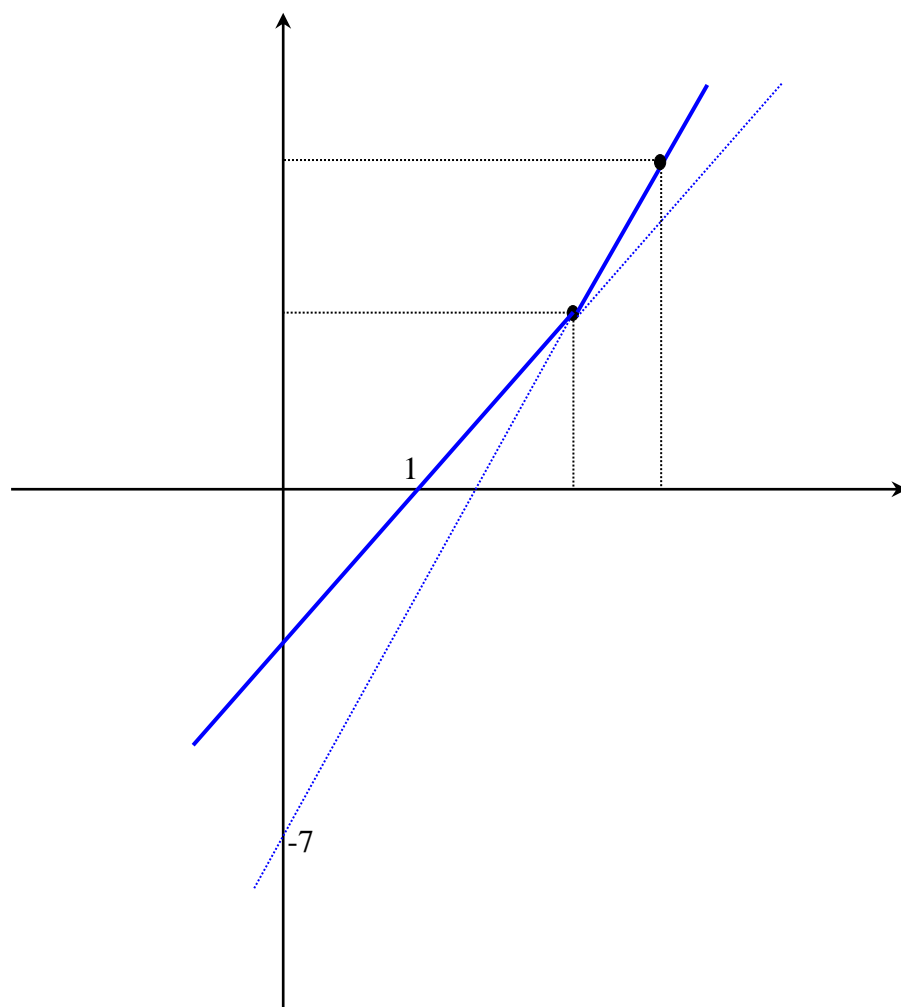
$$3x=7$$

$$x = \frac{7}{3}$$

Vamos estabelecer os pontos para $x \rightarrow 5$:

$$f(x) = \begin{cases} 3x-7, & x > 3 \rightarrow (5, 8), p / \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) \\ 3x-7, & x > 3 \rightarrow (5, 8), p / \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) \end{cases}$$

Daí ilustramos:



1.2 LIMITES NO INFINITO E LIMITES INFINITOS

1.2.1 Limites no Infinito

Se “n” é um número inteiro positivo, então:

$$I) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$II) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

As expressões $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 0^0 , $0 \times \infty$, ∞^0 , 1^∞ são todas indeterminações.

Veja algumas resoluções:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 3x^3}{8x + 2}$$

Solução:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 3x^3}{8x + 2} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \left(\frac{5}{x} - 3x^2 \right)}{x \cdot \left(8 + \frac{2}{x} \right)} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(5 \cdot \frac{1}{x} - 3x^2 \right)}{\left(8 + 2 \cdot \frac{1}{x} \right)} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \frac{[5 \cdot 0 - 3 \cdot (+\infty)^2]}{(8 + 2 \cdot 0)} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \frac{-\infty}{8} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= -\infty \end{aligned}$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x^3 + 2}{7x^3 + 3}$$

Solução:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x^3 + 2}{7x^3 + 3} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3 \cdot \left(5 - \frac{2}{x^3} \right)}{x^3 \cdot \left(7 + \frac{3}{x^3} \right)} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\left(5 - 2 \cdot \frac{1}{x^3} \right)}{\left(7 + 3 \cdot \frac{1}{x^3} \right)} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \frac{-(5 - 2 \cdot 0)}{(7 + 3 \cdot 0)} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \frac{-5}{7} \end{aligned}$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$$

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \left[\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}\right]}{x \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\sqrt{1+0}}{1+0}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{1}$$

$$\underline{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1}$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 1} \right)^2 - \left(\sqrt{x^2 - 1} \right)^2}{\sqrt{x^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} + \sqrt{x^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - (x^2 - 1)}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 + 1}{x \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) + x \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x}}{x \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{2 \cdot 0}{\sqrt{1 + 0} + \sqrt{1 - 0}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{0}{1 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{0}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$5) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 - 1} - x)$$

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 - 1} - x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1}) \cdot x - x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(\sqrt{x^2 - 1}) \cdot x - x^2 \right] \cdot \frac{(\sqrt{x^2 - 1}) \cdot x + x^2}{(\sqrt{x^2 - 1}) \cdot x + x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[(\sqrt{x^2 - 1}) \cdot x]^2 - (x^2)^2}{(\sqrt{x^2 - 1}) \cdot x + x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 1) \cdot x^2 - x^4}{x^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + 1 \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^2 - x^4}{x^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + 1 \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + 1 \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\frac{\sqrt{x^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}}{x} + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\frac{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} + 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - 0} + 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{-1}{1 + 1} \Rightarrow$$

$$\underline{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}}$$

$$6) \quad \lim_{v \rightarrow +\infty} f(v) = \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{v\sqrt{v}-1}{3v-1}$$

Solução:

$$\text{Faça } \rightarrow v = x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sqrt{x^2} - 1}{3x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cdot x - 1}{3x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 1}{3x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cdot \left(x - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \cdot \left(3 - \frac{1}{x^2}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \frac{1}{x^2}}{3 - \frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{+\infty - 0}{3 - 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{+\infty}{3}$$

$$\underline{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

$$7) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3}{x + 2}$$

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3}{x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \left(x + \frac{3}{x}\right)}{x \cdot \left(8 + \frac{2}{x}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \left(x + 3 \cdot \frac{1}{x}\right)}{x \cdot \left(8 + 2 \cdot \frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{+\infty + 0}{1 + 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{+\infty}{1}$$

$$\underline{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

1.2.2 Limites Infinitos

Se “n” é um número inteiro positivo qualquer, então:

$$I) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

$$II) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & \text{se "n" é par} \\ -\infty, & \text{se "n" é ímpar} \end{cases}$$

As expressões $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 0^0 , $0 \times \infty$, ∞^0 , 1^∞ são todas indeterminações.

Veja algumas resoluções:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^3 + \sqrt{x} + \frac{1}{x} \right)$$

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^3 + \sqrt{x} + \frac{1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 + \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 + 0 + \infty$$

$$\underline{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x^2}$$

Solução:

$$\text{Condição: } |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$$

$$\underline{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x^2}$$

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x^2}$$

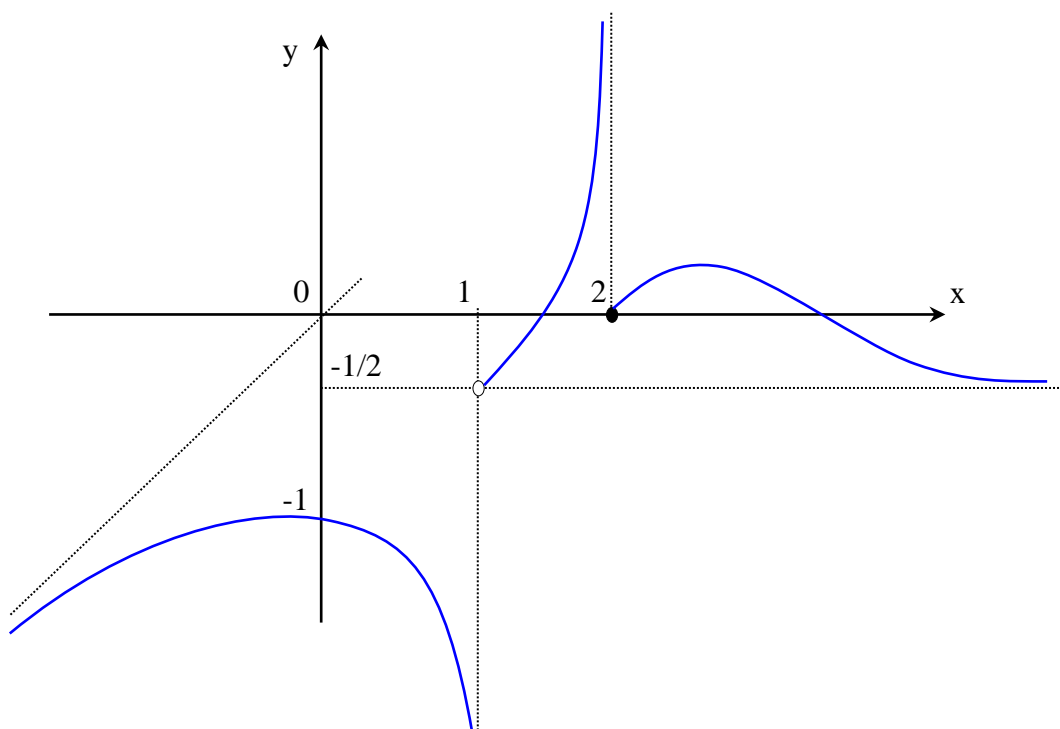
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{x^1}$$

Como o expoente de x é ímpar, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -(-\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$

4) Na figura abaixo está esboçado o gráfico de uma função $y = f(x)$. Complete as igualdades.



- $a) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \underline{-\infty}$
 $b) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \underline{-\frac{1}{2}}$
 $c) \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \underline{+\infty}$
 $d) \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \underline{0}$
 $e) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \underline{-1}$
 $f) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \underline{-1}$
 $g) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underline{-\frac{1}{2}}$
 $h) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \underline{-\infty}$

Marcelo Santos Chaves

CÁLCULO I: LIMITES, DERIVADAS E INTEGRAIS

Exercícios Resolvidos e Comentados

1.3 LIMITES EXPONENCIAIS

Relação Fundamental:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Inversão de variável:

Se $x = \frac{1}{y}$

Então $\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$

Artifícios de auxílio:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{k \cdot x} - 1}{x} = k \cdot \ln a$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1 + ky)^{\frac{\ell}{y}} = e^{k \cdot \ell}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{\ell \cdot x} = e^{k \cdot \ell}$$

Veja algumas resoluções:

$$1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-1} \right)^{n+1}$$

Solução:

$$\text{Faça: } n+1 = \frac{1}{y} \therefore n = \frac{1}{y} - 1 \therefore \begin{cases} n \rightarrow \infty \\ \infty + 1 = \infty \therefore y \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-1} \right)^{n+1}$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} f(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \left[\frac{2 \cdot \left(\frac{1}{y} - 1 \right) + 3}{2 \cdot \left(\frac{1}{y} - 1 \right) - 1} \right]^{\frac{1}{y}}$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} f(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \left[\frac{\frac{2}{y} - 2 + 3}{\frac{2}{y} - 2 - 1} \right]^{\frac{1}{y}}$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} f(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \left[\frac{\frac{2}{y} + 1}{\frac{2}{y} - 3} \right]^{\frac{1}{y}}$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} f(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\left(2 \cdot \frac{1}{y} + 1 \right)^{\frac{1}{y}}}{\left(2 \cdot \frac{1}{y} - 3 \right)^{\frac{1}{y}}}$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} f(y) = \frac{\lim_{y \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{y}} \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{y} + 1 \right)^{\frac{1}{y}}}{\lim_{y \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{y}} \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{y} - 1 \right)^{\frac{1}{y}}}$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} f(y) = \frac{2^0 \cdot e}{2^0 \cdot \left(\frac{1}{\infty} - 1 \right)^{\frac{1}{\infty}}} \Rightarrow \lim_{y \rightarrow \infty} f(y) = \frac{1 \cdot e}{1 \cdot (-1)} \Rightarrow \underline{\lim_{y \rightarrow \infty} f(y) = -e}$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{\operatorname{Tg} x} \right)^{\operatorname{Tg} x}$$

Solução:

$$\text{Faça: } \frac{1}{\operatorname{Tg} x} = y \therefore \operatorname{Tg} x = \frac{1}{y} \therefore \begin{cases} x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{Tg} \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1 \therefore y \rightarrow 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{\operatorname{Tg} x} \right)^{\operatorname{Tg} x}$$

$$\lim_{y \rightarrow 1} f(y) = \lim_{y \rightarrow 1} (1 + y)^{\frac{1}{y}}$$

$$\lim_{y \rightarrow 1} f(y) = (1 + 1)^{\frac{1}{1}}$$

$$\underline{\lim_{y \rightarrow 1} f(y) = 2}$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} (1 + \operatorname{Cos} x)^{\frac{1}{\operatorname{Cos} x}}$$

Solução:

$$\text{Faça: } \frac{1}{\operatorname{Cos} x} = \frac{1}{y} \therefore y = \operatorname{Cos} x \therefore \begin{cases} x \rightarrow \frac{3\pi}{2} \\ \operatorname{Cos} \left(\frac{3\pi}{2} \right) = 0 \therefore y \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} (1 + \operatorname{Cos} x)^{\frac{1}{\operatorname{Cos} x}}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}}$$

$$\underline{\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = e}$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{10}{x}\right)^x$$

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{10}{x}\right)^x$$

$$\text{Faça: } y = \frac{10}{x} \therefore x = \frac{10}{y} \therefore \begin{cases} x \rightarrow \infty \\ \frac{10}{y} = 0 \therefore y \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{10}{x}\right)^x$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(1 + y\right)^{\frac{10}{y}}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\left(1 + y\right)^{\frac{1}{y}}\right]^{10}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = e^{10}$$

$$5) \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{10^{x-2} - 1}{x - 2}$$

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{10^{x-2} - 1}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \ln 10$$

$$6) \quad \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4^{\frac{x+3}{5}} - 1}{5 \cdot \frac{x+3}{5}}$$

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4^{\frac{x+3}{5}} - 1}{5 \cdot \frac{x+3}{5}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{5} \cdot \frac{4^{\frac{x+3}{5}} - 1}{\frac{x+3}{5}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4^{\frac{x+3}{5}} - 1}{\frac{x+3}{5}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \frac{1}{5} \cdot \ln 4$$

$$7) \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5^x - 25}{x - 2}$$

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5^x - 25}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5^x - 5^2}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5^2 \cdot \left(\frac{5^x}{5^2} - 1\right)}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5^2 \cdot 5^{(x-2)} - 1}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 5^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5^{(x-2)} - 1}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5^2 \cdot \ln 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 25 \ln 5$$

$$8) \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{\frac{x-1}{4}} - 1}{\operatorname{Sen} 5 \cdot (x-1)}$$

Solução:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{\left(\frac{x-1}{4}\right)} - 1}{\operatorname{Sen} 5 \cdot (x-1)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{\left(\frac{x-1}{4}\right)} - 1}{\operatorname{Sen} 5x - 5} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{3^{\left(\frac{x-1}{4}\right)} - 1}{5x - 5}}{\frac{5x - 5}{5x - 5}} \Rightarrow \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{3^{\left(\frac{x-1}{4}\right)} - 1}{5 \cdot (x-1) \cdot \left(\frac{4}{4}\right)}}{\frac{\operatorname{Sen} 5x - 5}{5x - 5}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{3^{\left(\frac{x-1}{4}\right)} - 1}{5 \cdot 4 \cdot \left(\frac{x-1}{4}\right)}}{\frac{\operatorname{Sen} 5x - 5}{5x - 5}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{20} \cdot \frac{3^{\left(\frac{x-1}{4}\right)} - 1}{\left(\frac{x-1}{4}\right)}}{\frac{\operatorname{Sen} 5x - 5}{5x - 5}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{20} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{\left(\frac{x-1}{4}\right)} - 1}{\left(\frac{x-1}{4}\right)}}{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{Sen} 5x - 5}{5x - 5}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{20} \cdot \ln 3 \end{aligned}$$

$$9) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$$

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-bx} \cdot \left[\left(\frac{e^{-ax}}{e^{-bx}} \right) - 1 \right]}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-bx} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[\left(\frac{e^{-a}}{e^{-b}} \right)^x - 1 \right]}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e^{-b \cdot 0} \cdot \ln \left(\frac{e^{-a}}{e^{-b}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e^0 \cdot (\ln e^{-a} - \ln e^{-b})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \cdot (\log_e e^{-a} - \log_e e^{-b})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -a - (-b)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = b - a$$

1.4 LIMITES TRIGONOMÉTRICOS

Relação Fundamental:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen } x}{x} = 1$$

Veja algumas resoluções:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen } 2x}{x}$$

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen } 2x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen } 2x}{x} \cdot \frac{2}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\text{Sen } 2x}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen } 2x}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 \times 1$$

$$\underline{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2}$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen } 3x}{\text{Sen } 4x}$$

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen } 3x}{\text{Sen } 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen } 3x}{\text{Sen } 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\text{Sen } 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\text{Sen } 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen } 3x}{\text{Sen } 4x} \cdot \frac{3}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\text{Sen } 4x} \cdot \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\text{Sen } 4x} \cdot \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \text{Sen } 3x}{4 \cdot \text{Sen } 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \text{Sen } 3x}{4 \cdot \text{Sen } 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \text{Sen } 3x}{4 \cdot \text{Sen } 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \text{Sen } 3x}{4 \cdot \text{Sen } 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \text{Sen } 3x}{4 \cdot \text{Sen } 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \text{Sen } 3x}{4 \cdot \text{Sen } 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \text{Sen } 3x}{4 \cdot \text{Sen } 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \text{Sen } 3x}{4 \cdot \text{Sen } 4x}$$

$$\underline{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{3}{4}}$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{Tgx}{x}$$

Solução:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{Tgx}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{Senx}{Cosx}}{x} \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{Senx}{Cosx} \cdot \frac{1}{x} \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{Senx}{x} \cdot \frac{1}{Cosx} \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= 1 \cdot \frac{1}{Cos0} \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= 1 \times 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= 1 \end{aligned}$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow \theta} f(x) = \lim_{x \rightarrow \theta} \frac{Cos\theta - 1}{\theta}$$

Solução:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \theta} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \theta} \frac{Cos\theta - 1}{\theta} \\ \lim_{x \rightarrow \theta} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \theta} \frac{Cos\theta - 1}{\theta} \cdot \frac{Cos\theta + 1}{Cos\theta + 1} \\ \lim_{x \rightarrow \theta} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \theta} \frac{Cos^2\theta - 1^2}{\theta \cdot (Cos\theta + 1)} \\ \lim_{x \rightarrow \theta} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \theta} \frac{Cos^2\theta - 1}{\theta \cdot (Cos\theta + 1)} \\ \lim_{x \rightarrow \theta} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \theta} \frac{-Sen^2\theta}{\theta \cdot (Cos\theta + 1)} \\ \lim_{x \rightarrow \theta} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \theta} -1 \cdot \frac{(Sen\theta) \cdot (Sen\theta)}{\theta \cdot (Cos\theta + 1)} \\ \lim_{x \rightarrow \theta} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \theta} -1 \cdot \frac{Sen\theta}{\theta} \cdot \frac{Sen\theta}{Cos\theta + 1} \\ \lim_{x \rightarrow \theta} f(x) &= -1 \times 1 \cdot \frac{Sen0}{Cos0 + 1} \\ \lim_{x \rightarrow \theta} f(x) &= -1 \cdot \frac{0}{1 + 1} \\ \lim_{x \rightarrow \theta} f(x) &= -1 \times 0 \\ \lim_{x \rightarrow \theta} f(x) &= 0 \end{aligned}$$

$$5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen} 9x}{x}$$

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen} 9x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen} 9x}{x} \cdot \frac{9}{9}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 9 \cdot \frac{\text{Sen} 9x}{9x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 9 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen} 9x}{9x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 9 \cdot 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 9$$

$$6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen} 4x}{3x}$$

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen} 4x}{3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen} 4x}{x} \cdot \frac{4}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} 4 \cdot \frac{\text{Sen} 4x}{4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} 4 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen} 4x}{4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{4}{3}$$

$$7) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen} 10x}{\text{Sen} 7x}$$

$$8) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen} ax}{\text{Sen} bx}$$

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen} 10x}{\text{Sen} 7x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen} 10x}{\text{Sen} 7x} \cdot \frac{x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen} 10x}{\text{Sen} 7x} \cdot \frac{10}{10} \cdot \frac{7}{7} \cdot \frac{x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 10 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen} 10x}{10x}}{\lim_{x \rightarrow 0} 7 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen} 7x}{7x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{10 \cdot 1}{7 \cdot 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{10}{7}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen} ax}{\text{Sen} bx}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen} ax}{\text{Sen} bx} \cdot \frac{x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen} ax}{\text{Sen} bx} \cdot \frac{a}{a} \cdot \frac{b}{b} \cdot \frac{x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} a \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen} ax}{ax}}{\lim_{x \rightarrow 0} b \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen} bx}{bx}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{a \cdot 1}{b \cdot 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{a}{b}$$

$$9) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Tg} ax}{x}$$

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Tg} ax}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Sen} ax}{\operatorname{Cos} ax} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Sen} ax}{\operatorname{Cos} ax} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{a}{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Sen} ax}{\operatorname{Cos} ax} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{a}{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} a \cdot \frac{\operatorname{Sen} ax}{ax} \cdot \frac{1}{\operatorname{Cos} ax}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} a \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Sen} ax}{ax} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{Cos} ax}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a \cdot 1 \cdot \frac{1}{\operatorname{Cos} 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a \cdot 1 \cdot \frac{1}{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a$$

$$10) \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{Tg}^3 \left(\frac{x+1}{4} \right)}{(x+1)^3}$$

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{Tg}^3 \left(\frac{x+1}{4} \right)}{(x+1)^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{Tg}^3 \left(\frac{x+1}{4} \right)}}{\sqrt[3]{(x+1)^3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{Tg} \left(\frac{x+1}{4} \right)}{(x+1)}$$

$$\text{Faça } u = \frac{x+1}{4} \therefore x = 4u - 1$$

$$\text{Se } x \rightarrow -1 \therefore u \rightarrow \pi$$

$$\lim_{u \rightarrow \pi} f(x) = \lim_{u \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{Tg} u}{4u - 1 + 1}$$

$$\lim_{u \rightarrow \pi} f(x) = \lim_{u \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{Tg} u}{4u}$$

$$\lim_{u \rightarrow \pi} f(x) = \lim_{u \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{Sen} u}{\operatorname{Cos} u} \cdot \frac{1}{4u}$$

$$\lim_{u \rightarrow \pi} f(x) = \lim_{u \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{Sen} u}{\operatorname{Cos} u} \cdot \frac{1}{4u}$$

$$\lim_{u \rightarrow \pi} f(x) = \lim_{u \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{Sen} u}{\operatorname{Cos} u} \cdot \lim_{u \rightarrow \pi} \frac{1}{4u}$$

$$\lim_{u \rightarrow \pi} f(x) = \frac{\operatorname{Sen} \pi}{\operatorname{Cos} \pi} \cdot \frac{1}{4\pi}$$

$$\lim_{u \rightarrow \pi} f(x) = \frac{0}{-1} \cdot \frac{1}{4\pi}$$

$$\lim_{u \rightarrow \pi} f(x) = 0$$

$$11) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 \cdot (\cos x - 1)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} \cdot \frac{\cos x + 1}{\cos x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1^2}{x \cdot (\cos x + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x \cdot (\cos x + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{x \cdot (\cos x + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(\sin x) \cdot (\sin x)}{x \cdot (\cos x + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 \cdot (\sin x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)}{(\cos x + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 \times (-1) \cdot \frac{\sin 0}{\cos 0 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 \times (-1) \cdot \frac{0}{1 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 \times (-1) \times 0$$

$$\underline{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0}$$

$$12) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 \cdot (\cos x - 1)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \frac{\cos x + 1}{\cos x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1^2}{x^2 \cdot (\cos x + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2 \cdot (\cos x + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{x^2 \cdot (\cos x + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(\sin x) \cdot (\sin x)}{x \cdot x \cdot (\cos x + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{(\cos x + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 \times 1 \times 1 \cdot \frac{-1}{\cos 0 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 \cdot \frac{-1}{1 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$$

$$13) \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x-3) \cdot \operatorname{Cosec}(\pi x)$$

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x-3) \cdot \operatorname{Cosec}(\pi x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x-3) \cdot \frac{1}{\operatorname{Sen}(\pi x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)}{\operatorname{Sen}(\pi - \pi x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)}{\operatorname{Sen}(3\pi - \pi x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)}{\operatorname{Sen}(3\pi - \pi x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\pi \cdot \operatorname{Sen}(3\pi - \pi x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\pi \cdot \operatorname{Sen}(3\pi - \pi x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\pi \cdot \operatorname{Sen}(\pi x - 3\pi)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} 1}{\lim_{x \rightarrow 3} \pi \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\operatorname{Sen}(\pi x - 3\pi)}{(\pi x - 3\pi)}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{1}{\pi \cdot 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{1}{\pi}$$

$$14) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \operatorname{Sen} 2x}{2x + 3\operatorname{Sen} 4x}$$

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \operatorname{Sen} 2x}{2x + 3\operatorname{Sen} 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \operatorname{Sen} 2x \cdot \frac{2x}{2x}}{2x + 3\operatorname{Sen} 4x \cdot \frac{4x}{4x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - 2x \cdot \left(\frac{\operatorname{Sen} 2x}{2x} \right)}{2x + 3 \cdot 4x \cdot \left(\frac{\operatorname{Sen} 4x}{4x} \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - 2x \cdot \left(\frac{\operatorname{Sen} 2x}{2x} \right)}{2x + 12x \cdot \left(\frac{\operatorname{Sen} 4x}{4x} \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (6-2) \cdot \left(\frac{\operatorname{Sen} 2x}{2x} \right)}{x \cdot (2+12) \cdot \left(\frac{\operatorname{Sen} 4x}{4x} \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (6-2) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{Sen} 2x}{2x} \right)}{\lim_{x \rightarrow 0} (2+12) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{Sen} 4x}{4x} \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{6-2 \times 1}{2+12 \times 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{4}{14}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{2}{7}$$

$$15) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2}$$

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\operatorname{Sen}\left(\frac{2x+3x}{2}\right) \cdot \operatorname{Sen}\left(\frac{2x-3x}{2}\right)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\operatorname{Sen}\left(\frac{5x}{2}\right) \cdot \operatorname{Sen}\left(-\frac{x}{2}\right)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\operatorname{Sen}\left(\frac{5x}{2}\right) \cdot \left[-\operatorname{Sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right]}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\operatorname{Sen}\left(\frac{5x}{2}\right) \cdot \operatorname{Sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\operatorname{Sen}\left(\frac{5x}{2}\right)}{x} \cdot \frac{\operatorname{Sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\operatorname{Sen}\left(\frac{5x}{2}\right)}{x} \cdot \frac{\operatorname{Sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{x \cdot \left(\frac{2}{2}\right)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\operatorname{Sen}\left(\frac{5x}{2}\right)}{x} \cdot \frac{\operatorname{Sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Sen}\left(\frac{5x}{2}\right) \cdot \frac{5}{2} \cdot \operatorname{Sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{x \cdot \left(\frac{5}{2}\right) \cdot \left(\frac{x}{2}\right)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{2} \cdot \operatorname{Sen}\left(\frac{5x}{2}\right) \cdot \operatorname{Sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{5x}{2}\right) \cdot \left(\frac{x}{2}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Sen}\left(\frac{5x}{2}\right)}{\left(\frac{5x}{2}\right)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{5}{2} \times 1 \times 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{5}{2}$$

$$16) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2\cos x + \cos 2x}{x^2}$$

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2\cos x + \cos 2x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2\cos x + 1 - 2\sin^2 x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2\cos x - 2\sin^2 x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot [1 - \cos x - \sin^2 x]}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \left[2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2 x \right]}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2\sin^2 x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} - \frac{2\sin^2 x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x \cdot x} - \frac{2\sin^2 x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x \cdot \left(\frac{x}{2}\right) \cdot x \cdot \left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{2\sin^2 x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) \cdot 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{2\sin^2 x}{x^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2} - \frac{2\sin^2 x}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} - \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 - 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$$

CAPÍTULO II

ESTUDO DAS DERIVADAS

2. DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

2.1 REGRAS DE DERIVAÇÃO

2.1.1 Derivação pela Regra do Produto

Formula:

$$h(x) = g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Veja algumas resoluções:

$$1) \quad y = (2x + 1) \cdot (3x^2 + 6)$$

Solução:

$$y' = (2x + 1)' \cdot (3x^2 + 6) + (2x + 1) \cdot (3x^2 + 6)'$$

$$y' = 2 \cdot (3x^2 + 6) + (2x + 1) \cdot 6x$$

$$y' = 6x^2 + 12 + 12x^2 + 6x$$

$$\underline{y' = 18x^2 + 6x + 12}$$

$$2) \quad f(x) = (1 + 3x) \cdot (5 - 2x)$$

Solução:

$$f'(x) = (1 + 3x)' \cdot (5 - 2x) + (5 - 2x)' \cdot (1 + 3x)$$

$$f'(x) = (1 + 3x) \cdot (-2) + (5 - 2x) \cdot 3$$

$$f'(x) = -2 - 6x + 15 - 6x$$

$$\underline{f'(x) = -12x + 13}$$

$$3) \quad f(x) = (1 + 5x^2) \cdot (2 + 3x)$$

Solução:

$$f'(x) = (1 + 5x^2)' \cdot (2 + 3x) + (2 + 3x)' \cdot (1 + 5x^2)$$

$$f'(x) = (1 + 5x^2) \cdot 3 + (2 + 3x) \cdot 10x$$

$$f'(x) = 3 + 15x^2 + 20x + 30x^2$$

$$\underline{f'(x) = 45x^2 + 20x + 3}$$

2.1.2 Derivação pela Regra do Quociente

Formula:

$$h'(x) = \frac{g'(x) \cdot f(x) - f'(x) \cdot g(x)}{[f(x)]^2}$$

Veja algumas resoluções:

$$1) \quad y = \frac{2x+4}{3x-1}$$

Solução:

$$y' = \frac{(2x+4)' \cdot (3x-1) - (2x+4) \cdot (3x-1)'}{(3x-1)^2}$$

$$y' = \frac{2 \cdot (3x-1) - (2x+4) \cdot 3}{(3x-1)^2}$$

$$y' = \frac{6x-2-(6x+12)}{(3x-1)^2} \Rightarrow y' = \frac{6x-2-6x-12}{(3x-1)^2} \Rightarrow y' = \frac{-2-12}{(3x-1)^2} \Rightarrow y' = -\frac{14}{(3x-1)^2}$$

$$2) \quad f(x) = \frac{x-8}{3x-4}$$

Solução:

$$f'(x) = \frac{(3x-4) \cdot (x-8)' - (x-8) \cdot (3x-4)'}{(3x-4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(3x-4) \cdot 1 - (x-8) \cdot 3}{(3x-4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x-4-3x+24}{(3x-4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{20}{(3x-4)^2}$$

$$3) \quad f(x) = \frac{4x^2 + 5x}{(x+3)^2}$$

Solução:

$$f'(x) = \frac{(x+3)^2 \cdot (4x^2 + 5x)' - (4x^2 + 5x) \cdot [(x+3)^2]'}{[(x+3)^2]^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x+3)^2 \cdot (8x+5) - (4x^2 + 5x) \cdot 2(x+3) \cdot (x+3)'}{(x+3)^4}$$

$$f'(x) = \frac{(x+3)^2 \cdot (8x+5) - (4x^2 + 5x) \cdot (2x+6) \cdot 1}{(x+3)^4}$$

$$f'(x) = \frac{(x+3)^2 \cdot (8x+5) - (4x^2 + 5x) \cdot (2x+6)}{(x+3)^4}$$

2.1.3 Derivação pela Regra da Potência

Formula:

$$f'(x) = n \cdot [u(x)]^{n-1} \cdot [u(x)]'$$

Veja algumas resoluções:

$$1) \quad y = (x^2 + 5x + 7)^7$$

Solução:

$$y' = 7 \cdot (x^2 + 5x + 7)^6 \cdot (x^2 + 5x + 7)'$$

$$y' = 7 \cdot (x^2 + 5x + 7)^6 \cdot (2x + 5)$$

$$y' = (x^2 + 5x + 7)^6 \cdot (14x + 35)$$

$$2) \quad f(x) = \sqrt{(x^2 + 2x + 14)}$$

Solução:

$$f(x) = (x^2 + 2x + 14)^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 2x + 14)^{-1/2} \cdot (x^2 + 2x + 14)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 2x + 14)^{-1/2} \cdot (2x + 2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x^2 + 2x + 14)^{1/2}} \cdot (2x + 2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x + 2)}{\sqrt{x^2 + 2x + 14}}$$

$$f'(x) = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x + 14}}$$

2.2 DERIVAÇÃO DE FUNÇÕES PARTICULARES

2.2.1 Derivação de Função Exponencial

Formula:

$$f'(a^u) = a^u \cdot u' \cdot \ln a$$

Veja algumas resoluções:

$$1) \quad y = 3^{2x^2 + 3x + 1}$$

Solução:

$$y' = 3^{2x^2 + 3x + 1} \cdot (2x^2 + 3x + 1)' \cdot \ln 3$$

$$y' = 3^{2x^2 + 3x + 1} \cdot (4x + 3) \cdot \ln 3$$

$$2) \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}}$$

Solução:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}} \cdot [\sqrt{x}]' \cdot \ln \frac{1}{2} \Rightarrow y' = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}} \cdot \left[(x)^{\frac{1}{2}}\right]' \cdot \ln \frac{1}{2} \Rightarrow y' = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot (x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \ln \frac{1}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow y' &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x)^{\frac{1}{2}}} \ln \frac{1}{2} \\ \Rightarrow y' &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \ln \frac{1}{2} \\ \Rightarrow y' &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2.2.2 Derivação de Função Exponencial de Base e

Formula:

$$f'(x) = e^x \cdot (x)'$$

Exemplo:

$$f(x) = e^{(x^2+x)}$$

Solução:

$$f'(x) = e^{(x^2+x)} \cdot (x^2 + x)'$$

$$f'(x) = e^{(x^2+x)} \cdot 2x$$

$$\underline{f'(x) = 2x \cdot e^{(x^2+x)}}$$

2.2.3 Derivação de um Logaritmo Natural

Formula:

$$f'u = \frac{u'}{u}$$

Exemplo:

$$y = \ln(3x^2 - 7)$$

Solução:

$$y' = \frac{(3x^2 - 7)'}{3x^2 - 7}$$

$$y' = \frac{6x}{3x^2 - 7}$$

2.2.4 Derivação de Função Logarítmica

Formula:

$$f'(\log_a u) = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$$

Exemplo:

$$y = \log_2(3x^2 + 7x - 1)$$

Solução:

$$y' = \frac{(3x^2 + 7x - 1)'}{(3x^2 + 7x - 1) \cdot \ln 2}$$

$$y' = \frac{6x + 7}{(3x^2 + 7x - 1) \cdot \ln 2}$$

2.3 DERIVAÇÃO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Relações Fundamentais:

$$1) y = \operatorname{Sen} x$$

Solução:

$$y' = \operatorname{Cos} x \cdot x'$$

$$2) y = \operatorname{Cos} x$$

Solução:

$$y' = -\operatorname{Sen} x \cdot x'$$

$$3) y = \operatorname{Tg} x$$

Solução:

$$y' = \operatorname{Sec}^2 x \cdot x'$$

$$4) y = \operatorname{Cotg} x$$

Solução:

$$y' = -x' \cdot \operatorname{Cos} \operatorname{sec}^2 x$$

$$5) y = \operatorname{Sec} x$$

Solução:

$$y' = x' \cdot \operatorname{Sec} x \cdot \operatorname{Tg} x$$

$$6) y = \operatorname{Cos} \operatorname{sec} x$$

Solução:

$$y' = -x' \cdot \operatorname{Cos} \operatorname{sec} x \cdot \operatorname{Cotg} x$$

Veja algumas resoluções:

$$1) y = \sec \sqrt{x-1}$$

Solução:

$$y' = (\sqrt{x-1})' \cdot \sec \sqrt{x-1} \cdot \operatorname{Tg} \sqrt{x-1}$$

$$y' = \left[(x-1)^{\frac{1}{2}} \right]' \cdot \sec \sqrt{x-1} \cdot \operatorname{Tg} \sqrt{x-1}$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot (x-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sec \sqrt{x-1} \cdot \operatorname{Tg} \sqrt{x-1}$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \sec \sqrt{x-1} \cdot \operatorname{Tg} \sqrt{x-1}$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}} \cdot \sec \sqrt{x-1} \cdot \operatorname{Tg} \sqrt{x-1}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot \sec \sqrt{x-1} \cdot \operatorname{Tg} \sqrt{x-1}$$

$$2) y = \cos \sec (x^2 + 4)$$

Solução:

$$y' = -(x^2 + 4)' \cdot \cos \sec (x^2 + 4) \cdot \operatorname{Cotg} (x^2 + 4)$$

$$y' = -2x \cdot \cos \sec (x^2 + 4) \cdot \operatorname{Cotg} (x^2 + 4)$$

$$3) y = \operatorname{Cotg} (x^3 - 2x)$$

Solução:

$$y' = -(x^3 - 2x)' \cdot \cos \sec^2 (x^3 - 2x)$$

$$y' = -(3x^2 - 2) \cdot \cos \sec^2 (x^3 - 2x)$$

$$y' = (-3x^2 + 2) \cdot \cos \sec^2 (x^3 - 2x)$$

$$4) y = \cos 3x^2$$

Solução:

$$y' = -(3x^2)' \cdot \sin 3x^2$$

$$y' = -(3x^2)' \cdot \sin 3x^2$$

$$y' = -6x \cdot \sin 3x^2$$

$$5) y = \operatorname{Tg}^3 (3x + 1)$$

Solução:

$$y' = 3 \cdot \operatorname{Tg} (3x + 1)^{3-1} \cdot \operatorname{Tg} (3x + 1)'$$

$$y' = 3 \cdot \operatorname{Tg} (3x + 1)^2 \cdot \sec^2 (3x + 1) \cdot (3x + 1)'$$

$$y' = 3 \cdot \operatorname{Tg} (3x + 1)^2 \cdot \sec^2 (3x + 1) \cdot 3$$

$$y' = 9 \cdot \operatorname{Tg} (3x + 1)^2 \cdot \sec^2 (3x + 1)$$

2.4 DERIVAÇÃO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Formulas Fundamental:

$$1) \quad (\operatorname{arc Sen} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$2) \quad (\operatorname{arc Cos} u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$3) \quad (\operatorname{arc Tg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$4) \quad (\operatorname{arc Sec} u)' = \frac{u'}{|u| \cdot \sqrt{u^2-1}}$$

$$5) \quad (\operatorname{arc Cossec} u)' = \frac{-u'}{|u| \cdot \sqrt{u^2-1}}$$

Veja algumas resoluções:

$$1) \quad y = \operatorname{arc Sen} \sqrt{x}$$

Solução:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \Rightarrow y' = \frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'}{\sqrt{1-x}} \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-x}} \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{1-x}} \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}} \end{aligned}$$

$$2) \quad y = \operatorname{arc Tg} x^2$$

Solução:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2} \\ y' &= \frac{2x}{1+x^4} \end{aligned}$$

2.5 DERIVAÇÕES DE ORDEM SUCESSIVAS

Veja algumas resoluções:

$$1) \quad y = 3x^5 + 8x^2, \quad n = 6$$

Solução:

$$y' = 15x^4 + 16x$$

$$y'' = 60x^3 + 16$$

$$y''' = 180x^2$$

$$y'''' = 360x$$

$$y''''' = 360$$

$$\underline{y'''''' = 0}$$

$$2) \quad y = e^{\frac{x}{2}}, \quad n = 3$$

Solução:

$$y' = e^{\frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)'$$

$$y' = e^{\frac{x}{2}} \cdot$$

$$y' = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$$

$$y'' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x\right)'$$

$$y'' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}}$$

$$y'' = \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{x}{2}} \Rightarrow y''' = \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y''' = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}} \Rightarrow \underline{y''' = \frac{1}{8} \cdot e^{\frac{x}{2}}}$$

2.6 DERIVAÇÕES HÍBRIDAS

2.6.1 Envolvendo Regra da Potência e Quociente

Veja algumas resoluções:

$$1) \quad y = \left(\frac{3x+2}{x+1}\right)^5$$

Solução:

$$y' = 5 \cdot \left(\frac{3x+2}{x+1}\right)^4 \cdot \left(\frac{3x+2}{x+1}\right)'$$

$$y' = 5 \cdot \left(\frac{3x+2}{x+1}\right)^4 \cdot \left(\frac{(3x+2)' \cdot (x+1) - (3x+2) \cdot (x+1)'}{(x+1)^2}\right)$$

$$y' = 5 \cdot \left(\frac{3x+2}{x+1}\right)^4 \cdot \left(\frac{3 \cdot (x+1) - (3x+2) \cdot 1}{(x+1)^2}\right)$$

$$y' = 5 \cdot \left(\frac{3x+2}{x+1}\right)^4 \cdot \left(\frac{3x+3-3x-2}{(x+1)^2}\right)$$

$$\underline{y' = 5 \cdot \left(\frac{3x+2}{x+1}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)}$$

$$2) \quad f(x) = \frac{(5x^2 + 3x)^4}{(2x^2 + x)^3}$$

Solução:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x^2 + x)^3 \cdot [(5x^2 + 3x)^4]' - (5x^2 + 3x)^4 \cdot [(2x^2 + x)^3]'}{[(2x^2 + x)^3]^2} \\ f'(x) &= \frac{(2x^2 + x)^3 \cdot 4 \cdot (5x^2 + 3x)^3 \cdot (5x^2 + 3x)' - (5x^2 + 3x)^4 \cdot 3 \cdot (2x^2 + x)^2 \cdot (2x^2 + x)'}{[(2x^2 + x)^3]^2} \\ f'(x) &= \frac{(2x^2 + x)^3 \cdot 4 \cdot (5x^2 + 3x)^3 \cdot (10x + 3) - (5x^2 + 3x)^4 \cdot 3 \cdot (2x^2 + x)^2 \cdot (4x + 1)}{[(2x^2 + x)^3]^2} \\ f'(x) &= \frac{(2x^2 + x)^3 \cdot (5x^2 + 3x)^3 \cdot (40x + 12) - (5x^2 + 3x)^4 \cdot (2x^2 + x)^2 \cdot (12x + 3)}{(2x^2 + x)^6} \end{aligned}$$

2.6.2 Envolvendo Regra da Potência e Produto

Veja algumas resoluções:

$$1) \quad y = (3x^2 + 1)^3 \cdot (x - x^2)^2$$

Solução:

$$\begin{aligned} y' &= [(3x^2 + 1)^3]' \cdot (x - x^2)^2 + (3x^2 + 1)^3 \cdot [(x - x^2)^2]' \\ y' &= 3 \cdot (3x^2 + 1)^2 \cdot (3x^2 + 1)' \cdot (x - x^2)^2 + (3x^2 + 1)^3 \cdot 2 \cdot (x - x^2)' \cdot (x - x^2) \\ y' &= 3 \cdot (3x^2 + 1)^2 \cdot 6x \cdot (x - x^2)^2 + (3x^2 + 1)^3 \cdot 2 \cdot (x - x^2)' \cdot (1 - 2x) \\ y' &= 18x \cdot (3x^2 + 1)^2 \cdot (x - x^2)^2 + (3x^2 + 1)^3 \cdot (2x - 2x^2) \cdot (1 - 2x) \end{aligned}$$

$$2) \quad f(x) = (5x^2 + 3x)^4 \cdot (2x^2 + x)^3$$

Solução:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (5x^2 + 3x)^4 \cdot (2x^2 + x)^3' + (2x^2 + x)^3 \cdot (5x^2 + 3x)^4' \\ f'(x) &= (5x^2 + 3x)^4 \cdot 3 \cdot (2x^2 + x)^2 \cdot (2x^2 + x)' + (2x^2 + x)^3 \cdot 4 \cdot (5x^2 + 3x)^3 \cdot (5x^2 + 3x)' \\ f'(x) &= (5x^2 + 3x)^4 \cdot 3 \cdot (2x^2 + x)^2 \cdot (4x + 1) + (2x^2 + x)^3 \cdot 4 \cdot (5x^2 + 3x)^3 \cdot (10x + 3) \\ f'(x) &= (5x^2 + 3x)^4 \cdot (2x^2 + x)^2 \cdot (12x + 3) + (2x^2 + x)^3 \cdot (5x^2 + 3x)^3 \cdot (40x + 12) \end{aligned}$$

2.6.3 Envolvendo Regra do Quociente e Função Exponencial na base e

Exemplo:

$$y = e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

Solução:

$$y' = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \left(\frac{x+1}{x-1} \right)' \cdot \ln e$$

$$y' = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \left(\frac{(x+1)' \cdot (x-1) - (x+1) \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} \right) \cdot 1$$

$$y' = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \left(\frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} \right) \Rightarrow y' = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \left(\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} \right) \Rightarrow y' = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \left(\frac{-2}{(x-1)^2} \right)$$

2.6.4 Envolvendo Regra do Produto e Função Exponencial na base e

Exemplo:

$$y = e^{x \cdot \ln x}$$

Solução:

$$y' = e^{x \cdot \ln x} \cdot (x \cdot \ln x)' \cdot \ln e$$

$$y' = e^{x \cdot \ln x} \cdot (x' \cdot \ln x + x \cdot \ln x') \cdot 1$$

$$y' = e^{x \cdot \ln x} \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{x'}{x} \right)$$

$$y' = e^{x \cdot \ln x} \cdot \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right)$$

$$y' = e^{x \cdot \ln x} \cdot (\ln x + 1)$$

2.6.5 Envolvendo Logaritmo Natural e Regra do Quociente

Exemplo:

$$y = \ln\left(\frac{e^x}{x+1}\right)$$

Solução:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\left(\frac{e^x}{x+1}\right)'}{\left(\frac{e^x}{x+1}\right)} \Rightarrow y' = \frac{\frac{(e^x)' \cdot (x+1) - (e^x) \cdot (x+1)'}{(x+1)^2}}{\left(\frac{e^x}{x+1}\right)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow y' = \frac{\frac{e^x \cdot (x+1) - (e^x) \cdot 1}{(x+1)^2}}{\left(\frac{e^x}{x+1}\right)} \Rightarrow y' = \frac{\frac{e^x \cdot (x+1) - e^x}{(x+1)^2}}{\left(\frac{e^x}{x+1}\right)} \Rightarrow y' = \frac{\frac{e^x \cdot [(x+1) - 1]}{(x+1)^2}}{\left(\frac{e^x}{x+1}\right)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow y' = \frac{e^x \cdot [x+1-1]}{(x+1)^2} \cdot \frac{(x+1)}{e^x} \Rightarrow y' = \frac{x}{(x+1)} \end{aligned}$$

2.6.6 Envolvendo Funções Trigonométricas e Regra do Quociente

Exemplo:

$$y = \frac{\cos 4x}{1 - \sin 4x}$$

Solução:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\cos 4x)' \cdot (1 - \sin 4x) - (\cos 4x) \cdot (1 - \sin 4x)'}{(1 - \sin 4x)^2} \\ y' &= \frac{(-4x)' \cdot (\sin 4x) \cdot (1 - \sin 4x) - (\cos 4x) \cdot (-4x)' \cdot (\cos 4x)}{(1 - \sin 4x)^2} \\ y' &= \frac{-4 \cdot (\sin 4x) \cdot (1 - \sin 4x) + 4 \cdot (\cos 4x) \cdot (\cos 4x)}{(1 - \sin 4x)^2} \\ y' &= \frac{-4 \cdot \sin 4x + 4 \cdot \sin^2 4x + 4 \cdot \cos^2 4x}{(1 - \sin 4x)^2} \\ y' &= \frac{-4 \cdot \sin 4x + 4 \cdot (\sin^2 4x + \cos^2 4x)}{(1 - \sin 4x)^2} \\ y' &= \frac{-4 \cdot \sin 4x + 4 \cdot (1)}{(1 - \sin 4x)^2} \\ y' &= \frac{4 \cdot (-\sin 4x + 1)}{(1 - \sin 4x)^2} \\ y' &= \frac{4}{(1 - \sin 4x)} \end{aligned}$$

2.6.7 Envolvendo Funções Trigonométricas e Regra do Logaritmo Natural

Exemplo:

$$y = \ln (\operatorname{Cos} \sec x + \operatorname{Cotg} x)$$

Solução:

$$y' = \frac{(\operatorname{Cos} \sec x + \operatorname{Cotg} x)'}{(\operatorname{Cos} \sec x + \operatorname{Cotg} x)}$$

$$y' = \frac{(\operatorname{Cos} \sec x)' + (\operatorname{Cotg} x)'}{(\operatorname{Cos} \sec x + \operatorname{Cotg} x)}$$

$$y' = \frac{(-\operatorname{Cos} \sec x \cdot \operatorname{Cotg} x) + (-\operatorname{Cos} \sec^2 x)}{(\operatorname{Cos} \sec x + \operatorname{Cotg} x)} \Rightarrow y' = \frac{-\operatorname{Cos} \sec x \cdot \operatorname{Cotg} x - \operatorname{Cos} \sec^2 x}{(\operatorname{Cos} \sec x + \operatorname{Cotg} x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-\operatorname{Cos} \sec x \cdot (\operatorname{Cotg} x + \operatorname{Cos} \sec x)}{(\operatorname{Cos} \sec x + \operatorname{Cotg} x)} \Rightarrow y' = -\operatorname{Cos} \sec x$$

2.6.8 Envolvendo Funções Trigonométricas Inversas e Regra da Função Composta

Exemplo:

$$y = x^{\operatorname{Sen} x}$$

Solução:

$$y' = \operatorname{Sen} x \cdot x^{\operatorname{Sen} x - 1} \cdot x' + x^{\operatorname{Sen} x} \cdot \operatorname{Sen} x' \cdot \ln x$$

$$y' = \operatorname{Sen} x \cdot x^{\operatorname{Sen} x} \cdot x^{-1} \cdot 1 + x^{\operatorname{Sen} x} \cdot \operatorname{Cos} x \cdot \ln x$$

$$y' = \operatorname{Sen} x \cdot x^{\operatorname{Sen} x} \cdot \frac{1}{x^1} + x^{\operatorname{Sen} x} \cdot \operatorname{Cos} x \cdot \ln x$$

$$y' = \frac{\operatorname{Sen} x \cdot x^{\operatorname{Sen} x}}{x} + x^{\operatorname{Sen} x} \cdot \operatorname{Cos} x \cdot \ln x$$

$$y' = x^{\operatorname{Sen} x} \cdot \left(\frac{\operatorname{Sen} x}{x} + \operatorname{Cos} x \cdot \ln x \right)$$

2.6.9 Envolvendo Funções Trigonômétricas Inversas e Regra da Função Potência

Exemplo:

$$y = (1 + \arccos 3x)^3$$

Solução:

$$y' = 3 \cdot (1 + \arccos 3x)^{3-1} \cdot (1 + \arccos 3x)'$$

$$y' = 3 \cdot (1 + \arccos 3x)^2 \cdot \left(0 + \frac{-(3x)'}{\sqrt{1-(3x)^2}} \right)$$

$$y' = 3 \cdot (1 + \arccos 3x)^2 \cdot \left(\frac{-3}{\sqrt{1-9x^2}} \right)$$

$$y' = -\frac{9 \cdot (1 + \arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}$$

2.6.10 Envolvendo Funções Trigonômétricas Inversas e Regra do Logaritmo Natural

Exemplo:

$$y = \ln (\arctan x^2)$$

Solução:

$$y' = \frac{(\arctan x^2)'}{(\arctan x^2)}$$

$$y' = \frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2} \Rightarrow y' = \frac{2x}{1+x^4} \Rightarrow y' = \frac{2x}{1+x^4} \cdot \frac{1}{(\arctan x^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2x}{(1+x^4) \cdot (\arctan x^2)}$$

2.6.11 Envolvendo Funções Trigonômétricas Inversas e Regra da Função Exponencial

Exemplo:

$$y = 3^{\arcsin x^3}$$

Solução:

$$y' = 3^{\arcsin x^3} \cdot (\arcsin x^3)' \cdot \ln 3$$

$$y' = 3^{\arcsin x^3} \cdot \left[\frac{(x^3)'}{\sqrt{1-(x^3)^2}} \right] \cdot \ln 3$$

$$y' = 3^{\arcsin x^3} \cdot \left[\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}} \right] \cdot \ln 3$$

$$y' = \frac{3^{\arcsin x^3} \cdot 3x^2 \cdot \ln 3}{\sqrt{1-x^6}}$$

2.6.12 Envolvendo Funções Trigonômicas Inversas e Regra da Função Composta

Exemplo:

$$y = (\operatorname{Tg} x)^{\arctg x}$$

Solução:

$$y' = (\arctg x) \cdot (\operatorname{Tg} x)^{\arctg x - 1} \cdot (\operatorname{Tg} x)' + (\operatorname{Tg} x)^{\arctg x} \cdot (\arctg x)' \cdot \ln \operatorname{Tg}$$

$$y' = (\arctg x) \cdot (\operatorname{Tg} x)^{\arctg x} \cdot (\operatorname{Tg} x)^{-1} \cdot (\operatorname{Tg} x)' + (\operatorname{Tg} x)^{\arctg x} \cdot (\arctg x)' \cdot \ln \operatorname{Tg}$$

$$y' = (\arctg x) \cdot (\operatorname{Tg} x)^{\arctg x} \cdot \frac{1}{(\operatorname{Tg} x)^1} \cdot \operatorname{Sec}^2 x \cdot x' + (\operatorname{Tg} x)^{\arctg x} \cdot \frac{x'}{1+x^2} \cdot \ln \operatorname{Tg}$$

$$y' = (\arctg x) \cdot (\operatorname{Tg} x)^{\arctg x} \cdot \frac{1}{(\operatorname{Tg} x)} \cdot \operatorname{Sec}^2 x \cdot 1 + (\operatorname{Tg} x)^{\arctg x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot \ln \operatorname{Tg}$$

$$y' = \frac{(\arctg x) \cdot (\operatorname{Tg} x)^{\arctg x} \cdot \operatorname{Sec}^2 x}{(\operatorname{Tg} x)} + \frac{(\operatorname{Tg} x)^{\arctg x} \cdot \ln \operatorname{Tg}}{1+x^2}$$

CAPÍTULO III

ESTUDO DAS INTEGRAIS

3. INTEGRAIS INDEFINIDAS

3.1 REGRAS DE INTEGRAÇÃO

3.1.1 Pelo Teorema Fundamental do Cálculo

Formula:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Exemplo:

$$\begin{aligned} \int x^4 dx \\ f(x) &= \frac{x^{4+1}}{4+1} \\ f(x) &= \frac{x^5}{5} + C \end{aligned}$$

3.1.2 Para uma Função Exponencial

Formula:

$$\int a^{k \cdot x} dx = \frac{a^{k \cdot x}}{k \cdot \ln a} + C$$

Exemplo:

$$\int 3^{4x} dx = \frac{3^{4x}}{4 \cdot \ln 3} + C$$

3.1.3 Para uma Função Exponencial de base e

Formula:

$$\int e^{k \cdot x} dx = \frac{e^{k \cdot x}}{k} + C$$

Exemplo:

$$\int e^{6x} dx = \frac{e^{6x}}{6} + C$$

3.1.4 Para Deslocamento de uma Constante

Formula:

$$\int a \cdot dx$$

$$a \int dx = ax + C$$

Exemplo:

$$\int 2 dx$$

$$2 \int dx = 2x + C$$

3.1.5 Para uma Função Logaritmo Natural

Formula:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C$$

Exemplo:

$$\int \frac{6}{x} dx \Rightarrow \int 6 \cdot \frac{1}{x} dx = 6 \cdot \ln(x) + C$$

3.1.6 Para uma Soma e Subtração

Formula:

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx$$

$$\int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

Exemplo:

$$\int (3x^2 - 4x^3) dx$$

Solução:

$$\int 3x^2 dx - \int 4x^3 dx$$

$$3 \int x^2 dx - 4 \int x^3 dx$$

$$= 3 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} - 4 \cdot \frac{x^{3+1}}{3+1}$$

$$= 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^4}{4}$$

$$= x^3 - x^4 + C$$

3.1.7 Veja algumas Resoluções

$$1) \int (5 - 4t) dt$$

Solução:

$$\int 5 dt - \int 4t dt$$

$$5 \int dt - 4 \int t dt$$

$$f(x) = 5t - 4 \cdot \frac{t^{1+1}}{1+1}$$

$$f(x) = 5t - 4 \cdot \frac{t^2}{2}$$

$$f(x) = 5t - 2t^2 + C$$

$$2) \int \left(\frac{12 + 12x - 3x^3}{x^4} \right) dx$$

Solução:

$$\int \frac{12}{x^4} + \int \frac{12x}{x^4} - \int \frac{3x^3}{x^4}$$

$$\int 12x^{-4} dx + \int 12x \cdot (x^{-4}) dx - \int 3x^3 \cdot (x^{-4}) dx$$

$$f(x) = 12 \cdot \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + 12 \cdot \frac{x^{-3+1}}{-3+1} - 3 \int \frac{1}{x} dx$$

$$f(x) = 12 \cdot \frac{x^{-3}}{-3} + 12 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} - 3 \ln(x)$$

$$f(x) = -4x^{-3} + 6x^{-2} - 3 \ln(x) + C$$

$$3) \int (2 + x^2) \times (3 + x^2) dx$$

Solução:

$$\int (6 + 2x^2 + 3x^2 + x^4) dx$$

$$\int (6 + 5x^2 + x^4) dx$$

$$\int 6 dx + \int 5x^2 dx + \int x^4 dx$$

$$f(x) = 6x + 5 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{x^{4+1}}{4+1}$$

$$f(x) = 6x + 5 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + C$$

$$4) \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x^3$$

Solução:

$$dy = (3x^2 - 4x^3) dx$$

$$\int dy = \int (3x^2 - 4x^3) dx$$

$$y = \int 3x^2 dx - \int 4x^3 dx$$

$$y = 3 \times \frac{x^{2+1}}{2+1} - 4 \times \frac{x^{3+1}}{3+1}$$

$$y = 3 \times \frac{x^3}{3} - 4 \times \frac{x^4}{4}$$

$$y = x^3 - x^4 + C$$

$$5) \int \sqrt{x} dx$$

Solução:

$$\int x^{1/2} dx$$

$$f(x) = \frac{x^{(1/2)+1}}{(1/2)+1} + C$$

$$6) \frac{dy}{dx} = 200x^4$$

Solução:

$$dy = 200x^4 dx$$

$$\int dy = \int 200x^4 dx$$

$$y = 200 \times \frac{x^{4+1}}{4+1}$$

$$y = 200 \times \frac{x^5}{5}$$

$$y = 40x^5 + C$$

$$7) \int 4z^{-1} dz$$

Solução:

$$4 \int \frac{1}{z} dz$$

$$f(x) = 4 \ln(z) + C$$

3.2 TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

3.2.1 Método da Substituição

Formula:

$$\int f[g(x)] \cdot g'(x) \cdot dx = \int f(u) \cdot du$$

Veja algumas aplicações:

$$1) \int (3x+5)^2 \cdot 3 dx$$

Solução:

$$u = 3x+5$$

$$\frac{du}{dx} = 3 \therefore du = 3 dx$$

Logo:

$$\int u^2 du$$

$$F(x) = \frac{u^3}{3}$$

$$F(x) = \frac{(3x+5)^3}{3} + C$$

$$2) \int e^{5x} \cdot 5 dx$$

Solução:

$$u = 5x$$

$$\frac{du}{dx} = 5 \therefore du = 5 dx$$

Logo:

$$\int e^u du$$

$$F(x) = e^u$$

$$F(x) = e^{5x} + C$$

$$3) \int \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x dx$$

Solução:

$$u = 1 + x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2x \therefore du = 2x dx$$

Logo:

$$\int \frac{1}{u} \cdot du$$

$$F(x) = \ln(u)$$

$$F(x) = \ln(1 + x^2) + C$$

$$4) \int (x+3)^{10} \cdot dx$$

Solução:

$$u = x + 3$$

$$\frac{du}{dx} = 1 \therefore du = dx$$

Logo:

$$\int u^{10} \cdot du$$

$$F(x) = \frac{u^{11}}{11}$$

$$F(x) = \frac{(x+3)^{11}}{11} + C$$

3.2.2 Método Integração por Partes

Formula:

$$\int f(x) \cdot g'(x) \cdot dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x) \cdot dx$$

$$\int u \cdot dv = (u \cdot v) - \int v \cdot du$$

Veja algumas aplicações:

$$1) \int x e^x dx$$

Solução:

$$u = x$$

$$\frac{du}{dx} = 1 \therefore du = dx$$

$$dv = e^x dx$$

$$\int dv = \int e^x dx$$

$$v = e^x$$

$$\int u \cdot dv = (x \cdot e^x) - \int e^x \cdot dx$$

$$\int u \cdot dv = x e^x - e^x$$

$$\int u \cdot dv = e^x (x - 1) + C$$

$$2) \int x \cdot \ln x \, dx$$

Solução:

$$u = \ln x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \therefore du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = x \, dx$$

$$\int dv = \int x \, dx$$

$$v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int u \cdot dv = (u \cdot v) - \int v \cdot du$$

$$\int u \cdot dv = (\ln x) \cdot \left(\frac{x^2}{2} \right) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x}$$

$$\int u \cdot dv = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx$$

$$\int u \cdot dv = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

$$3) \int x^2 e^x \, dx$$

Solução:

$$u = x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2x \therefore du = 2x \, dx$$

$$dv = e^x \, dx$$

$$\int dv = \int e^x \, dx$$

$$v = e^x$$

$$\int u \cdot dv = (u \cdot v) - \int v \cdot du$$

$$\int u \cdot dv = (x^2) \cdot (e^x) - \int e^x \cdot 2x \, dx$$

$$\int u \cdot dv = x^2 e^x - 2 \int e^x x \, dx$$

$$\int u \cdot dv = x^2 e^x - 2 \cdot [(x-1) \cdot e^x] + C$$

3.2.2.1 Obtenção de Formulas de Redução

Através da técnica de integração por partes é possível a obtenção de Fórmulas de Redução para determinados tipos de integrais trigonométricas. Estas fórmulas expressam uma integral com potência de função em termos de integrais que expressam uma potência de valor menorem relação aquela função.

Formulas:

$$\int \text{Sen}^n x \cdot dx = -\frac{1}{n} \cdot \text{Sen}^{n-1} x \cdot \text{Cos} x + \frac{n-1}{n} \cdot \int \text{Sen}^{n-2} x \cdot dx$$

$$\int \text{Cos}^n x \cdot dx = \frac{1}{n} \cdot \text{Cos}^{n-1} x \cdot \text{Sen} x + \frac{n-1}{n} \cdot \int \text{Cos}^{n-2} x \cdot dx$$

Veja algumas aplicações:

$$1) \int \text{Sen}^3 x \cdot dx$$

Solução:

$$\int \text{Sen}^3 x \cdot dx = -\frac{1}{3} \cdot \text{Sen}^{3-1} x \cdot \text{Cos} x + \frac{3-1}{3} \cdot \int \text{Sen}^{3-2} x \cdot dx$$

$$\int \text{Sen}^3 x \cdot dx = -\frac{1}{3} \cdot \text{Sen}^2 x \cdot \text{Cos} x + \frac{2}{3} \cdot \int \text{Sen} x \cdot dx$$

$$\int \text{Sen}^3 x \cdot dx = -\frac{1}{3} \cdot \text{Sen}^2 x \cdot \text{Cos} x - \frac{2}{3} \cdot \text{Cos} x$$

$$\int \text{Sen}^3 x \cdot dx = \text{Cos} x \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot \text{Sen}^2 x - \frac{2}{3} \right) + C$$

$$2) \int \text{Cos}^4 x \cdot dx$$

Solução:

$$\int \text{Cos}^4 x \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \text{Cos}^{4-1} x \cdot \text{Sen} x + \frac{4-1}{4} \cdot \int \text{Cos}^{4-2} x \cdot dx$$

$$\int \text{Cos}^4 x \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \text{Cos}^3 x \cdot \text{Sen} x + \frac{3}{4} \cdot \int \text{Cos}^2 x \cdot dx$$

$$\int \text{Cos}^4 x \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \text{Cos}^3 x \cdot \text{Sen} x + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \text{Cos}^{2-1} x \cdot \text{Sen} x + \frac{2-1}{2} \cdot \int \text{Cos}^{2-2} x \cdot dx \right)$$

$$\int \text{Cos}^4 x \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \text{Cos}^3 x \cdot \text{Sen} x + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \text{Cos} x \cdot \text{Sen} x + \frac{1}{2} \cdot \int 1 \cdot dx \right)$$

$$\int \text{Cos}^4 x \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \text{Cos}^3 x \cdot \text{Sen} x + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \text{Cos} x \cdot \text{Sen} x + \frac{1}{2} \cdot x \right)$$

$$\int \text{Cos}^4 x \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \text{Cos}^3 x \cdot \text{Sen} x + \frac{3}{8} \cdot \text{Cos} x \cdot \text{Sen} x + \frac{3}{8} \cdot x$$

$$\int \text{Cos}^4 x \cdot dx = \text{Sen} x \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \text{Cos}^3 x + \frac{3}{8} \cdot \text{Cos} x \right) + \frac{3}{8} \cdot x + C$$

3.2.3 Aplicações envolvendo as Técnicas de Integração

$$1) \int x \operatorname{Sen} 5x \, dx$$

Solução:

Consideramos:

$$\begin{aligned} u &= x & dv &= \operatorname{Sen} 5x \, dx \\ \frac{du}{dx} &= 1 & \int dv &= \int \operatorname{Sen} 5x \, dx \\ du &= dx & v &= \int \operatorname{Sen} 5x \, dx \end{aligned}$$

Veja que obtivemos uma 2ª integral:

$$\int \operatorname{Sen} 5x \, dx$$

Logo façamos:

$$\begin{aligned} t &= 5x & \int \operatorname{Sen} 5x \, dx \\ \frac{dt}{dx} &= 5 & \int \operatorname{Sen} t \cdot \frac{dt}{5} \\ dt &= 5 \cdot dx & \frac{1}{5} \int \operatorname{Sen} t \cdot dt \Rightarrow \frac{1}{5} \cdot (-\operatorname{Cos} t) \Rightarrow -\frac{1}{5} \cdot \operatorname{Cos} 5x \end{aligned}$$

Daí:

$$\begin{aligned} v &= \int \operatorname{Sen} 5x \, dx \\ v &= -\frac{1}{5} \cdot \operatorname{Cos} 5x \end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned} \int x \cdot \operatorname{Sen} 5x \, dx &= u \cdot v - \int v \cdot du \\ \int x \cdot \operatorname{Sen} 5x \, dx &= x \cdot \left(-\frac{1}{5} \cdot \operatorname{Cos} 5x \right) - \int -\frac{1}{5} \cdot \operatorname{Cos} 5x \cdot dx \\ \int x \cdot \operatorname{Sen} 5x \, dx &= -\frac{1}{5} \cdot x \cdot \operatorname{Cos} 5x + \frac{1}{5} \int \operatorname{Cos} 5x \cdot dx \end{aligned}$$

Veja que obtivemos uma 3ª integral:

$$\int \operatorname{Cos} 5x \cdot dx$$

Logo façamos:

$$\begin{aligned} w &= 5x & \int \cos 5x \, dx \\ \frac{dw}{dx} &= 5 & \int \cos w \cdot \frac{dw}{5} \\ dw &= 5 \cdot dx & \frac{1}{5} \int \cos w \cdot dw \Rightarrow \frac{1}{5} \cdot \text{Sen } w \Rightarrow \frac{1}{5} \cdot \text{Sen } 5x \end{aligned}$$

Continuando coma integral primária:

$$\begin{aligned} \int x \cdot \text{Sen } 5x \, dx &= -\frac{1}{5} \cdot x \cdot \cos 5x + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \text{Sen } 5x \\ \int x \cdot \text{Sen } 5x \, dx &= -\frac{1}{5} \cdot x \cdot \cos 5x + \frac{1}{25} \cdot \text{Sen } 5x \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\int x \cdot \text{Sen } 5x \, dx = -\frac{1}{5} \cdot x \cdot \cos 5x + \frac{1}{25} \cdot \text{Sen } 5x + C$$

$$2) \int \ln(1-x) \, dx$$

Solução:

Consideramos:

$$\begin{aligned} u &= \ln(1-x) & dv &= dx \\ \frac{du}{dx} &= -\frac{1}{1-x} & \int dv &= \int dx \\ du &= -\frac{1}{1-x} \cdot dx & v &= x \end{aligned}$$

Logo Façamos:

$$\begin{aligned} \int u \cdot dv &= u \cdot v - \int v \cdot du \\ \int \ln(1-x) \, dx &= \ln(1-x) \cdot x - \int x \cdot \left(-\frac{1}{1-x}\right) \cdot dx \\ \int \ln(1-x) \, dx &= \ln(1-x) \cdot x + \int x \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right) \cdot dx \end{aligned}$$

Veja que obtivemos uma 2º integral:

$$\int x \cdot \left(\frac{1}{1-x} \right) \cdot dx$$

Logo façamos:

$$\begin{array}{ll} t = x & dw = \frac{1}{1-x} \cdot dx \\ \frac{dt}{dx} = 1 & \int dw = \int \frac{1}{1-x} \cdot dx \\ dt = dx & w = \ln(1-x) \end{array}$$

Continuando com a integral primária:

$$\begin{aligned} \int \ln(1-x) dx &= \ln(1-x) \cdot x + \int x \cdot \left(\frac{1}{1-x} \right) \cdot dx \\ \int \ln(1-x) dx &= \ln(1-x) \cdot x + \left[t \cdot w - \int w \cdot dt \right] \\ \int \ln(1-x) dx &= \ln(1-x) \cdot x + \left[x \cdot \ln(1-x) - \int \ln(1-x) \cdot dx \right] \\ \int \ln(1-x) dx &= \ln(1-x) \cdot x + x \cdot \ln(1-x) - \int \ln(1-x) \cdot dx \end{aligned}$$

Faça a transposição:

$$\begin{aligned} \int \ln(1-x) dx &= M \\ \int \ln(1-x) dx &= \ln(1-x) \cdot x + x \cdot \ln(1-x) - \int \ln(1-x) \cdot dx \\ M &= \ln(1-x) \cdot x + x \cdot \ln(1-x) - M \\ M + M &= \ln(1-x) \cdot x + x \cdot \ln(1-x) \\ 2M &= 2 \cdot [\ln(1-x) \cdot x] \\ M &= \ln(1-x) \cdot x \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\int \ln(1-x) dx = \ln(1-x) \cdot x + C$$

$$3) \int t e^{4t} dt$$

Solução:

Consideramos:

$$\begin{aligned}
 u &= t & dv &= e^{4t} \cdot dt \\
 \frac{du}{dt} &= 1 & \int dv &= \int e^{4t} \cdot dt \\
 du &= dt & v &= \int e^{4t} \cdot dt
 \end{aligned}$$

Veja que obtivemos uma 2º integral:

$$\int e^{4t} \cdot dt$$

Logo façamos:

$$\begin{aligned}
 & \int e^{4t} \cdot dt \\
 w &= 4t & \int e^w \cdot \frac{dw}{4} \\
 \frac{dw}{dt} &= 4 & \frac{1}{4} \cdot \int e^w \cdot dw \\
 dw &= 4 \cdot dt & \frac{1}{4} \cdot e^w \cdot dw
 \end{aligned}$$

Então:

$$v = \int e^{4t} \cdot dt = \frac{1}{4} \cdot e^w \cdot dw$$

Voltemos a integral primária:

$$\begin{aligned}
 \int u \cdot dv &= u \cdot v - \int v \cdot du \\
 \int t e^{4t} dt &= t \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot e^{4t} \right) - \int \frac{1}{4} \cdot e^{4t} \cdot dt \\
 \int t e^{4t} dt &= t \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot e^{4t} \right) - \frac{1}{4} \int e^{4t} \cdot dt \\
 \int t e^{4t} dt &= t \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot e^{4t} \right) - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot e^{4t} \\
 \int t e^{4t} dt &= t \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot e^{4t} \right) - \frac{1}{16} \cdot e^{4t}
 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\int t e^{4t} dt = t \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot e^{4t} \right) - \frac{1}{16} \cdot e^{4t} + C$$

$$4) \int (x+1) \cdot \cos 2x \, dx$$

Solução:

Consideramos:

$$\begin{aligned} u &= x+1 & dv &= \cos 2x \, dx \\ \frac{du}{dx} &= 1 & \int dv &= \int \cos 2x \, dx \\ du &= dx & v &= \frac{1}{2} \cdot \sin 2x \end{aligned}$$

Voltemos a integral primária:

$$\begin{aligned} \int u \cdot dv &= u \cdot v - \int v \cdot du \\ \int (x+1) \cos 2x \, dx &= (x+1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2x - \int \frac{1}{2} \cdot \sin 2x \cdot dx \\ \int (x+1) \cos 2x \, dx &= (x+1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x \cdot dx \\ \int (x+1) \cos 2x \, dx &= (x+1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2x - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \cos x \right) \\ \int (x+1) \cos 2x \, dx &= (x+1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2x - \frac{1}{4} \cdot \cos x \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\int (x+1) \cdot \cos 2x \, dx = (x+1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2x - \frac{1}{4} \cdot \cos x + C$$

$$5) \int x \ln 3x \, dx$$

Consideramos:

$$\begin{aligned} u &= \ln 3x & dv &= x \, dx \\ \frac{du}{dx} &= \frac{1}{3x} & \int dv &= \int x \, dx \\ du &= \frac{1}{x} \cdot dx & v &= \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

Voltemos a integral primária:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int x \ln 3x \, dx = \ln 3x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$\int x \ln 3x \, dx = \ln 3x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int x \cdot dx$$

$$\int x \ln 3x \, dx = \ln 3x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$\int x \ln 3x \, dx = \ln 3x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4}$$

Por tanto:

$$\int x \ln 3x \, dx = \ln 3x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

$$6) \int \cos^3 x \, dx$$

Solução:

Vamos reescrever a Integral:

$$\cos^2 x \cdot \cos x \cdot dx$$

Consideramos:

$$u = \cos^2 x$$

$$dv = \cos x \, dx$$

$$\frac{du}{dx} = -2 \cdot \cos x \cdot \sin x$$

$$\int dv = \int \cos x \, dx$$

$$du = -2 \cdot \cos x \cdot \sin x \cdot dx \quad v = \sin x$$

Temos:

$$\int \cos^3 x \, dx = \cos^2 x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot (-2 \cdot \cos x \cdot \sin x \cdot dx)$$

$$\int \cos^3 x \, dx = \cos^2 x \cdot \sin x + 2 \int \sin x \cdot \cos x \cdot \sin x \cdot dx$$

$$\int \cos^3 x \, dx = \cos^2 x \cdot \sin x + 2 \int \sin^2 x \cdot \cos x \cdot dx$$

$$\int \cos^3 x \, dx = \cos^2 x \cdot \sin x + 2 \int (1 - \cos^2 x) \cdot \cos x \cdot dx$$

$$\int \cos^3 x \, dx = \cos^2 x \cdot \sin x + 2 \int \cos x \cdot dx - \cos^3 x \cdot dx$$

$$\int \cos^3 x \, dx = \cos^2 x \cdot \sin x + 2 \left[\int \cos x \cdot dx - \int \cos^3 x \cdot dx \right]$$

$$\int \cos^3 x \, dx = \cos^2 x \cdot \sin x + 2 \cdot \left[\sin x - \int \cos^3 x \cdot dx \right]$$

$$\int \cos^3 x \, dx = \cos^2 x \cdot \sin x + 2 \cdot \sin x - 2 \int \cos^3 x \cdot dx$$

Faça a transposição:

$$\int \cos^3 x \, dx = M$$

$$\int \cos^3 x \, dx = \cos^2 x \cdot \sin x + 2 \cdot \sin x - 2 \int \cos^3 x \cdot dx$$

$$M = \cos^2 x \cdot \sin x + 2 \cdot \sin x - 2M$$

$$M + 2M = \cos^2 x \cdot \sin x + 2 \cdot \sin x$$

$$3M = \cos^2 x \cdot \sin x + 2 \cdot \sin x$$

$$M = \frac{1}{3} \cdot \cos^2 x \cdot \sin x + \frac{2}{3} \cdot \sin x$$

$$\int \cos^3 x \, dx = \frac{1}{3} \cdot \cos^2 x \cdot \sin x + \frac{2}{3} \cdot \sin x$$

$$\int \cos^3 x \, dx = \frac{1}{3} \cdot (1 - \sin^2 x) \cdot \sin x + \frac{2}{3} \cdot \sin x$$

$$\int \cos^3 x \, dx = \frac{1}{3} \cdot \sin x - \frac{1}{3} \cdot \sin^3 x + \frac{2}{3} \cdot \sin x$$

$$\int \cos^3 x \, dx = \sin x - \frac{1}{3} \cdot \sin^3 x$$

Por tanto:

$$\int \cos^3 x \, dx = \sin x - \frac{1}{3} \cdot \sin^3 x + C$$

$$7) \int e^x \cos \frac{x}{2} dx$$

Solução:

Consideramos:

$$\begin{aligned} u &= e^x & dv &= \cos \frac{x}{2} dx \\ \frac{du}{dx} &= e^x & \int dv &= \int \cos \frac{x}{2} dx \\ du &= e^x \cdot dx & v &= 2 \cdot \sin \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned} \int u \cdot dv &= u \cdot v - \int v \cdot du \\ \int e^x \cos \frac{x}{2} dx &= e^x \cdot 2 \cdot \sin \frac{x}{2} - \int 2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot e^x \cdot dx \\ \int e^x \cos \frac{x}{2} dx &= e^x \cdot 2 \cdot \sin \frac{x}{2} - 2 \int \sin \frac{x}{2} \cdot e^x \cdot dx \end{aligned}$$

Veja que obtivemos uma 2ª integral:

$$\int \sin \frac{x}{2} \cdot e^x \cdot dx$$

Logo façamos:

$$\begin{aligned} t &= e^x & dw &= \sin \frac{x}{2} dx \\ \frac{dt}{dx} &= e^x & \int dw &= \int \sin \frac{x}{2} dx \\ dt &= e^x \cdot dx & w &= -2 \cdot \cos \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} \int t \cdot dw &= t \cdot w - \int w \cdot dt \\ \int \sin \frac{x}{2} \cdot e^x \cdot dx &= e^x \cdot \left(-2 \cdot \cos \frac{x}{2} \right) - \int -2 \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot e^x \cdot dx \\ \int \sin \frac{x}{2} \cdot e^x \cdot dx &= -e^x \cdot 2 \cdot \cos \frac{x}{2} + 2 \int e^x \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot dx \end{aligned}$$

Continuando com a integral primária:

$$\begin{aligned}\int e^x \cos \frac{x}{2} dx &= e^x \cdot \operatorname{Sen} \frac{x}{2} - \int \operatorname{Sen} \frac{x}{2} \cdot e^x \cdot dx \\ \int e^x \cos \frac{x}{2} dx &= e^x \cdot \operatorname{Sen} \frac{x}{2} - \left[-e^x \cdot 2 \cdot \cos \frac{x}{2} + 2 \int e^x \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot dx \right] \\ \int e^x \cos \frac{x}{2} dx &= e^x \cdot \operatorname{Sen} \frac{x}{2} + e^x \cdot 2 \cdot \cos \frac{x}{2} - 2 \int e^x \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot dx\end{aligned}$$

Faça a transposição:

$$\begin{aligned}\int e^x \cos \frac{x}{2} dx &= M \\ M &= e^x \cdot \operatorname{Sen} \frac{x}{2} + e^x \cdot 2 \cdot \cos \frac{x}{2} - 2M \\ M + 2M &= e^x \cdot \operatorname{Sen} \frac{x}{2} + e^x \cdot 2 \cdot \cos \frac{x}{2} \\ 3M &= e^x \cdot \operatorname{Sen} \frac{x}{2} + e^x \cdot 2 \cdot \cos \frac{x}{2} \\ M &= \frac{1}{3} \cdot e^x \cdot \operatorname{Sen} \frac{x}{2} + \frac{1}{3} \cdot e^x \cdot 2 \cdot \cos \frac{x}{2} \\ \int e^x \cos \frac{x}{2} dx &= \frac{1}{3} \cdot e^x \cdot \operatorname{Sen} \frac{x}{2} + \frac{1}{3} \cdot e^x \cdot 2 \cdot \cos \frac{x}{2}\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\int e^x \cos \frac{x}{2} dx = \frac{1}{3} \cdot e^x \cdot \operatorname{Sen} \frac{x}{2} + \frac{1}{3} \cdot e^x \cdot 2 \cdot \cos \frac{x}{2} + C$$

$$8) \int \sqrt{x} \ln x \, dx$$

Solução:

Vamos reescrever a Integral:

$$\int x^{\frac{1}{2}} \ln x \, dx$$

Consideramos:

$$\begin{aligned}
 u &= \ln x & dv &= x^{\frac{1}{2}} dx \\
 \frac{du}{dx} &= \frac{1}{x} & \int dv &= \int x^{\frac{1}{2}} dx \\
 du &= \frac{1}{x} \cdot dx & v &= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \therefore v = \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}}
 \end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned}
 \int u \cdot dv &= u \cdot v - \int v \cdot du \\
 \int \sqrt{x} \ln x \, dx &= \ln x \cdot \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}} - \int \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \\
 \int \sqrt{x} \ln x \, dx &= \ln x \cdot \frac{2}{5} \cdot \sqrt[5]{x^2} - \frac{2}{5} \int x^{\frac{5}{2}} \cdot x^{-1} \cdot dx \\
 \int \sqrt{x} \ln x \, dx &= \ln x \cdot \frac{2}{5} \cdot \sqrt[5]{x^2} - \frac{2}{5} \int x^{\frac{3}{2}} \cdot dx \\
 \int \sqrt{x} \ln x \, dx &= \ln x \cdot \frac{2}{5} \cdot \sqrt[5]{x^2} - \frac{2}{5} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} \\
 \int \sqrt{x} \ln x \, dx &= \ln x \cdot \frac{2}{5} \cdot \sqrt[5]{x^2} - \frac{2}{5} \cdot \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} \\
 \int \sqrt{x} \ln x \, dx &= \ln x \cdot \frac{2}{5} \cdot \sqrt[5]{x^2} - \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{7}{2}} \cdot \frac{2}{7} \\
 \int \sqrt{x} \ln x \, dx &= \ln x \cdot \frac{2}{5} \cdot \sqrt[5]{x^2} - \frac{4}{35} \cdot x^{\frac{7}{2}}
 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\int \sqrt{x} \ln x \, dx = \frac{2}{5} \cdot \ln x \cdot \sqrt[5]{x^2} - \frac{4}{35} \cdot \sqrt[7]{x^2} + C$$

$$9) \int \operatorname{Cosec}^3 x \, dx$$

Solução:

Vamos reescrever a Integral:

$$\int \operatorname{Cosec}^2 x \cdot \operatorname{Cosec} x \cdot dx$$

Consideramos:

$$u = \operatorname{Cosec} x$$

$$dv = \operatorname{Cosec}^2 x \, dx$$

$$\frac{du}{dx} = -\operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x$$

$$\int dv = \int \operatorname{Cosec}^2 x \, dx$$

$$du = -\operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x \cdot dx$$

$$v = -\operatorname{Cotg} x$$

Temos:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int \operatorname{Cosec}^3 x \, dx = \operatorname{Cosec} x \cdot (-\operatorname{Cotg} x) - \int -\operatorname{Cotg} x \cdot (-\operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x \cdot dx)$$

$$\int \operatorname{Cosec}^3 x \, dx = -\operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x - \int \operatorname{Cotg} x \cdot \operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x \cdot dx$$

$$\int \operatorname{Cosec}^3 x \, dx = -\operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x - \int \operatorname{Cotg}^2 x \cdot \operatorname{Cosec} x \cdot dx$$

$$\int \operatorname{Cosec}^3 x \, dx = -\operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x - \int (\operatorname{Cosec}^2 x - 1) \cdot \operatorname{Cosec} x \cdot dx$$

$$\int \operatorname{Cosec}^3 x \, dx = -\operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x - \int \operatorname{Cosec}^3 x - \operatorname{Cosec} x \cdot dx$$

$$\int \operatorname{Cosec}^3 x \, dx = -\operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x - \left[\int \operatorname{Cosec}^3 x \cdot dx - \int \operatorname{Cosec} x \cdot dx \right]$$

$$\int \operatorname{Cosec}^3 x \, dx = -\operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x - \int \operatorname{Cosec}^3 x \cdot dx + \int \operatorname{Cosec} x \cdot dx$$

$$\int \operatorname{Cosec}^3 x \, dx = -\operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x + \int \operatorname{Cosec} x \cdot dx - \int \operatorname{Cosec}^3 x \cdot dx$$

$$\int \operatorname{Cosec}^3 x \, dx = -\operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x + \ln |\operatorname{Cosec} x - \operatorname{Cotg} x| - \int \operatorname{Cosec}^3 x \cdot dx$$

Faça a transposição:

$$\int \operatorname{Cosec}^3 x \, dx = M$$

$$M = -\operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x + \ln |\operatorname{Cosec} x - \operatorname{Cotg} x| - M$$

$$M + M = -\operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x + \ln |\operatorname{Cosec} x - \operatorname{Cotg} x|$$

$$2M = -\operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x + \ln |\operatorname{Cosec} x - \operatorname{Cotg} x|$$

$$M = -\frac{1}{2} \cdot \operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x + \frac{1}{2} \cdot \ln |\operatorname{Cosec} x - \operatorname{Cotg} x|$$

$$\int \operatorname{Cosec}^3 x \, dx = -\frac{1}{2} \cdot \operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x + \frac{1}{2} \cdot \ln |\operatorname{Cosec} x - \operatorname{Cotg} x|$$

Por tanto:

$$\int \operatorname{Cosec}^3 x \, dx = -\frac{1}{2} \cdot \operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x + \frac{1}{2} \cdot \ln |\operatorname{Cosec} x - \operatorname{Cotg} x| + C$$

$$10) \int x^2 \cos \alpha x \, dx$$

Solução:

Consideramos:

$$\begin{aligned} u &= x^2 & dv &= \cos \alpha x \, dx \\ \frac{du}{dx} &= 2x & \int dv &= \int \cos \alpha x \, dx \\ du &= 2x \cdot dx & v &= \frac{1}{\alpha} \cdot \sin \alpha x \end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned} \int u \cdot dv &= u \cdot v - \int v \cdot du \\ \int x^2 \cos \alpha x \, dx &= x^2 \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \sin \alpha x - \int \frac{1}{\alpha} \cdot \sin \alpha x \cdot 2x \cdot dx \\ \int x^2 \cos \alpha x \, dx &= x^2 \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \sin \alpha x - \frac{2}{\alpha} \int \sin \alpha x \cdot x \cdot dx \end{aligned}$$

Veja que obtivemos uma 2ª integral:

$$\int \sin \alpha x \cdot x \cdot dx$$

Logo façamos:

$$\begin{aligned} t &= x & dw &= \sin \alpha x \, dx \\ \frac{dt}{dx} &= 1 & \int dw &= \int \sin \alpha x \, dx \\ dt &= dx & w &= -\frac{1}{\alpha} \cdot \cos \alpha x \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} \int t \cdot dw &= t \cdot w - \int w \cdot dt \\ \int \sin \alpha x \cdot x \cdot dx &= x \cdot \left(-\frac{1}{\alpha} \cdot \cos \alpha x \right) - \int -\frac{1}{\alpha} \cdot \cos \alpha x \cdot dx \\ \int \sin \alpha x \cdot x \cdot dx &= -x \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \cos \alpha x + \frac{1}{\alpha} \int \cos \alpha x \cdot dx \\ \int \sin \alpha x \cdot x \cdot dx &= -x \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \cos \alpha x + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} \sin \alpha x \\ \int \sin \alpha x \cdot x \cdot dx &= -x \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \cos \alpha x + \frac{1}{\alpha^2} \cdot \sin \alpha x \end{aligned}$$

Continuando com a integral primária:

Marcelo Santos Chaves

CÁLCULO I: LIMITES, DERIVADAS E INTEGRAIS

Exercícios Resolvidos e Comentados

$$\int x^2 \cos \alpha x \, dx = x^2 \cdot \sin \alpha x - 2 \int \sin \alpha x \cdot x \cdot dx$$

$$\int x^2 \cos \alpha x \, dx = x^2 \cdot \sin \alpha x - 2 \cdot \left[-x \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \cos \alpha x + \frac{1}{\alpha^2} \cdot \sin \alpha x \right]$$

$$\int x^2 \cos \alpha x \, dx = x^2 \cdot \sin \alpha x + 2x \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \cos \alpha x - \frac{2}{\alpha^2} \cdot \sin \alpha x$$

Por tanto:

$$\int x^2 \cos \alpha x \, dx = x^2 \cdot \sin \alpha x + 2x \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \cos \alpha x - \frac{2}{\alpha^2} \cdot \sin \alpha x + C$$

$$11) \int x^2 \sin x \, dx$$

Solução:

Consideramos:

$$\begin{aligned} u &= x^2 & dv &= \sin x \, dx \\ \frac{du}{dx} &= 2x & \int dv &= \int \sin x \, dx \\ du &= 2x \cdot dx & v &= -\cos x \end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x \, dx &= u \cdot v - \int v \cdot du \\ \int x^2 \sin x \, dx &= x^2 \cdot (-\cos x) - \int -\cos x \cdot 2x \cdot dx \\ \int x^2 \sin x \, dx &= -x^2 \cdot \cos x + \int \cos x \cdot 2x \cdot dx \end{aligned}$$

Veja que obtivemos uma 2ª integral:

$$\int \cos x \cdot 2x \cdot dx$$

Logo façamos:

$$\begin{aligned} t &= 2x & dw &= \cos x \, dx \\ \frac{dt}{dx} &= 2 & w &= \int \cos x \, dx \\ dt &= 2 \cdot dx & w &= \sin x \end{aligned}$$

Continuando com a integral primária:

$$\begin{aligned}
\int x^2 \operatorname{Sen} x \, dx &= -x^2 \cdot \operatorname{Cos} x + \int \operatorname{Cos} x \cdot 2x \cdot dx \\
\int x^2 \operatorname{Sen} x \, dx &= -x^2 \cdot \operatorname{Cos} x + \left[t \cdot w - \int w \cdot dt \right] \\
\int x^2 \operatorname{Sen} x \, dx &= -x^2 \cdot \operatorname{Cos} x + \left[2x \cdot \operatorname{Sen} x - \int \operatorname{Sen} x \cdot 2 \cdot dx \right] \\
\int x^2 \operatorname{Sen} x \, dx &= -x^2 \cdot \operatorname{Cos} x + \left[2x \cdot \operatorname{Sen} x - 2 \int \operatorname{Sen} x \cdot dx \right] \\
\int x^2 \operatorname{Sen} x \, dx &= -x^2 \cdot \operatorname{Cos} x + \left[2x \cdot \operatorname{Sen} x - 2 \cdot (-\operatorname{Cos} x) \right] \\
\int x^2 \operatorname{Sen} x \, dx &= -x^2 \cdot \operatorname{Cos} x + \left[2x \cdot \operatorname{Sen} x + 2 \cdot \operatorname{Cos} x \right] \\
\int x^2 \operatorname{Sen} x \, dx &= -x^2 \cdot \operatorname{Cos} x + 2x \cdot \operatorname{Sen} x + 2 \cdot \operatorname{Cos} x
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\int x^2 \operatorname{Sen} x \, dx = -x^2 \cdot \operatorname{Cos} x + 2x \cdot \operatorname{Sen} x + 2 \cdot \operatorname{Cos} x + C$$

$$12) \int e^{2x} \operatorname{Sen} x \, dx$$

Solução:

Consideramos:

$$\begin{aligned}
u &= e^{2x} & dv &= \operatorname{Sen} x \, dx \\
\frac{du}{dx} &= 2 \cdot e^{2x} & \int dv &= \int \operatorname{Sen} x \, dx \\
du &= 2 \cdot e^{2x} \cdot dx & v &= -\operatorname{Cos} x
\end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned}
\int e^{2x} \operatorname{Sen} x \, dx &= u \cdot v - \int v \cdot du \\
\int e^{2x} \operatorname{Sen} x \, dx &= e^{2x} \cdot (-\operatorname{Cos} x) - \int -\operatorname{Cos} x \cdot 2 \cdot e^{2x} \cdot dx \\
\int e^{2x} \operatorname{Sen} x \, dx &= -e^{2x} \cdot \operatorname{Cos} x + 2 \int \operatorname{Cos} x \cdot e^{2x} \cdot dx
\end{aligned}$$

Veja que obtivemos uma 2ª integral:

$$\int \operatorname{Cos} x \cdot e^{2x} \cdot dx$$

Logo façamos:

$$\begin{aligned}
 t &= e^{2x} & dw &= \cos x \, dx \\
 \frac{dt}{dx} &= 2 \cdot e^{2x} & w &= \int \cos x \, dx \\
 dt &= 2 \cdot e^{2x} \cdot dx & w &= \sin x
 \end{aligned}$$

Continuando com a integral primária:

$$\begin{aligned}
 \int e^{2x} \sin x \, dx &= -e^{2x} \cdot \cos x + 2 \int \cos x \cdot e^{2x} \cdot dx \\
 \int e^{2x} \sin x \, dx &= -e^{2x} \cdot \cos x + 2 \cdot \left[t \cdot w - \int w \cdot dt \right] \\
 \int e^{2x} \sin x \, dx &= -e^{2x} \cdot \cos x + 2 \cdot \left[e^{2x} \cdot \sin x - \int \sin x \cdot 2 \cdot e^{2x} \cdot dx \right] \\
 \int e^{2x} \sin x \, dx &= -e^{2x} \cdot \cos x + 2 \cdot e^{2x} \cdot \sin x - 2 \int \sin x \cdot 2 \cdot e^{2x} \cdot dx \\
 \int e^{2x} \sin x \, dx &= -e^{2x} \cdot \cos x + 2 \cdot e^{2x} \cdot \sin x - 4 \int e^{2x} \cdot \sin x \cdot dx
 \end{aligned}$$

Faça a transposição:

$$\int e^{2x} \sin x \, dx = M$$

$$M = -e^{2x} \cdot \cos x + 2 \cdot e^{2x} \cdot \sin x - 4M$$

$$M + 4M = -e^{2x} \cdot \cos x + 2 \cdot e^{2x} \cdot \sin x$$

$$5M = -e^{2x} \cdot \cos x + 2 \cdot e^{2x} \cdot \sin x$$

$$M = -\frac{1}{5} \cdot e^{2x} \cdot \cos x + \frac{2}{5} \cdot e^{2x} \cdot \sin x$$

Por tanto:

$$\int e^{2x} \sin x \, dx = -\frac{1}{5} \cdot e^{2x} \cdot \cos x + \frac{2}{5} \cdot e^{2x} \cdot \sin x + C$$

$$13) \int \sin^3 x \, dx$$

Vamos reescrever a Integral:

$$\int \sin^2 x \sin x \, dx$$

Consideramos:

$$\begin{aligned}
 u &= \sin^2 x & dv &= \sin x \, dx \\
 \frac{du}{dx} &= 2 \cdot \sin x \cdot \cos x & \int dv &= \int \sin x \, dx \\
 du &= 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot dx & v &= -\cos x
 \end{aligned}$$

Temos:

$$\int \text{Sen}^3 x \, dx = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int \text{Sen}^3 x \, dx = \text{Sen}^2 x \cdot (-\text{Cos } x) - \int -\text{Cos } x \cdot 2 \cdot \text{Sen } x \cdot \text{Cos } x \cdot dx$$

$$\int \text{Sen}^3 x \, dx = -\text{Sen}^2 x \cdot \text{Cos } x + 2 \int \text{Cos}^2 x \cdot \text{Sen } x \cdot dx$$

$$\int \text{Sen}^3 x \, dx = -\text{Sen}^2 x \cdot \text{Cos } x + 2 \int (1 - \text{Sen}^2 x) \cdot \text{Sen } x \cdot dx$$

$$\int \text{Sen}^3 x \, dx = -\text{Sen}^2 x \cdot \text{Cos } x + 2 \int \text{Sen } x \cdot dx - \text{Sen}^3 x \cdot dx$$

$$\int \text{Sen}^3 x \, dx = -\text{Sen}^2 x \cdot \text{Cos } x + 2 \left[\int \text{Sen } x \cdot dx - \int \text{Sen}^3 x \cdot dx \right]$$

$$\int \text{Sen}^3 x \, dx = -\text{Sen}^2 x \cdot \text{Cos } x + 2 \int \text{Sen } x \cdot dx - 2 \int \text{Sen}^3 x \cdot dx$$

$$\int \text{Sen}^3 x \, dx = -\text{Sen}^2 x \cdot \text{Cos } x + 2 \cdot [-\text{Cos } x] - 2 \int \text{Sen}^3 x \cdot dx$$

$$\int \text{Sen}^3 x \, dx = -\text{Sen}^2 x \cdot \text{Cos } x - 2\text{Cos } x - 2 \int \text{Sen}^3 x \cdot dx$$

Faça a transposição:

$$\int \text{Sen}^3 x \, dx = M$$

$$M = -\text{Sen}^2 x \cdot \text{Cos } x - 2\text{Cos } x - 2M$$

$$M + 2M = -\text{Sen}^2 x \cdot \text{Cos } x - 2\text{Cos } x$$

$$3M = -\text{Sen}^2 x \cdot \text{Cos } x - 2\text{Cos } x$$

$$M = -\frac{1}{3} \cdot \text{Sen}^2 x \cdot \text{Cos } x - \frac{2}{3} \cdot \text{Cos } x$$

Por tanto:

$$\int \text{Sen}^3 x \, dx = -\frac{1}{3} \cdot \text{Sen}^2 x \cdot \text{Cos } x - \frac{2}{3} \cdot \text{Cos } x + C$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALARCÓN, Sérgio Alberto; SUESCÚN, Carlos Mario & DE LA TORRE, Andrés. **El método de las tangentes de Fermat**. In: Esculea Regional de Matemáticas – Universidad del Valle. Vol. XIII nº 2, Diciembre – Colombia, 2005.
- ALMEIDA, Susana Gorete Monteiro. **História da Matemática: Newton e Leibniz**. In: Universidade Católica Portuguesa. Monografia. Lisboa-PT, 2003.
- BARON, E.M. **The Origins of the Infinitesimal Calculus** (Pergamon Press), 1969.
- BARUFI, Maria Cristina Bonomi. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese de Doutorado. São Paulo: FE-USP, 1999.
- BERTOLONI, Meli D. **Equivalence and Priority: Newton vs. Leibniz**. Clarendon Press Oxford, 1993.
- BOYER. Carl B. **Tópicos de História da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Ed. Atual. São Paulo, 1992.
- BRESSAN, P. M. **Calculo Diferencial e Integral I: Investigação sobre dificuldades dos alunos**. In: X Salão de Iniciação Científica PUCRS. Porto Alegre-RS, 2009.
- FROTA, M. C. R. **Duas abordagens distintas da estratégia de resolução de exercícios no estudo de Cálculo**. In: LAUDARES, J. B.; LACHINI, J. (orgs.). Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: FUMARC – 2001.
- REZENDE, Wanderley Moura. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica**. Tese (Doutorado em Educação). USP, São Paulo, 2003.
- STEWART, James. **Cálculo: Volume I**. Editora: Cengage Learning. São Paulo, 2010.
- STRONG, Edward W. **Barrow and Newton**. In: Journal of the History of Philosophy. Volume 8, Numero 2, Nova York, Abril 1970.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Tabela de Identidades Trigonométricas

| | |
|---|---|
| $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ | $1 + \text{tg}^2 x = \sec^2 x$ |
| $1 + \cotg^2 x = \text{cosec}^2 x$ | $\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$ |
| $\cos(-x) = \cos x$ | $\text{tg}(-x) = -\text{tg } x$ |
| <div><small>Se quiser saber mais detalhes sobre esta fórmula, clique aqui.</small></div> | <div><small>Se quiser saber mais detalhes sobre esta fórmula, clique aqui.</small></div> |
| <div><small>Se quiser saber mais detalhes sobre esta fórmula, clique aqui.</small></div> | <div><small>Se quiser saber mais detalhes sobre esta fórmula, clique aqui.</small></div> |
| <div><small>Se quiser saber mais detalhes sobre esta fórmula, clique aqui.</small></div> | <div><small>Se quiser saber mais detalhes sobre esta fórmula, clique aqui.</small></div> |
| <div><small>Se quiser saber mais detalhes sobre esta fórmula, clique aqui.</small></div> | <div><small>Se quiser saber mais detalhes sobre esta fórmula, clique aqui.</small></div> |
| <div><small>Se quiser saber mais detalhes sobre esta fórmula, clique aqui.</small></div> | <div><small>Se quiser saber mais detalhes sobre esta fórmula, clique aqui.</small></div> |
| <div><small>Se quiser saber mais detalhes sobre esta fórmula, clique aqui.</small></div> | <div><small>Se quiser saber mais detalhes sobre esta fórmula, clique aqui.</small></div> |
| $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = 1 - 2 \text{sen}^2 x = 2 \cos^2 x - 1$ | <div><small>Se quiser saber mais detalhes sobre esta fórmula, clique aqui.</small></div> |
| $\left \text{sen} \frac{x}{2} \right = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$ | $\left \cos \frac{x}{2} \right = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$ |
| $\text{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\text{sen } x} = \frac{\text{sen } x}{1 + \cos x}$ | $\text{sen } x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\text{sen}(x - y) + \text{sen}(x + y)]$ |
| $\text{sen } x \cdot \text{sen } y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)]$ | $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) + \cos(x + y)]$ |
| $\cos x \cdot \text{sen } y = \frac{1}{2} [\text{sen}(x + y) - \text{sen}(x - y)]$ | $\text{sen } x - \text{sen } y = 2 \text{sen} \left(\frac{x - y}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{x + y}{2} \right)$ |
| $\text{sen } x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \text{sen } 2x$ | $1 - \cos x = 2 \text{sen}^2 \frac{x}{2}$ |
| $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$ | $1 \pm \text{sen } x = 1 \pm \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$ |
| $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta$ | |

APÊNDICE B

Tabela de Derivadas Usuais

| Função (y) | Derivada (y') |
|---|---|
| $y = u^n$ | $\Rightarrow y' = n u^{n-1} u'$ |
| $y = u v$ | $\Rightarrow y' = u' v + v' u$ |
| $y = \frac{u}{v}$ | $\Rightarrow y' = \frac{u' v - v' u}{v^2}$ |
| $y = a^u$ | $\Rightarrow y' = a^u (\ln a) u', \quad (a > 0, a \neq 1)$ |
| $y = e^u$ | $\Rightarrow y' = e^u u'$ |
| $y = \log_a u$ | $\Rightarrow y' = \frac{u'}{u} \log_a e$ |
| $y = \ln u$ | $\Rightarrow y' = \frac{1}{u} u'$ |
| $y = u^v$ | $\Rightarrow y' = v u^{v-1} u' + u^v (\ln u) v'$ |
| $y = \operatorname{sen} u$ | $\Rightarrow y' = u' \cos u$ |
| $y = \cos u$ | $\Rightarrow y' = -u' \operatorname{sen} u$ |
| $y = \operatorname{tg} u$ | $\Rightarrow y' = u' \sec^2 u$ |
| $y = \operatorname{cotg} u$ | $\Rightarrow y' = -u' \operatorname{cosec}^2 u$ |
| $y = \sec u$ | $\Rightarrow y' = u' \sec u \operatorname{tg} u$ |
| $y = \operatorname{cosec} u$ | $\Rightarrow y' = -u' \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u$ |
| $y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} u$ | $\Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ |
| $y = \operatorname{arc} \cos u$ | $\Rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$ |
| $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} u$ | $\Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$ |
| $y = \operatorname{arc} \operatorname{cotg} u$ | $\Rightarrow \frac{-u'}{1+u^2}$ |
| $y = \operatorname{arc} \sec u, u \geq 1$ | $\Rightarrow y' = \frac{u'}{ u \sqrt{u^2-1}}, u > 1$ |
| $y = \operatorname{arc} \operatorname{cosec} u, u \geq 1$ | $\Rightarrow y' = \frac{-u'}{ u \sqrt{u^2-1}}, u > 1$ |

APÊNDICE C
Tabela de Integrais

| Integrais Usuais | | |
|--|--|--|
| $\int du = u + C$ | $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$ | $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ |
| $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$ | $\int e^u du = e^u + C$ | $\int \operatorname{sen} u du = -\cos u + C$ |
| $\int \cos u du = \operatorname{sen} u + C$ | $\int \operatorname{tg} u du = \ln \sec u + C$ | $\int \cot g u du = \ln \operatorname{sen} u + C$ |
| $\int \operatorname{cosec} u du = \ln \operatorname{cosec} u - \cot g u + C$ | $\int \sec u du = \ln \sec u + \operatorname{tg} u + C$ | $\int \sec^2 u du = \operatorname{tg} u + C$ |
| $\int \operatorname{cosec}^2 u du = -\cot g u + C$ | $\int \sec u \cdot \operatorname{tg} u du = \sec u + C$ | $\int \operatorname{cosec} u \cdot \cot g u du = -\operatorname{cosec} u + C$ |
| $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{u}{a} + C$ | $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{u}{a} + C$ | $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \sec \left \frac{u}{a} \right + C$ |
| $\int \operatorname{sen} h u du = \cosh u + C$ | $\int \cosh u du = \operatorname{sen} h u + C$ | $\int \operatorname{sech}^2 u du = \operatorname{tgh} u + C$ |
| $\int \operatorname{cosech}^2 u du = -\cot g h u + C$ | $\int \operatorname{sech} u \cdot \operatorname{tgh} u du = -\operatorname{sech} u + C$ | $\int \operatorname{cosech} u \cdot \cot g h u du = -\operatorname{cosech} u + C$ |
| $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right + C$ | $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u+a}{u-a} \right + C$ | $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left \frac{a + \sqrt{a^2 \pm u^2}}{u} \right + C$ |
| Fórmulas de Recorrência | | |
| $\int \operatorname{sen}^n u du = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} u \cdot \cos u + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} u du$ | | |
| $\int \cos^n u du = \frac{1}{n} \cos^{n-1} u \cdot \operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u du$ | | |
| $\int \operatorname{tg}^n u du = \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} u - \int \operatorname{tg}^{n-2} u du$ | | |
| $\int \cot g^n u du = -\frac{1}{n-1} \cot g^{n-1} u - \int \cot g^{n-2} u du$ | | |
| $\int \sec^n u du = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} u \cdot \operatorname{tg} u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u du$ | | |
| $\int \operatorname{cosec}^n u du = -\frac{1}{n-1} \operatorname{cosec}^{n-2} u \cdot \cot g u + \frac{n-2}{n-1} \int \operatorname{cosec}^{n-2} u du$ | | |
| $\int \frac{du}{(u^2 + a^2)^n} = \frac{u(u^2 + a^2)^{1-n}}{2a^2(n-1)} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^{n-1}}$ | | |