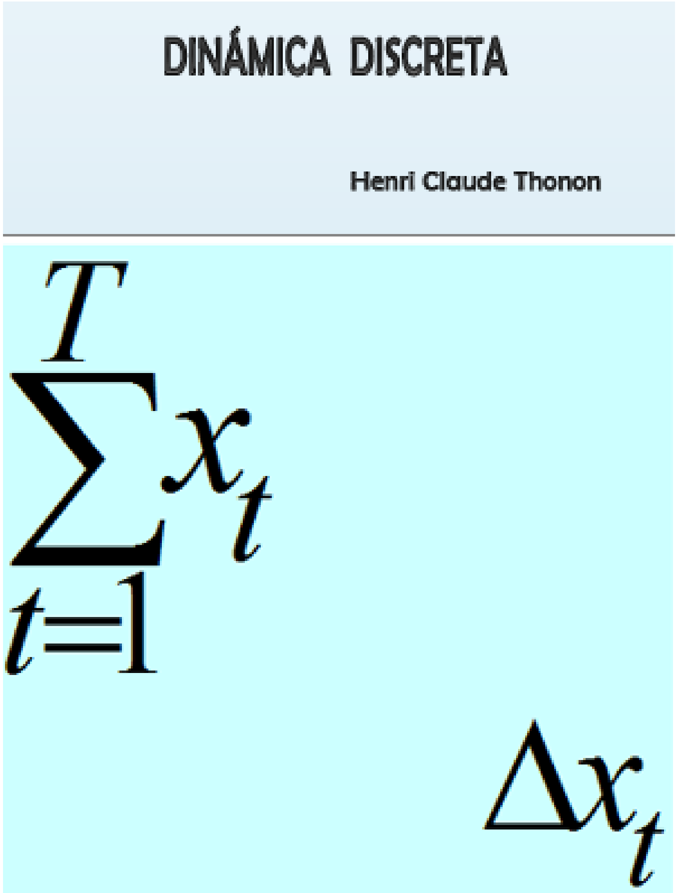
BIBLIOTECA VIRTUAL eumed.net



1335

Dinámica Discreta

Henri Claude Thonon

Editado por la Fundación Universitaria Andaluza Inca Garcilaso para eumed.net

Henri Claude Thonon

DINÁMICA

DISCRETA

$$\sum_{t=1}^{T} x_t$$

$$\Delta x_t$$

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

PREFACIO

Este libro, de Dinámica Discreta, está conformado por dos partes. La primera parte esta dedicada al Cálculo Discreto y la segunda a Modelos Dinámicos Discretos.

La idea de ir escribiendo este libro es la poca existencia de los mismos en esta temática, si bien gran parte los libros de matemática económica, tratan de las ecuaciones en diferencia en algunos de sus capítulos.

De hecho, la mayoría de los capítulos de este libro fueron escritos en archivos separados, los cuales están a disposición de mis cursantes en mi página web.

Se que este libro, quizás, no este completo. Para esto existirán ediciones posteriores.

Agradezco cualquier comentario respecto al mismo me lo hagan llegar a mi correo hthonon@gmail.com

Henri Claude Thonon
Charallave, Venezuela.
Agosto del 2013.

INTRODUCCIÓN

Se preguntarán ¿porqué un libro sobre Dinámica Discreta? Muy simple. Gran parte de los fenómenos que observamos no los observamos, y por lo general no ocurren, en un continuo. Sino en periodos de teimpos. Generalmente tenemos la Renta Nacional y sus variables relacionadas en el transcurso de un periodo, sea este año, trimestre o mes, los intereses que nos pagan los bancos y los depósitos generalmente son mensuales,las observaciones en la ecología también suele ser por periodos. De ahí la importancia de la Dinámica Discreta.

En cuanto a los modelos estos tienen sus limitaciones. Indicare tres de ellas, para mí las más importantes. Pero tienen su solución mediante la simulación, cuestión que es tópico para otro libro (en mi sitio web www.hthonon.blogspot.com pueden conseguir un simulador).

1) Los parámetros se consideran constantes, pero la propensión al consumo, las tasas de interés, la capacidad del ambiente, etc. ¿son realmente constantes en tiempo?

2) Los agentes de la economía toman decisiones, no se portan de manera mecánica. Los productores pueden disminuir sus precios para aumentar la demanda, pero no la disminuirán mas allá del precio de equilibrio que cubra sus costos, de la misma manera no podrán en un corto plazo aumentar su producción para cubrir la demanda más allá de su capacidad de producción.

3) En una situación de especies en competencia, cuando una población queda eliminada, ya las ecuaciones no tienen sentido.

> En general cuando las variables empiezan a tomar ciertos valores los modelos empiezan a perder significado.

Por esto, si bien los modelos teóricos analíticos son importantes para los análisis, estos tienen que complementarse, a la hora de la verdad con otras técnicas tales como la simulación.

PRIMERA PARTE

CÁLCULO DISCRETO

CAPÍTULO 1

CONCEPTOS BÁSICOS

Conjuntos Discretos Infinitos:

Diremos que ***D*** es un conjunto discreto infinito (CDI) si;

a) ***D*** tiene un primer elemento e.

b) si $x \in$ ***D*** entonces $y = x + d \in$ ***D***.

c) $\alpha\ z \in$ ***D*** $\mid x \leq z \leq x + d$.

Teorema:

D es un conjunto discreto infinito (CDI) sii es isomorfo a los números naturales.

Conjuntos Discretos Finitos:

Diremos que ***D*** es un conjunto discreto finito (CDF) si;

a) ***D*** tiene un primer elemento e.

b) si $x\ (x \neq e) \in$ ***D*** entonces $y = x - d \in$ ***D***.

c) $\exists\ z \in$ ***D*** $\mid y = z + d\ \varpi$ ***D***.

d) $\alpha\ z \in$ ***D*** $\mid x \leq z \leq x + d$.

Principio de Inducción Completa:

Sea ***D*** un CDI y ***P*** una propiedad cuya validez se quiere demostrar en D, entonces:

1) Se prueba que ***P*** se cumple para e.
2) Se supone que ***P*** es verdadera para un $k \in$ ***D*** cualquiera.
3) Si a partir de 1) y 2) que es verdadera para k + d, entonces ***P*** es verdadera $\forall\ x \in$ ***D***.

Ejemplo 1:

Demostrar que $4n + 2 > 2n + 3, \forall n > 0$

1) Para $n = 1$

$4n + 2 = 4.1 + 2 = 6$

$2n + 3 = 2.1 + 3 = 5$

$6 > 5 \Rightarrow 4.1 + 2 > 2.1 + 3 \Rightarrow 4n + 2 > 2n + 3$

2) Se supone verdadero para $n = k$:

$4k + 2 > 2k + 3$

3) Para $n = k + 1$

$4(k+1) + 2 = 4k + 4 + 2 > 2k + 3 + 4 = 2(k + 1) + 3 + 2 > 2(k + 1) + 3 = 2n + 3$

$\Rightarrow 4n + 2 > 2n + 3$

Ejemplo 2:

Demostrar que $n^2 > 2n + 1, \forall n > 2$

1) Para $n = 3$

$n^2 = 3^2 = 9$

$2n + 1 = 2. 3 + 1 = 7$

$9 > 7 \Rightarrow 3^2 > 2. 3 + 1 \Rightarrow n^2 > 2n + 1$

2) Se supone verdadero para $n = k$:

$k^2 > 2k + 1$

3) Para $n = k + 1$

$n^2 = (k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1 > 2k + 1 + 2k + 1 > 2k + 3 = 2k + 2 + 1 = 2n + 1$

$\Rightarrow n^2 > 2n + 1$

Función sobre un conjunto discreto

Se dirá que f(t) (o también y_t) es una función definida sobre un conjunto discreto (o simplemente una función discreta) si:

$$f : \boldsymbol{D} \longrightarrow \boldsymbol{C}$$

en donde ***D*** es un conjunto discreto y ***C*** un conjunto cualquiera, casi siempre un subconjunto de los números Reales, pero también podría ser un subconjunto de los números Complejos.

A las funciones definidas sobre un conjunto discreto también se les denomina **sucesiones**.

Operador (monário) de una función discreta:

Sea ***F*** el conjunto de las funciones discretas, se dirá que ***O*** es un operador (monário) si F es una transformación de en ***F***:

$$\boldsymbol{O} : \boldsymbol{F} \longrightarrow \boldsymbol{F}$$

Operador lineal de una función discreta:

Sea ***F*** el conjunto de las funciones discretas, se dirá que ***L*** es un operador lineal si:

$$\forall\ x_t,\ y_t, \in \boldsymbol{F},\ \ \boldsymbol{L}(ax_t + by_t) = a\boldsymbol{L}(x_t) + b\boldsymbol{L}(y_t).$$

Sucesiones Convergentes y Limite

Se dice que una sucesión x_t es convergente (a medida que t crece) y su límite es $\boldsymbol{L}$ si $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists$ T tal que $\forall$ t > T, $| x_t - \boldsymbol{L} | < \varepsilon$.

Y se denota por:

$$\lim_{t\to\infty} x_t = L$$

Ejemplo:

Demostrar que si $x_t = \dfrac{at}{b+t}$, entonces $\lim\limits_{t\to\infty} x_t = a$.

Sea un $\varepsilon > 0$, cualquiera.

entonces $a - \dfrac{at}{b+t} < \varepsilon \Rightarrow ab < \varepsilon b + \varepsilon t \Rightarrow t > \dfrac{ab - \varepsilon b}{\varepsilon}$

De esta manera se tiene que efectivamente, dado un $\varepsilon > 0$, si se toma $T = \dfrac{ab - \varepsilon b}{\varepsilon}$, $\forall$ t > T, $| x_t - a | < \varepsilon$.

CAPÍTULO 2

OPERADORES DISCRETOS

a) Operador Desplazamiento:

Definición

$$Ey_t = y_{t+1}$$

Significado

El operador desplazamiento E, lo que hace es desplazar en un periodo el valor de la función. Esto es, es el valor de la función en el momento siguiente: en el momento t+1.

Propiedades

(i) Desplazamiento de una constante por una función:

$$E(ay_t) = ay_{t+1} = aEy_t$$

El desplazamiento de una constante por una función es la constante por el desplazamiento.

(ii) Desplazamiento de la suma:

$$E(x_t + y_t) = x_{t+1} + y_{t+1} = Ex_t + Ey_t$$

El desplazamiento de la suma de dos funciones es la suma de los desplazamientos de cada una de las dos funciones.

(iii) **(i) y (ii) ====> E es un operador lineal:**

$$E(ax_t + by_t) = ax_{t+1} + by_{t+1} = aEx_t + bEy_t$$

(iv) **Desplazamiento aplicado n veces (desplazamiento de orden n):**

$$E^n(y_t) = y_{t+n}$$

(v) **Desplazamiento de la multiplicación de funciones:**

$$E(x_t.y_t) = x_{t+1}.y_{t+1} = Ex_t.Ey_t$$

El desplazamiento de la multiplicación de dos funciones es la multiplicación de los desplazamientos de cada una de las dos funciones.

Tabla 2.a.1

Resumen de las propiedades del Operador Desplazamiento

	Propiedades	Formulas
(i)	**Desplazamiento de una constante por una función**	$E(ay_t) = aEy_t$
(ii)	**Desplazamiento de la suma**	$E(x_t + y_t) = Ex_t + Ey_t$
(iii)	**E es un operador lineal**	$E(ax_t + by_t) = aEx_t + bEy_t$
(iv)	**Desplazamiento aplicado n veces (desplazamiento de orden n)**	$E^n(y_t) = y_{t+n}$
(v)	**Desplazamiento de la multi-plicación de funciones**	$E(x_t.y_t) = Ex_t.Ey_t$

b) Operador Diferencia

Definición

$$\boxed{\Delta y_t = E y_t - y_t = y_{t+1} - y_t}$$

Significado

El Operador diferencia Δ, viene a ser la diferencia de valores de la función entre dos momentos sucesivos: entre el momento t+1 y el momento t.

Propiedades

(i) Diferencia de una constante por una función:

$$\boxed{\Delta(a y_t) = a y_{t+1} - a y_t = a \Delta y_t}$$

La diferencia de una constante por una función es la constante por la diferencia de la función

(ii) Diferencia de la suma de funciones:

$$\boxed{\Delta(x_t + y_t) = x_{t+1} + y_{t+1} - (x_t + y_t) = \Delta x_t + \Delta y_t}$$

La diferencia de la suma de dos funciones es la suma de las diferencias de las dos funciones.

(iii) **(i) y (ii) ====> Δ es un operador lineal:**

$$\boxed{\Delta(ax_t + by_t) = a\Delta x_t + b\Delta y_t}$$

(iv) **La diferencia aplicada dos veces (diferencia de orden 2):**

$$\begin{aligned}
\Delta^2 y_t &= \Delta(\Delta y_t) = \Delta(y_{t+1} - y_t) \\
&= y_{t+2} - y_{t+1} - (y_{t+1} - y_t) \\
&= y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t
\end{aligned}$$

La diferencia aplicada 3 veces (diferencia de orden 3):

$$\begin{aligned}
\Delta^3 y_t &= \Delta(\Delta^2 y_t) = \Delta(y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t) \\
&= y_{t+3} - 2y_{t+2} + y_{t+1} - (y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t) \\
&= y_{t+3} - 3y_{t+2} + 3y_{t+1} - y_t
\end{aligned}$$

La diferencia aplicada 4 veces (diferencia de orden 4):

$$\begin{aligned}
\Delta^4 y_t &= \Delta(\Delta^3 y_t) = \Delta(y_{t+3} - 3y_{t+2} + 3y_{t+1} - y_t) \\
&= y_{t+4} - 3y_{t+3} + 3y_{t+2} - y_{t+1} - (y_{t+3} - 3y_{t+2} + 3y_{t+1} - y_t) \\
&= y_{t+4} - 4y_{t+3} + 6y_{t+2} - 4y_{t+1} + y_t
\end{aligned}$$

En general, diferencia de orden n:

$$\boxed{\Delta^n y_t = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} E^{n-k} y_t}$$

(Demostración: $\Delta^n y_t = (E - 1)^n (y_t)$: el binomio de Newton aplicado a $(E - 1)$)

(v) Diferencia de la multiplicación de funciones:

$$\begin{aligned} \Delta(x_t.y_t) &= x_{t+1}.y_{t+1} - x_t.y_t \\ &= x_{t+1}.y_{t+1} - x_{t+1}.y_t + x_{t+1}.y_t - x_t.y_t \\ &= x_{t+1}\Delta y_t + y_t \Delta x_t \\ &= x_t \Delta y_t + y_{t+1} \Delta x_t \end{aligned}$$

La diferencia de la multiplicación de dos funciones es la suma de una de las funciones por la diferencia de la otra más el desplazamiento de la otra multiplicada por la diferencia de la anterior.

Tabla 2.b.1
Resumen de las propiedades del Operador Diferencia

	Propiedades	Formulas
(i)	**Diferencia de una constante por una función**	$\Delta(ay_t) = a\Delta y_t$
(ii)	**Diferencia de la suma**	$\Delta(x_t + y_t) = \Delta x_t + \Delta y_t$
(iii)	**Δ es un operador lineal**	$\Delta(ax_t + by_t) = a\Delta x_t + b\Delta y_t$
(iv)	**Diferencia aplicado n veces (Diferencia de orden n)**	$\Delta^n y_t = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} E^{n-k} y_t$
(v)	**Diferencia de la multi-plicación de funciones**	$\Delta(x_t.y_t) = x_{t+1}\Delta y_t + y_t\Delta x_t$ $= x_t\Delta y_t + y_{t+1}\Delta x_t$

Diferencias de algunas funciones:

1) La diferencia de una constante es cero:

$$y_t = c \quad ===> \Delta y_t = c - c = 0$$

2) La diferencia de la identidad es uno:

$$y_t = t \quad ===> \Delta y_t = t + 1 - t = 1$$

3) Diferencia del cuadrado:

$$y_t = t^2 \implies \Delta y_t = (t + 1)^2 - t^2 = 2t + 1$$

4) Diferencia del cubo

$$y_t = t^3 \implies \Delta y_t = (t + 1)^3 - t^3 = 3t^2 + 3t + 1$$

5) Diferencia de la n-esima potencia:

$$y_t = t^n \implies \Delta y_t = (t + 1)^n - t^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} t^{n-k}$$

6) Diferencia de una progresión geométrica:

$$y_t = a^t \implies \Delta y_t = a^{t+1} - a^t = a^t \cdot (a - 1)$$

7) Diferencia de la función factorial:

$$\begin{aligned} y_t = t! \implies \Delta y_t &= (t + 1)! - t! = \\ &= (t + 1)\cdot t! - t! = \\ &= t \cdot t! \end{aligned}$$

8) Diferencia del seno:

$$y_t = \operatorname{sen} \pi t \implies \Delta y_t = \operatorname{sen} \pi(t+1) - \operatorname{sen} \pi t = 0$$

9) Diferencia del coseno:

$$y_t = \cos\pi t \Longrightarrow \Delta y_t = \cos\pi\,(t+1) - \cos\pi t$$
$$= \begin{cases} -2 & t \text{ par} \\ 2 & t \text{ impar} \end{cases}$$

Tabla 2.b.2
Diferencias de algunas funciones

	Funciones		Diferencias
	Nombre	Expresión	
(1)	constante	$y_t = c$	$\Delta y_t = 0$
(2)	identidad	$y_t = t$	$\Delta y_t = 1$
(3)	cuadrado	$y_t = t^2$	$\Delta y_t = 2t + 1$
(4)	cubo	$y_t = t^3$	$\Delta y_t = 3t^2 + 3t + 1$
(5)	n-esima potencia	$y_t = t^n$	$\Delta y_t = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} t^{n-k}$
(6)	Progresión geomé-trica:	$y_t = a^t$	$\Delta y_t = a^t \cdot (a-1)$
(7)	factorial	$y_t = t!$	$\Delta y_t = t \cdot t!$
(8)	seno	$y_t = \operatorname{sen}\pi t$	$\Delta y_t = 0$
(9)	coseno	$y_t = \cos\pi t$	$\Delta y_t = \begin{cases} -2 & t \text{ par} \\ 2 & t \text{ impar} \end{cases}$

c) Operador Sumatoria

Definición

$$\sum_{t=k_0}^{k_u} y_t = \underbrace{y_{k_0} + y_{k_0+1} + y_{k_0+2} + \dots\dots\dots + y_{k_u-1} + y_{k_u}}_{k_u \,-\, k_0 \,+\, 1 \text{ términos}}$$

Significado

El Operador sumatoria viene a ser la suma de todos los valores de la función entre dos momentos.

Las sucesiones que se obtiene a partir de la aplicación del operador sumatoria se conocen también con el nombre de **series**.

Propiedades

(i) Sumatoria de una constante por una función:

$$\sum_{t=k_0}^{k_u} (ay_t) = a \sum_{t=k_0}^{k_u} y_t$$

La sumatoria de una constante por una función es la constante por la sumatoria de la función.

(ii) Sumatoria de la suma de dos funciones:

$$\boxed{\sum_{t=k_0}^{k_u} (x_t + y_t) = \sum_{t=k_0}^{k_u} x_t + \sum_{t=k_0}^{k_u} y_t}$$

La sumatoria de la suma de dos funciones es la suma de las sumatorias de las dos funciones.

(iii) (i) y (ii) ====> ∑ es un operador lineal:

$$\boxed{\sum_{t=k_0}^{k_u} (ax_t + by_t) = a\sum_{t=k_0}^{k_u} x_t + b\sum_{t=k_0}^{k_u} y_t}$$

(iv) Sumación por pedazos (o por trozos)

$$\boxed{\sum_{t=k_0}^{k_m} y_t + \sum_{t=k_m+1}^{k_u} y_t = \sum_{t=k_0}^{k_u} y_t}$$

La suma total es la suma de las sumas parciales por trozos.

(v) Desplazamiento de los limites:

$$\boxed{\sum_{t=k_0+m}^{k_u+m} y_t = \sum_{t=k_0}^{k_u} y_{t+m}}$$

La suma con los limites desplazados es la suma normal de la función desplazada.

(vi) Relación entre diferencias y sumatorias

$$\boxed{\sum_{t=k_0}^{k_u} \Delta y_t = y_{k_u+1} - y_{k_0}}$$

La suma de una diferencia es la diferencia entre el valor del siguiente término y el valor del primer término.

y

$$\boxed{\Delta \sum_{t=k_0}^{k_u} y_t = y_{k_u+1}}$$

La diferencia de una sumatoria es el siguiente término.

vii) Sumación por partes

$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{t=k_0}^{k_u} x_t y_t = S_{k_0,k_u} y_{k_u+1} - \sum_{t=k_0}^{k_u} S_{k_0,t} \Delta y_t \\ \text{en donde: } \displaystyle S_{k_0,t} = \sum_{\tau=k_0}^{t} x_\tau \end{array}}$$

Tabla 2.c.1
Resumen de las propiedades del Operador Sumatoria

	Propiedades	Formulas
(i)	**Sumatoria de una constante por una función**	$\sum_{t=k_0}^{k_u}(ay_t) = a\sum_{t=k_0}^{k_u} y_t$
(ii)	**Sumatoria de la suma**	$\sum_{t=k_0}^{k_u}(x_t + y_t) = \sum_{t=k_0}^{k_u} x_t + \sum_{t=k_0}^{k_u} y_t$
(iii)	**$\sum$ es un operador lineal**	$\sum_{t=k_0}^{k_u}(ax_t + by_t) = \sum_{t=k_0}^{k_u} ax_t + \sum_{t=k_0}^{k_u} by_t$
(iv)	**Sumación por pedazos (o por trozos)**	$\sum_{t=k_0}^{k_m} y_t + \sum_{t=k_m+1}^{k_u} y_t = \sum_{t=k_0}^{k_u} y_t$
(v)	**Desplazamiento de los limites**	$\sum_{t=k_0+m}^{k_u+m} y_t = \sum_{t=k_0}^{k_u} y_{t+m}$
(vi)	**Relación entre diferencias y sumatorias**	$\sum_{t=k_0}^{k_u} \Delta y_t = y_{k_u+1} - y_{k_0}$
		$\Delta\sum_{t=k_0}^{k_u} y_t = y_{k_u+1}$
(vii)	**Sumación por partes**	$\sum_{t=k_0}^{k_u} x_t y_t = S_{k_0,k_u} y_{k_u+1} - \sum_{t=k_0}^{k_u} S_{k_0,t}\Delta y_t$ en donde: $S_{k_0,t} = \sum_{\tau=k_0}^{t} x_\tau$

Sumatorias de algunas funciones:

1) **La suma de una constante:**

$$\boxed{\sum_{t=0}^{k} c = (k+1)c}$$

2) **La suma de la identidad.**

$$\sum_{t=0}^{k} t = (k+1)^2 - \sum_{t=0}^{k} (t+1) \quad \text{(Aplicando sumación por parte)}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k} t = k(k+1)/2$$

3) **La suma de cuadrados:**

$$\sum_{t=0}^{k} t^2 = \sum_{t=0}^{k} t g t = k(k+1)^2 / 2 - \sum_{t=0}^{k} t(t+1)/2$$

$$= k(k+1)^2 - \sum_{t=0}^{k} t^2 - \sum_{t=0}^{k} t$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k} t^2 = k(k+1)(2k+1)/6$$

4) Suma de la progresión geométrica

$$\sum_{t=0}^{k} m^t = \sum_{t=1}^{k} m^t + 1 = \sum_{t=0}^{k-1} m^{t+1} + 1 = m\sum_{t=0}^{k-1} m^t + 1$$

$$= \sum_{t=0}^{k-1} m^t + m^k$$

$$\Rightarrow (m-1)\sum_{t=0}^{k-1} m^t = m^k - 1 \Rightarrow \sum_{t=0}^{k-1} m^t = (m^k - 1)/(m-1)$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k} m^t = (m^{k+1} - 1)/(m-1) = (1 - m^{k+1})/(1-m)$$

Tabla 2.c.2
Sumatorias de algunas funciones

	Funciones		Sumatorias
	Nombre	Expresión	
(1)	**Constante**	$y_t = c$	$\sum_{t=0}^{k} c = (k+1)c$
(2)	**Identidad**	$y_t = t$	$\sum_{t=0}^{k} t = k(k+1)/2$
(3)	**Cuadrado**	$y_t = t^2$	$\sum_{t=0}^{k} t^2 = k(k+1)(2k+1)/6$
(4)	**progresión geométrica**	$y_t = m^t$	$\sum_{t=0}^{k} m^t = (1-m^{k+1})/(1-m)$

d) Operador Razón

Definición

$$Py_t = Ey_t / y_t = y_{t+1} / y_t$$

<u>Significado</u>

El Operador razón P, viene a ser la razón (el cociente) de los valores de la función entre dos momentos sucesivos: entre el momento t+1 y el momento t.

<u>Propiedades</u>

(i) Razón de una constante por una función:

$$P(ay_t) = ay_{t+1}/ay_t = Py_t$$

La razón es invariante ante los factores de escala de una función. Esto la razón de una constante por una función sigue siendo la misma razón de la función.

(ii) La razón aplicada dos veces (razón de orden 2):

$$\boxed{\begin{aligned} P^2 y_t &= P(Py_t) = P(y_{t+1}/y_t) \\ &= (y_{t+2}/y_{t+1})/(y_{t+1}/y_t) \\ &= y_{t+2} \cdot y_t / y_{t+1}^2 \end{aligned}}$$

La razón aplicada 3 veces (razón de orden 3):

$$\boxed{\begin{aligned} P^3 y_t &= P(P^2 y_t) = P(y_{t+2} \cdot y_t / y_{t+1}^2) \\ &= (y_{t+3} \cdot y_{t+1} / y_{t+2}^2)/(y_{t+2} \cdot y_t / y_{t+1}^2) \\ &= y_{t+3} \cdot y_{t+1}^3 / y_{t+2}^3 \cdot y_t \end{aligned}}$$

La razón aplicada 4 veces (razón de orden 4):

$$\boxed{\begin{aligned} P^4 y_t &= P(P^3 y_t) = P(y_{t+3} \cdot y_{t+1}^3 / y_{t+2}^3 \cdot y_t) \\ &= (y_{t+4} \cdot y_{t+2}^3 / y_{t+3}^3 \cdot y_{t+1})/(y_{t+3} \cdot y_{t+1}^3 / y_{t+2}^3 \cdot y_t) \\ &= y_{t+4} \cdot y_{t+2}^6 \cdot y_t / y_{t+3}^4 \cdot y_{t+1}^4 \end{aligned}}$$

En general, la razón de orden n:

$$\boxed{P^n y_t = \prod_{k=0}^{n} \left(E^{n-k} y_t\right)^{(-1)^k \binom{n}{k}}}$$

(iii) Razón de la multiplicación de funciones:

$$\begin{aligned} P(x_t.y_t) &= x_{t+1}.y_{t+1}/x_t.y_t \\ &= (x_{t+1}/x_t).(y_{t+1}/y_t) \\ &= Px_t.\ Py_t \end{aligned}$$

La razón de la multiplicación de dos funciones es el producto de las razones de cada una de las funciones.

(iv) Razón de la inversa algebraica de una función:

$$\begin{aligned} P(1/x_t) &= (1/x_{t+1})/(1/x_t) \\ &= (x_t/x_{t+1}) \\ &= 1/(x_{t+1}/x_t) \\ &= 1/Px_t \end{aligned}$$

La razón de la inversa algebraica de una función es la inversa algebraica de la razón de dicha función.

(v) Razón de la división de dos funciones:

$$P(x_t / y_t) = P\,(x_t \cdot (1/y_t))$$

Por (iii) y (iv)

$$P(x_t / y_t) = Px_t / Py_t$$

La razón de la división de dos funciones es la división de las razones de dichas funciones.

(vi) Relación entre los operadores Razón y Diferencia:

Sea $y_t = \ln(x_t)$ $(x_t = \mathrm{Exp}(y_t))$

Entonces:

$$\Delta y_t = \ln(Px_t)$$

O también:

$$Px_t = \mathrm{Exp}(\Delta y_t)$$

Tabla 2.d.1
Resumen de las propiedades del Operador Razón

	Propiedades	Formulas
(i)	**Razón de una constante por una función**	$P(ay_t) = Py_t$
(ii)	**Razón aplicado n veces (Razón de orden n)**	$P^n y_t = \prod_{k=0}^{n} \left(E^{n-k} y_t\right)^{(-1)^k \binom{n}{k}}$
(iii)	**Razón de la multiplicación de funciones**	$P(x_t.y_t) = Px_t.\ Py_t$
(iv)	**Razón de la inversa algebraica de una función**	$P(1/x_t) = 1/Px_t$
(v)	**Razón de la división de dos funciones**	$P(x_t / y_t) = P\ x_t/Py_t$
(vi)	**Relación entre los operadores Razón y Diferencia:** $y_t = \ln(x_t)$ $(x_t = \text{Exp}(y_t))$	$\Delta y_t = \ln(Px_t)$ $Px_t = \text{Exp}(\Delta y_t)$

Razones de algunas funciones:

1) La razón de una constante es uno:

$$y_t = c \quad ===> Py_t = c/c = 1$$

2) Razón de la identidad:

$$y_t = t \quad ===> Py_t = (t + 1)/t = 1 + 1/t$$

3) Razón del cuadrado:

$$\begin{aligned} y_t = t^2 \quad ===> Py_t &= (t + 1)^2 / t^2 \\ &= (t^2 + 2t + 1)/t^2 \\ &= 1 + 2/t + 1/ t^2 \end{aligned}$$

4) Razón del cubo

$$\begin{aligned} y_t = t^3 \quad ===> Py_t &= (t + 1)^3 /t^3 \\ &= (t^3 + 3t^2 + 3t + 1)/t^3 \\ &= 1 + 3/t + 3/t^2 + 1/t^3 \end{aligned}$$

5) Razón de la n-esima potencia:

$$y_t = t^n \quad ===> Py_t = (t + 1)^n / t^n \quad = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(1/t^k\right)$$

6) Razón de una progresión geométrica:

$$y_t = a^t \quad ===> Py_t = a^{t+1}/a^t = a$$

7) Razón de la función factorial:

$$\begin{aligned} y_t = t! \quad ===> Py_t &= (t + 1)!/ t! = \\ &= (t +1)\cdot t! / t! = \\ &= t + 1 \end{aligned}$$

Tabla 2.d.2
Razones de algunas funciones

	Funciones		Diferencias
	Nombre	Expresión	
(1)	constante	$y_t = c$	$Py_t = 1$
(2)	identidad	$y_t = t$	$Py_t = 1 + 1/t$
(3)	cuadrado	$y_t = t^2$	$Py_t = 1 + 2/t + 1/ t^2$
(4)	cubo	$y_t = t^3$	$Py_t = 1 + 3/t + 3/t^2 + 1/t^3$
(5)	n-esima potencia	$y_t = t^n$	$Py_t = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(1/t^k\right)$
(6)	progresión geo-métrica	$y_t = a^t$	$Py_t = a$
(7)	factorial	$y_t = t!$	$Py_t = t + 1$

e) Operador Productoria

Definición

$$\prod_{t=k_0}^{k_u} y_t = \underbrace{y_{k_0} \cdot y_{k_0+1} \cdot y_{k_0+2} \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot y_{k_u-1} \cdot y_{k_u}}_{k_u - k_0 + 1 \text{ términos}}$$

Significado

El Operador productoria viene a ser el producto (multiplicación) de todos los valores de la función entre dos momentos.

Propiedades

(i) Productoria de una constante por una función:

$$\prod_{t=k_0}^{k_u} (ay_t) = a^{k_u - k_0 + 1} \prod_{t=k_0}^{k_u} (y_t)$$

La productoria de una constante por una función es la constante elevado a la potencia de la cantidad de términos de esta productoria por la productoria de la función.

(ii) Productoria de la multiplicación de funciones:

$$\prod_{t=k_0}^{k_u} (x_t \cdot y_t) = \prod_{t=k_0}^{k_u} x_t \cdot \prod_{t=k_0}^{k_u} y_t$$

La productoria de la multiplicación de dos funciones es la multiplicación de las productorias de cada una de las funciones.

(iii) Productoria de la inversa algebraica de una función:

$$\boxed{\prod_{t=k_0}^{k_u} (1/x_t) = \frac{1}{\prod_{t=k_0}^{k_u} x_t}}$$

La productoria de la inversa algebraica de una función es la inversa algebraica de la productoria de dicha función.

(iv) Productoria de la división de dos funciones:

$$\boxed{\prod_{t=k_0}^{k_u} (x_t/y_t) = \frac{\prod_{t=k_0}^{k_u} x_t}{\prod_{t=k_0}^{k_u} y_t}}$$

La productoria de la división de dos funciones es la división de las productorias de dichas funciones.

(v) Multiplicación por pedazos (o por trozos)

$$\boxed{\prod_{t=k_0}^{k_m} x_t \cdot \prod_{t=k_{m+1}}^{k_u} x_t = \prod_{t=k_0}^{k_u} x_t}$$

La productoria total es la multiplicación de las multiplicaciones parciales por trozos.

(vi) **Desplazamiento de los limites:**

$$\boxed{\prod_{t=k_0+m}^{k_u+m} x_t = \prod_{t=k_0}^{k_u} x_{t+m}}$$

La multiplicación con los limites desplazados es la productoria normal de la función desplazada.

(vii) **Relación entre razones y productorias**

$$\boxed{\prod_{t=k_0}^{k_u} Py_t = y_{k_u+1} / y_{k_0}}$$

La productoria de una razón es la división del valor del siguiente término entre el valor del primer término.

y

$$\boxed{P\prod_{t=k_0}^{k_u} y_t = y_{k_u+1}}$$

La razón de una productoria es el siguiente término.

(viii) **Relación entre los operadores Productoria y Sumatoria:**

Sea $y_t = \ln(x_t)$ $\quad (x_t = \mathrm{Exp}(y_t))$

Entonces:

$$\sum_{t=k_0}^{k_u} y_t = \ln\left(\prod_{t=k_0}^{k_u} x_t\right)$$

O también:

$$\prod_{t=k_0}^{k_u} x_t = \mathrm{Exp}\left(\sum_{t=k_0}^{k_u} y_t\right)$$

Tabla 2.e.1
Resumen de las propiedades del Operador Productoria

	Propiedades	Formulas
(i)	**Productoria de una constante por una función**	$\prod_{t=k_0}^{k_u}(ay_t) = a^{k_u-k_0+1}\prod_{t=k_0}^{k_u}(y_t)$
(ii)	**Productoria de la multiplicación**	$\prod_{t=k_0}^{k_u}(x_t \cdot y_t) = \prod_{t=k_0}^{k_u}x_t \cdot \prod_{t=k_0}^{k_u}y_t$
(iii)	**Productoria de la inversa algebraica**	$\prod_{t=k_0}^{k_u}(1/x_t) = \frac{1}{\prod_{t=k_0}^{k_u}x_t}$
(iv)	**Productoria de la división**	$\prod_{t=k_0}^{k_u}(x_t/y_t) = \frac{\prod_{t=k_0}^{k_u}x_t}{\prod_{t=k_0}^{k_u}y_t}$
(v)	**Multiplicación por pedazos (o por trozos)**	$\prod_{t=k_0}^{k_m}x_t \cdot \prod_{t=k_{m+1}}^{k_u}x_t = \prod_{t=k_0}^{k_u}x_t$
(vi)	**Desplazamiento de los limites**	$\prod_{t=k_0+m}^{k_u+m}x_t = \prod_{t=k_0}^{k_u}x_{t+m}$
(vii)	**Relación entre razones y productorias**	$\prod_{t=k_0}^{k_u}Py_t = y_{k_u+1}/y_{k_0}$
		$P\prod_{t=k_0}^{k_u}y_t = y_{k_u+1}$
(viii)	**Relación entre los operadores Productoria y Sumatoria.** $y_t = \ln(x_t)$ $(x_t = Exp(y_t))$	$\sum_{t=k_0}^{k_u}y_t = \ln(\prod_{t=k_0}^{k_u}x_t)$
		$\prod_{t=k_0}^{k_u}x_t = Exp(\sum_{t=k_0}^{k_u}y_t)$

Productorias de algunas funciones:

1) El producto de una constante:

$$\boxed{\prod_{t=0}^{k} c = c^{(k+1)}}$$

2) El producto de la identidad.

$$\boxed{\prod_{t=1}^{k} t = k!}$$

3) El producto de la progresión geométrica

$$\boxed{\prod_{t=0}^{k} m^t = m^{\sum_{t=0}^{k} t} = m^{k(k+1)/2}}$$

Tabla 2.e.2
Productorias de algunas funciones

	Funciones		Sumatorias
	Nombre	Expresión	
(1)	**Constante**	$y_t = c$	$\prod_{t=0}^{k} c = c^{(k+1)}$
(2)	**Identidad**	$y_t = t$	$\prod_{t=1}^{k} t = k!$
(3)	**progresión geométrica**	$y_t = m^t$	$\prod_{t=0}^{k} m^t = m^{k(k+1)/2}$

Ejercicios:

1) Hallar

a) $\sum_{t=0}^{k} t^3$ R: $[k(k+1)/2]^2$

b) $\sum_{t=0}^{k} t \cdot m^t$ R: $\left(\dfrac{m}{(1-m)^2}\right)(1+m^k[k(m-1)-1])$

2)

a) Hallar $\Delta(1/y_t)$

b) Utilizar el resultado de a) para hallar

$$\sum_{t=1}^{k} 1/[t(t+1)]$$

Resolución de los ejercicios propuestos:

Ejercicio 1.a.

$$\sum_{t=0}^{k} t^3 = \sum_{t=0}^{k} t^2 g t$$

Aplicando sumación por partes:

$$\sum_{t=0}^{k} t^3 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} g (k+1) - \sum_{t=0}^{k} \frac{t(t+1)(2t+1)}{6} g 1 =$$

$$= \frac{k(k+1)^2(2k+1)}{6} - (1/6)\sum_{t=0}^{k} 2t^3 - (1/6)\sum_{t=0}^{k} 3t^2 - (1/6)\sum_{t=0}^{k} t =$$

$$= \frac{k(k+1)^2(2k+1)}{6} - (1/3)\sum_{t=0}^{k} t^3 - \frac{k(k+1)(2k+1)}{12} - \frac{k(k+1)}{12} =$$

Ordenando términos:

$$(4/3)\sum_{t=0}^{k} t^3 = (1/12)k(k+1)[2(k+1)(2k+1) - (2k+1) - 1] =$$

$$= (1/12)k(k+1)[(2k+1)(2k+1) - 1] =$$

$$= (1/12)k(k+1)(4k^2 + 4k) =$$

$$= (1/6)k^2(k+1)^2$$

Despejando, finalmente se tiene:

$$\sum_{t=0}^{k} t^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$$

Ejercicio 1.b.

Aplicando sumación por partes:

$$\sum_{t=0}^{k} m^t \cdot t = \left(\frac{1-m^{k+1}}{1-m}\right)\cdot(k+1) - \sum_{t=0}^{k}\left(\frac{1-m^{t+1}}{1-m}\right)\cdot 1 =$$

$$=\left(\frac{1}{1-m}\right)\left[(1-m^{k+1})\cdot(k+1) - \sum_{t=0}^{k}1 + m\sum_{t=0}^{k}m^t\right] =$$

$$=\left(\frac{1}{1-m}\right)\left[(1-m^{k+1})\cdot(k+1) - (k+1) + m\left(\frac{1-m^{k+1}}{1-m}\right)\right] =$$

$$=\left(\frac{1}{1-m}\right)\left[-m^{k+1}\cdot(k+1) + m\left(\frac{1-m^{k+1}}{1-m}\right)\right] =$$

$$=\left(\frac{1}{(1-m)^2}\right)\left[-km^{k+1} - m^{k+1} + km^{k+2} + m^{k+2} + m - m^{k+2}\right] =$$

$$=\left(\frac{m}{(1-m)^2}\right)\left[1 + km^k(m-1) - m^k\right]$$

CAPÍTULO 3

ECUACIONES EN DIFERENCIAS (Y/O DESPLAZAMIENTOS)

Ecuación en diferencias de orden n:

$$f(\Delta^n y_t, \Delta^{n-1} y_t, \ldots\ldots, \Delta y_t, y_t, t) = 0$$

Ecuación en desplazamientos de orden n:

$$f(E^n y_t, E^{n-1} y_t, \ldots\ldots, E y_t, y_t, t) = 0$$

Las ecuaciones en diferencias se pueden llevar a ecuaciones en desplazamientos y viceversa.

Las ecuaciones en desplazamiento también reciben el nombre de **ecuaciones de recursividad (o funciones recursivas),** y se escriben de la forma:

$$y_t = g(y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots\ldots, y_{t-n}, t)$$

Resolución de algunas ecuaciones de primer orden:

a) La diferencia igual a cero

$$\Delta y_t = 0 \implies y_{t+1} = y_t \implies y_t = y_o, \ \ldots\ t$$

la función es igual una constante (su valor inicial)

b) La diferencia es igual una constante

$$\Delta y_t = a \quad ===> \sum_{k=0}^{t-1} \Delta y_k = \sum_{k=0}^{t-1} a \quad ===> y_t - y_o = t.a$$

$$===> \; y_t = y_o + a.t$$

la función es igual a una recta con pendiente la constante, y como punto de corte su valor inicial.

c) La diferencia es igual a la identidad

$$\Delta y_t = t \quad ===> \sum_{k=0}^{t-1} \Delta y_k = \sum_{k=0}^{t-1} t \quad ===> y_t - y_o = (t-1)t/2$$

$$===> y_t = y_o + (t-1)t/2$$

la función es una función cuadrática.

d) La diferencia es una progresión geométrica

$$\Delta y_t = m^t \quad ===> \sum_{k=0}^{t-1} \Delta y_k = \sum_{k=0}^{t-1} m^k \quad ===> y_t - y_o = (1 - m^t)/(m-1)$$

$$===> y_t = y_o + (1 - m^t)/(1 - m), \; m \neq 1$$

la función también es una progresión geométrica

e) Ecuación en desplazamiento lineal homogénea

$$y_{t+1} - A \bullet y_t = 0; \quad A \neq 1$$

$\Longrightarrow$ $y_{t+1} = A \bullet y_t$ $\Longrightarrow$ $y_{t+1}/y_t = A$

haciendo $z_t = \ln y_t$

$$z_{t+1} - z_t = \ln A$$

$$\Delta z_t = \ln A$$

utilizando la ecuación b):

$$z_t = zo + \ln A \, . \, t$$

$$y_t = y_o \bullet A^t$$

f) Ecuación en desplazamiento lineal no homogénea:

$$y_{t+1} - A \bullet y_t = B \quad (1) \qquad ; A \neq 1$$

$$\Longrightarrow y_{t+2} - A \bullet y_{t+1} = B \quad (2)$$

restando (1) de (2)

$$\Delta y_{t+1} - A \Delta y_t = 0$$

haciendo $\Delta y_t = z_t$

$$z_{t+1} - A \bullet z_t = 0$$

utilizando la ecuación (e)

$$y_t = y_o A^t \Longrightarrow \Delta y_t = zoA^t$$

utilizando la ecuación (d)

$$y_t = y_o + zo(1 - A^t)/(1 - A)$$

$$= y_o + (y1 - y_o)(1 - A^t)/(1 - A)$$

$$= y_o + (B + A\, y_o - y_o)(1 - A^t)/(1 - A)$$
$$= y_o + (B + y_o\, (A - 1)(1 - A^t)/(1 - A)$$

$$= y_o A^t + B(1 - A^t)/(1 - A)$$

$$= B/(1 - A) + [y_o - B/(1 - A)]A^t$$

g) Ecuación en desplazamiento (con diferencia) lineal no homogénea:

$\Delta y_t + A \bullet y_t = B$; $A \neq 0$

$y_{t+1} - y_t + A \bullet y_t = B$

$y_{t+1} - (1 - A)y_t = B$

Utilizando la ecuación (f)

$$y_t = y_o(1 - A)^t + B(1 - (1 - A)^t)/A$$

$$= B/A + [y_o - B/A](1 - A)^t$$

Nota: si en la ecuación (g) B = 0, entonces (g) es una ecuación en diferencia lineal homogénea de primer orden a coeficiente constantes, y la solución será:

$$y_t = y_o(1 - A)^t$$

Definiciones

Punto de Equilibrio: Se dice $y_e = y_t$, para algún $t >= 0$, es un punto de equilibrio si $y_{t+k} = y_e$, k = 1, 2, ...

Comportamiento de una solución de una ecuación en diferencia

1.- Si $y_t < y_{t+1} < y_{t+2} ..... < y_\infty = \infty$, para cierto $t \geq 0$,
Se dirá que la solución crece monótonamente divergiendo.

2.- Si $y_t < y_{t+1} < y_{t+2} ..... < y_a$, para cierto $t \geq 0$,
Se dirá que la solución crece monótonamente convergiendo asintoticamente a su punto de atracción y_a.

3.- Si $y_t > y_{t+1} > y_{t+2} ..... > y_\infty = -\infty$, para cierto $t \geq 0$,
se dirá que la solución decrece monótonamente divergiendo.

4.- Si $y_t > y_{t+1} > y_{t+2} ..... > y_e$, para cierto $t \geq 0$, se dirá que la solución decrece monótonamente convergiendo asintoticamente a su punto de atracción y_a.

5.- Si $y_t = u_t + (-1)^t \cdot v_t$
se dirá que la solución es oscilatoria

6.- Si la solución es oscilatoria y
$v_t < v_{t+1} < v_{t+2} \ldots\ldots < v_\infty = \infty$, para cierto $t \geq 0$,
se dirá que la solución es una expansión explosiva.

6.- Si la solución es oscilatoria y
$v_t > v_{t+1} > v_{t+2} \ldots\ldots > v_\infty = 0$, para cierto $t \geq 0$,
se dirá que la solución es una oscilación amortiguada.

7.- Si la solución es una oscilación amortiguada y
Si $u_t \geq u_{t+1} \geq u_{t+2} \ldots\ldots \geq y_e$ o $u_t \leq u_{t+1} \leq u_{t+2} \ldots\ldots \leq y_e$ para cierto $t \geq 0$,
se dirá que es una oscilación amortiguada convergente a y_a

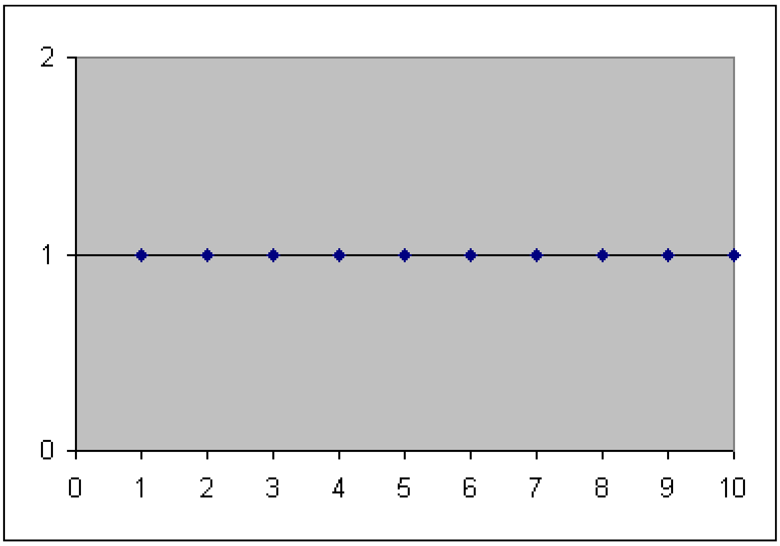
Equilibrio Estable. Si un punto de equilibrio es un punto de atracción de dirá que es un equilibrio estable.

Análisis de las soluciones de las ecuaciones anteriores

a) La solución es una constante con y_o como punto de equilibrio.

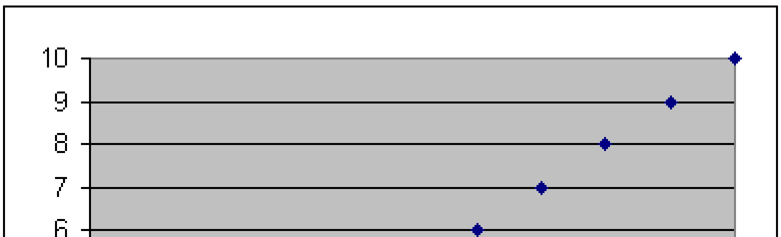
Y_0 = 1

t	**y_t**
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	1



b) La solución es monótona creciente o decreciente (según el valor de a sea positivo o negativo) divergente.

y_0 = 0

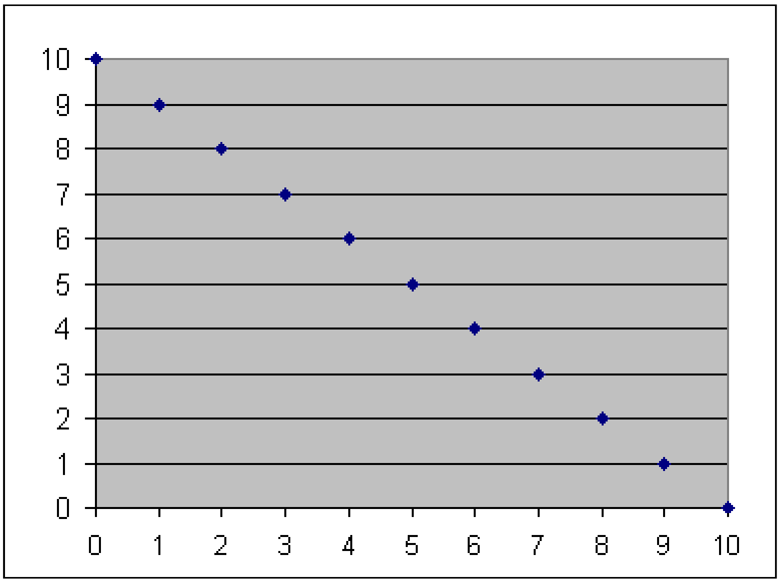


a = **1**

t	y_t
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	10

y_0 = **10**
a = **-1**

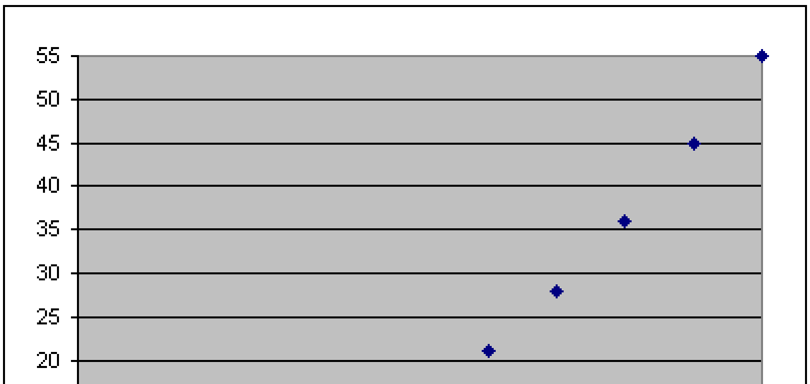
t	y_t
0	10
1	9
2	8
3	7
4	6
5	5
6	4
7	3
8	2
9	1
10	0



c) La solución crece monótonamente divergiendo.

y_0 = **0**

t	y_t

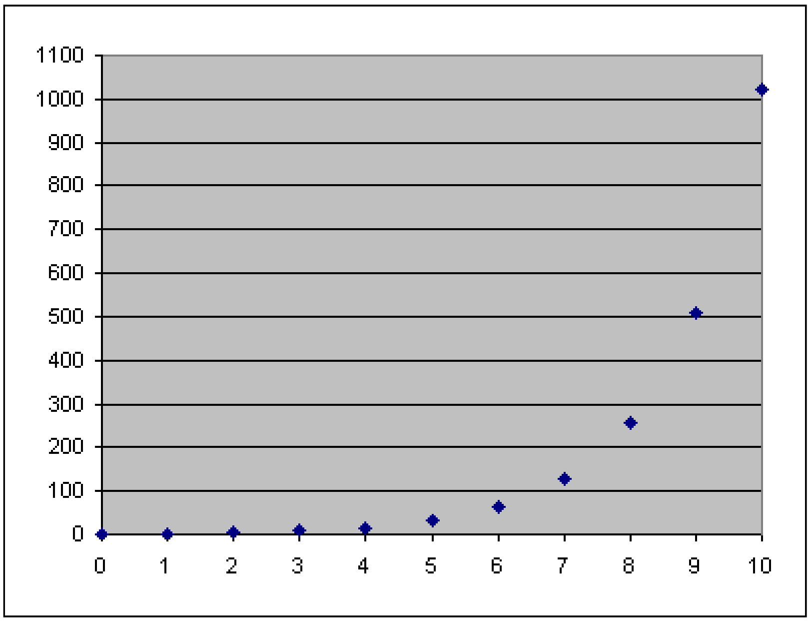


0	0
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
6	21
7	28
8	36
9	45
10	55

d) 1.- Si m > 1, la solución crece monótonamente divergiendo.

y_0 = **0**
m = **2**

t	y_t
0	0
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127
8	255
9	511
10	1023

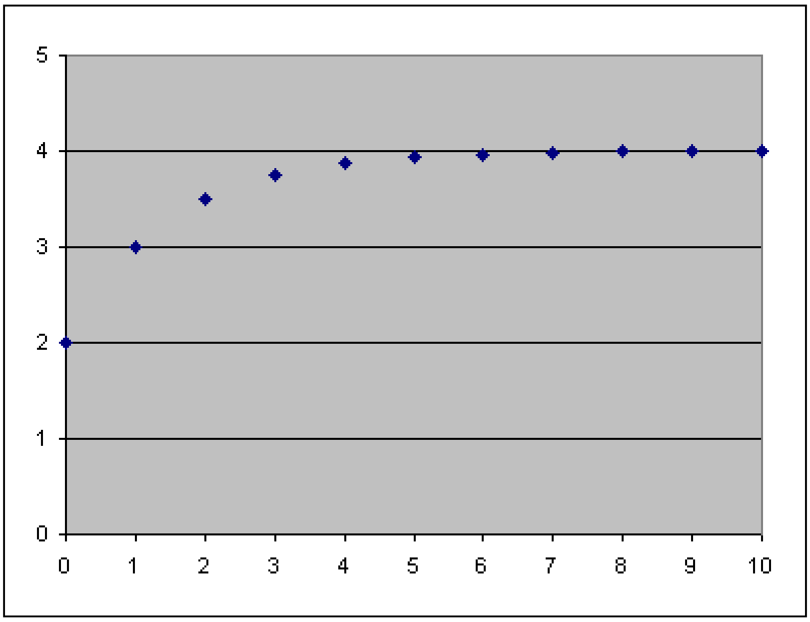


2.- Si $0 < m < 1$, la solución crece monótonamente convergiendo asintoticamente a su punto de atracción:

$$y_a = y_o + 1/(1 - m)$$

y_0 = **2**
m = **0,5**

t	y_t
0	2
1	3
2	3,5
3	3,75
4	3,875
5	3,9375
6	3,9688
7	3,9844
8	3,9922
9	3,9961
10	3,998

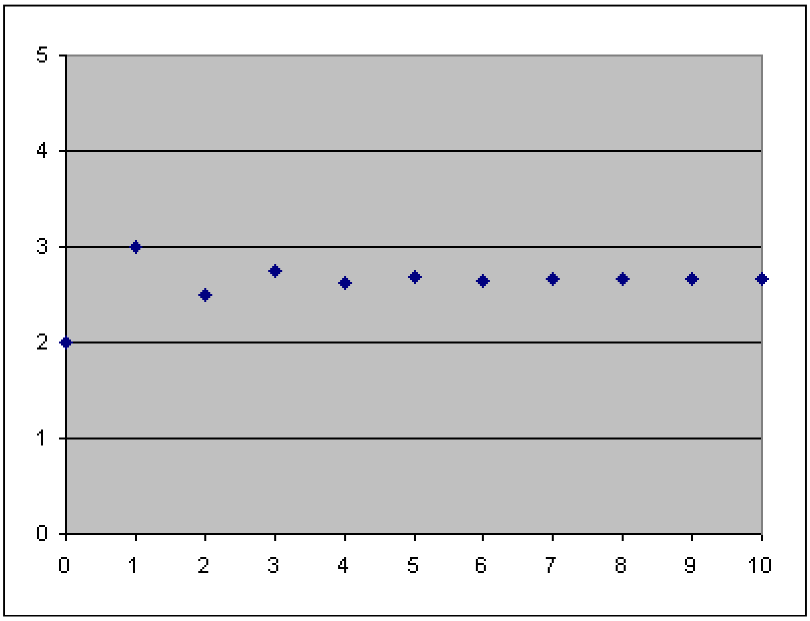


3.- Si $0 > m > -1$, la solución oscila asintoticamente convergiendo asintoticamente a su punto de atracción:

$$y_a = y_o + 1/(1 - m)$$

y_0 = **2**
m = **-0,5**

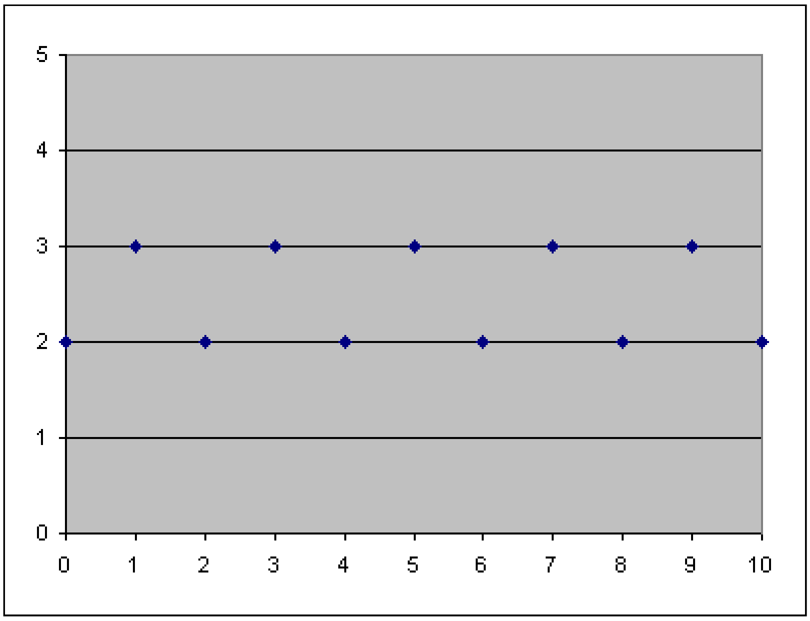
t	y_t
0	2
1	3
2	2,5
3	2,75
4	2,625
5	2,6875
6	2,6563
7	2,6719
8	2,6641
9	2,668
10	2,666



4.- Si $m = -1$, la solución oscila indefinidamente alteran los valores: y_0, $y_0 + 1$.

y_0 = **2**
m = **-1**

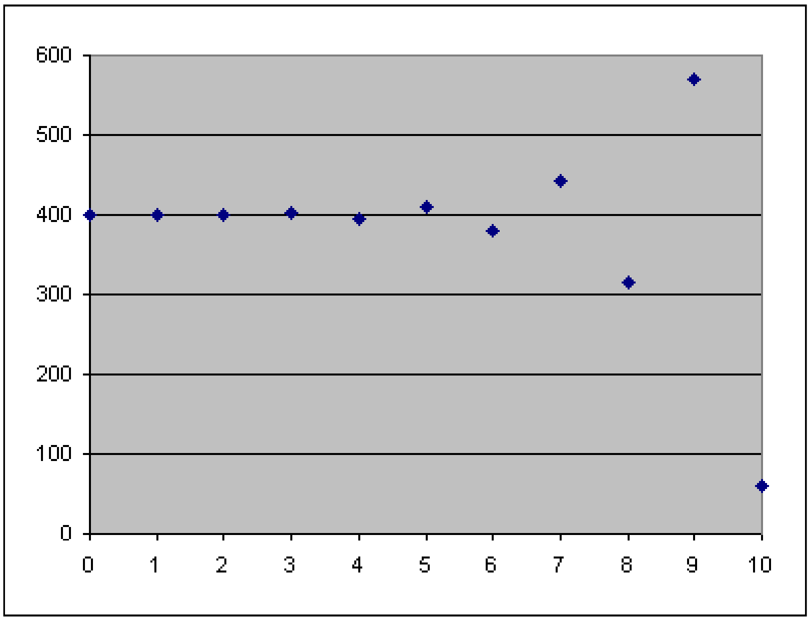
t	y_t
0	2
1	3
2	2
3	3
4	2
5	3
6	2
7	3
8	2
9	3
10	2



5.- Si $-1 > m$, la solución oscila en forma de expansión explosiva.

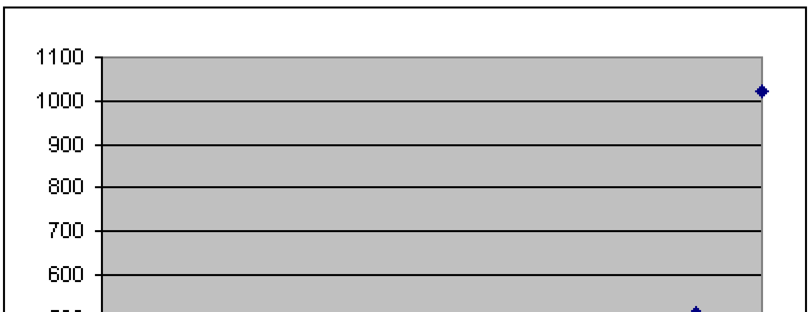
y_0 = **400**
m = **-2**

t	y_t
0	400
1	401
2	399
3	403
4	395
5	411
6	379
7	443
8	315
9	571
10	59



e) 1.- Si A > 1, la solución crece monótonamente divergiendo.

y_0 = **1**
A = **2**

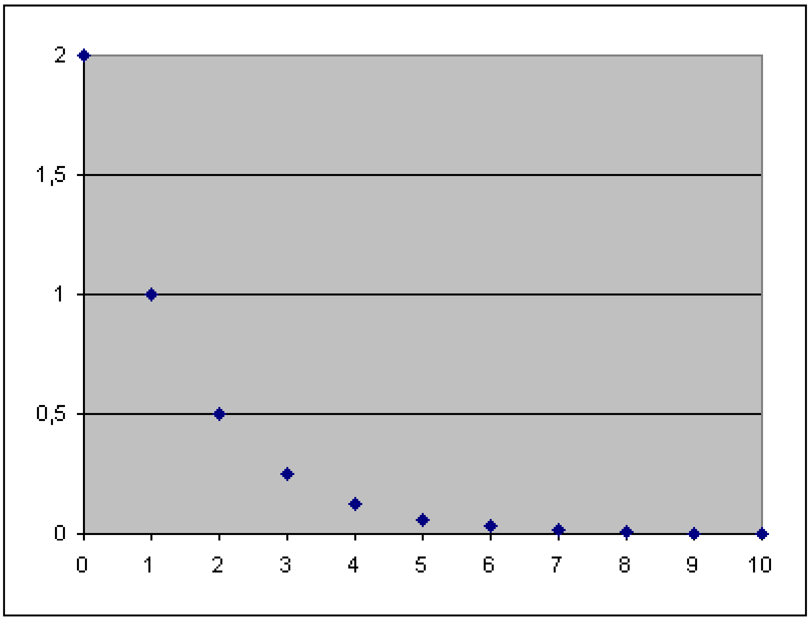


t	y_t
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024

2.- Si $0 < A < 1$, la solución decrece monótonamente convergiendo asintoticamente a su punto de equilibrio 0.

y_0 = **2**
A = **0,5**

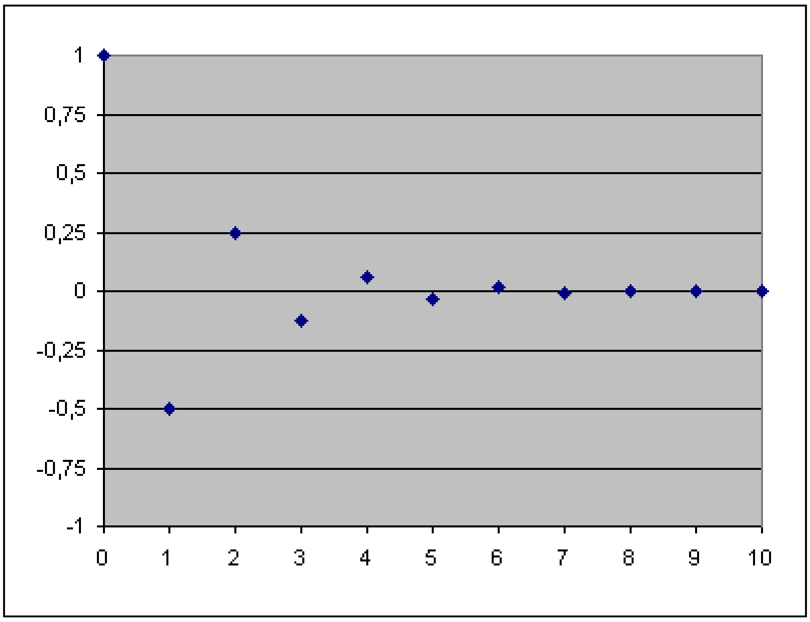
t	y_t
0	2
1	1
2	0,5
3	0,25
4	0,125
5	0,0625
6	0,0313
7	0,0156
8	0,0078
9	0,0039
10	0,002



3.- Si $0 > A > -1$, la solución oscila amortiguadamente convergiendo a su punto de equilibrio 0.

y_0 =	1
A =	-0,5

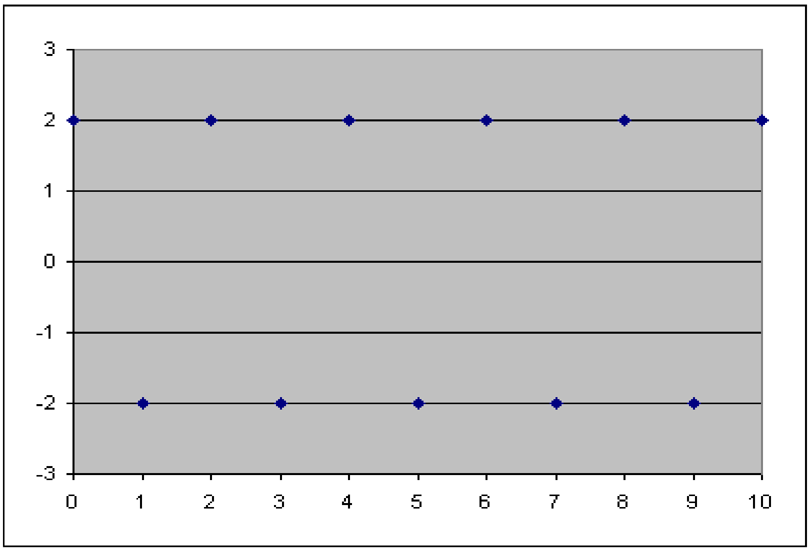
t	y_t
0	1
1	-0,5
2	0,25
3	-0,125
4	0,0625
5	-0,031
6	0,0156
7	-0,008
8	0,0039
9	-0,002
10	0,001



4.- Si $A = -1$, la solución oscila indefinidamente alteran los valores: y_0, $-y_0$.

y_0 =	2
A =	-1

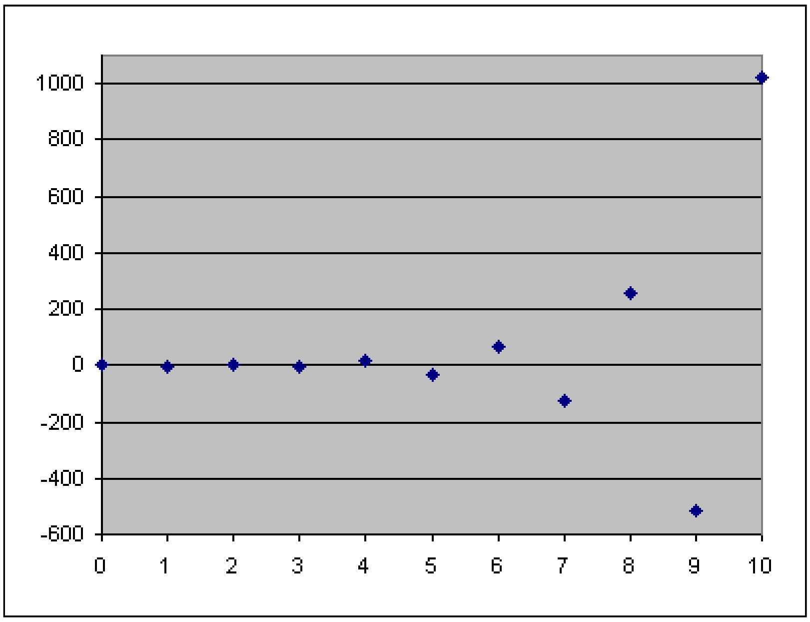
t	y_t
0	2
1	-2
2	2
3	-2
4	2
5	-2
6	2
7	-2
8	2
9	-2
10	2



5.- Si $-1 > A$, la solución oscila en forma de expansión explosiva.

y_0 = **1**
A = **-2**

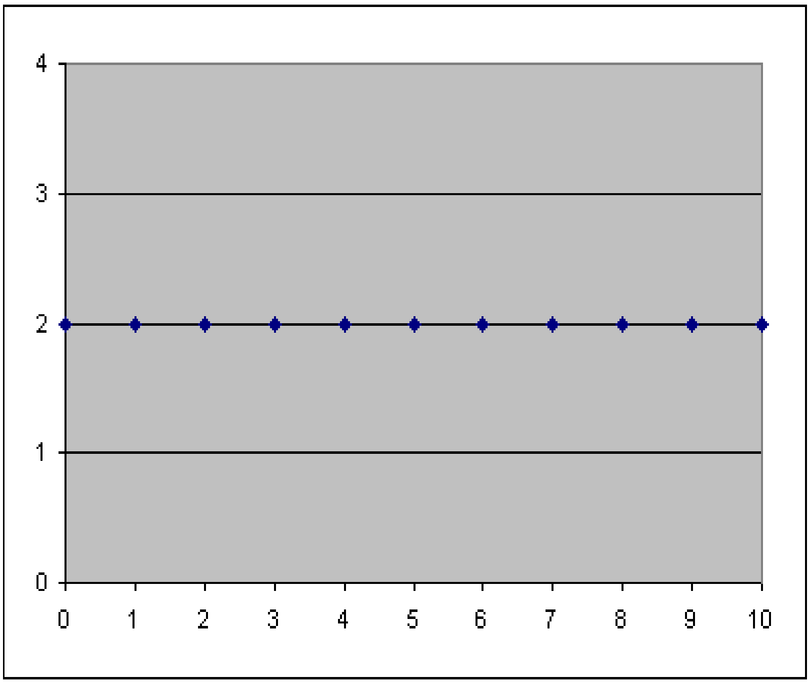
t	y_t
0	1
1	-2
2	4
3	-8
4	16
5	-32
6	64
7	-128
8	256
9	-512
10	1024



f) 1.- El punto de Equilibrio es $y_e = B/(1-A)$, de esta manera si $y_o = B/(1-A)$ la solución es constante.

y_0 = **2**
A = **0,5**
B = **1**
y_e = **2**

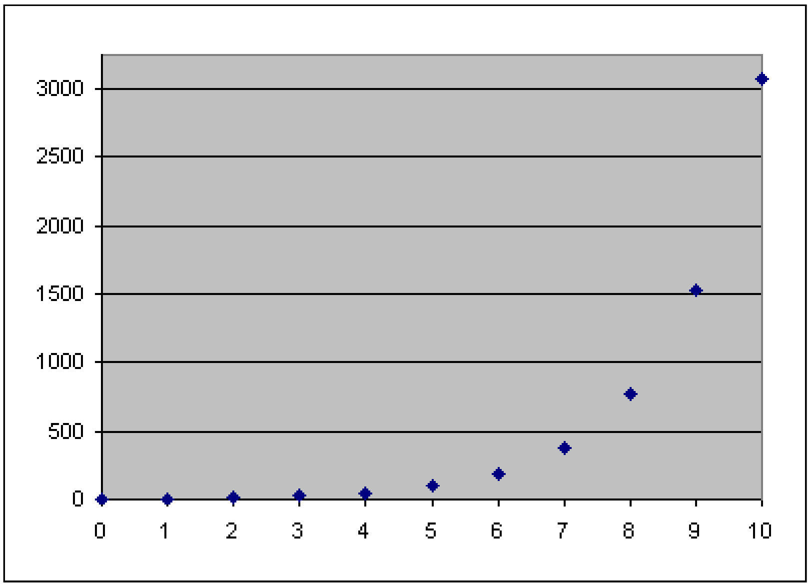
t	y_t
0	2
1	2
2	2
3	2
4	2
5	2
6	2
7	2
8	2
9	2
10	2



2.- Si $A > 1$ y $B/(1-A) < y_o$, la solución crece monótonamente divergiendo.

y_0 =	**2**
A =	**2**
B =	**1**
y_e =	**-1**

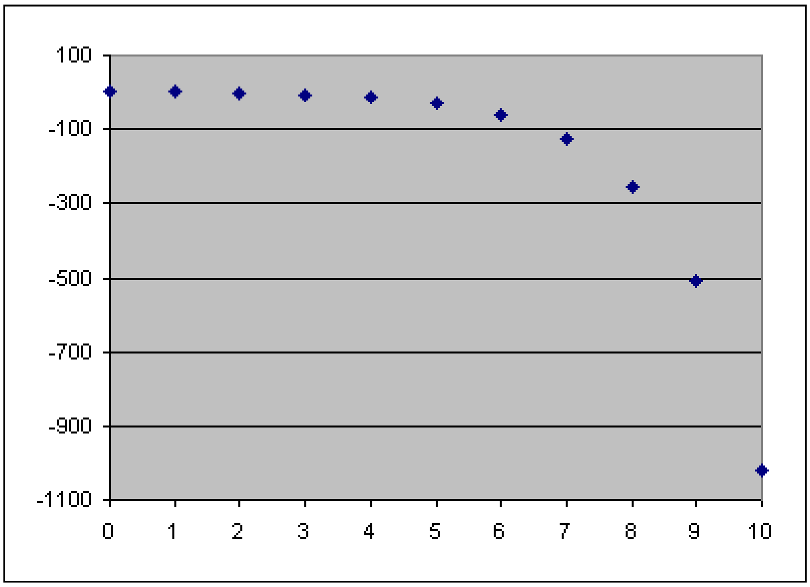
t	y_t
0	2
1	5
2	11
3	23
4	47
5	95
6	191
7	383
8	767
9	1535
10	3071



3.- Si A > 1 y B/(1−A) > y_o, la solución decrece monótonamente divergiendo.

y_0 =	**2**
A =	**2**
B =	**-3**
y_e =	**3**

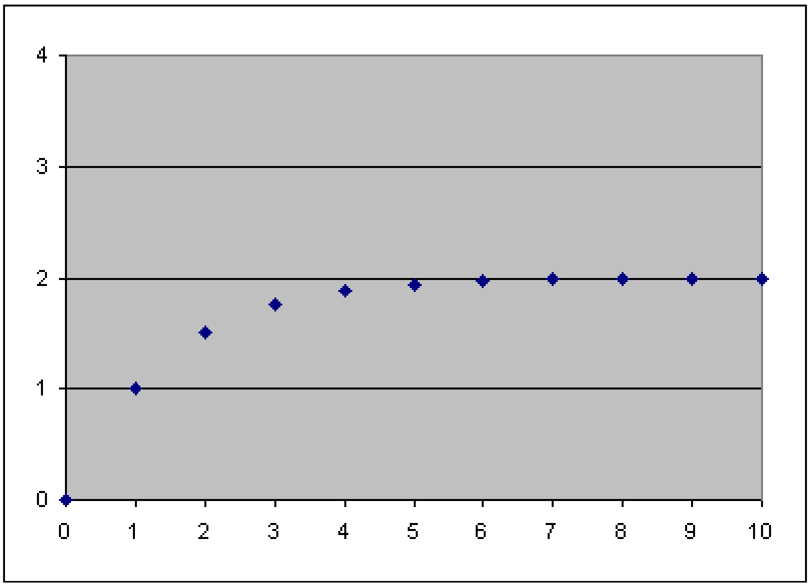
t	y_t
0	2
1	1
2	-1
3	-5
4	-13
5	-29
6	-61
7	-125
8	-253
9	-509
10	-1021



4.- Si 0 < A < 1 y B/(1−A) < y_o, la solución crece monótonamente convergiendo asintoticamente a su punto de equilibrio B/(1−A).

y_0 =	**0**
A =	**0,5**
B =	**1**
y_e =	**2**

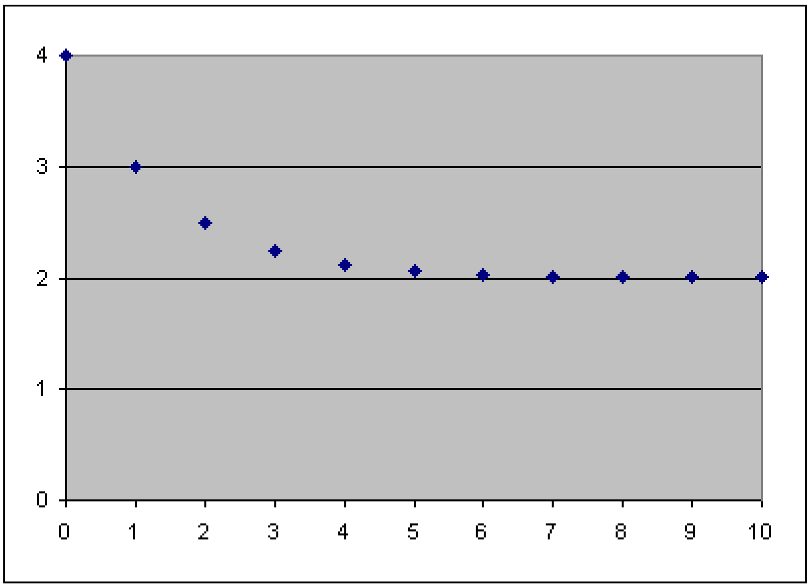
t	y_t
0	0
1	1
2	1,5
3	1,75
4	1,875
5	1,9375
6	1,9688
7	1,9844
8	1,9922
9	1,9961
10	1,998



5.- Si $0 < A < 1$ y $B/(1-A) > y_o$, la solución decrece monótonamente convergiendo asintoticamente a su punto de equilibrio $B/(1-A)$.

y_0 =	**4**
A =	**0,5**
B =	**1**
y_e =	**2**

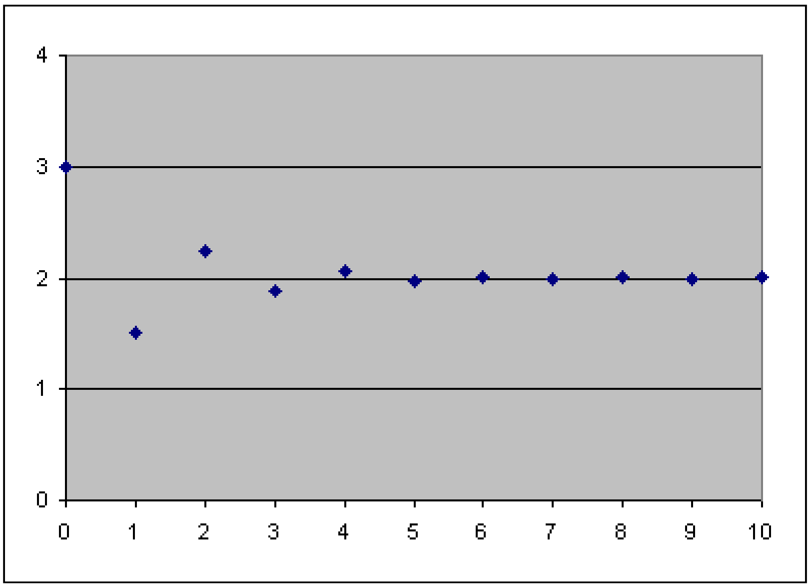
t	y_t
0	4
1	3
2	2,5
3	2,25
4	2,125
5	2,0625
6	2,0313
7	2,0156
8	2,0078
9	2,0039
10	2,002



6.- Si $0 > A > -1$, la solución oscila amortiguadamente convergiendo a su punto de equilibrio $B/(1-A)$.

y_0 = 3
A = -0,5
B = 3
y_e = 2

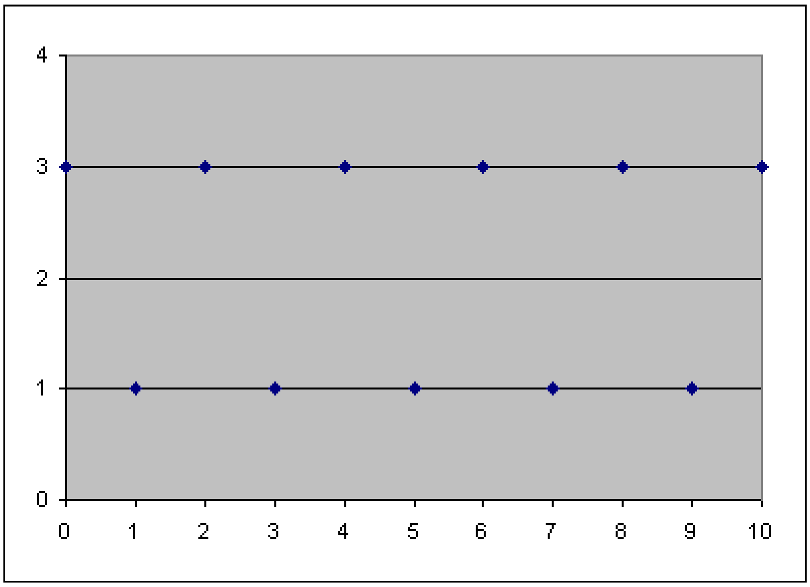
t	**y_t**
0	3
1	1,5
2	2,25
3	1,875
4	2,0625
5	1,9688
6	2,0156
7	1,9922
8	2,0039
9	1,998
10	2,001



7.- Si $A = -1$, la solución oscila indefinidamente alteran los valores: y_0, $2 \cdot B/(1-A) - y_o$.

y_0 = 3
A = -1
B = 4
y_e = 2

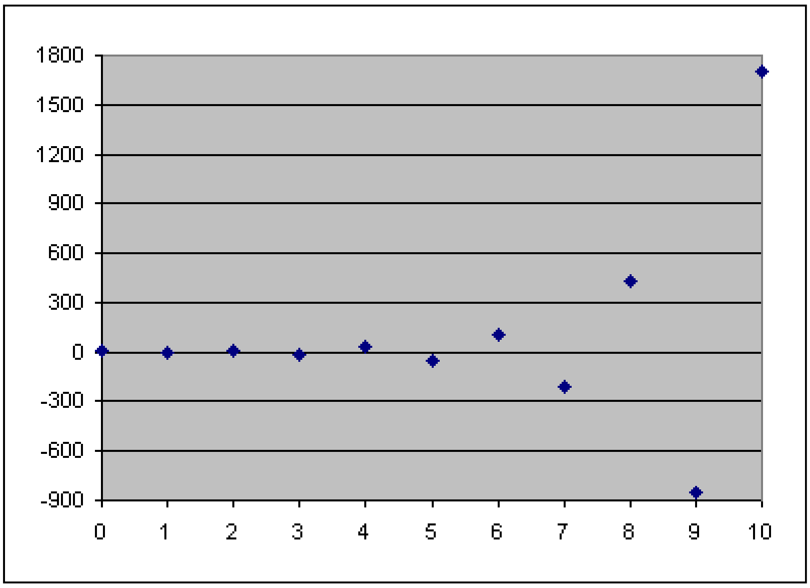
t	**y_t**
0	3
1	1
2	3
3	1
4	3
5	1
6	3
7	1
8	3
9	1
10	3



8.- Si $-1 > A$, la solución oscila en forma de expansión explosiva.

y_0 =	**3**
A =	**-2**
B =	**4**
y_e =	**1,3333**

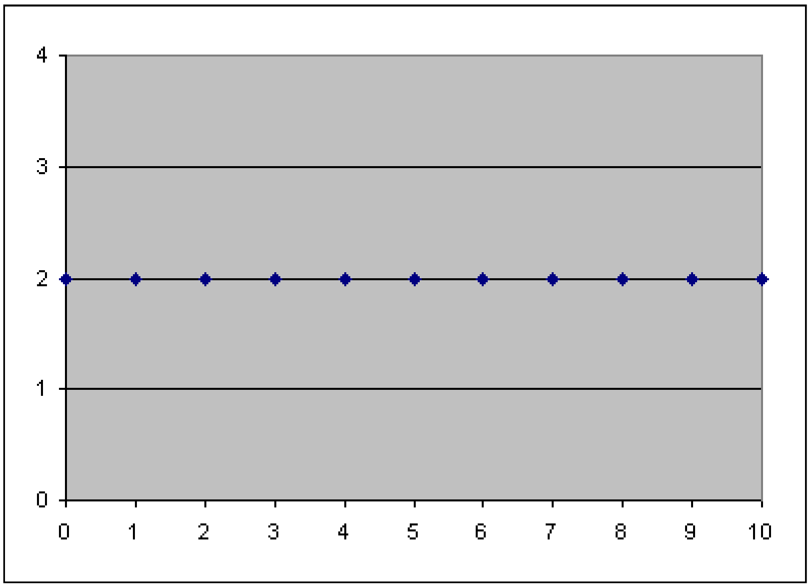
t	y_t
0	3
1	-2
2	8
3	-12
4	28
5	-52
6	108
7	-212
8	428
9	-852
10	1708



g) 1.- El punto e Equilibrio es $y_e = B/A$, de esta manera si $y_o = B/A$ la solución es constante.

y_0 =	**2**
A =	**0,5**
B =	**1**
y_e =	**2**

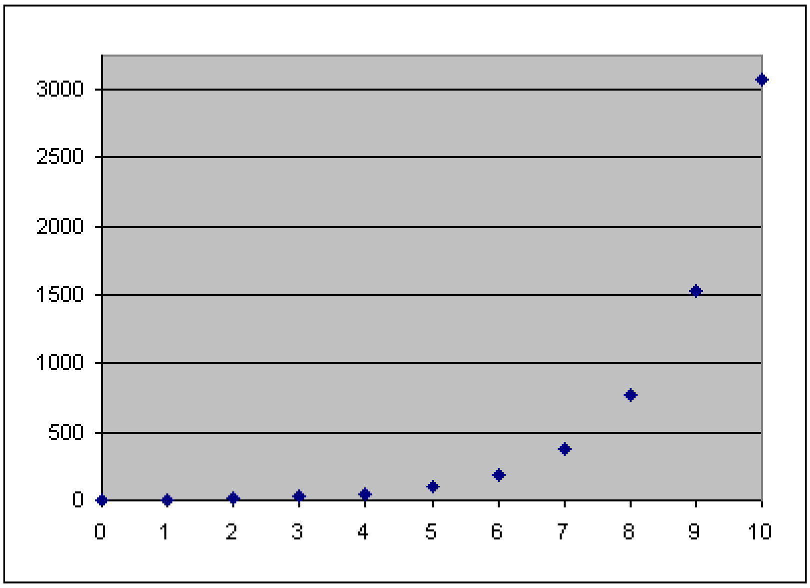
t	y_t
0	2
1	2
2	2
3	2
4	2
5	2
6	2
7	2
8	2
9	2
10	2



2.- Si $1-A > 1$ $(A < 0)$ y $B/A < y_o$, la solución crece monótonamente divergiendo.

y_0 = **2**
A = **-1**
B = **1**
y_e = **-1**

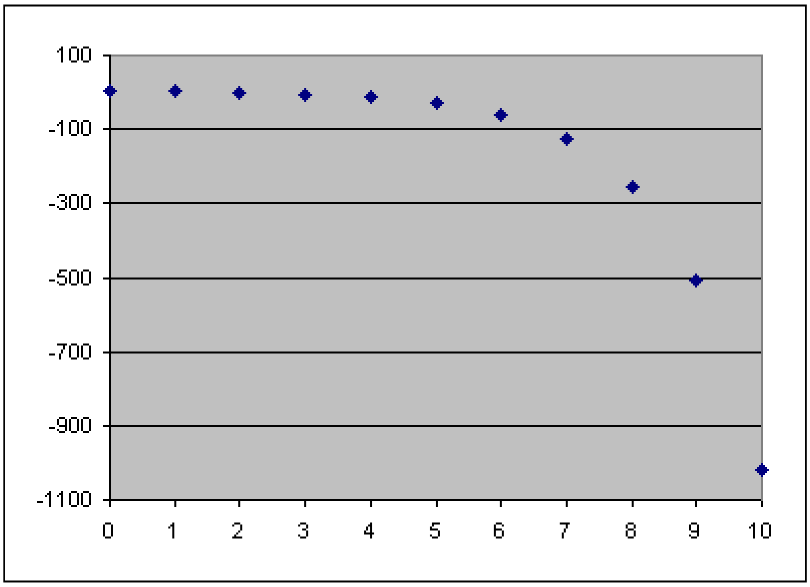
T	y_t
0	2
1	5
2	11
3	23
4	47
5	95
6	191
7	383
8	767
9	1535
10	3071



3.- Si $1-A > 1$ $(A < 0)$ y $B/A > y_o$, la solución decrece monótonamente divergiendo.

y_0 = **2**
A = **-1**
B = **-3**
y_e = **3**

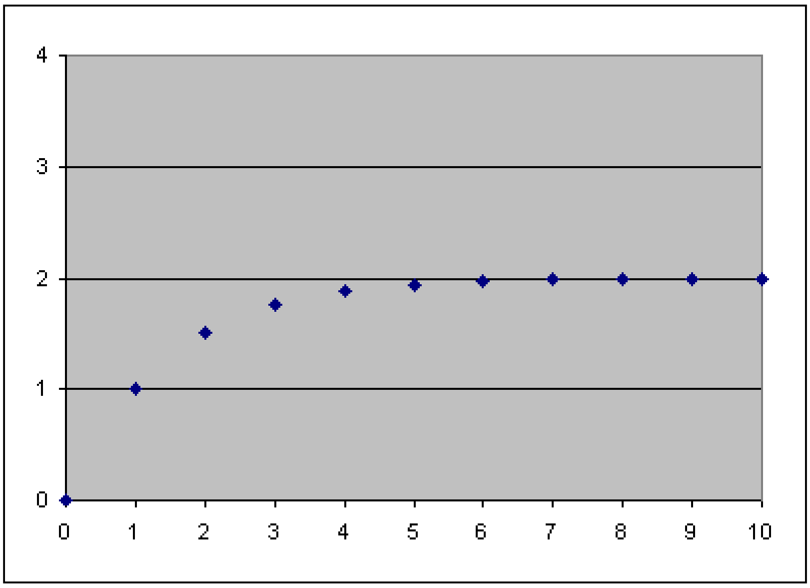
T	y_t
0	2
1	1
2	-1
3	-5
4	-13
5	-29
6	-61
7	-125
8	-253
9	-509
10	-1021



4.- Si $0 < 1-A < 1$ $(0 < A < 1)$ y $B/A < y_o$, la solución crece monótonamente convergiendo asintóticamente a su punto de equilibrio B/A.

y_0 =	**0**
A =	**0,5**
B =	**1**
y_e =	**2**

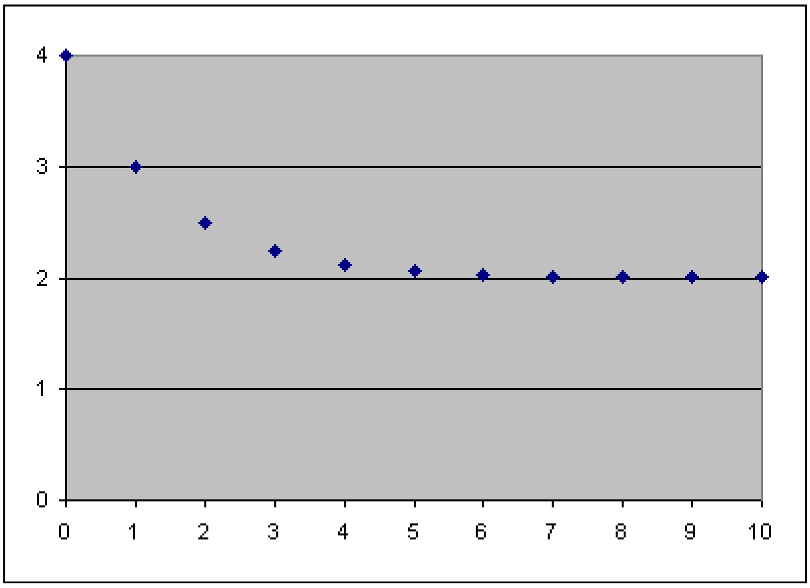
T	y_t
0	0
1	1
2	1,5
3	1,75
4	1,875
5	1,9375
6	1,9688
7	1,9844
8	1,9922
9	1,9961
10	1,998



5.- Si $0 < 1-A < 1$ $(0 < A < 1)$ y $B/A > y_o$, la solución decrece monótonamente convergiendo asintóticamente a su punto de equilibrio B/A.

y_0 =	**4**
A =	**0,5**
B =	**1**
y_e =	**2**

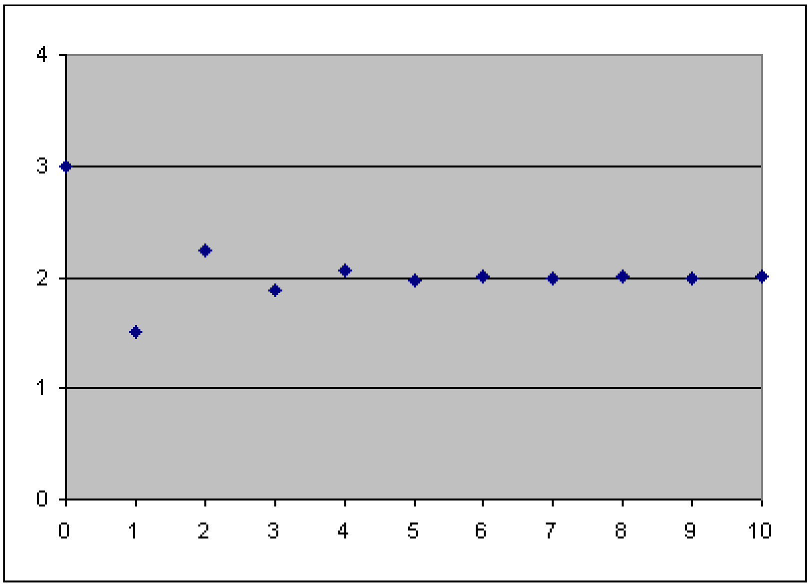
T	y_t
0	4
1	3
2	2,5
3	2,25
4	2,125
5	2,0625
6	2,0313
7	2,0156
8	2,0078
9	2,0039
10	2,002



6.- Si $0 > 1-A > -1$ $(1 < A < 2)$, la solución oscila amortiguadamente convergiendo a su punto de equilibrio B/A.

y_0 =	**3**
A =	**1,5**
B =	**3**
y_e =	**2**

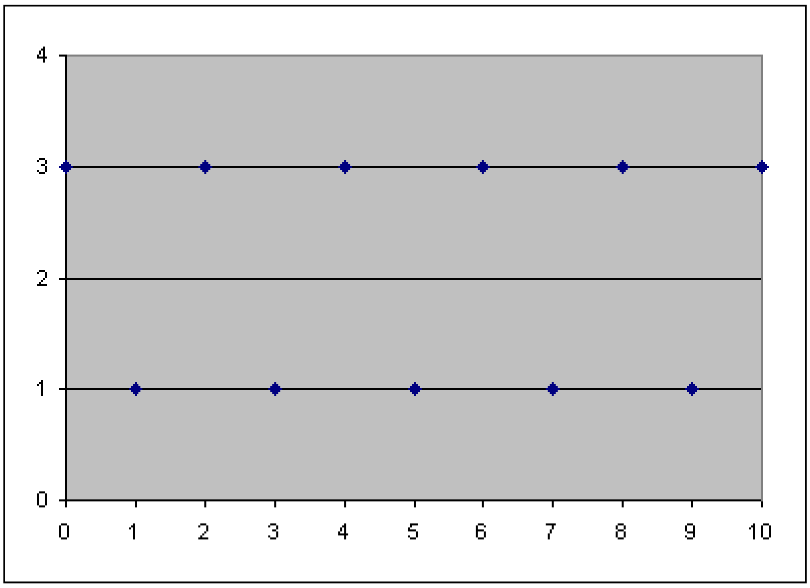
T	y_t
0	3
1	1,5
2	2,25
3	1,875
4	2,0625
5	1,9688
6	2,0156
7	1,9922
8	2,0039
9	1,998
10	2,001



7.- Si $1-A = -1$ $(A = 2)$, la solución oscila indefinidamente alteran los valores: y_0, $2\cdot B/A - y_o$.

y_0 =	**3**
A =	**2**
B =	**4**
y_e =	**2**

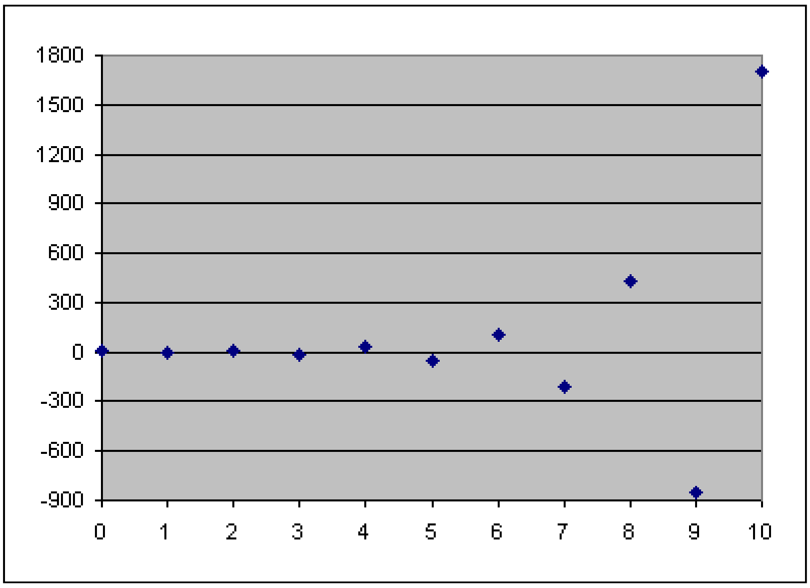
T	y_t
0	3
1	1
2	3
3	1
4	3
5	1
6	3
7	1
8	3
9	1
10	3



8.- Si $-1 > 1-A$ $(A > 2)$, la solución oscila en forma de expansión explosiva.

y_0 = 3
A = 3
B = 4
y_e = 1,3333

T	**y_t**
0	3
1	-2
2	8
3	-12
4	28
5	-52
6	108
7	-212
8	428
9	-852
10	1708



<u>Ecuaciones lineales no homogéneas de primer orden a coeficientes constantes</u>.

$$\Delta y_t + A \bullet y_t = f(t) \qquad (1)$$

a) Variación de parámetros:

Se supondrá que:

$$y_t = v(t).u(t) \qquad (2)$$

en donde u(t) es solución de la ecuación homogénea

$$u(t) = u_t = u_o(1-A)^t, \quad (3)$$

entonces:

$$\Delta y_t = v_t \Delta u_t + u_{t+1} \Delta v_t \quad (4)$$

sustituyendo (2) y (4) en (1):

$$v_t\Delta u_t + u_{t+1}\Delta v_t + Au_tv_t = f(t)$$

$$v_t(\Delta u_t + Au_t) + u_{t+1}\Delta v_t = f(t)$$

$$u_{t+1}\Delta v_t = f(t)$$

$$\Delta v_t = f(t)/u_{t+1}$$

$$v_t = v_o + \sum_{k=0}^{t-1} f(k)/u_{k+1}$$

$$v_t = v_o + (1/u_o)\sum_{k=0}^{t-1} f(k)/(1-A)^{k+1}$$

======> $y_t = y_o(1-A)^t + (1-A)^{t-1}\sum_{k=0}^{t-1} f(k)/(1-A)^k$

Ejemplo: Resolución de la (g)

$$y_t = y_o(1-A)^t + (1-A)^{t-1}\sum_{k=0}^{t-1} B/(1-A)^k$$

$$= y_o(1-A)^t + (1-A)^{t-1}B\,\frac{1-1/(1-A)^t}{1-1/(1-A)}$$

$$= y_o(1-A)^t + (1-A)^{t-1}B\,\frac{[(1-A)^t-1]/(1-A)^t}{-A/(1-A)}$$

$$= y_o(1-A)^t - B\,\frac{(1-A)^t-1}{A}$$

Ejercicio 3:

Resolver y describir el comportamiento de:

$$\Delta y_t = Ay_ty_{t+1}$$

CAPÍTULO 4

ECUACIONES EN DIFERENCIAS DE ORDEN MAYOR A 1.

A.- Ecuaciones de 2do. Orden

I. Ecuaciones lineales a coeficientes constantes homogéneas:

$$y_{t+2} + A_1 y_{t+1} + A_2 y_t = 0$$

se puede escribir como:

$$E^2 y_t + A_1 E y_t + A_2 y_t = 0$$

$$(E^2 + A_1 E + A_2) y_t = 0$$

Por ser E un operador lineal:

$$(E - m_1)(E - m_2) y_t = 0$$

En donde m_1 y m_2 son las raíces de la ecuación $E^2 + A_1 E + A_2 = 0$

Sea $z_t = (E - m_2) y_t$ e $z_o = y_1 - m_2 y_o$

entonces: $(E - m_1) z_t = 0$

$$z_{t+1} - m_1 z_t = 0$$

entonces por la ecuación (e) $z_t = z_o m_1^t$

===> $(E - m_2) y_t = z_o m_1^t$

$$y_{t+1} - m_2 y_t = z_o m_1^t$$

$$\Delta y_t + (1 - m_2) y_t = z_o m_1^t$$

===> $y_t = y_o m_2^t + m_2^{t-1} \sum_{k=0}^{t-1} z_o (m_1/m_2)^k$

a) para $m_1 \neq m_2$

$$y_t = y_o m_2^t + z_o m_2^{t-1} \frac{1 - (m_1/m_2)^t}{1 - (m_1/m_2)}$$

$$= y_o m_2^t + (y_1 - m_2 y_o) m_2^{t-1} \frac{(m_2^t - m_1^t)/m_2^t}{(m_2 - m_1)/m_2}$$

$$= y_o m_2^t + (y_1 - m_2 y_o) \frac{m_2^t - m_1^t}{m_2 - m_1}$$

$$= \frac{y_1 - m_1 y_o}{m_2 - m_1} m_2^t + \frac{m_2 y_o - y_1}{m_2 - m_1} m_1^t$$

Esta solución también se puede escribir de la forma:

$$y_t = C_1 m_1^t + C_2 m_2^t$$

de manera tal que si las raíces son complejas ($m_1 = a + bi$, $m_2 = a - bi$) esta se convierte en

$$y_t = r^t(C_1 \cos\theta t + C_2 \operatorname{sen}\theta t)$$

en donde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, y $\theta = \operatorname{arctg}(b/a)$,

b) para $m_1 = m_2 = m$

$$y_t = y_o m^t + z_o m^{t-1} t$$

$$= y_o m^t + (y_1 - m\, y_o) m^{t-1} t$$

$$= m^t [y_o + (y_1/m - y_o) t]$$

Si se tiene la ecuación en diferencia:

$$\Delta^2 y_t + B_1 \Delta y_t + B_2 y_t = 0$$

se pasa a una ecuación en desplazamiento:

$$y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t + B_1 y_{t+1} - B_1 y_t + B_2 y_t = 0$$

$$y_{t+2} + (B_1 - 2) y_{t+1} + (1 - B_1 + B_2) y_t = 0$$

======> $A_1 = B_1 - 2$
$A_2 = 1 - B_1 + B_2$

Análisis de las soluciones de las ecuaciones anteriores

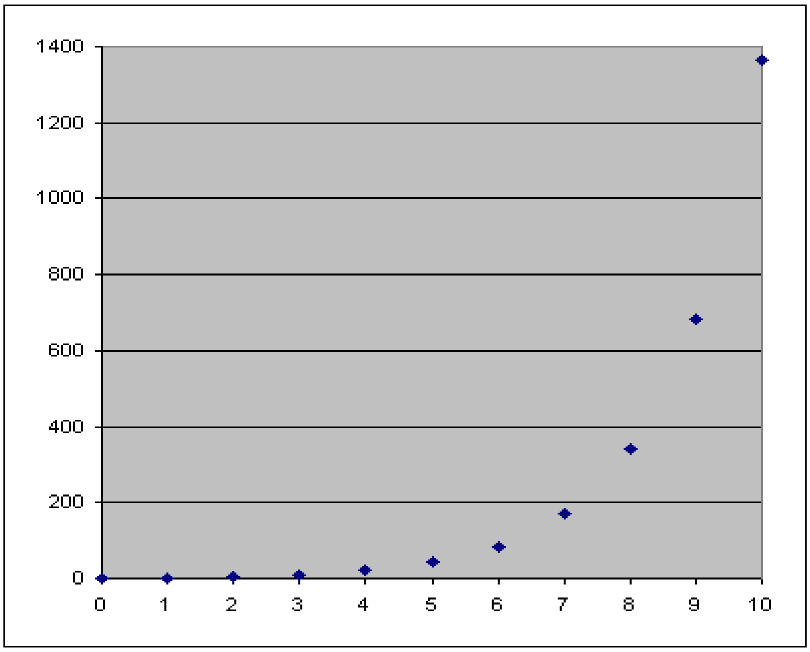
a) para $m_1 \neq m_2$

1.- - Raíces reales
- $m_i = \max \{m_1, m_2\} > 1$
- $m_j = \min \{m_1, m_2\}$
- $| m_i | > | m_j |$

La solución será creciente o decreciente (dependiendo del signo de C_i) divergente, pudiendo ser al principio oscilatoria si $m_j < 0$ o monótona de lo contrario:

v_0 = 0
v_1 = 2
A_1 = -2.5
A_2 = 1
M_1 = 0.5
M_2 = 2
C_1 = -1.333
C_2 = 1.333

T	v_t
0	0
1	2
2	5
3	10,5
4	21,25
5	42,625
6	85,313
7	170,66
8	341,33
9	682,66
10	1365,3



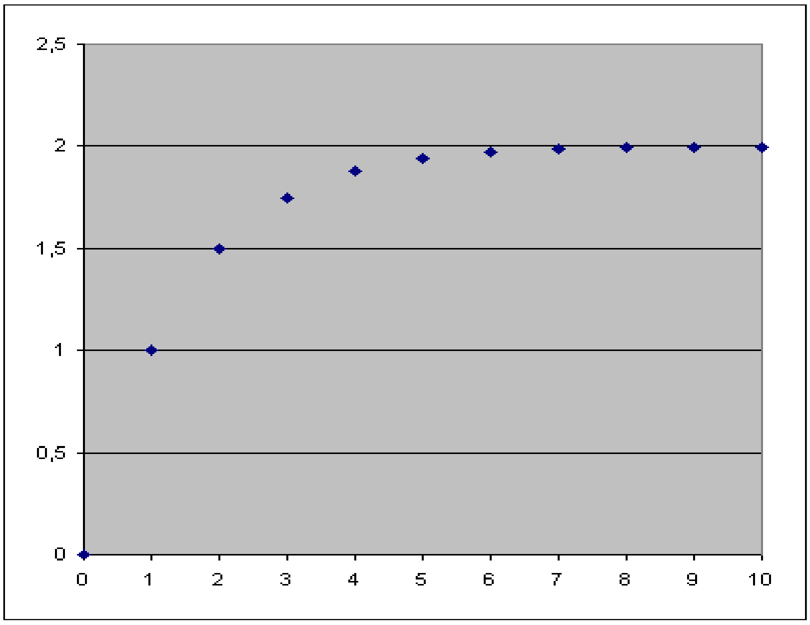
2.- - Raíces reales

- $m_i = \max\{m_1, m_2\} = 1$
- $0 < m_j = \min\{m_1, m_2\} < 1$

La solución será monótonamente creciente o decreciente (dependiendo del signo de C_j) convergente al punto de atracción C_i.

y_0 =	**0**
y_1 =	**1**
A_1 =	**-1,5**
A_2 =	**0,5**
m_1 =	**0,5**
m_2 =	**1**
C_1 =	**-2**
C_2 =	**2**
y_e =	**2**

T	**y_t**
0	0
1	1
2	1,5
3	1,75
4	1,875
5	1,9375
6	1,9688
7	1,9844
8	1,9922
9	1,9961
10	1,998



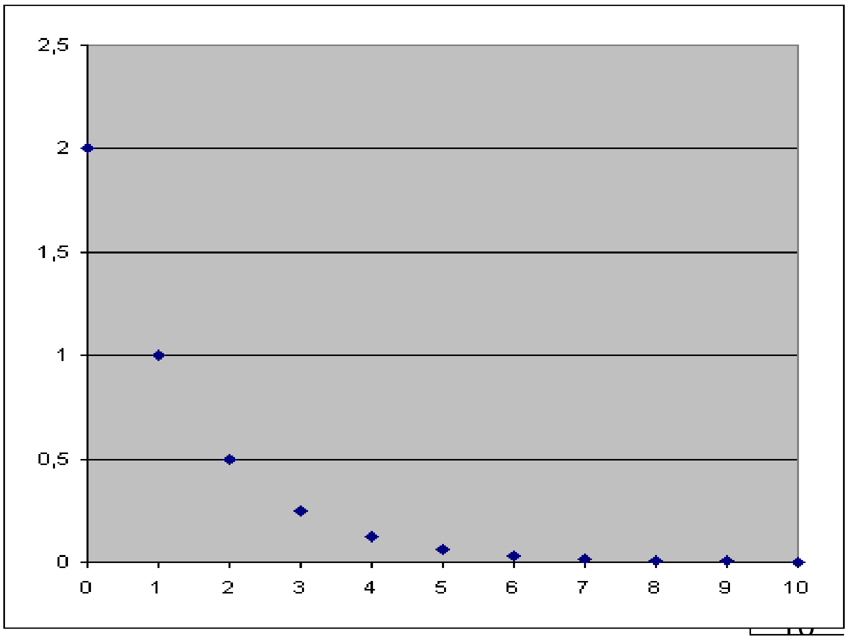
3.- - Raíces reales

- $0 < m_i = \max\{m_1, m_2\} < 1$
- $0 \leq m_j = \min\{m_1, m_2\} < 1$

La solución será monótonamente creciente o decreciente (dependiendo de los signos de C_i y C_j) convergente al punto de atracción 0.

y_0 =	**2**
y_1 =	**1**
A_1 =	**-0,5**
A_2 =	**0**
m_1 =	**0**
m_2 =	**0,5**
C_1 =	**0**
C_2 =	**2**
y_a =	**0**

t	**y_t**
0	2
1	1
2	0,5
3	0,25
4	0,125
5	0,0625
6	0,0313
7	0,0156
8	0,0078
9	0,0039
10	0,002



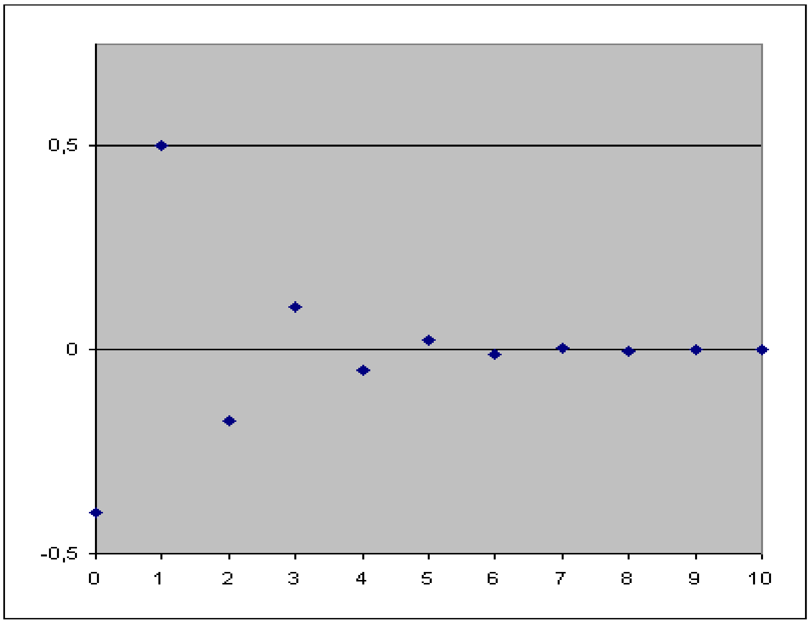
4.- - Raíces reales

- $-1 < m_i = \max\{m_1, m_2\} < 1$
- $-1 < m_j = \min\{m_1, m_2\} < 0$

La solución será oscilante amortiguada convergente al punto de atracción 0.

y_0 =	**-0,4**
y_1 =	**0,5**
A_1 =	**0,25**
A_2 =	**-0,125**
m_1 =	**-0,5**
m_2 =	**0,25**
C_1 =	**-0,8**
C_2 =	**0,4**
y_a =	**0**

t	**y_t**
0	-0,4
1	0,5
2	-0,175
3	0,1063
4	-0,048
5	0,0254
6	-0,012
7	0,0063
8	-0,003
9	0,0016
10	-8E-04



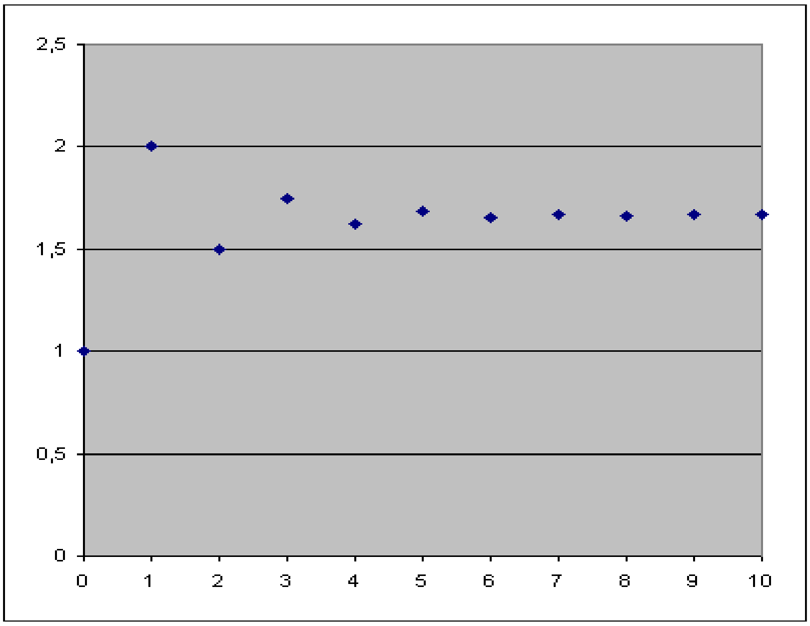
5.- - Raíces reales

- $m_i = \max\{m_1, m_2\} = 1$
- $-1 < m_j = \min\{m_1, m_2\} < 0$

La solución será oscilatoria amortiguada convergente al punto de atracción C_i.

y_0 =	**1**
y_1 =	**2**
A_1 =	**-0,5**
A_2 =	**-0,5**
m_1 =	**-0,5**
m_2 =	**1**
C_1 =	**-0,667**
C_2 =	**1,6667**
y_a =	**1,6667**

t	**y_t**
0	1
1	2
2	1,5
3	1,75
4	1,625
5	1,6875
6	1,6563
7	1,6719
8	1,6641
9	1,668
10	1,666



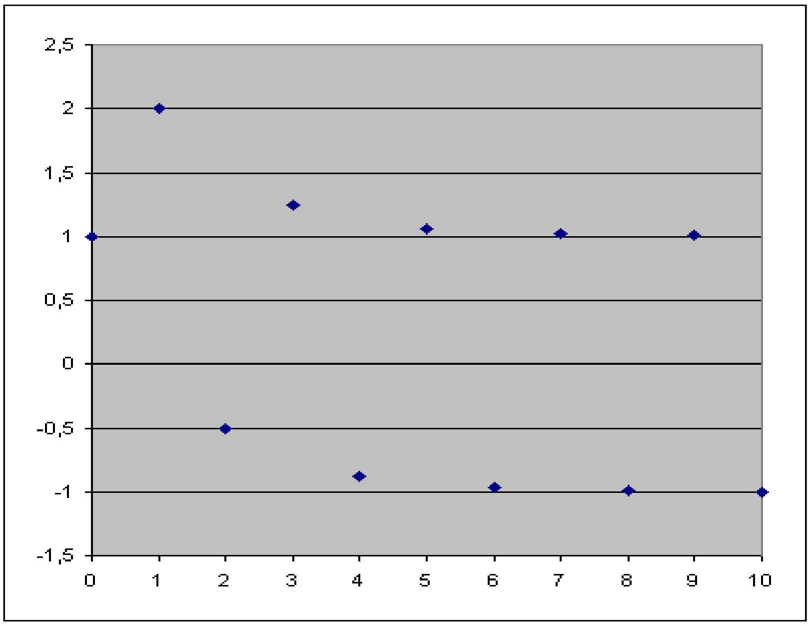
6.- - Raíces reales

- $-1 < m_i = \max\{m_1, m_2\} < 1$
- $m_j = \min\{m_1, m_2\} = -1$

La solución será oscilatoria tendiendo a tomar como valores C_j y $-C_j$.

y_0 =	**1**
y_1 =	**2**
A_1 =	**0,5**
A_2 =	**-0,5**
m_1 =	**-1**
m_2 =	**0,5**
C_1 =	**-1**
C_2 =	**2**
y_a =	**2**

t	y_t
0	1
1	2
2	-0,5
3	1,25
4	-0,875
5	1,0625
6	-0,969
7	1,0156
8	-0,992
9	1,0039
10	-0,998



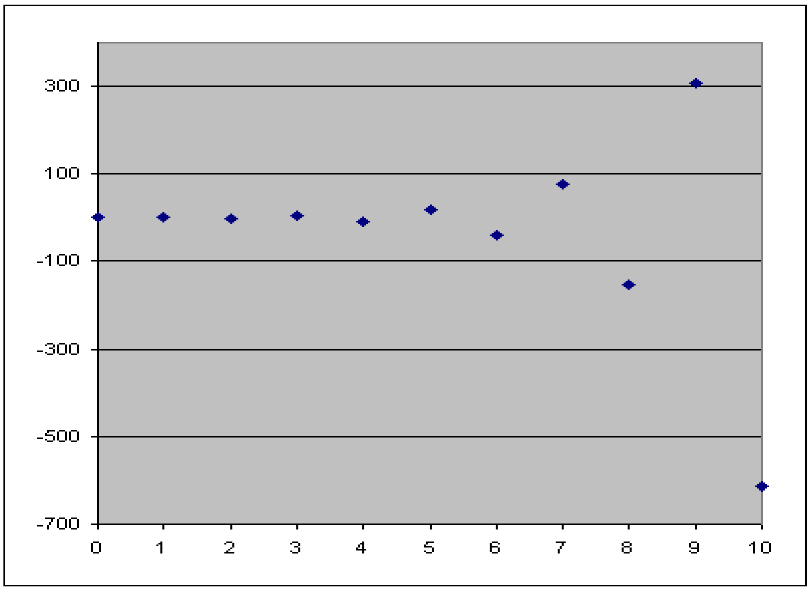
7.- - Raíces reales

- $m_i = \max\{m_1, m_2\}$
- $m_j = \min\{m_1, m_2\} < -1$
- $|m_i| > |m_j|$

La solución será oscilatoria en forma de expansión explosiva.

y_0 =	**1**
y_1 =	**2**
A_1 =	**1,5**
A_2 =	**-1**
m_1 =	**-2**
m_2 =	**0,5**
C_1 =	**-0,6**
C_2 =	**1,6**

t	y_t
0	1
1	2
2	-2
3	5
4	-9,5
5	19,25
6	-38,38
7	76,813
8	-153,6
9	307,2
10	-614,4



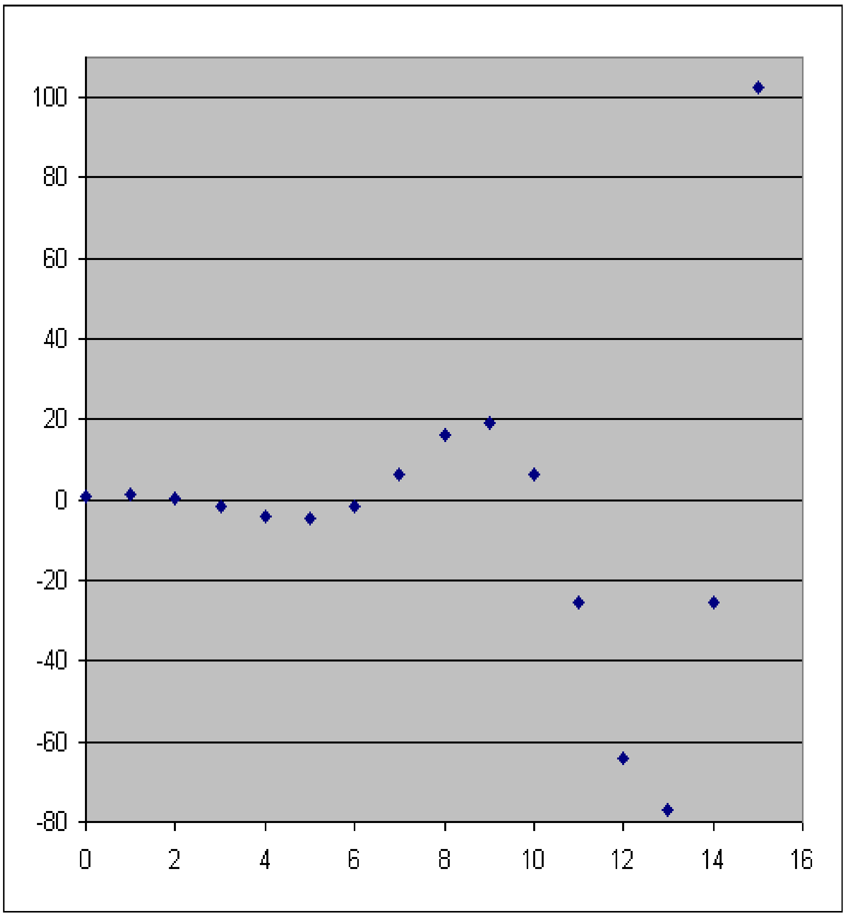
8.- - Raíces complejas

- $r > 1$

La solución será oscilatoria en forma de expansión explosiva.

y_0 =	1	
y_1 =	1,2	
A_1 =	-2	
A_2 =	2	
m_1 =	1	1i
m_2 =	1	-1i
C_1 =	1	
C_2 =	0,2	
r =	1,4142	
θ =	0,7854	

t	y_t
0	1
1	1,2
2	0,4
3	-1,6
4	-4
5	-4,8
6	-1,6
7	6,4
8	16
9	19,2
10	6,4
11	-25,6
12	-64
13	-76,8
14	-25,6
15	102,4
16	256
17	307,2
18	102,4
19	-409,6
20	-1024



9.- - Raíces complejas

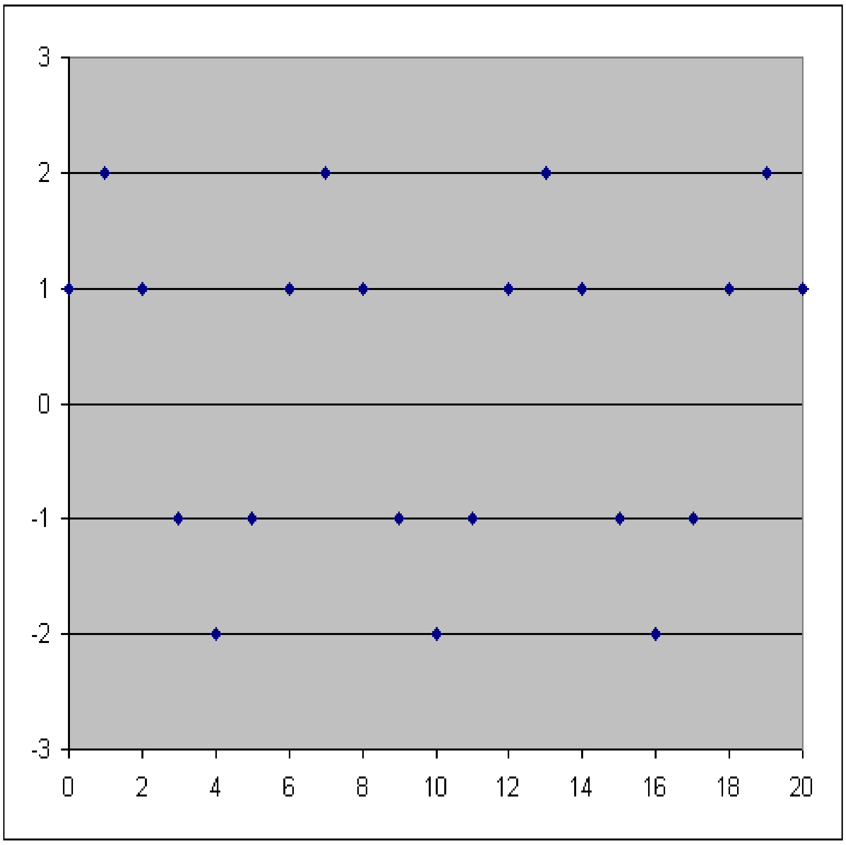
- $r = 1$

La solución será oscilatoria alternando los valores:

$$(C_1\cos\theta t + C_2\text{sen}\theta t)$$

y_0 =	**1**	
y_1 =	**2**	
A_1 =	**-1**	
A_2 =	**1**	
m_1 =	**0,5**	**0,87 i**
m_2 =	**0,5**	**-0,87 i**
C_1 =	**1**	
C_2 =	**1,7321**	
r =	**1**	
θ =	**1,0472**	

t	**y_t**
0	1
1	2
2	1
3	-1
4	-2
5	-1
6	1
7	2
8	1
9	-1
10	-2
11	-1
12	1
13	2
14	1
15	-1
16	-2
17	-1
18	1
19	2
20	1



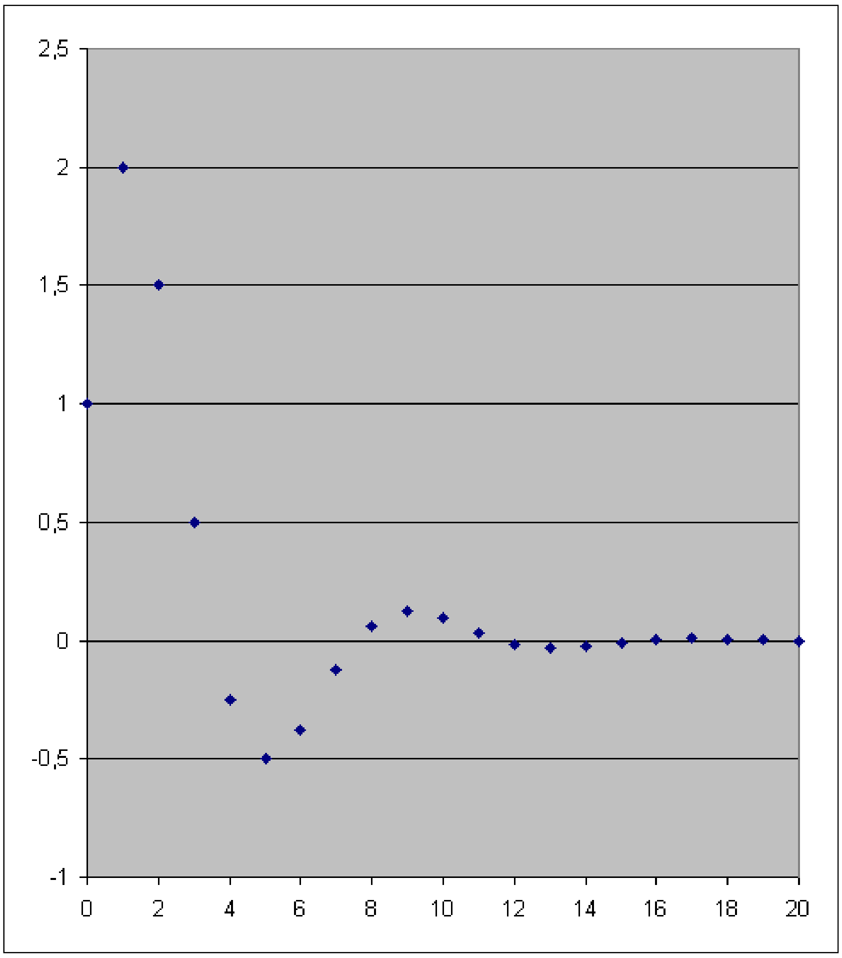
10- - Raíces complejas

- $r < 1$

La solución será oscilatoria amortiguada convergiendo al punto de atracción 0.

y_0 =	1		
y_1 =	2		
A_1 =	-1		
A_2 =	0,5		
m_1 =	0,5	0,5	i
m_2 =	0,5	-0,5	i
C_1 =	1		
C_2 =	3		
r =	0,7071		
θ =	0,7854		

t	y_t
0	1
1	2
2	1,5
3	0,5
4	-0,25
5	-0,5
6	-0,375
7	-0,125
8	0,0625
9	0,125
10	0,0938
11	0,0313
12	-0,016
13	-0,031
14	-0,023
15	-0,008
16	0,0039
17	0,0078
18	0,0059
19	0,002
20	-1E-03



Nota: Si en los casos anteriores una de las raíces es cero, se tiene realmente una ecuación de primer orden.

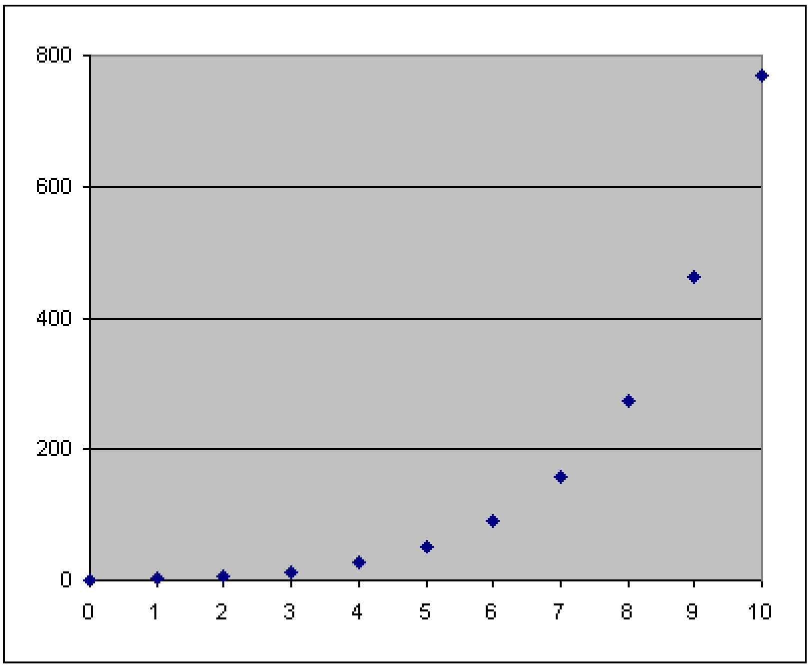
b) para $m_1 = m_2 = m$

1.- - $m \geq 1$

La solución será monótona creciente o decreciente divergente.

y_0 =	**0**
y_1 =	**2**
A_1 =	**-3**
A_2 =	**2,25**
m_1 =	**1,5**

t	y_t
0	0
1	2
2	6
3	13,5
4	27
5	50,625
6	91,125
7	159,47
8	273,38
9	461,32
10	768,87

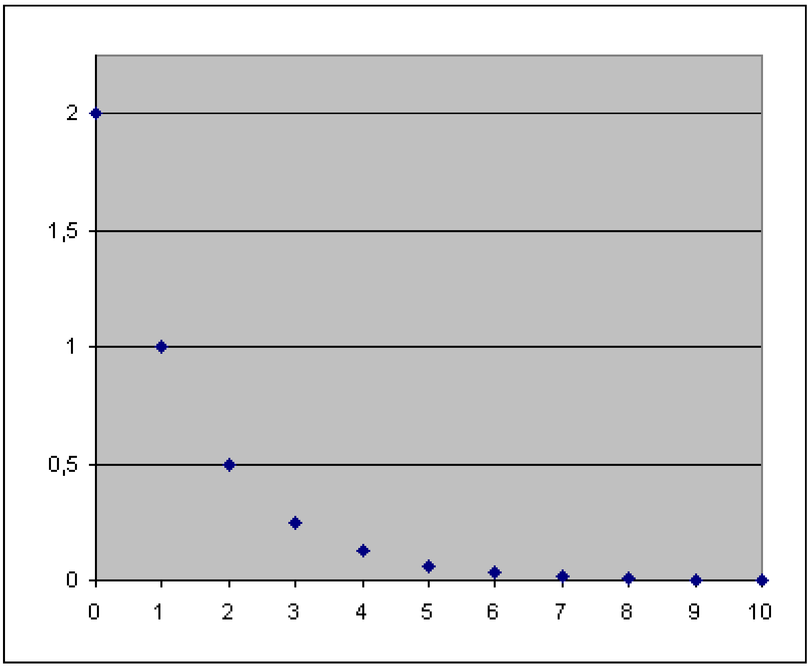


2- - $0 < m < 1$

La solución será monótona creciente o decreciente convergiendo al punto de atracción 0.

y_0 =	**2**
y_1 =	**1**
A_1 =	**-1**
A_2 =	**0,25**
m_1 =	**0,5**

t	y_t
0	2
1	1
2	0,5
3	0,25
4	0,125
5	0,0625
6	0,031



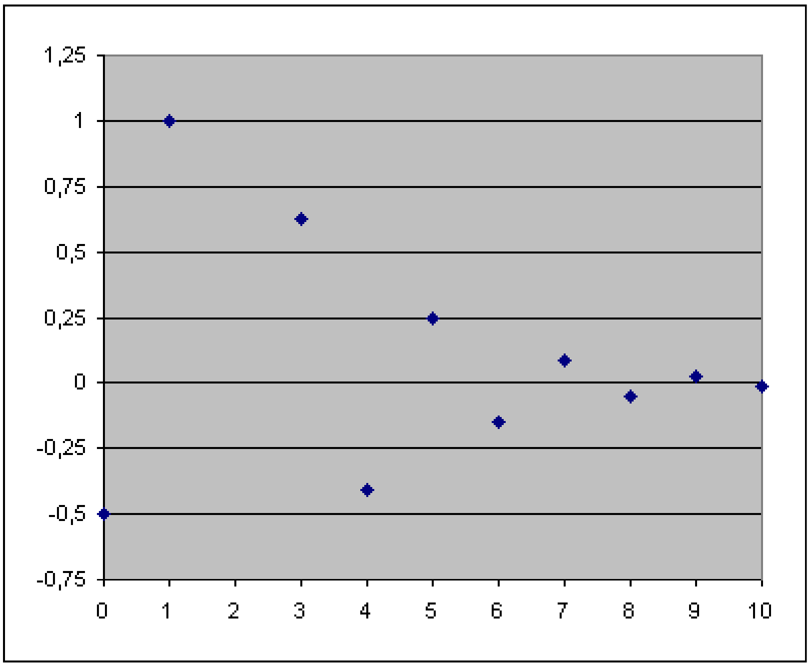
	3
	0,015
7	6
	0,007
8	8
	0,003
9	9
10	0,002

3- - $-1 < m < 0$

La solución será oscilatoria amortiguada convergiendo al punto de atracción 0.

y_0 = -0,5
y_1 = 1
A_1 = 1
A_2 = 0,25
m_1 = -0,5

t	y_t
0	-0,5
1	1
2	-0,875
3	0,625
4	-0,406
5	0,25
6	-0,148
7	0,0859
8	-0,049
9	0,0273
10	-0,015

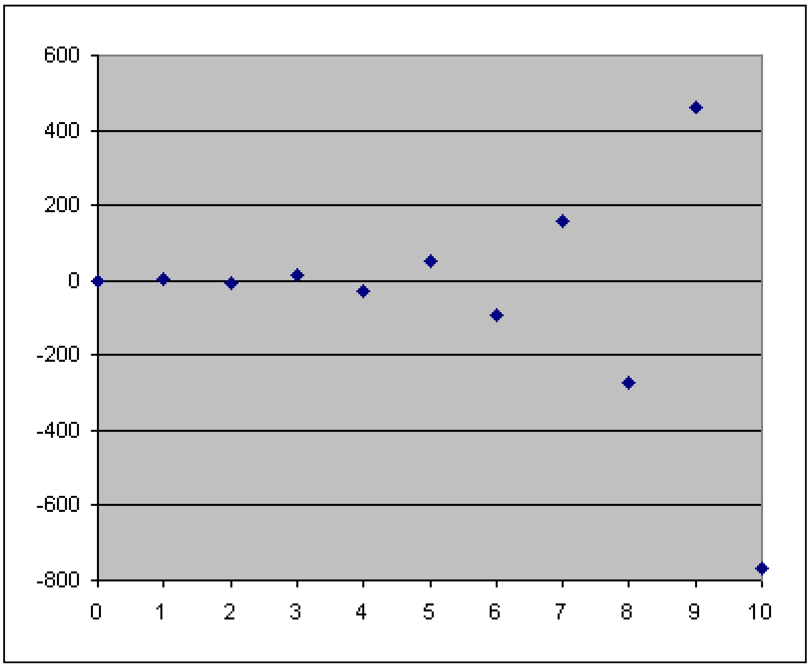


4- - $m \leq -1$

La solución será oscilatoria en expansión explosiva.

y_0 = 0
y_1 = 2
A_1 = 3
A_2 = 2,25
m_1 = -1,5

t	y_t
0	0
1	2
2	-6
3	13,5
4	-27
5	50,625
6	-91,13
7	159,47
8	-273,4
9	461,32
10	-768,9



II. Ecuaciones lineales a coeficientes constantes no homogéneas:

a) Variación de parámetros:

$$y_{t+2} + A_1 y_{t+1} + A_2 y_t = f(t) \qquad (1)$$

Haciendo: $$y_t = v_1(t)u_1(t) + v_2(t)u_2(t) \qquad (2)$$

en donde $u_i(t) = u_{it}$ es la solución de la ecuación homogénea correspondiente.

con la condición: $$u_{1t}\Delta v_{1t} + u_{2t}\Delta v_{2t} = 0 \qquad (3)$$

se tiene: $$\Delta y_t = v_{1t+1}\, \Delta u_{1t} + v_{2t+1}\Delta u_{2t} \qquad (4)$$

$$\Delta^2 y_t = v_{1t+1}\, \Delta^2 u_{1t} + \Delta u_{1t+1}\Delta v_{1t+1} + v_{2t+1}\Delta^2 u_{2t} + \Delta u_{2t+1}\Delta v_{2t+1} \qquad (5)$$

Sustituyendo (2), (4) y (5) queda en la ecuación (1), queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$u_{1t}\Delta v_{1t} + u_{2t}\Delta v_{2t} = 0 \qquad (3)$$

$$u_{1t+1}\Delta v_{1t} + u_{2t+1}\Delta v_{2t} = f(t) \qquad (6)$$

Sea D el determinante, entonces $D = u_{1t}u_{2t+1} - u_{1t+1}u_{2t}$

y: $\Delta v_{1t} = -\, f(t)u_{2t}/D$

$\Delta v_{2t} = \ f(t)u_{1t}/D$

Ejemplo

Sea $f(t) = C$

si $m_1 \neq m_2$, entonces:

$$D = (m_1 m_2)^t (m_2 - m_1)c_1 c_2$$

$$\Delta v_{1t} = -C(1/m_1)^t/[c_1(m_2 - m_1)]$$

$$\Delta v_{2t} = \ C(1/m_2)^t/[c_2\,(m_2 - m_1)]$$

$$v_{1t} = v_{1o} - C(m_1^t - 1)\, m_1 / [(m_2 - m_1)(m_1 - 1)m_1^t c_1]$$

$$v_{2t} = v_{2o} + C(m_2^t - 1)\, m_2 / [(m_2 - m_1)(m_2 - 1)m_2^t c_2]$$

$$y_{1t} = m_1^t v_{1o} c_1 - Cm_1^t / [(m_2 - m_1)(m_1 - 1)] + Cm_1 / [(m_2 - m_1)(m_1 - 1)]$$

$$y_{2t} = m_2^t v_{2o} c_2 + Cm_2^t / [(m_2 - m_1)(m_2 - 1)] - Cm_2 / [(m_2 - m_1)(m_2 - 1)]$$

por lo tanto:

$$y_t = k_1 m_1^t + k_2 m_2^t + K$$

en donde $K = C/(m_1 m_2 - m_1 - m_2 + 1) = C/(1 + A_1 + A_2)$

Nota:

Si una de las raíces toma el valor de 1, entonces:

$$1 + A_1 + A_2 = 0,$$

y la solución particular sería $y_p = Ct/(2 + A_1) = Ct/(1 - A_2)$.

Mientras que si las dos raíces toman el valor de 1, entonces:

$$1 + A_1 + A_2 = 0,\ 2 + A_1 = 1 - A_2 = 0$$

y la solución particular sería $y_p = Ct^2/2$.

Ejemplo

Sea $f(t) = C(1 + k)^t$

si $m_1 \neq m_2$, entonces:

$$D = (m_1 m_2)^t (m_1 - m_2) c_1 c_2$$

$$\Delta v_{1t} = -C((1 + k)/m_1)^t / [c_1 (m_2 - m_1)]$$

$$\Delta v_{2t} = C((1 + k)/m_2)^t / [c_2 (m_2 - m_1)]$$

$$v_{1t} = v_{1o} - C(m_1^t - (1 + k)^t)\, m_1 / [(m_2 - m_1)(m_1 - (1 + k))m_1^t c_1]$$

$$v_{2t} = v_{2o} + C(m_2^t - (1+k)^t)\, m_2 / [(m_2 - m_1)(m_2 - (1+k))m_2^t c_2]$$

$$y_{1t} = m_1^t v_{1o} c_1 - C m_1^t m_1 / [(m_2 - m_1)(m_1 - (1+k))] + C(1+k)^t m_1 / [(m_2 - m_1)(m_1 - (1+k))]$$

$$y_{2t} = m_2^t v_{2o} c_2 + C m_2^t\, m_2 / [(m_2 - m_1)(m_2 - (1+k))] - C(1+k)^t m_2 / [(m_2 - m_1)(m_2 - (1+k))]$$

por lo tanto:

$$y_t = k_1 m_1^t + k_2 m_2^t + K(1+k)^t$$

en donde $K = C/(m_1 m_2 - (m_1 + m_2)(1+k) + (1+k)^2) =$
$= C/[A_2 + A_1(1+k) + (1+k)^2]$

B.- Ecuaciones de Orden n > 2

I. Ecuaciones lineales a coeficientes constantes homogéneas:

$$y_{t+n} + A_1 y_{t+n-1} + \ldots\ldots\ldots + A_{n-1} y_{t+1} + A_n y_t = 0$$

se puede escribir como:

$$E^n y_t + A_1 E^{n-1} y_t + \ldots\ldots\ldots + A_{n-1} E y_t + A_n y_t = 0$$

$$(E^n + A_1 E^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + A_{n-1} E + A_n) y_t = 0$$

Por ser E un operador lineal:

$$(E - m_1)(E - m_2) \ldots\ldots (E - m_n) y_t = 0$$

En donde $m_1, m_2, \ldots, m_n$ son las raíces de la ecuación:

$$E^n + A_1 E^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + A_{n-1} E + A_n = 0$$

Si las n raíces son diferentes la solución será:

$$y_t = c_1 m_1^t + c_2 m_2^t + \ldots\ldots + c_n m_n^t$$

Si la raíz es repetida n veces se tendrá como solución:

$$y_t = c_1 m + c_2 m \cdot t + ... + c_n m \cdot t^{n-1}$$

Mientras que si las raíces son complejas (en pares) se tendrá como componente de la solución:

$$r^t(C_1\cos\theta t + C_2 \operatorname{sen}\theta t)$$

Ejercicio 4

Resolver y describir el comportamiento de:

$$y_{t+2} + A_1 y_{t+1} + A_2 y_t = c^t$$

ANEXO I

ECUACIONES ALGEBRAICAS DE 2DO, 3ER Y 4TO GRADO.

A.- ECUACIONES CUADRÁTICAS

Sea la ecuación:

$$x^2 + b\ \ x + c = 0$$

Las soluciones de dicha ecuación vienen dado por:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Algunas propiedades de las ecuaciones cuadráticas.

1) El producto de las raíces es el término independiente:

$$x_1\ \ x_2 = c$$

y la suma de las mismas es el negativo del coeficiente del término simple:

$$x_1 + x_2 = -b$$

Esto implica:

a) Si c es positivo y $4c < b^2$: todas las raíces son reales, o todas son positivas, y en tal caso b es negativo, o las dos son negativas y en tal caso b es positivo también.

b) Si c es negativo: las dos raíces son reales y de signo opuesto.

2) Si el término independiente es cero (c = 0) una de las raíces es cero, y la otra se puede obtener a partir de una ecuación de primer grado:

$$x^2 + b \quad x = 0$$
$$x \quad (x + b) = 0$$

y por lo tanto va valer – b.

B.- ECUACIONES CÚBICAS

Sea la ecuación:

$$x^3 + b \quad x^2 + c \quad x + d = 0$$

Para resolver dicha ecuación se siguen los siguientes pasos:

1) Se hace la siguiente transformación:

$$x = y - b/3$$

y se obtiene la siguiente ecuación reducida:

$$y^3 + 3p \quad y + 2q = 0$$

en donde:

$$3p = -(1/3) \quad b^2 + c$$
$$2q = (2/27) \quad b^3 - (1/3) \quad b \quad c + d$$

2) Según el resultado de p, q, y $p^3 + q^2$ se tiene:

2.1. $p^3 + q^2 > 0$

Una raíz real y dos raíces complejas conjugadas, cuyas formulas son:

$$u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}$$
$$v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}$$

$$y_1 = u + v$$

$$y_2 = -\frac{u+v}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}(u-v)$$

$$y_3 = -\frac{u+v}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}(u-v)$$

Ejemplo:

Sea la ecuación:

$$x^3 - 4x^2 + 14x - 20 = 0$$

entonces:

$3p = 8.6667;$ $\quad p = 2.8889$

$2q = -6.0741;$ $\quad q = -3.0370$

De esta manera se tiene como ecuación:

$$y^3 + 8.6667y - 6.0741 = 0$$

y también:

$$p^3 + q^2 = 33.3333 > 0$$

siendo la solución:

$u = 2.0654$

$v = -1.3987$

$y_1 = 0.6667$ $\quad x_1 = 2$

$y_2 = -0.3333 + 3\mathbf{i}$ $\quad x_2 = 1 + 3\mathbf{i}$

$y_3 = -0.3333 - 3\mathbf{i}$ $\quad x_3 = 1 - 3\mathbf{i}$

2.2. $p = 0$

Una raíz real y dos raíces complejas conjugadas, cuyas formulas son:

$$y_1 = -\sqrt[3]{2q}$$

$$y_2 = \frac{\sqrt[3]{2q}}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\sqrt[3]{2q}$$

$$y_3 = \frac{\sqrt[3]{2q}}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}\sqrt[3]{2q}$$

Ejemplo:

Sea la ecuación:

$x^3 - 6x^2 + 12x - 7 = 0$

entonces:

$3p = 0;$	$p = 0$
$2q = 1;$	$q = 0.5$

De esta manera se tiene como ecuación:

$y^3 + 1 = 0$

siendo la solución:

$y_1 = -1$	$x_1 = 1$
$y_2 = 0.5 + 0.8660\mathbf{i}$	$x_2 = 2.5 + 0.8660\mathbf{i}$
$y_3 = 0.5 - 0.8660\mathbf{i}$	$x_3 = 2.5 - 0.8660\mathbf{i}$

2.3. $p^3 + q^2 = 0$

2.3.a. $p \neq 0$, $q \neq 0$

Tres raíces reales, de las cuales dos son iguales y cuyas formulas son:

$$y_1 = 2 \cdot \sqrt[3]{-q}$$

$$y_2 = y_3 = -y_1/2$$

Ejemplo:

Sea la ecuación:

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$$

entonces:

$3p = 0.3333;$ $p = 0.1111$

$2q = -0.0741;$ $q = -0.0370$

De esta manera se tiene como ecuación:

$$y^3 + 0.3333y - 0.0741 = 0$$

y también:

$$p^3 + q^2 = 0$$

siendo la solución:

$y_1 = 0.6667$ $x_1 = 2$

$y_2 = -0.3333$ $x_2 = 1$

$y_3 = -0.3333$ $x_3 = 1$

2.3.b. $p = q = 0$

Tres raíces reales iguales y cuyos valores vienen dados por:

$$x_{1,2,3} = -b/3 \; (y_{1,2,3} = 0)$$

Ejemplo:

Sea la ecuación:

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$$

entonces:

$3p = 0;$ $\quad$ $p = 0$

$2q = 0;$ $\quad$ $q = 0$

De esta manera se tiene como ecuación:

$$y^3 = 0$$

siendo la solución:

$y_1 = 0$ $\quad$ $x_1 = 2$

$y_2 = 0$ $\quad$ $x_2 = 2$

$y_3 = 0$ $\quad$ $x_3 = 2$

2.4. $p^3 + q^2 < 0$

Tres raíces reales diferentes, cuyas formulas son:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{-q}{\sqrt{-p^3}}\right)$$

$$y_1 = 2\sqrt{-p}\,\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)$$

$$y_2 = -2\sqrt{-p}\,\cos\left(\frac{\varphi + \pi}{3}\right)$$

$$y_3 = -2\sqrt{-p}\,\cos\left(\frac{\varphi - \pi}{3}\right)$$

Ejemplo:

Sea la ecuación:

$x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$

entonces:

$3p = -2.3333$ $\quad$ $p = -0.7778$

$2q = 0.7407;$ $\quad$ $q = 0.3704$

De esta manera se tiene como ecuación:

$y^3 - 2.3333y - 0.7407 = 0$

y también:

$p^3 + q^2 = -0.3333 < 0$

siendo la solución:

$\cos(\varphi) = -0.5399$

$\varphi = -2.1412$

$y_1 = 1.3333$ $\quad$ $x_1 = 4$

$y_2 = 0.3333$ $\quad$ $x_2 = 3$

$y_3 = -1.6667$ $\quad$ $x_3 = 1$

2.5. $q = 0$

En este caso se reduce la ecuación a:

$$y^3 + 3p\ \ y = 0$$

que es equivalente a:

$$y\ \ (y^2 + 3p) = 0$$

cuyas raíces son: 0, $\sqrt{-3p}$ e $-\sqrt{-3p}$.

Y en este caso si p es positivo se tendrá una raíz real y dos complejas.

Ejemplo:

Sea la ecuación:

$$x^3 - 6x^2 + 14x - 12 = 0$$

entonces:

$3p = 2;$ $\quad p = 0.6667$

$2q = 0;$ $\quad q = 0$

De esta manera se tiene como ecuación:

$$y^3 + 2y = 0$$

Y la solución es:

$y_1 = 0$ $\quad x_1 = 2$

$y_2 = 1.4142\mathbf{i}$ $\quad x_2 = 2 + 1.4142\mathbf{i}$

$y_3 = -1.4142\mathbf{i}$ $\quad x_3 = 2 - 1.4142\mathbf{i}$

Y si p es negativo se tiene tres raíces reales

Ejemplo:

Sea la ecuación:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

entonces:

$3p = -1;$ $\quad p = -0.3333$

$2q = 0;$ $\quad q = 0$

De esta manera se tiene como ecuación:

$$y^3 - y = 0$$

Y la solución es:

$y_1 = 0$ $\quad x_1 = 2$

$y_2 = 1$ $\quad x_2 = 3$

$y_3 = -1$ $\quad x_3 = 1$

Algunas propiedades de las ecuaciones cúbicas.

1) El producto de las raíces es el negativo del término independiente:

$$x_1 \; x_2 \; x_3 = -d$$

y

La suma de las mismas es el negativo del coeficiente del término cuadrático:

$$x_1+x_2+x_3 = -b$$

Esto implica:

a) Si d es negativo: si todas las raíces son reales, o todas son positivas, y en tal caso b es negativo, o dos son negativas y una es positiva, y si hay dos raíces complejas conjugadas, la raíz real es positiva.

b) Si d es positivo: si todas las raíces son reales, o todas son negativas, y en tal caso b es positivo, o dos son positivas y una es negativa, y si hay dos raíces complejas conjugadas, la raíz real es negativa.

2) Si el término independiente es cero (d = 0) una de las raíces es cero, y las demás se pueden obtener a partir de una ecuación de segundo grado:

$$x^3 + b\ x^2 + c\ x = 0$$
$$x\ (x^2 + b\ x + c) = 0$$

C.- ECUACIONES CUÁRTICAS

Sea la ecuación:

$$x^4 + b\ x^3 + c\ x^2 + d\ x + e = 0$$

Para resolver dicha ecuación se siguen los siguientes pasos:

1) Se hace la siguiente transformación:

$$x = z - b/4$$

y se obtiene la siguiente ecuación reducida:

$$z^4 + p\ z^2 + q\ z + r = 0$$

en donde:

$$p = -(3/8)\ b^2 + c$$
$$q = (1/8)\ b^3 - (1/2)\ b\ c + d$$
$$r = -(3/256)\ b^4 + (1/16)\ b^2\ c - (1/4)\ b\ d + e$$

3) Se asocia la siguiente ecuación resolvente cúbica:

$$y^3 + (p/2)\ y^2 + [(p^2 - 4r)/16]\ y - (1/64)\ q^2 = 0$$

4) Se obtienen las raíces de esta ecuación (Ver anexo sobre ecuaciones cúbicas).

5) Se compara $\sqrt{y_1} \cdot \sqrt{y_2} \cdot \sqrt{y_3}$ con $-(q/8)$, si son iguales (del mismo signo) las raíces de la ecuación reducida son:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3} \\
z_2 &= \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3} \\
z_3 &= -\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3} \\
z_4 &= -\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}
\end{aligned}
$$

De lo contrario (si los signos son diferente) las raíces serán:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= -\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3} \\
z_2 &= -\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3} \\
z_3 &= \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3} \\
z_4 &= \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}
\end{aligned}
$$

Ejemplo:

Sea la ecuación:

$$x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 4x - 8 = 0$$

entonces:

$p = -10$
$q = -4$
$r = 8$

De esta manera se tiene como ecuación reducida:

$$z^4 - 10z^2 - 4z + 8 = 0$$

y como ecuación cúbica asociada:

$$y^3 - 5y^2 + 4.25y - 0.25 = 0$$

siendo la solución de la ecuación cúbica:

$y_1 = 3.9365;$ $\sqrt{y_1} = 1.9841$
$y_2 = 1;$ $\sqrt{y_2} = 1$
$y_3 = 0.0635;$ $\sqrt{y_3} = 0.2520$

y las soluciones de las ecuaciones cuárticas:

$z_1 = 3.2361;$ $x_1 = 5.2361$
$z_2 = 0.7321;$ $x_2 = 2.7321$
$z_3 = -1.2361;$ $x_3 = 0.7639$
$z_4 = -2.7321;$ $x_4 = -0.7321$

En el caso de que la ecuación cúbica tenga raíces negativas, sus respectivas raíces cuadradas serán números imaginarios, y por lo tanto la ecuación cuartita tendrá raíces complejas.

Ejemplo:

Sea la ecuación:

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$$

entonces:

$p = 1.625$
$q = 2.125$
$r = 3.3633$

De esta manera se tiene como ecuación reducida:

$$z^4 + 1.625z^2 + 2.125z + 3.3633 = 0$$

y como ecuación cúbica asociada:

$$y^3 + 0.8125y^2 - 0.6758y - 0.0706 = 0$$

siendo la solución de la ecuación cúbica:

$y_1 = 0.5753$; $\sqrt{y_1} = 0.7585$
$y_2 = -0.0949$; $\sqrt{y_2} = 0.3080\mathbf{i}$
$y_3 = -1.2930$; $\sqrt{y_3} = 1.1371\mathbf{i}$

y las soluciones de las ecuaciones cuárticas:

$z_1 = 0.7585 + 1.4451\mathbf{i}$; $x_1 = 0.5085 + 1.4451\mathbf{i}$
$z_2 = 0.7585 - 1.4451\mathbf{i}$; $x_2 = 0.5085 - 1.4451\mathbf{i}$
$z_3 = -0.7585 - 0.8291\mathbf{i}$; $x_3 = -1.085 - 0.8291\mathbf{i}$
$z_4 = -0.7585 + 0.8291\mathbf{i}$; $x_4 = -1.085 + 0.8291\mathbf{i}$

En el caso de que la ecuación cúbica tenga raíces complejas, sus respectivas raíces cuadradas vendrán dados por:

$$\sqrt{r}(\cos(\varphi/2)+\text{sen}(\varphi/2)\mathbf{i})$$

y

$$\sqrt{r}(\cos(\varphi/2)-\text{sen}(\varphi/2)\mathbf{i})$$

En donde *r* es el modulo de las raíces y φ el arcos de la razón entre *r* y la parte real de las raices.

Ejemplo:

Sea la ecuación:

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x – 8 = 0$$

entonces:

$p = 1.625$ $q = 2.125$ $r = –8.6367$

De esta manera se tiene como ecuación reducida:

$$z^4 + 1.625z^2 + 2.125z – 8.6367 = 0$$

y como ecuación cúbica asociada:

$$y^3 + 0.8125y^2 – 0.6758y – 0.0706 = 0$$

siendo la solución de la ecuación cúbica:

$y_1 =0.0300;$ $\sqrt{y_1} = 0.1733$

$y_2 = –0.4213+1.4738\mathbf{i};$ $\sqrt{y_2} = 0.7455+0.9885\mathbf{i}$

$y_3 = –0.\ 4213–1.4738\mathbf{i};$ $\sqrt{y_3} = 0.7455-0.9885\mathbf{i}$

$r = 1.5328;$ $\cos(\varphi) = –0.2748;$ $\varphi = 1.8492$

y las soluciones de las ecuaciones cuartitas:

$z_1 = 1.3177;$ $x_1 = 1.0677$

$z_2 = – 1.6642;$ $x_2 = – 1.9143$

$z_3 = 0.1733+1.9769\mathbf{i};$ $x_3 = –0.0767+1.9769\mathbf{i}$

$z_4 = 0.1733–1.9769\mathbf{i};$ $x_4 = –0.0767–1.9769\mathbf{i}$

Algunas propiedades de las ecuaciones cuárticas.

1) El producto de las raíces es el término independiente:

$$x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4 = e$$

2) La suma de las raíces es el negativo del coeficiente del término cuadrático:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -b$$

3) Si el término independiente es cero (e = 0) una de las raíces es cero, y las demás se pueden obtener a partir de una ecuación cúbica:

$$x^4 + b\ \ x^3 + c\ \ x^2 + d\ \ x = 0$$
$$x\ \ (x^3 + b\ \ x^2 + c\ \ x + d) = 0$$

6) Si los términos cúbicos y simple son nulos (b, d = 0), se puede resolver como una ecuación cuadrática con el cambio de variable:

$$y = x^2.$$

CAPÍTULO 5

SISTEMAS DE ECUACIONES EN DESPLAZAMIENTO LINEALES

Sea el sistema de ecuaciones:

(1) $\boldsymbol{y}_{t+1} = A\cdot\boldsymbol{y}_t$

en donde $\boldsymbol{y}$ es un vector de n componentes y A una matriz de n x n;

la solución de este sistema es: $\boldsymbol{y}_t = A^t\cdot\boldsymbol{y}_0$.

Sea el sistema de ecuaciones:

(2) $\boldsymbol{y}_{t+1} = A_1\cdot\boldsymbol{y}_{t+1} + A_2\cdot\boldsymbol{y}_t$

Se convierte al sistema 1, haciendo:

$$A = [I - A_1]^{-1}\cdot A_2$$

Mientras que el sistema de ecuaciones:

(3) $\boldsymbol{y}_{t+1} = A\cdot\boldsymbol{y}_t + \boldsymbol{b}$

tendrá como solución, si ningún autovalor de A es igual a 1:

$$\boldsymbol{y}_t = A^t\cdot\boldsymbol{y}_0 + [I - A]^{-1}\cdot\boldsymbol{b}$$

en donde $\boldsymbol{y_p} = [I - A]^{-1}\cdot\boldsymbol{b}$ se denomina solución particular.

En el caso de dos ecuaciones, si uno de los autovalores es igual a 1, la solución particular venda dado por:

$$\boldsymbol{y_p} = \frac{\lambda_1^t - \lambda_2^t}{\lambda_1 - \lambda_2}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{K_p}) + t\cdot\boldsymbol{K_p}$$

En donde $\boldsymbol{K_p}$ viene definido por:

$$\boldsymbol{K_p} = 1/(1- D)[I - DA^{-1}]$$

Mientras que si los autovalores valen 1, se tiene como solución particular:

$$\boldsymbol{y_p} = t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{K_p}) + t^2\cdot\boldsymbol{K_p}$$

En donde $\boldsymbol{K_p}$ viene definido por:

$$\boldsymbol{K_p} = (1/2)[I - A^{-1}]$$

Y el sistema de segundo orden:

(4) $\boldsymbol{x}_{t+2} = A\cdot\boldsymbol{x}_{t+1} + B\cdot\boldsymbol{x}_t$

Se puede plantear como un sistema de primer orden definiendo:

$\boldsymbol{y}_{t+1} = \boldsymbol{x}_t$

sustituyendo en (4) y avanzando se tiene el sistema:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{t+1} = A\cdot\boldsymbol{x}_t + B\cdot\boldsymbol{y}_t \\ \boldsymbol{y}_{t+1} = I\cdot\boldsymbol{x}_t \end{cases}$$

Propiedad: Cualquier sistema de ecuaciones lineales de n variables se puede transformar en un sistema lineal de una sola variable de orden n (y viceversa).

Veamos el procedimiento con un sistema de dos ecuaciones:

Sea: $x_{t+1} = a\cdot x_t + b\cdot y_t$ (1)

$y_{t+1} = c\cdot x_t + d\cdot y_t$ (2)

despejemos y_t en la ecuación (1):

$y_t = (x_{t+1} – a\cdot x_t) / b$ (3)

sustituyendo (3) en (2):

$$(x_{t+2} – a\cdot x_{t+1}) / b = c\cdot x_t + d\cdot(x_{t+1} – a\cdot x_t) / b$$

arreglando y reagrupando términos tenemos:

$$(x_{t+2} – a\cdot x_{t+1}) = b\cdot c\cdot x_t + d\cdot(x_{t+1} – a\cdot x_t)$$

$$x_{t+2} – (a + d)\cdot x_{t+1} + (a\cdot d – b\cdot c)\cdot x_t = 0$$

Análisis de las Soluciones del sistema $\boldsymbol{y}_{t+1} = A\cdot\boldsymbol{y}_t$

1) Si la matriz A tiene que los valores absolutos de algunos de sus autovalores son mayores que uno, entonces la solución diverge.

2) Si todos los valores absolutos de los autovalores son menores que uno entonces la solución converge a 0.

3) Y tendrán puntos de equilibrio distinto de cero si la matriz A tiene un autovalor igual a uno. Para que se de esta condición (autovalor =1) es necesario y suficiente, para ecuaciones de dos variables que:

(1) $$a \cdot d - a - d + 1 = b \cdot c$$

Pero para que la solución converja es necesario que el módulo de todos los autovalores sean menores o igual a 1 y al menos uno de ellos estrictamente menor que uno. Lo cual se da, si se cumple con la condición (1), con la siguiente condición adicional:

(2) $$0 \leq a + d < 2$$

Si tiene más de un autovalor igual a uno puede tanto converger como diverger.

Para obtener el punto de equilibrio de la solución veamos primero el siguiente aparte.

LA TRANSFORMADA GEOMETRICA (O TRANSFORMADA Z)

Sea y_t una función de los naturales en los reales, entonces se define como transformada geométrica (o transformada Z) de y_t a:

$$Gy(z) = y_o + y_1 \cdot z + y_2 \cdot z^2 + \ldots\ldots =$$
$$= \sum_{t=0}^{\infty} y_t \cdot z^t$$

En el apéndice II se da la tabla de las principales formas para la transformada Z.

<u>Uso de la transformada geométrica para solucionar ecuaciones en diferencias.</u>

La técnica consiste en convertir la ecuación en transformada Z, en ambos lados y luego hallar la antitransformada. Ilustremos con dos ejemplos:

Ejemplo 1.

Sea: $y_{t+1} - y_t = t$

utilizando las formulas A.12 y B.9 tenemos:

$$[(1-z) \cdot Gy(z) - y_0]/z = z/(1-z)^2$$

por lo cual:

$$(1 - z) \cdot Gy(z) = z^2/(1-z)^2 + Gy(0)$$

$$Gy(z) = z^2/(1-z)^3 + y_0/(1-z)$$

$$= A \cdot z(1+z)/(1-z)^3 + B \cdot z/(1-z)^2 + y_0/(1-z)$$

resolviendo el sistema de ecuaciones para A y B se tiene:

$A + B = 0$
$A - B = 1$, por lo cual $A=1/2$, $B=-1/2$

Así:

$$Gy(z) = (1/2)\cdot z(1+z)/(1-z)^3 - (1/2)\cdot z/(1-z)^2 + y_0/(1-z)$$

Y utilizando las formulas, A.3, B.9, B.11 y B.3 de las transformadas se tiene:

$$y_t = (t^2 - t)/2 + y_o$$

Ejemplo 2:

Sea: $y_{t+2} - 2\cdot y_{t+1} + y_t = t$

utilizando las formulas A.3, A.6 y B.9 tenemos:

$$z^{-2}\cdot[Gy(z)-y_0-y_1\cdot z]-2\cdot z^{-1}\cdot[Gy(z)-y_0] + Gy(z) = z/(1-z)^2$$

por lo cual:

$$(z^{-2} - 2\cdot z^{-1} + 1)\cdot Gy(z) = z/(1-z)^2 + z^{-2}\cdot[y_0+y_1\cdot z]-2\cdot z^{-1}\cdot y_0$$

multiplicando ambos lados por z^2:

$$(1 - 2\cdot z + z^2)\cdot Gy(z) = z^3/(1-z)^2 + y_0 + y_1\cdot z - 2\cdot z\cdot y_0$$

$$(1 - z)^2\cdot Gy(z) = z^3/(1-z)^2 + y_0 + (y_1 - 2\cdot y_0)\cdot z$$

$$Gy(z) = z^3/(1-z)^4 + [y_0 + (y_1 - 2\cdot y_0)\cdot z]/(1-z)^2$$

Utilizando B.17 y A.5, B.13, B.9 y A.3

$$y_t = (1/3!)\cdot(t-2)\cdot(t-1)\cdot t + y_0\cdot(t + 1) + (y_1 - 2\cdot y_0)\bullet t$$

$$y_t = (1/6)\cdot(t-2)\cdot(t-1)\cdot t + y_0 + (y_1 - y_0)\cdot t$$

Análisis de la soluciones de los sistema de ecuaciones en desplazamiento utilizando la TRANSFORMADA Z.

Sabemos que la solución es: $\hat{y}_t = A^t \cdot \hat{y}_o$.

Utilizando la Transformada Z, para ver el comportamiento de A^t tenemos:

$$[I - A \cdot z]^{-1}$$

pero por la propiedad A.17:

$$A^{\infty} = \lim_{z \to 1} (1 - z) \cdot [I - A \cdot z]^{-1}$$

de esta manera si A^{∞} existe, el limite existe y se tiene que la solución converge asintoticamente o harmónicamente al punto de equilibrio:

$$\hat{y}_e = A^{\infty} \cdot \hat{y}_o$$

Ejemplo:

$$\text{Sea} \quad \begin{aligned} x_{t+1} &= 0{,}3x_t + 0{,}56y_t \\ y_{t+1} &= x_t + 0{,}2y_t \end{aligned}$$

Así tenemos que la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}56 \\ 1 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

tiene entre sus autovalores 1 (el otro vale −0,5), y se tiene que los puntos de equilibrio son de la forma x = 0,8y, o sea que los vectores de equilibrio ê son de la forma:

$$\hat{e} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \alpha , \qquad \alpha \in R$$

construíamos

$$[I - A \cdot z]$$

$$\begin{pmatrix} 1 - 0{,}3z & -0{,}56z \\ -z & 1 - 0{,}2z \end{pmatrix}$$

que tiene como determinante:

$$D = 1 - 0{,}5z - 0{,}5z^2 = (1 + 0{,}5z)\bullet(1 - z)$$

así que $[I - A\cdot z]^{-1}$ viene dado por:

$$(1/D)\cdot\begin{pmatrix} 1 - 0{,}2z & 0{,}56z \\ z & 1 - 0{,}3z \end{pmatrix}$$

así obtendremos que:

$$A^{\infty} = \lim_{z\to 1}(1 - z)\cdot[I - A\cdot z]^{-1}$$

viene dado por:

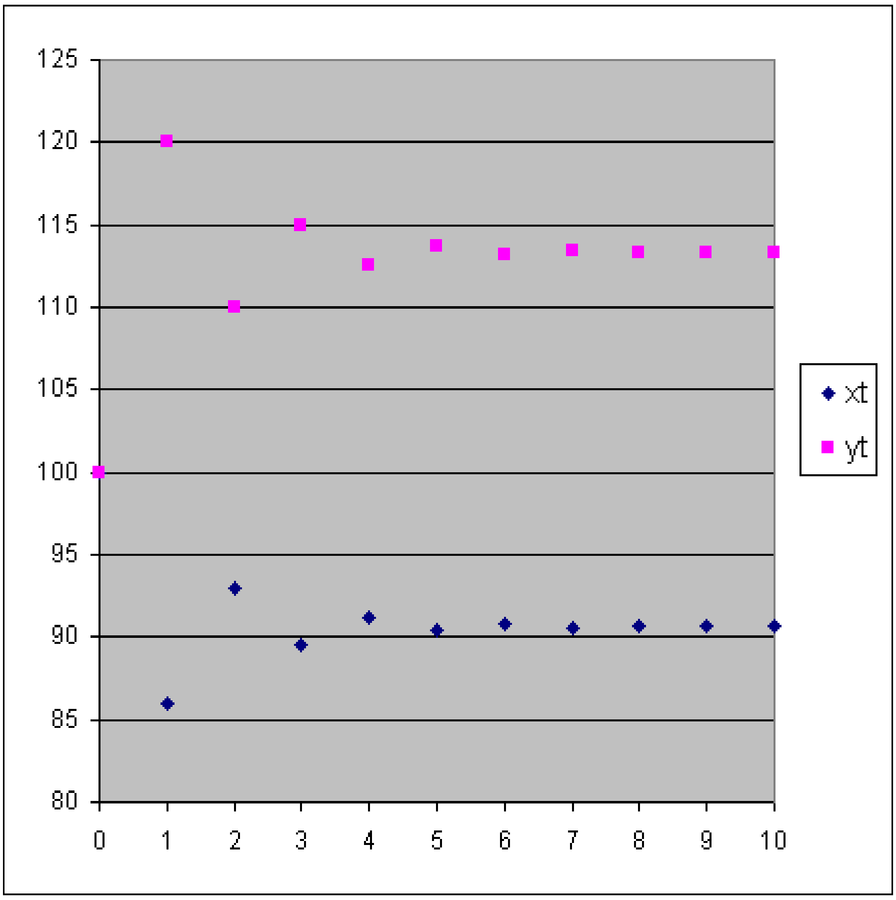
$$(1/1{,}5)\cdot\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}56 \\ 1 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

que multiplicado por el vector de valores iniciales (x_o, y_o) da el punto de atracción y uno de los puntos de equilibrio.

A

0,3	0,56
1	0,2

t	x_t	y_t
0	**100**	**100**
1	86	120
2	93	110
3	89,5	115
4	91,25	112,5
5	90,375	113,75
6	90,8125	113,125
7	90,59375	113,4375
8	90,703125	113,28125
9	90,6484375	113,359375
10	90,6757813	113,320313



A^{∞}

0,5333333	**0,3733333**
0,6666667	**0,4666667**

x_e	y_e
90,6666667	**113,333333**

Pero, también podemos obtener los elementos de la matriz A^t, a partir de la inversa de la transformación z, ver anexo III.

$$A^t = \frac{1}{1,5}\begin{pmatrix} 0,7\cdot(-0,5)^t + 0,8 & 0,56 - 0,56\cdot(-0,5)^t \\ 1-(-0,5)^t & 0,8\cdot(-0,5)^t + 0,7 \end{pmatrix}$$

ANEXO II

TABLA DE LA TRANSFORMADA GEOMÉTRICA (O TRANSFORMADA Z)

A.- Propiedades

	Función Discreta		Transformada Geométrica
1	y_t $t=0,1,2,\dots\dots\dots$	Definición	$G_y(z) = y_o+y_1\cdot z+y_2\cdot z^2+\dots$ $=\sum_{t=0}^{\infty} y_t \cdot z^t$
2	$x_t + y_t$	Suma de dos funciones	$G_x(z) + G_y(z)$
3	$a\cdot x_t + b\cdot y_t$	Combinación lineal de dos funciones	$a\cdot G_x(z) + b\cdot G_y(z)$
4	$\sum_{m=0}^{t} x_m \cdot y_{t-m}$	Convolución (Producto de Cauchy)	$G_x(z)\cdot G_y(z)$
5	y_{t-k} k entero positivo	función retrasada	$z^k\cdot G_y(z)$
6	y_{t+k} k entero positivo	función adelantada	$z^{-k}\cdot[G_y(z)-y_0-y_1\cdot z-\dots-y_{k-1}\cdot z^{k-1}]$
7	$t\cdot y_t$		$z\cdot G_y'(z)$
8	$a^t\cdot y_t$	a constante	$G_y(az)$
9	$(t+1)\cdot y_{t+1}$		$G_y'(z)$
10	$y_{(t/k)}$	$t = 0, k, 2k, \dots$	$G_y(z^k)$
11	$y_t - y_{t-1}$		$(1-z)\cdot G_y(z)$
12	$y_{t+1} - y_t$	Diferencia	$[(1-z)\cdot G_y(z)-y_0]/z$
13	$\sum_{m=0}^{t} y_m$		$G_y(z)/(1-z)$
14	$\sum_{t=0}^{\infty} y_t$	Propiedad de la suma	$G_y(1)$
15	$\sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \cdot y_t$	Propiedad de la suma alterna	$G_y(-1)$
16	y_0	Propiedad del valor inicial	$G_y(0)$
17	y_∞ si y_∞ existe	Propiedad del valor final	$\lim_{z\to 1}(1-z)\cdot G_y(z)$

B.- Funciones Comunes

	Función Discreta		Transformada Geométrica
1	$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$	pulso unitario en el origen	1
2	$\delta(t\text{-}m) = \begin{cases} 1 & t = m \\ 0 & t \neq m \end{cases}$	pulso unitario en el punto m	z^m
3	$u(t) = 1$	Escalón Unitario	$1/(1 - z)$
4	a^t a constante	Sucesión geométrica	$1/(1 - a\cdot z)$
5	$t\cdot a^t$	a constante	$a\cdot z/(1 - a\cdot z)^2$
6	a^t/t	a constante	$-\ln(1 - a\cdot z)$
7	$a^t/t!$	a constante	$\mathrm{Exp}(a\cdot z)$
8	$(\ln(a))^t/t!$	a constante	a^z
9	T	Rampa Unitaria	$z/(1 - z)^2$
10	$t^2\cdot a^t$	a constante	$a\cdot z\cdot(1 - a\cdot z)/(1 - a\cdot z)^3$
11	t^2	Rampa Parabólica Unitaria	$z\cdot(1 - z)/(1 - z)^3$
12	$(t + 1)\cdot a^t$	a constante	$1/(1 - a\cdot z)^2$
13	$t + 1$		$1/(1 - z)^2$
14	$½\cdot(t + 1)\cdot(t + 2)\cdot a^t$	a constante	$1/(1 - a\cdot z)^3$
15	$½\cdot(t + 1)\cdot(t + 2)$		$1/(1 - z)^3$
16	$(1/k!)\cdot(t+1)\cdot(t+2)\cdots(t+k)\cdot a^t$ $C(t+k, k)\cdot a^t$	a constante	$1/(1 - a\cdot z)^{k+1}$
17	$(1/k!)\cdot(t+1)\cdot(t+2)\cdots(t+k)$		$1/(1 - z)^{k+1}$
18	$C(m, t)\cdot b^t\cdot a^{m-t}$		$(a + b\cdot z)^m$

C- Funciones Matriciales

	Función Discreta		Transformada Geométrica
1	M_t $t=0,1,2,.........$	una función matricial	$G_M(z) =$ $M_0+M_1 \cdot z+M_2 \cdot z^2+....$ $= \sum_{t=0}^{\infty} M_t \cdot z^t$
2	$t \cdot M_t$		$z \cdot G_M^{'}(z)$
3	A^t	A matriz constante	$[I - A \cdot z]^{-1}$
4	$t \cdot A^t$	A matriz constante	$z \cdot [I - A \cdot z]^{-1} \cdot A \cdot [I - A \cdot z]^{-1}$

ANEXO III

ESTUDIO DE LAS MATRICES 2 X 2

Sea A la matriz: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Entonces su determinante (D) viene dado por:

$$\mathrm{D} = ad - bc$$

Y la matriz inversa, si el determinante es distinto de cero, por:

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{D}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Los autovalores vendrán dados por las raíces de la siguiente ecuación:

$$\lambda^2 - (a + d)\,\lambda + \mathrm{D} = 0$$

Si el determinante vale cero, entonces uno de los autovalores valdrá cero también y el otro $a + d$.

Para que uno de los autovalores valga uno (1), es suficiente que la suma de cada columna o la suma de cada fila valga (1) también. La condición necesaria sería:

$$\mathrm{D} = a + d - 1$$

Mientras que para tener un autovalor de multiplicidad 2, la condición es:

$$4\mathrm{D} = (a + d)^2$$

Para hallar A^t, se aplica la transformada z (Ver anexo I), y se obtiene:

$$[\mathrm{I} - \mathrm{A}\cdot\mathrm{z}]^{-1}$$

Llamemos $\mathrm{D_z}$ el determinante de $[\mathrm{I} - \mathrm{A}\cdot\mathrm{z}]$, y se tiene entonces:

$$\mathrm{D_z} = 1 - (a + d)\mathrm{z} + \mathrm{Dz}^2$$

Cuyas raíces, en el caso que $\mathrm{D} \neq 0$, $\mathrm{k_i}$ serán los autovalores de D dividido D:

$$\mathrm{k_i} = \lambda_i/\mathrm{D}$$

de lo contrario tendrá una sola raíz $\mathrm{k} = 1/(a + d)$.

En el caso de dos raíces distintas

la forma de $[\mathrm{I} - \mathrm{A}\cdot\mathrm{z}]^{-1}$ será:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1-dz}{(\lambda_1 z-1)(\lambda_2 z-1)} & \dfrac{bz}{(\lambda_1 z-1)(\lambda_2 z-1)} \\ \dfrac{cz}{(\lambda_1 z-1)(\lambda_2 z-1)} & \dfrac{1-az}{(\lambda_1 z-1)(\lambda_2 z-1)} \end{pmatrix}$$

Factorizando:

$$\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix} \frac{d-\lambda_2}{1-\lambda_2 z}-\frac{d-\lambda_1}{1-\lambda_1 z} & \frac{b}{1-\lambda_1 z}-\frac{b}{1-\lambda_2 z} \\ \frac{c}{1-\lambda_1 z}-\frac{c}{1-\lambda_2 z} & \frac{a-\lambda_2}{1-\lambda_2 z}-\frac{a-\lambda_1}{1-\lambda_1 z} \end{pmatrix}$$

Realizando las antitransformadas de cada coeficiente queda:

$$\mathrm{A}^{\mathrm{t}}=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix} (\lambda_1-d)\lambda_1^{\mathrm{t}}-(\lambda_2-d)\lambda_2^{\mathrm{t}} & b(\lambda_1^{\mathrm{t}}-\lambda_2^{\mathrm{t}}) \\ c(\lambda_1^{\mathrm{t}}-\lambda_2^{\mathrm{t}}) & (\lambda_1-a)\lambda_1^{\mathrm{t}}-(\lambda_2-a)\lambda_2^{\mathrm{t}} \end{pmatrix}$$

En el caso de dos raíces iguales (una raíz de multiplicidad 2)

la forma de $[\mathrm{I} - \mathrm{A}\cdot z]^{-1}$ será:

$$\begin{pmatrix} \frac{1-dz}{(\lambda z-1)^2} & \frac{bz}{(\lambda z-1)^2} \\ \frac{cz}{(\lambda z-1)^2} & \frac{1-az}{(\lambda z-1)^2} \end{pmatrix}$$

Reorganizando:

$$\begin{pmatrix} \frac{1-(d/\lambda)\lambda z}{(1-\lambda z)^2} & \frac{(b/\lambda)\lambda z}{(1-\lambda z)^2} \\ \frac{(c/\lambda)\lambda z}{(1-\lambda z)^2} & \frac{1-(a/\lambda)\lambda z}{(1-\lambda z)^2} \end{pmatrix}$$

Realizando las antitransformadas de cada coeficiente queda:

$$\mathrm{A}^{\mathrm{t}}=\begin{pmatrix} (\mathrm{t}+1)\lambda^{\mathrm{t}}-(d/\lambda)\mathrm{t}\lambda^{\mathrm{t}} & (b/\lambda)\mathrm{t}\lambda^{\mathrm{t}} \\ (c/\lambda)\mathrm{t}\lambda^{\mathrm{t}} & (\mathrm{t}+1)\lambda^{\mathrm{t}}-(a/\lambda)\mathrm{t}\lambda^{\mathrm{t}} \end{pmatrix}$$

En el caso del determinante igual a cero
(uno de los autovalores es nulo y el otro $\lambda = a + d$)

la forma de $[\mathrm{I} - \mathrm{A}\cdot z]^{-1}$ será:

$$\begin{pmatrix} \frac{1-dz}{(1-\lambda z)} & \frac{bz}{(1-\lambda z)} \\ \frac{cz}{(1-\lambda z)} & \frac{1-az}{(1-\lambda z)} \end{pmatrix}$$

Realizando las antitransformadas de cada coeficiente queda:

$$\mathrm{A}^{\mathrm{t}}=\begin{pmatrix} \lambda^{\mathrm{t}}-d\lambda^{\mathrm{t}-1} & b\lambda^{\mathrm{t}-1} \\ c\lambda^{\mathrm{t}-1} & \lambda^{\mathrm{t}}-a\lambda^{\mathrm{t}-1} \end{pmatrix}$$

CAPÍTULO 5

ECUACIONES EN RAZONES

Ecuación en razones de orden n:

$$f(P^n y_t, P^{n-1} y_t, ..., Py_t, y_t, t) = 0$$

Ecuación en desplazamientos de orden n:

$$f(E^n y_t, E^{n-1} y_t, ..., Ey_t, y_t, t) = 0$$

Las ecuaciones en razones se pueden llevar a ecuaciones en desplazamientos.

Resolución de algunas ecuaciones de primer orden:

a) La razón es igual a uno:

$$Py_t = 1 \quad ===> y_{t+1} = y_t \quad ===> \quad y_t = y_o, \ \ldots\ t$$

la función es igual una constante (su valor inicial)

b) La razón es igual a una constante[1]

$$Py_t = a \implies \prod_{k=0}^{t-1} Py_k = \prod_{k=0}^{t-1} a \implies y_t/y_o = a^t$$

$$\implies y_t = y_o \cdot a^t$$

la función es igual a una progresión geométrica

c) La razón es igual a la identidad

$$Py_t = t \implies \prod_{k=0}^{t-1} Py_k = \prod_{k=0}^{t-1} t$$

$$\implies y_t/y_o = t!$$

$$\implies y_t = y_o \cdot t!$$

la función es el valor inicial por la función factorial.

d) La razón es una progresión geométrica

$$Py_t = m^t \implies \prod_{k=0}^{t-1} Py_k = \prod_{k=0}^{t-1} m^k \implies y_t/y_o = m^{\sum_{k=0}^{t} k}$$

$$\implies y_t = y_o \cdot m^{t\cdot(t+1)/2}$$

la función es una progresión.

[1] Nótese que esta ecuación es equivalente a la ecuación 2.e, pero utilizando los operadores razón y productoria se resuelve en una cantidad menor de pasos.

e) La razón de variación es una constante[2]

$$Py_t - 1 = A; \quad A \neq 0$$

$\Longrightarrow Py_t = A + 1$

haciendo $a = A + 1$

$$Py_t = a$$

Usando la solución de la ecuación R.b

$$y_t = y_o \cdot a^t$$

por lo tanto:

$$y_t = y_o \cdot (A + 1)^t$$

f) La razón de Variación es la identidad.

$$Py_t - 1 = t$$

$$\Rightarrow Py_t = t + 1$$

$$\prod_{k=0}^{t} Py_k = \prod_{k=0}^{t} (k + 1)$$

Usando la propiedad (vi) (desplazamientos de los limites):

$$\prod_{k=0}^{t} Py_k = \prod_{k=1}^{t+1} k$$

Usando la propiedad (v) (multiplicación por trozos):

$$y_k / y_0 = (t + 1)!/1!$$

por lo tanto:

$$y_k = y_0 \cdot (t + 1)!$$

[2] Se define como razón de variación a:$\Delta x_t / x_t$, que es igual a $Px_t - 1$.

SEGUNDA PARTE

MODELOS DINAMICOS DISCRETOS

CAPÍTULO 7

MODELOS ECOLÓGICOS

1) Modelo de crecimiento de la población de una sola especie.

Sea N_t la población en el periodo t

Sean b y d las tasas de nacimientos y defunciones por periodo de una población:

$$b = \frac{\text{\# de Nacimientos}}{N_t}$$

$$d = \frac{\text{\# de Defunciones}}{N_t}$$

por lo cual los valores de b son mayores o igual a 0 y los de d se encuentran comprendidos entre 0 y 1

Llamemos R = b – d, a la tasa neta de crecimiento de la población, cuyos valores están comprendidos entre –1 y ∞.

Entonces:

$$\begin{aligned} N_{t+1} &= N_t + R \bullet N_t \\ &= (1+R) \bullet N_t \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución de la ecuación (Utilizando la solución de la ecuación (e)) es:

$$N_t = N_o(1+R)^t$$

Comportamiento de la solución:

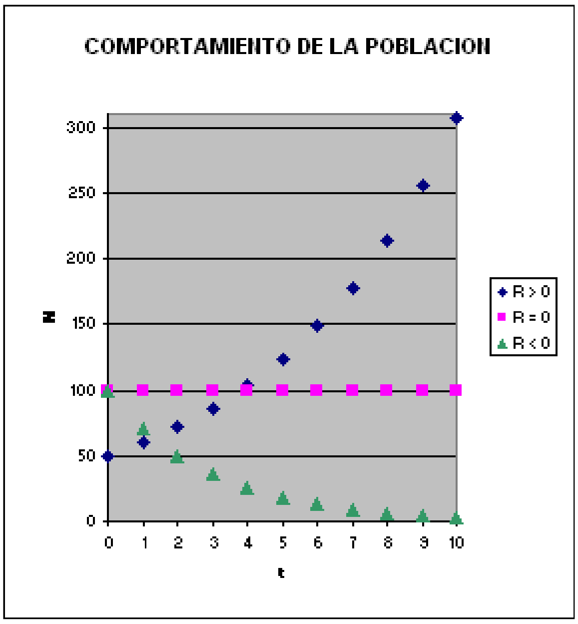
a) Si b > d (R > 0), la población crecerá indefinidamente.

b) Si b = d (R = 0), la población permanecerá constante.

c) Si b < d (R < 0), la población disminuirá hasta desaparecer.

Parametros:			
b =	0,2	0,2	0,01
d =	0,001	0,2	0,3
No =	50	100	100
R =	0,199	0	–0,29

t	**R > 0**	**R = 0**	**R < 0**
0	50,00	100,00	100,00
1	59,95	100,00	71,00
2	71,88	100,00	50,41
3	86,18	100,00	35,79
4	103,33	100,00	25,41
5	123,90	100,00	18,04
6	148,55	100,00	12,81
7	178,12	100,00	9,10
8	213,56	100,00	6,46
9	256,06	100,00	4,58
10	307,02	100,00	3,26



2) Modelo de crecimiento de la población de una sola especie con ambiente de capacidad limitada (K). (Modelo Logístico)

En este modelo se supone que la tasa de crecimiento de la población de la especie es proporcional a la población en el periodo, y a la capacidad de seguir aceptando nuevos individuos en el nuevo periodo.

De esta manera se tiene el siguiente modelo:

$\Delta N_t = A \bullet N_t \bullet (K - N_{t+1})$
(1)

En donde K, es la Capacidad y A = R/K, en donde R es la tasa de crecimiento[3].

$$N_{t+1} - N_t = A \cdot N_t \cdot K - A \cdot N_t \cdot N_{t+1} \qquad (2)$$

dividiendo (2) entre N_{t+1} y N_t:

$$\frac{1}{N_t} - \frac{1}{N_{t+1}} = \frac{A \cdot K}{N_{t+1}} - A \qquad (3)$$

llamando $Y_t = 1/N_t$, sustituyendo en (3)

$$Y_t - Y_{t+1} = R \cdot Y_{t+1} - A \qquad (4)$$

$$(1 + A \cdot K) \cdot Y_{t+1} - Y_t = A \qquad (5)$$

$$Y_{t+1} - \frac{Y_t}{(1 + A \cdot K)} = \frac{A}{(1 + A \cdot K)} \qquad (6)$$

la solución de la ecuación 5 (aplicando la solución de la ecuación (f)) es:

$$Y_t = \frac{A}{(1 + A \cdot K) \cdot (1 - 1/(1 + A \cdot K))} + \left(Y_o - \frac{A}{(1 + A \cdot K) \cdot (1 - 1/(1 + A \cdot K))} \right) \cdot \left(\frac{1}{(1 + A \cdot K)} \right)^t$$

que simplificado queda:

$$Y_t = \frac{1}{K} + \left(Y_o - \frac{1}{K} \right) \cdot \left(\frac{1}{(1 + A \cdot K)} \right)^t \qquad (7)$$

Volviendo a sustituir en 7, Y_t por $1/N_t$ se tiene como solución de la población para el momento t:

$$N_t = \frac{1}{\frac{1}{K} + \left(Y_o - \frac{1}{K} \right) \cdot \left(\frac{1}{(1 + A \cdot K)} \right)^t}$$

---

3 Como lo comentan Svirezhev y Logofet, la ecuación $\Delta N_t = A \cdot N_t \cdot (K - N_t)$, no tiene sentido desde un punto de vista biológico, ya que acepta soluciones en donde la población pasa a ser negativa. Otra formulación para esta ecuación es: $\Delta N_t = a \cdot N_t \cdot (1 - b \cdot N_{t+1})$ en donde a = R y b = 1/K.

o también:

$$N_t = \frac{K \cdot N_o \cdot (1 + R)^t}{N_o \cdot (1 + R)^t + (K - N_o)}$$

Comportamiento de la solución:

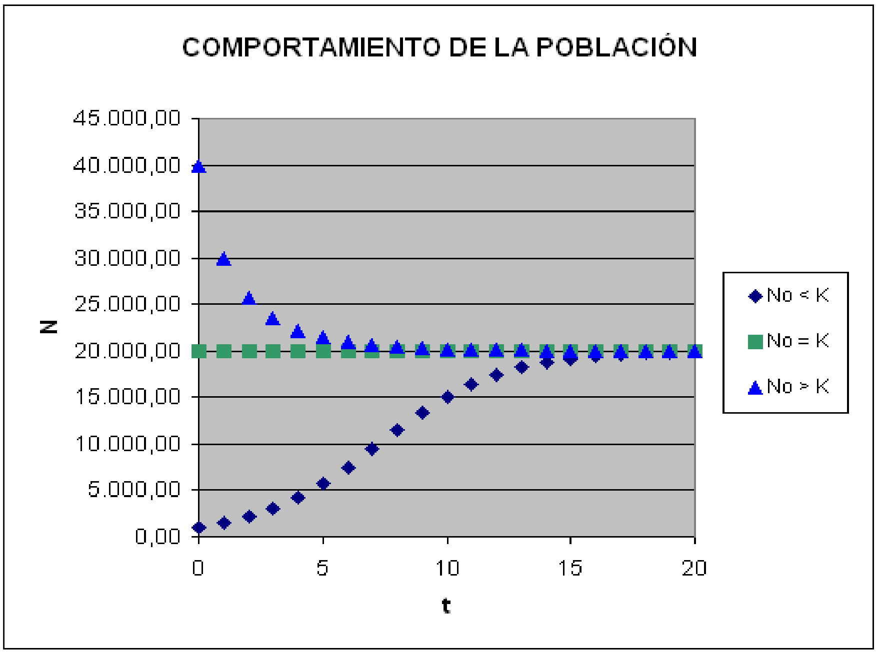
a) Si $N_o < K$, la población crecerá acercándose asintóticamente a su punto de equilibrio K.

b) Si $N_o = K$, la población permanecerá constante en su punto de equilibrio K.

c) Si $N_o > K$, la población disminuirá acercándose asintóticamente a su punto de equilibrio K.

Parametros:		
R = 0,5	0,5	0,5
K = 20.000	20.000	20.000
A = 0,000025	0,000025	0,000025
No = 1000	20.000	40000

t	No < K	Y	No = K	Y	No > K	Y
0	**1.000,00**	0,001	**20.000,00**	0,00005	**40.000,00**	0,000025
1	**1.463,41**	0,000683333	**20.000,00**	0,00005	**30.000,00**	3,33333E–05
2	**2.117,65**	0,000472222	**20.000,00**	0,00005	**25.714,29**	3,88889E–05
3	**3.016,76**	0,000331481	**20.000,00**	0,00005	**23.478,26**	4,25926E–05
4	**4.207,79**	0,000237654	**20.000,00**	0,00005	**22.191,78**	4,50617E–05
5	**5.710,93**	0,000175103	**20.000,00**	0,00005	**21.409,69**	4,67078E–05
6	**7.496,14**	0,000133402	**20.000,00**	0,00005	**20.918,22**	4,78052E–05
7	**9.469,58**	0,000105601	**20.000,00**	0,00005	**20.602,92**	4,85368E–05
8	**11.485,34**	8,70675E–05	**20.000,00**	0,00005	**20.397,95**	4,90245E–05
9	**13.384,79**	7,47117E–05	**20.000,00**	0,00005	**20.263,55**	4,93497E–05
10	**15.043,37**	6,64745E–05	**20.000,00**	0,00005	**20.174,93**	4,95665E–05
11	**16.398,02**	6,0983E–05	**20.000,00**	0,00005	**20.116,28**	4,9711E–05
12	**17.445,32**	5,7322E–05	**20.000,00**	0,00005	**20.077,37**	4,98073E–05
13	**18.221,14**	5,48813E–05	**20.000,00**	0,00005	**20.051,51**	4,98715E–05
14	**18.777,86**	5,32542E–05	**20.000,00**	0,00005	**20.034,31**	4,99144E–05
15	**19.168,30**	5,21695E–05	**20.000,00**	0,00005	**20.022,86**	4,99429E–05
16	**19.437,74**	5,14463E–05	**20.000,00**	0,00005	**20.015,24**	4,99619E–05
17	**19.621,61**	5,09642E–05	**20.000,00**	0,00005	**20.010,15**	4,99746E–05
18	**19.746,14**	5,06428E–05	**20.000,00**	0,00005	**20.006,77**	4,99831E–05
19	**19.830,04**	5,04285E–05	**20.000,00**	0,00005	**20.004,51**	4,99887E–05
20	**19.886,37**	5,02857E–05	**20.000,00**	0,00005	**20.003,01**	4,99925E–05



3) Modelo de comportamiento de dos poblaciones:

a) El comportamiento de dos poblaciones en competencia viene dado por:

$$x_{t+1} = ax_t - by_t$$

$$y_{t+1} = -cx_t + dy_t$$

en donde a, b, c d son constante positiva; a, d > 1. Si inicialmente $x=x_o$ e $y=y_o$, ¿Bajo que condiciones se extingue alguna de las dos poblaciones?

Vamos definir $a = 1 + r_x$ y $d = 1 + r_y$.

Si se da que $b > r_x$ y $d > r_y$, las dos poblaciones se iran extinguiendo progresivamente, aunque las poblaciones iniciales sean igual a un autovector. Pero si una de las poblaciones, se extingue antes que la otra, la otra vuelve a crecer.

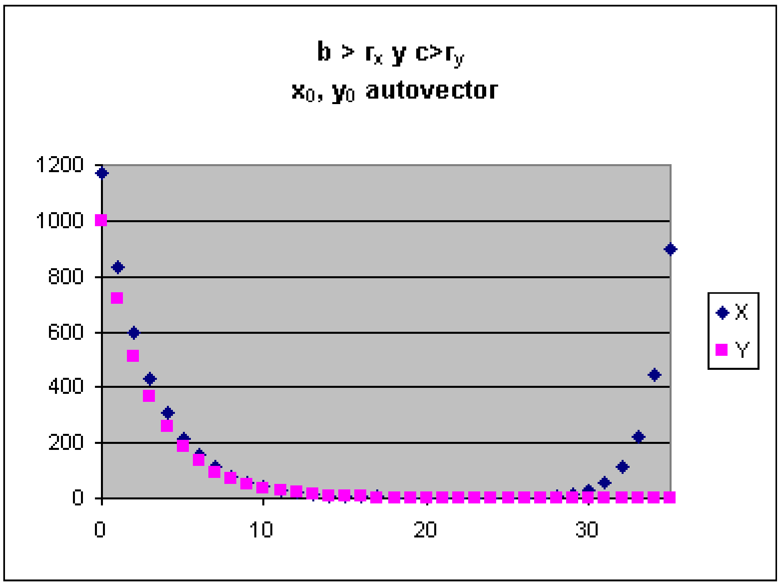
2	**-1,5**
-1,1	**2**

D= **2,35**

λ_1=3,284523

λ_2=0,715477

T	X	Y
0	1168	1000
1	835	715
2	598	512
3	428	366
4	306	262
5	219	187
6	157	134
7	112	96
8	80	69
9	57	49
10	41	35
:	:	:
25	1	0
26	2	0
27	4	0
28	7	0
29	14	0
30	28	0
:	:	:
40	28687	0



En caso contrario se extinguirá la población cuyo valor inicial sea menor que el valor del componente del autovector correspondiente.

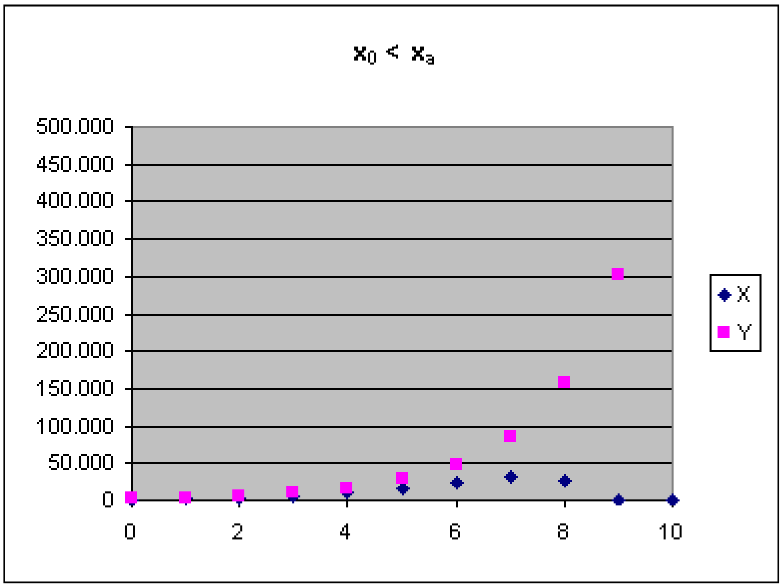
3	**-0,8**
-0,5	**2**

D= **5,6**

λ_1=3,30622577

λ_2=1,69377423

T	**X**	**Y**
0	1.220	2.000
1	2.060	3.390
2	3.468	5.750
3	5.804	9.766
4	9.599	16.630
5	15.494	28.460
6	23.712	49.174
7	31.798	86.492
8	26.201	157.084
9	0	301.068
10	0	602.136



Mientra que si la población inicial es igual a un autovector ambas crecerán indefinidamente

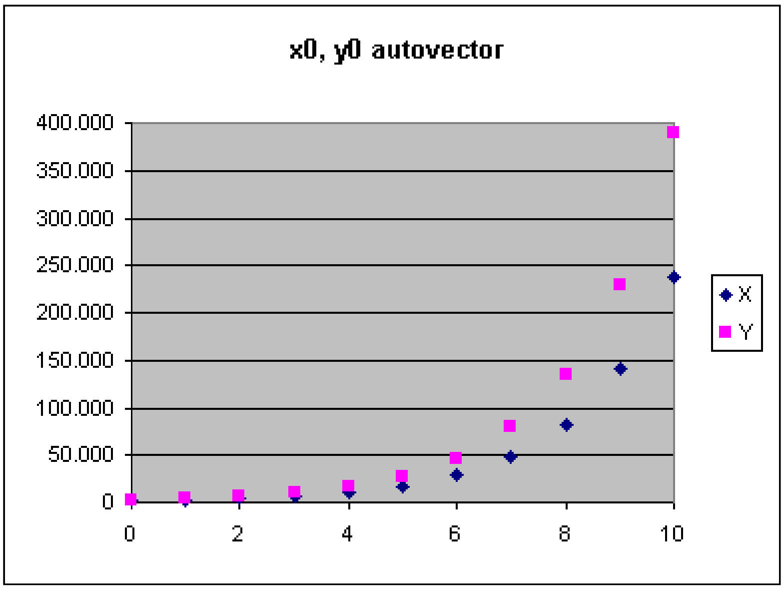
3	**-0,8**
-0,5	**2**

D= **5,6**

λ_1= 3,3062258

λ_2= 1,6937742

T	**X**	**Y**
0	1.225	2.000
1	2.075	3.388
2	3.514	5.738
3	5.952	9.718
4	10.081	16.461
5	17.076	27.881
6	28.922	47.224
7	48.988	79.987
8	82.975	135.480
9	140.540	229.472
10	238.044	388.674
:	:	:
20	46.260.692	75.533.636



b) ¿Como cambiaria el modelo anterior si la población x es depredadora de la población y? (Ejercicio)

4) Crecimiento de Población.

Se ha determinado que la población de ciertos insectos, más exactamente mosquitos viene dada por la siguiente ecuación:[4]

$$N_{t+1} = a \cdot N_t/(1 + b \cdot N_t) \qquad (1)$$

Para resolver esta ecuación empecemos por definir:

$$Y_t = 1/N_t \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) obtenemos:

$$\frac{1}{Y_{t+1}} = \frac{a\frac{1}{Y_t}}{1+b\frac{1}{Y_t}}$$

$$Y_{t+1} = \left(1/a\right) Y_t \left(1 + b\frac{1}{Y_t}\right)$$

$$Y_{t+1} = \left(1/a\right) Y_t + \left(b/a\right)$$

$$Y_{t+1} - (1/a)\, Y_t = b/a \qquad (3)$$

Es de notar que la ecuación (3), si $a \neq 1$, es de la misma forma que la ecuación **f** con $A = 1/a$ y $B = b/a$ y por los tanto tendrá como solución:

$$Y_t = (b/a)/(1 - 1/a) + [Y_0 - (b/a)/(1 - 1/a)](1/a)^t \qquad (4)$$

Sustituyendo $N_t = 1/Y_t$, en (4) se tendrá:

$$N_t = \frac{1}{\frac{\frac{b}{a}}{(1-1/a)} + \left[\frac{1}{N_0} - \frac{\frac{b}{a}}{(1-1/a)}\right](1/a)^t}$$

$$N_t = \frac{(1-1/a)}{\frac{b}{a} + \left[\frac{1}{N_0}(1-1/a) - \frac{b}{a}\right](1/a)^t} \qquad (5)$$

Mientras que si $a = 1$, la ecuación (3) se transforma en:

$$\Delta Y_t = b \qquad (3')$$

---

[4] Ver Svirezhev y Logofet

ecuación del tipo **b** que tiene como solución:

$$Y_t = Y_t + b\cdot t \qquad (4´)$$

Sustituyendo $N_t = 1/Y_t$, en (4') se tendrá:

$$N_t = \frac{1}{\frac{1}{N_0} - b \cdot t}$$

$$N_t = \frac{N_0}{1 + b \cdot N_0 \cdot t} \qquad (5)$$

Comportamiento de la solución:

Si a > 1 entonces el punto de equilibrio N_e es (a–1)/b, de lo contrario será 0. El valor de b influirá en la velocidad de aproximación al punto de equilibrio. De esta manera se tienen los siguientes comportamientos:

a) Si a > 1, y $N_o < N_e$, la población crecerá acercándose asintóticamente a su punto de equilibrio N_e.

b) Si a > 1, y $N_o > N_e$,, la población disminuirá acercándose asintóticamente a su punto de equilibrio N_e.

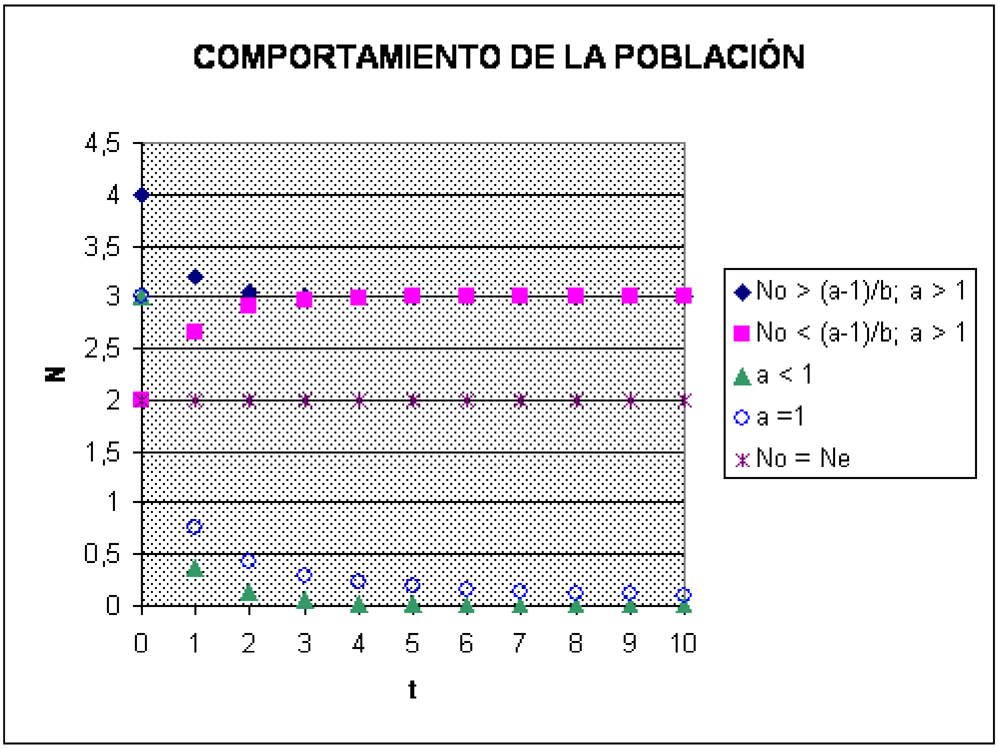
c) Si a < 1, la población disminuirá acercándose asintóticamente, de manera exponencial, a su punto de equilibrio 0.

d) Si a = 1, la población disminuirá acercándose asintóticamente, de manera inversamente proporcional, a su punto de equilibrio 0.

e) Si $N_o = N_e$, la población permanecerá constante en su punto de equilibrio N_e.

Parámetros					
a =	4	4	0,5	1	3
b =	1	1	1	1	1
N_0 =	4	2	3	3	2
N_e =	3	3	0	0	2

T	No > (a–1)/b; a > 1	No < (a–1)/b; a > 1	a < 1	a =1	No = Ne
0	4	2	3	3	2
1	3,2	2,666666667	0,375	0,75	2
2	3,047619048	2,909090909	0,136363636	0,428571429	2
3	3,011764706	2,976744186	0,06	0,3	2
4	3,002932551	2,994152047	0,028301887	0,230769231	2
5	3,000732601	2,998535871	0,013761468	0,1875	2
6	3,000183117	2,999633834	0,00678733	0,157894737	2
7	3,000045777	2,99990845	0,003370787	0,136363636	2
8	3,000011444	2,999977112	0,001679731	0,12	2
9	3,000002861	2,999994278	0,000838457	0,107142857	2
10	3,000000715	2,999998569	0,000418877	0,096774194	2



5) Modelo de población por estructura de edad:

Se supone que se tiene n estratos de la población ordenados según la edad. Cada grupo tiene una tasa nacimiento b_i, una tasa de supervivencia s_i de los que pasan en un periodo de un estrato al siguiente estrato y otra tasa de supervivencia de los que se quedan en el mismo estrato p_i:

De esta manera se tiene el siguiente modelo:

$$X_{1,t+1} = p_1 \bullet X_{1,t} + \sum_{i=1,n} b_i \bullet X_{i,t}$$

$$X_{i,t+1} = p_i \bullet X_{i,t} + s_{i-1} \bullet X_{i-1,t}$$

En el caso en que los estratos coincidan con las unidades de los periodos se tiene entonces:

$$X_{1,t+1} = \sum_{i=1,n} b_i \bullet X_{i,t}$$

$$X_{i,t+1} = s_{i-1} \bullet X_{i-1,t}$$

CAPÍTULO 8

MODELOS ECONÓMICOS

A.– MODELOS DE PRIMER ORDEN

1) El modelo de la Telaraña.

El modelo:

Se considera una situación en la cual la decisión de producir debe ser hecha en un periodo anterior al de la venta real.

Supóngase que la decisión de producción en el periodo t (Q_t) se basa en el precio vigente (P_t). Sin embargo, puesto que esta producción no estará disponible para la venta hasta el periodo (t+1), P_t determinará no O_t sino O_{t+1}. Por lo tanto, se tendrá una función de oferta desfasada:

$$O_{t+1} = O(P_t),$$

o retrasando el índice:

$$O_t = O(P_{t-1}).$$

Mientras que la demanda en el periodo t (D_t) depende de los precios en este periodo:

$$D_t = D(P_t).$$

Y se supone que no existen excedentes, ni por parte de la Oferta, ni por parte de la demanda:

$$D_t = O_t.$$

De ésta manera, suponiendo las funciones de oferta y demanda sean lineales, queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$D_t = O_t.$$
$$D_t = \alpha - ß \cdot P_t \qquad (\alpha, ß > 0)$$
$$O_t = -\gamma + \delta \cdot P_{t-1} \qquad (\gamma, \delta > 0)$$

Solución del modelo:

Sustituyendo las dos últimas ecuaciones en la primera:

$$\alpha - ß \cdot P_t = -\gamma + \delta \cdot P_{t-1},$$

arreglando los términos:

$$ß \cdot P_t + \delta \cdot P_{t-1} = \alpha + y$$

normalizando la ecuación respecto a los índices y a los coeficientes:

$$P_{t+1} + (\delta/ß) \cdot P_t = (\alpha + \gamma)/ß;$$

haciendo:

$$A = -(\delta/ß) \text{ y } B = (\alpha + \gamma)/ß,$$

Dado que $A \neq 1$, ya que $A < 0$, se tiene la ecuación (f) cuya solución es:

$$P_t = B/(1 - A) + [P_o - B/(1 - A)]\bullet A^t,$$

o sea:

$$P_t = ((\alpha + \gamma)/ß)/(1+(\delta/ß))+[P_o-((\alpha + \gamma)/ß)/(1+(\delta/ß))]\bullet(-\delta/ß)^t,$$

simplificando:

$$P_t = (\alpha + \gamma)/(ß + \delta) + [P_o - (\alpha + \gamma)/(ß + \delta)]\bullet(-\delta/ß)^t.$$

Análisis de la solución:

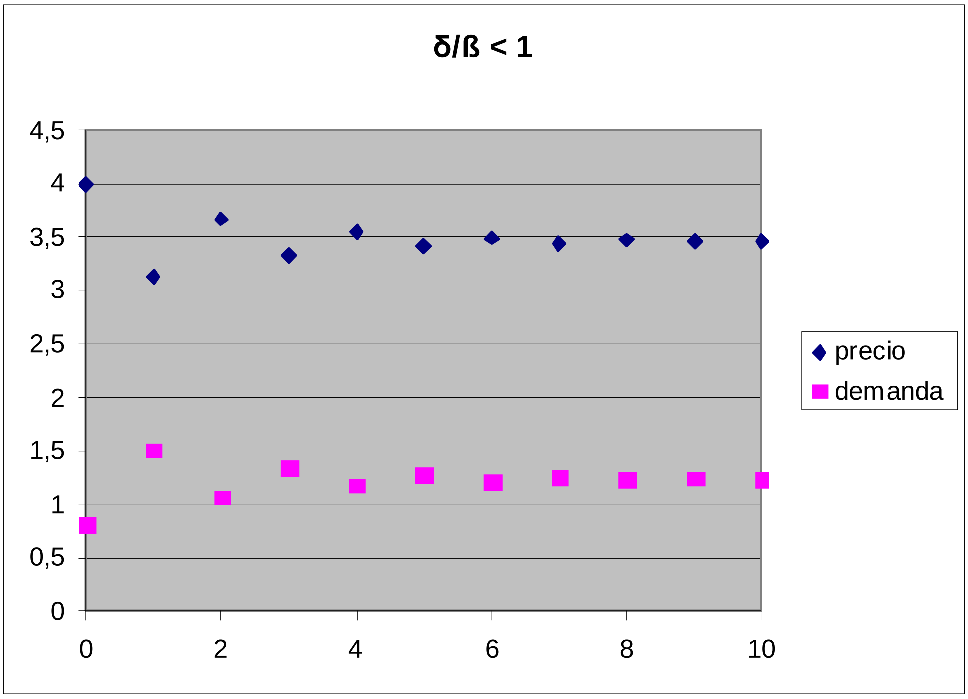
1) Es fácil ver que el comportamiento de P es oscilatorio, dado que $A = -(\delta/ß)$ es negativo.

2) El punto de equilibrio es: $P^* = (\alpha + \gamma)/(ß + \delta)$.

3) Que la trayectoria de P será, suponiendo $P_o \neq P^*$:
   a) amortiguado (o sea convergente) si $\delta/ß < 1$,

β =	**0.8**
γ =	**0.5**
δ =	**0.5**
Po =	**4**
P* =	**3.46153846**

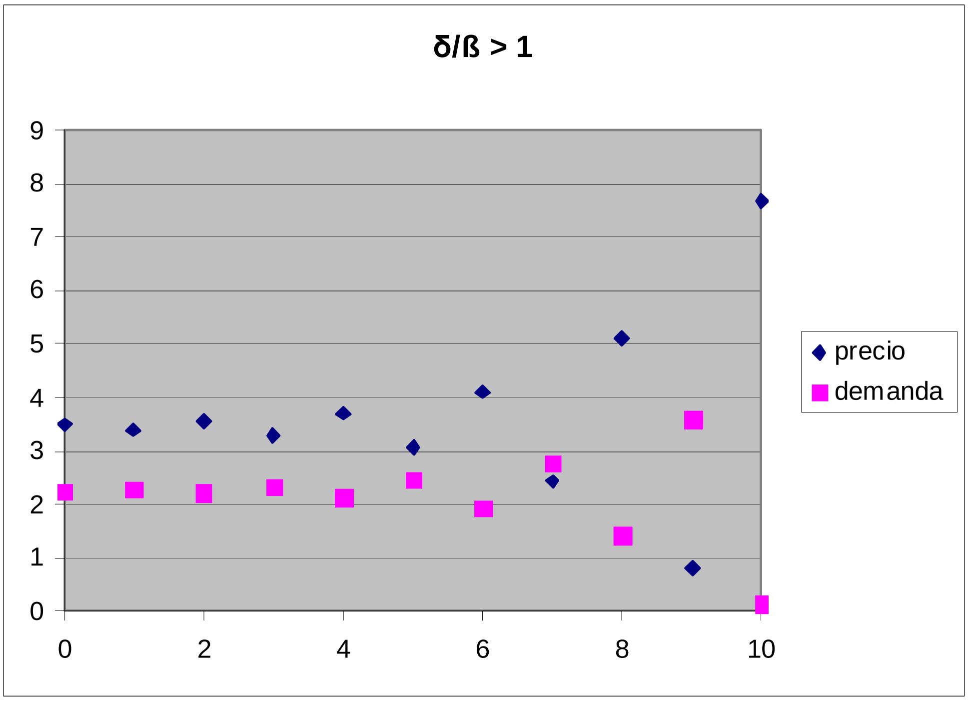
t	**P**	**D**	**O**
0	4	0.8	
1	3.125	1.5	1.5
2	3.671875	1.0625	1.0625
3	3.33007813	1.3359375	1.3359375
4	3.54370117	1.16503906	1.16503906
5	3.41018677	1.27185059	1.27185059
6	3.49363327	1.20509338	1.20509338
7	3.44147921	1.24681664	1.24681664
8	3.4740755	1.2207396	1.2207396
9	3.45370281	1.23703775	1.23703775
10	3.46643574	1.22685141	1.22685141



b) divergente o explosivo si $\delta/ß > 1$,

α =	**4**
β =	**0,5**
γ =	**0,5**
δ =	**0,8**
Po =	**3,5**
P* =	**3,46153846**

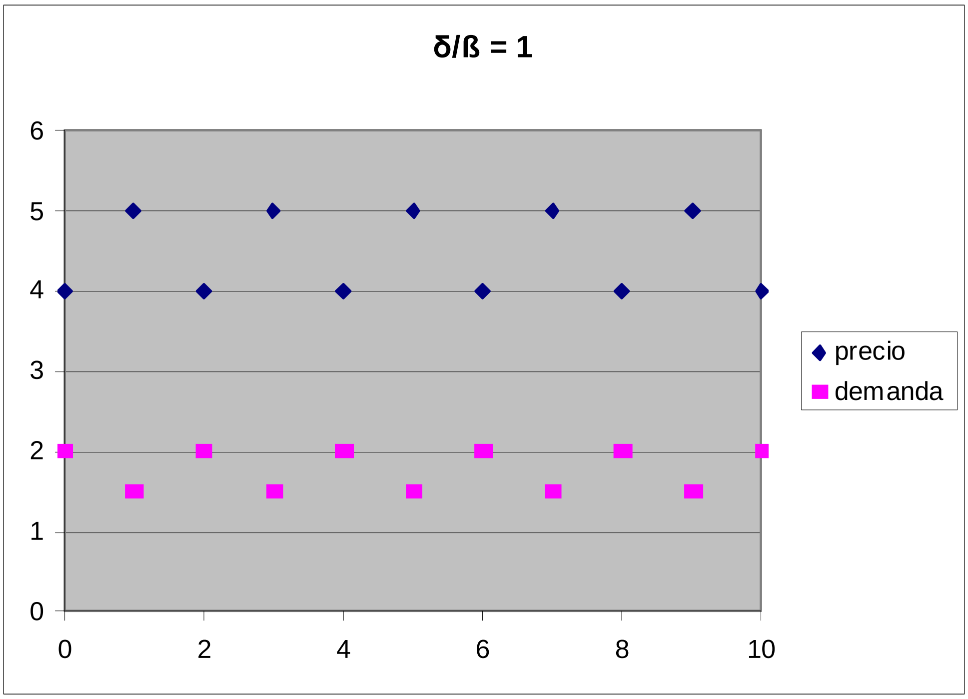
t	P	D	O
0	3,5	2,25	
1	3,4	2,3	2,3
2	3,56	2,22	2,22
3	3,304	2,348	2,348
4	3,7136	2,1432	2,1432
5	3,05824	2,47088	2,47088
6	4,106816	1,946592	1,946592
7	2,4290944	2,7854528	2,7854528
8	5,11344896	1,44327552	1,44327552
9	0,81848166	3,59075917	3,59075917
10	7,69042934	0,15478533	0,15478533



c) y alternado, si δ/ß = 1

α =	**4**
β =	**0,5**
γ =	**0,5**
δ =	**0,5**
Po =	**4**
P* =	**4,5**

t	**P**	**D**	**O**
0	4	2	
1	5	1,5	1,5
2	4	2	2
3	5	1,5	1,5
4	4	2	2
5	5	1,5	1,5
6	4	2	2
7	5	1,5	1,5
8	4	2	2
9	5	1,5	1,5
10	4	2	2



2) Modelo de Mercado con Inventario.

El Modelo:

Se supone que tanto la cantidad demandada (D_t) y la cantidad ofrecida corrientemente (O_t) son funciones lineales no desfasadas del precio P_t.

El ajuste del precio se efectúa no a través del equilibrio del mercado en cada periodo, sino a través de la selección del precio por los vendedores, tomando en cuenta la situación de las existencias del periodo anterior, de manera tal que si aumenta el inventario se disminuye el precio.

El ajuste anterior se supone que es proporcional al cambio observado en los inventarios (existencias), con la constante de proporcionalidad negativa.

De esta manera se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$D_t = \alpha - ß \bullet P_t$ $\quad (\alpha, ß > 0)$

$O_t = -\gamma + \delta \bullet P_t$ $\quad (\gamma, \delta > 0)$

$P_{t+1} = P_t - \sigma \bullet (O_t - D_t)$ $\quad (\sigma > 0)$.

Solución del modelo:

Sustituyendo las dos primeras ecuaciones en la última:

$$P_{t+1} = P_t - \sigma \bullet (-\gamma + \delta \bullet P_t - (\alpha - ß \bullet P_t)),$$

agrupando:

$$P_{t+1} = \sigma \bullet (\alpha + \gamma) + (1 - \sigma \bullet (ß + \delta)) \bullet P_t,$$

para al final al tener:

$$P_{t+1} - (1 - \sigma \bullet (ß + \delta)) \bullet P_t = \sigma \bullet (\alpha + \gamma)$$

haciendo:

$$A = 1 - \sigma \bullet (ß + \delta) \text{ y } B = \sigma \bullet (\alpha + \gamma),$$

Dado que A < 1, se tiene la ecuación (f) cuya solución es:

$$P_t = B/(1 - A) + [Po - B/(1 - A)] \bullet A^t,$$

o sea:

$$P_t = \sigma \bullet (\alpha + \gamma)/(1 - (1 - \sigma \bullet (ß + \delta))) + [P_o - \sigma \bullet (\alpha + \gamma)/(1 - (1 - \sigma \bullet (ß + \delta)))] \bullet (1 - \sigma \bullet (ß + \delta))^t,$$

Simplificando:

$$P_t = (\alpha + \gamma)/(ß + \delta) + [P_o - (\alpha + \gamma)/(ß + \delta)] \bullet (1 - \sigma \bullet (ß + \delta))^t,$$

Análisis de la solución:

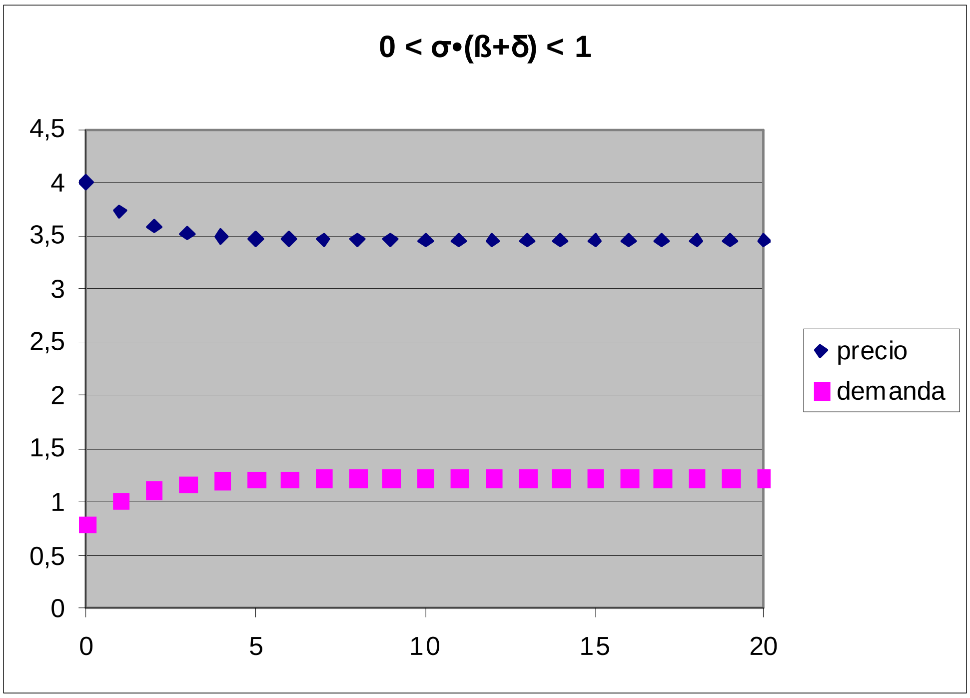
1) El punto de equilibrio es: $P^* = (\alpha + \gamma)/(ß + \delta)$.

2) Que la trayectoria de P será, suponiendo $P_o \neq P^*$:

   a) Monótona convergente si $0 < \sigma \bullet (ß+\delta) < 1$,

α =	**4**
β =	**0,8**
γ =	**0,5**
δ =	**0,5**
σ =	**0,38461538**
Po =	**4**
P* =	**3,46153846**

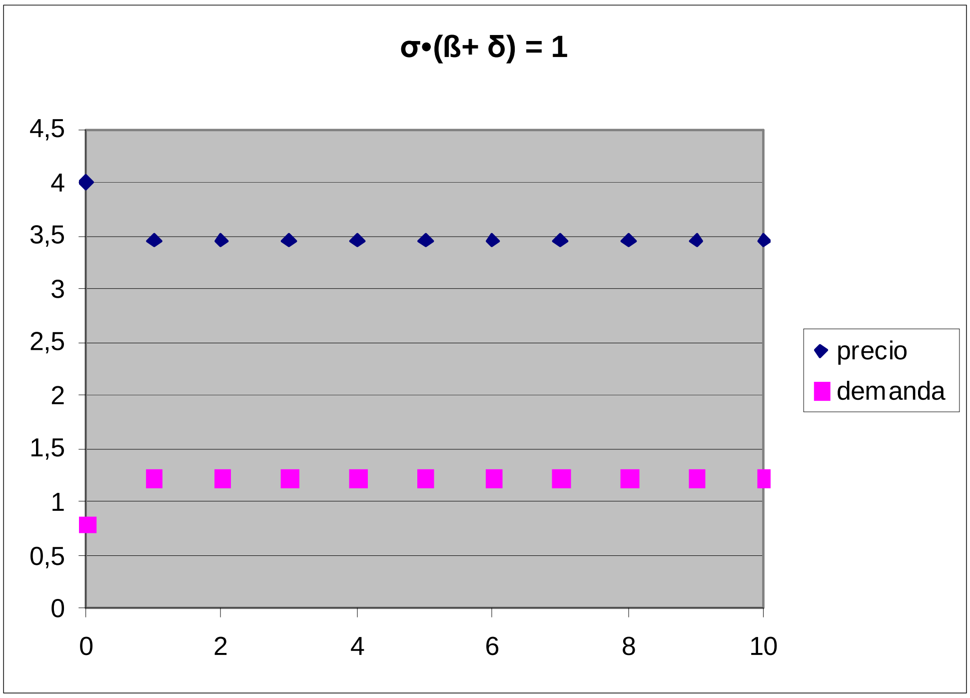
t	**P**	**D**	**O**
0	4	0,8	1,5
1	3,73076923	1,01538462	1,36538462
2	3,59615385	1,12307692	1,29807692
3	3,52884615	1,17692308	1,26442308
4	3,49519231	1,20384615	1,24759615
5	3,47836538	1,21730769	1,23918269
6	3,46995192	1,22403846	1,23497596
7	3,46574519	1,22740385	1,2328726
8	3,46364183	1,22908654	1,23182091
9	3,46259014	1,22992788	1,23129507
10	3,4620643	1,23034856	1,23103215
:	:	:	:
20	3,46153898	1,23076882	1,23076949



b) Constante si σ•(ß+ δ) = 1,

α =	**4**
β =	**0,8**
γ =	**0,5**
δ =	**0,5**
σ =	**0,76923077**
Po =	**4**
P* =	**3,46153846**

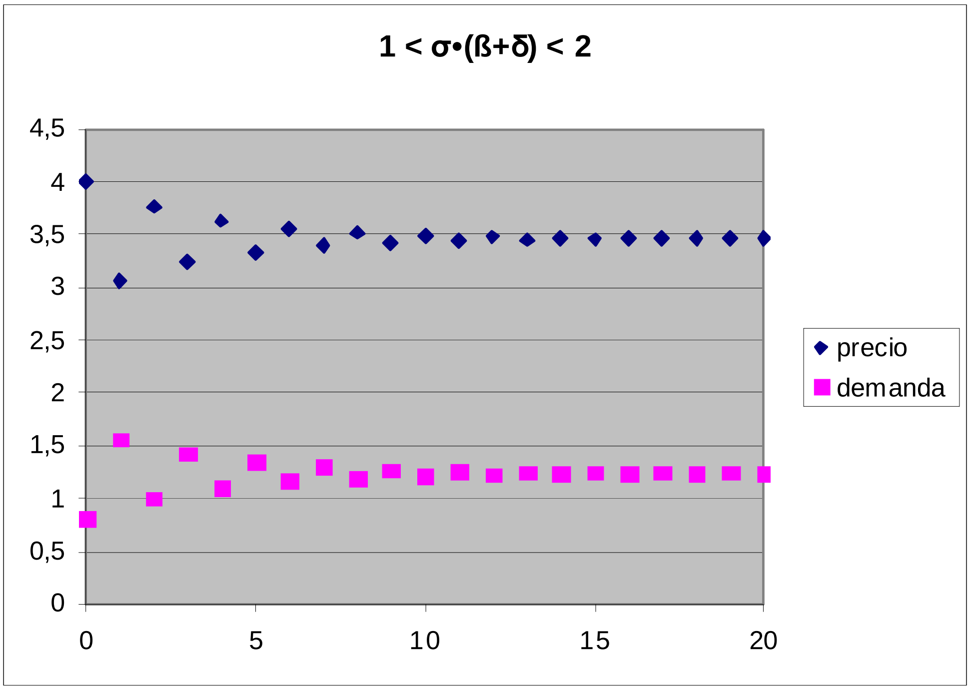
t	P	D	O
0	4	0,8	1,5
1	3,46153846	1,23076923	1,23076923
2	3,46153846	1,23076923	1,23076923
3	3,46153846	1,23076923	1,23076923
4	3,46153846	1,23076923	1,23076923
5	3,46153846	1,23076923	1,23076923
6	3,46153846	1,23076923	1,23076923
7	3,46153846	1,23076923	1,23076923
8	3,46153846	1,23076923	1,23076923
9	3,46153846	1,23076923	1,23076923
10	3,46153846	1,23076923	1,23076923



c) oscilatorio amortiguado si $1 < \sigma \bullet (ß+\delta) < 2$,

α =	**4**
β =	**0,8**
γ =	**0,5**
δ =	**0,5**
σ =	**1,34615385**
Po =	**4**
P* =	**3,46153846**

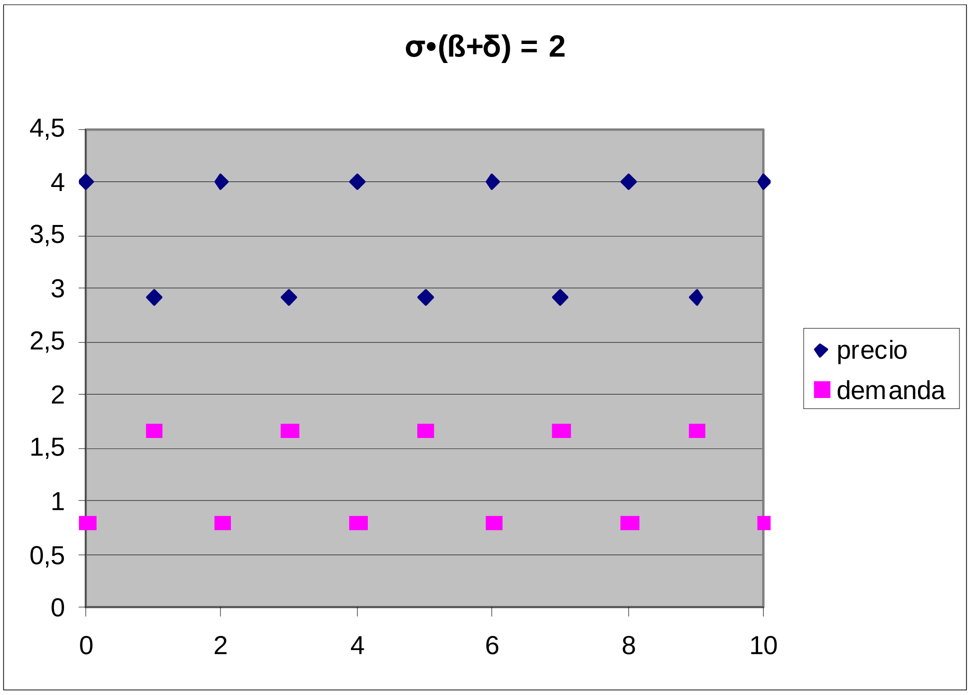
t	P	D	O
0	4	0,8	1,5
1	3,05769231	1,55384615	1,02884615
2	3,76442308	0,98846154	1,38221154
3	3,234375	1,4125	1,1171875
4	3,63191106	1,09447115	1,31595553
5	3,33375901	1,33299279	1,16687951
6	3,55737305	1,15410156	1,27868652
7	3,38966252	1,28826998	1,19483126
8	3,51544542	1,18764367	1,25772271
9	3,42110825	1,2631134	1,21055412
10	3,49186112	1,2065111	1,24593056
:	:	:	:
20	3,46324604	1,22940317	1,23162302



d) oscilatorio uniforme si $\sigma \cdot (ß+\delta) = 2$,

α =	**4**
β =	**0,8**
γ =	**0,5**
δ =	**0,5**
σ =	**1,53846154**
Po =	**4**
P* =	**3,46153846**

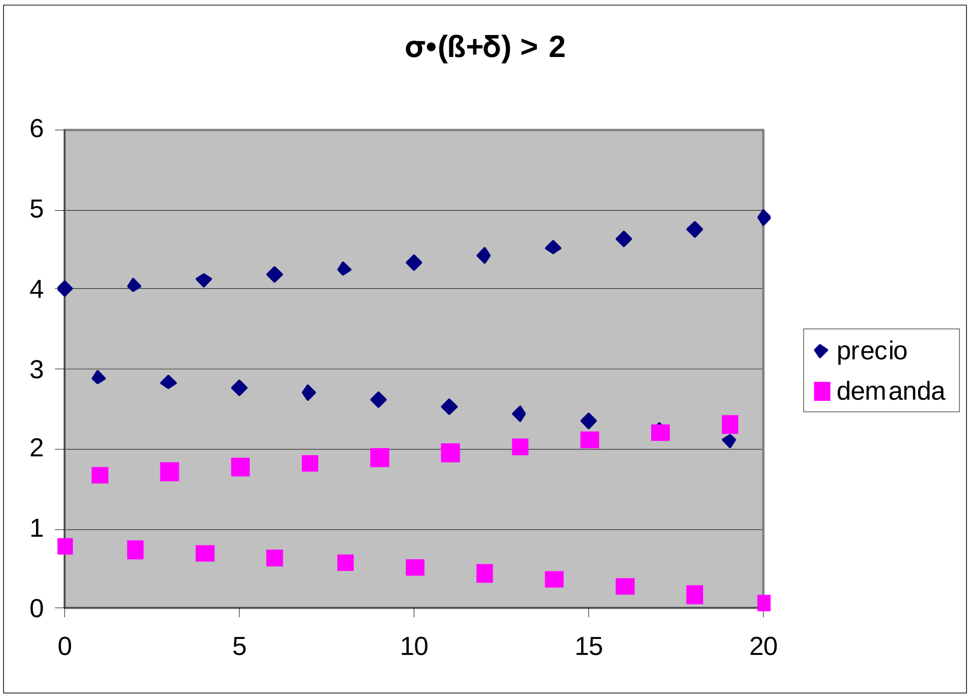
t	**P**	**D**	**O**
0	4	0,8	1,5
1	2,92307692	1,66153846	0,96153846
2	4	0,8	1,5
3	2,92307692	1,66153846	0,96153846
4	4	0,8	1,5
5	2,92307692	1,66153846	0,96153846
6	4	0,8	1,5
7	2,92307692	1,66153846	0,96153846
8	4	0,8	1,5
9	2,92307692	1,66153846	0,96153846
10	4	0,8	1,5



e) y oscilatorio explosivo si $\sigma \cdot (ß+\delta) > 2$.

α =	**4**
β =	**0,8**
γ =	**0,5**
δ =	**0,5**
σ =	**1,57692308**
Po =	**4**
P* =	**3,46153846**

t	**P**	**D**	**O**
0	4	0,8	1,5
1	2,89615385	1,68307692	0,94807692
2	4,05519231	0,75584615	1,52759615
3	2,83820192	1,72943846	0,91910096
4	4,11604183	0,70716654	1,55802091
5	2,77430993	1,78055206	0,88715496
6	4,18312842	0,65349726	1,59156421
7	2,703869	1,8369048	0,8519345
8	4,25709139	0,59432689	1,6285457
9	2,62620788	1,89903369	0,81310394
10	4,33863557	0,52909155	1,66931778
:	:	:	:
19	2,10087297	2,31930162	0,55043649
20	4,89023723	0,08781022	1,94511861



3) Modelo de Renta Nacional.

El Modelo:

Se suponen las siguientes macromagnitudes:

– La "Renta Nacional" (Y),

– el "Consumo" (C) y

– la "Inversión" (I),

todas referidas al tiempo de manera tal que se cumpla la igualdad keynesiana:

$$Y_t = C_t + I_t.$$

Se formulan las siguientes hipótesis:

1.– La función de consumo, $C = C(Y)$, es de carácter lineal:

$$C_t = a + c \cdot Y_t \qquad (a \geq 0,\ 0 < c < 1)$$

(c es la propensión marginal al consumo).

2.– El sistema económico se supone en régimen de pleno empleo. Ello implica que un determinado volumen de renta, destinado a la inversión, una vez se haya verificado ésta, provocará un incremento en la capacidad del sistema, y en consecuencia, en la propia renta nacional:

$$\Delta Y_t = Y_{t+1} - Y_t = r \cdot I_t \qquad (r > 0)$$

(r se lo que se denomina factor de crecimiento).

De esta manera el modelo se expresa mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$Y_t = C_t + I_t.$$

$$C_t = a + c \bullet Y_t \qquad (a \geq 0,\ 0 < c < 1)$$

$$Y_{t+1} - Y_t = r \bullet I_t \qquad (r > 0).$$

Solución del modelo:

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera, y ésta en la tercera:

$$Y_{t+1} - Y_t = r \bullet (Y_t - (a + c \bullet Y_t))$$

Agrupando términos:

$$Y_{t+1} - (1 + r \bullet (1 - c)) \bullet Y_t = - r \bullet a,$$

haciendo

$$A = 1 + r \bullet (1 - c) \quad \text{y} \quad B = - r \bullet a$$

se tiene, por ser $A > 1$, la siguiente solución:

$$Y_t = B/(1 - A) + [Y_o - B/(1 - A)] \bullet A^t,$$

o sea:

$$Y_t = a/(1 - c) + [Y_o - a/(1 - c)] \bullet (1+r \bullet (1-c))^t.$$

Análisis de la solución:

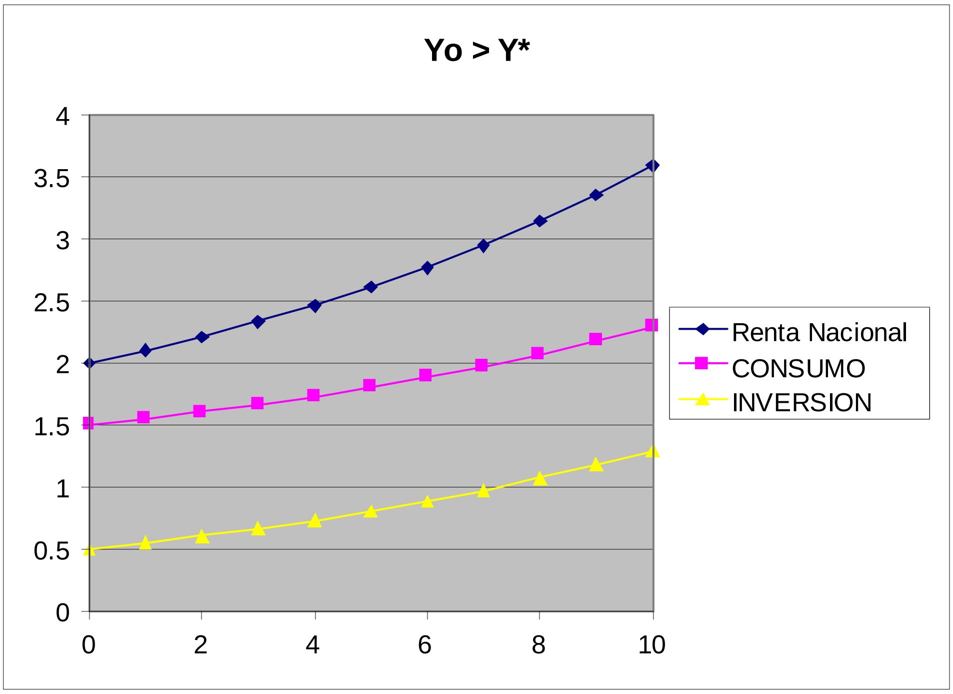
1) El punto de equilibrio es: $Y^* = a/(1 - c)$.

2) Que la trayectoria de Y será:

a) Si $Y_o > Y^*$, monótona creciente,

a =	**0,5**
c =	**0,5**
r =	**0,2**
Yo =	**2**
Y* =	**1**

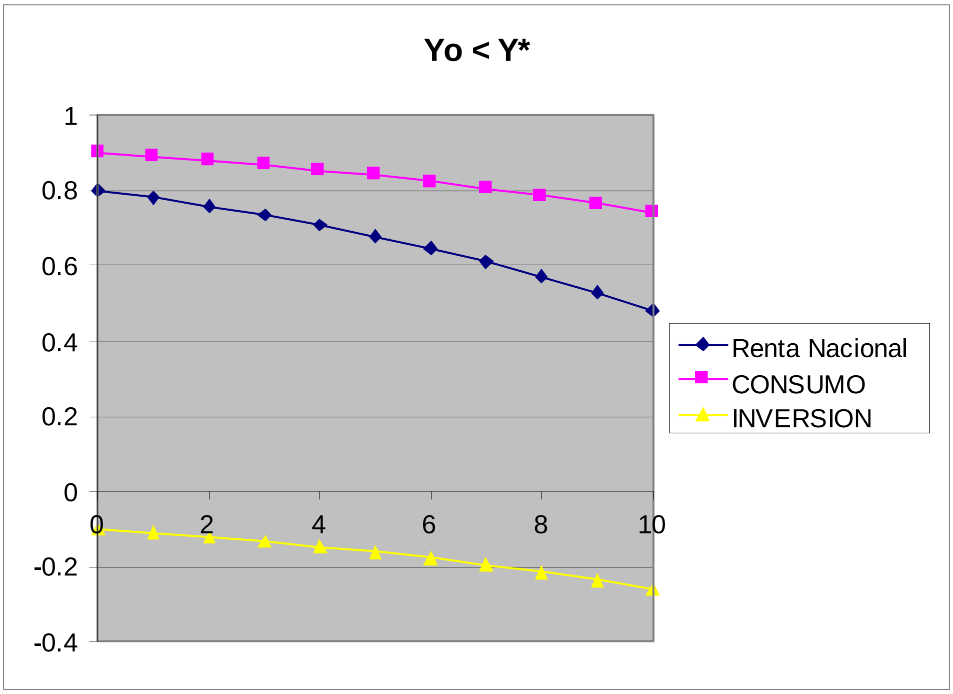
t	**Y**	**C**	**I**
0	2	1,5	0,5
1	2,1	1,55	0,55
2	2,21	1,605	0,605
3	2,331	1,6655	0,6655
4	2,4641	1,73205	0,73205
5	2,61051	1,805255	0,805255
6	2,771561	1,8857805	0,8857805
7	2,9487171	1,97435855	0,97435855
8	3,14358881	2,07179441	1,07179441
9	3,35794769	2,17897385	1,17897385
10	3,59374246	2,29687123	1,29687123



b) y Si $Y_o < Y^*$, monótona decreciente.

a =	**0,5**
c =	**0,5**
r =	**0,2**
Yo =	**0,8**
Y* =	**1**

t	**Y**	**C**	**I**
0	0,8	0,9	–0,1
1	0,78	0,89	–0,11
2	0,758	0,879	–0,121
3	0,7338	0,8669	–0,1331
4	0,70718	0,85359	–0,14641
5	0,677898	0,838949	–0,161051
6	0,6456878	0,8228439	–0,1771561
7	0,61025658	0,80512829	–0,19487171
8	0,57128224	0,78564112	–0,21435888
9	0,52841046	0,76420523	–0,23579477
10	0,48125151	0,74062575	–0,25937425



4) Modelo de Harrod.

El Modelo:

Trata de explicar la dinámica del crecimiento en la Economía.

Se suponen las siguientes macromagnitudes:

– La "Renta Nacional" (Y),
- el "Ahorro" (S), y
- la "Inversión" (I).

Se formulan las siguientes hipótesis:

1.– El ahorro es una porción del Ingreso:

$$S_t = s \bullet Y_t \qquad (0 < s < 1)$$

(s es la propensión marginal al ahorro).

2.– El principio de aceleración, o sea, la inversión es proporcional al índice de cambio de los ingresos nacionales con el tiempo:

$$I_t = a \bullet \Delta Y_t = a \bullet (Y_t - Y_{t-1}) \qquad (a > 1)$$

(a es la razón marginal capital/producción).

3.– En equilibrio la inversión es igual al ahorro:

$$I_t = S_t.$$

De esta manera el modelo se expresa mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$S_t = s \bullet Y_t \qquad (0 < s < 1)$$
$$I_{t+1} = a \bullet (Y_{t+1} - Y_t) \qquad (a > 0)$$
$$I_t = S_t.$$

Solución del modelo:

Sustituyendo las dos primeras ecuaciones en la tercera desplazada:

$$a \bullet (Y_{t+1} - Y_t) = s \bullet Y_{t+1}$$

Agrupando términos y normalizando:

$$Y_{t+1} - a/(a - s) \bullet Y_t = 0,$$

haciendo

$$A = a/(a - s)$$

se tiene, por ser $A \neq 1$, la siguiente solución:

$$Y_t = Y_o \bullet A^t,$$

o sea:

$$Y_t = Y_o \bullet (a/(a-s))^t.$$

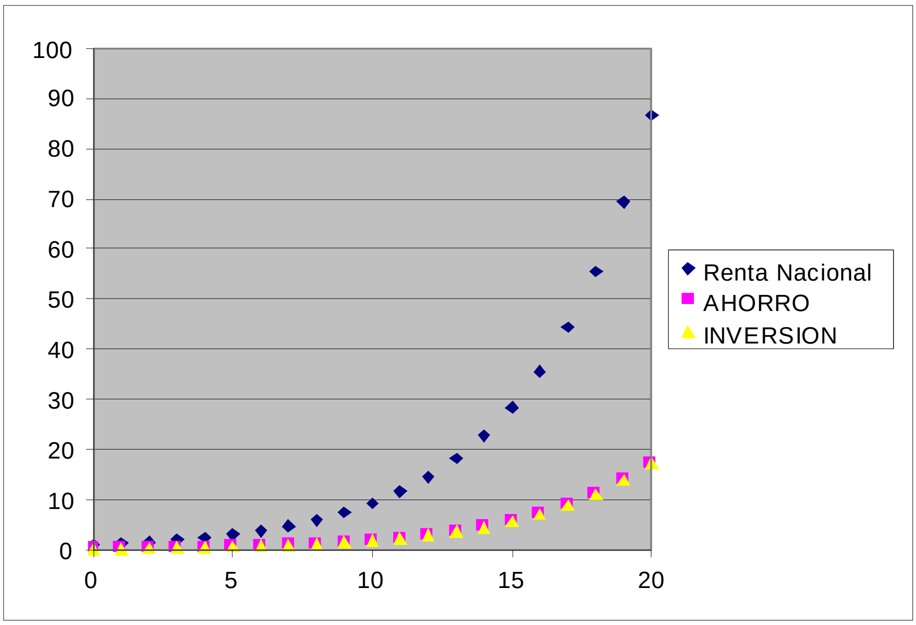
Análisis de la solución:

Dado que $a > 0$, y $0 < s < 1$, entonces:

a > s, para que el Ingreso Y sea todo el tiempo positivo, y por lo tanto se tiene que a/(a–s) > 1; por lo cual el comportamiento del Ingreso nacional es monótono creciente (explosivo).

a =	**1**
s =	**0,2**
Yo =	**1**
Y* =	**1,25**

t	**Y**	**S**	**I**
0	1	0,2	0,2
1	1,25	0,25	0,25
2	1,5625	0,3125	0,3125
3	1,953125	0,390625	0,390625
4	2,44140625	0,48828125	0,48828125
5	3,05175781	0,61035156	0,61035156
6	3,81469727	0,76293945	0,76293945
7	4,76837158	0,95367432	0,95367432
8	5,96046448	1,1920929	1,1920929
9	7,4505806	1,49011612	1,49011612
10	9,31322575	1,86264515	1,86264515
:	**:**	**:**	**:**
20	86,7361738	17,3472348	17,3472348



B.– MODELOS DE SEGUNDO ORDEN.

1.– El Modelo de Samuelson de la Interacción entre el Multiplicador y el Acelerador.

El modelo:

1.– Se supone que la renta nacional (Y) consta de tres corrientes: Consumo (C), Inversión (I) y Gasto Público (G):

$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

2.– El consumo se define como una función de la renta actual, sino de la renta del periodo anterior; y para simplificar se supone de que este consumo es proporcional a dicha renta:

$$C_t = C(Y_{t-1}) = \gamma \bullet Y_{t-1} \qquad (0 < \gamma < 1)$$

3.– La inversión de mantiene en una relación fija con respecto al incremento en el consumo:

$$I_t = \alpha \bullet \Delta C_{t-1} = \alpha \bullet (C_t - C_{t-1}) \qquad (\alpha > 0)$$

4.– El gasto Público se supone constante:

$$G_t = G_o$$

De esta manera el modelo queda representado con el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} &Y_t = C_t + I_t + G_o \\ &C_t = \gamma \bullet Y_{t-1} && (0 < \gamma < 1) \\ &I_t = \alpha \bullet (C_t - C_{t-1}) && (\alpha > 0) \end{aligned}$$

Solución del modelo:

Sustituyendo la segunda ecuación en la última y el resultado en la primera:

$$Y_t = \gamma \bullet Y_{t-1} + \alpha \bullet (\gamma \bullet Y_{t-1} - \gamma \bullet Y_{t-2}) + G_o$$

reagrupando términos y normalizando:

$$Y_{t+2} - \gamma \bullet (1 + \alpha) \bullet Y_{t+1} + \alpha \bullet \gamma \bullet Y_t = G_o.$$

Las raíces características de esta ecuación son:

$$m_1 = (\gamma(1 + \alpha) + \sqrt{\gamma^2(1 + \alpha)^2 - 4\alpha\gamma})/2$$
$$m_2 = (\gamma(1 + \alpha) - \sqrt{\gamma^2(1 + \alpha)^2 - 4\alpha\gamma})/2$$

las cuales serán:

a) reales y diferentes si:

$$\gamma > 4 \bullet \alpha/(1+ \alpha)^2;$$

b) reales iguales si:

$$\gamma = 4 \bullet \alpha/(1+\alpha)^2;$$

c) y complejas si:

$$\gamma < 4 \bullet \alpha/(1+\alpha)^2;$$

Mientras que la solución particular será:

$$Y_p = G_o/(1 - y).$$

y representa el punto de equilibrio.

Además, es de notar que nunca una de las raíces puede valer uno (1), ya que: $0 < \gamma < 1$.

Análisis de la solución:

Caso 1: Dos raíces reales distintas: $\gamma > 4 \bullet \alpha/(1+\alpha)^2$.

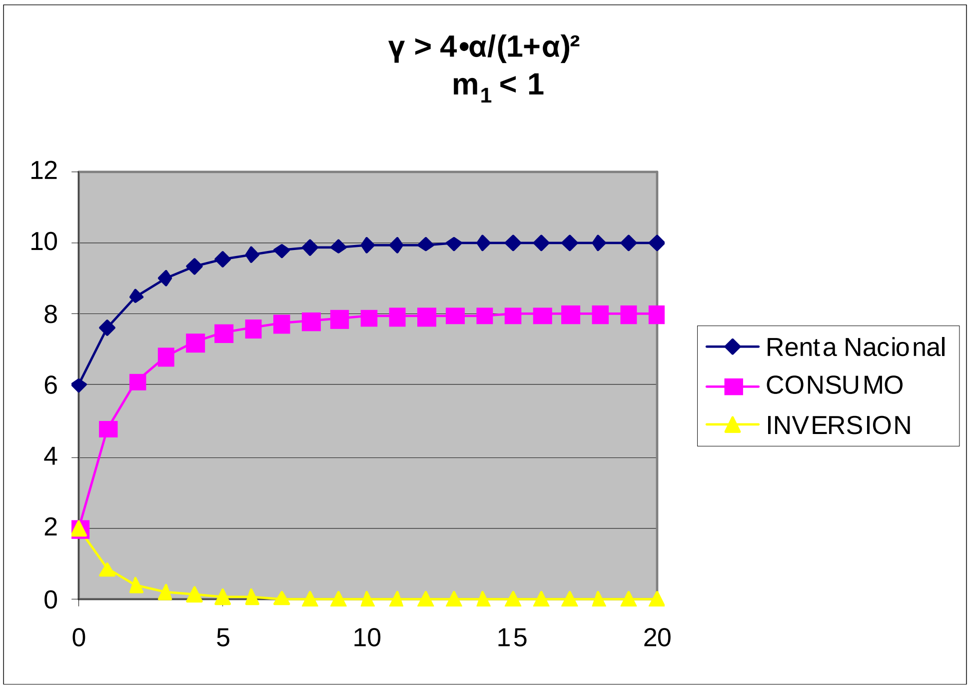
Es claro que tanto m_1 como m_2 son positivas y que $m_1 > m_2$, por lo tanto:

a) la solución será convergente si $m_1 < 1$, y esta condición se da si $\gamma \bullet (1+\alpha) < 2$. O sea, combinando con la condición para que las raíces sean reales y distintas y $0 < \gamma < 1$, $\alpha < 1$.

α =	**0,3**
γ =	**0,8**
Go =	**2**
Co =	**2**
Io =	**2**
Y* =	**10**

m1=0,69435596
m2=0,34564404

t	Y	C	I	G
0	6	2	2	2
1	7,64	4,8	0,84	2
2	8,5056	6,112	0,3936	2
3	9,012224	6,80448	0,207744	2
4	9,33136896	7,2097792	0,12158976	2
5	9,54168996	7,46509517	0,07659479	2
6	9,68382901	7,63335197	0,05047704	2
7	9,78117658	7,74706321	0,03411337	2
8	9,84830468	7,82494126	0,02336342	2
9	9,89475449	7,87864374	0,01611074	2
10	9,92695154	7,91580359	0,01114795	2
:	:	:	:	:
20	9,99809778	7,99780837	0,00028942	2

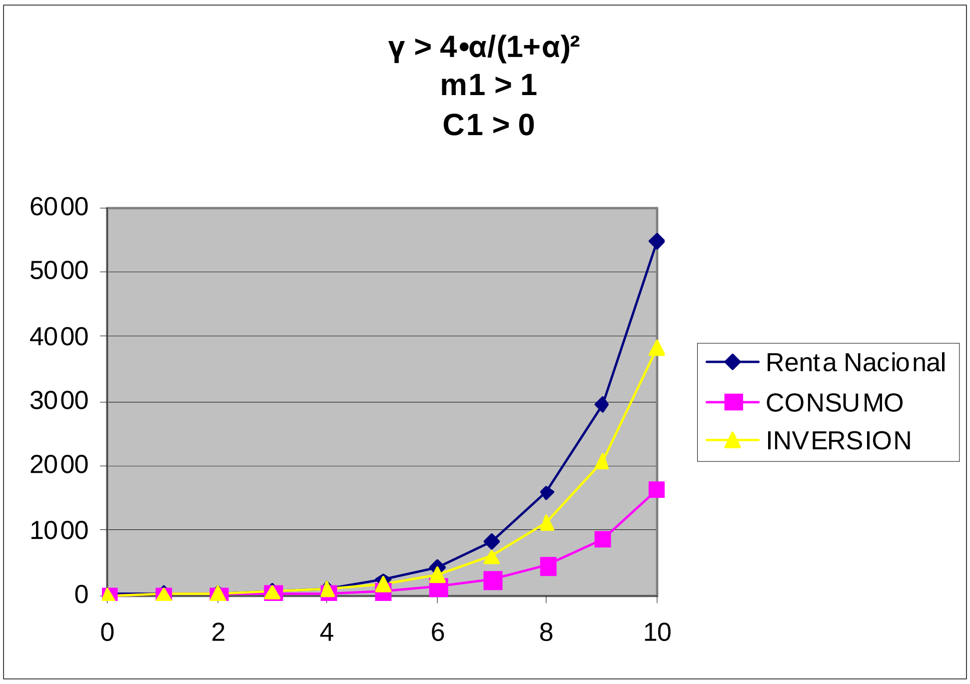


b)

b) de lo contrario la solución será divergente, dependiendo del signo de C_1. Si $C_1 > 0$, será creciente:

γ =	**0,55655556**		
Go =	**2**	**m1=1,74044096**	**C1= 12,5100616**
Co =	**2**	**m2=1,59889238**	**C2=–5,38821675**
Io =	**2**		
Y* =	**–1,12184481**		

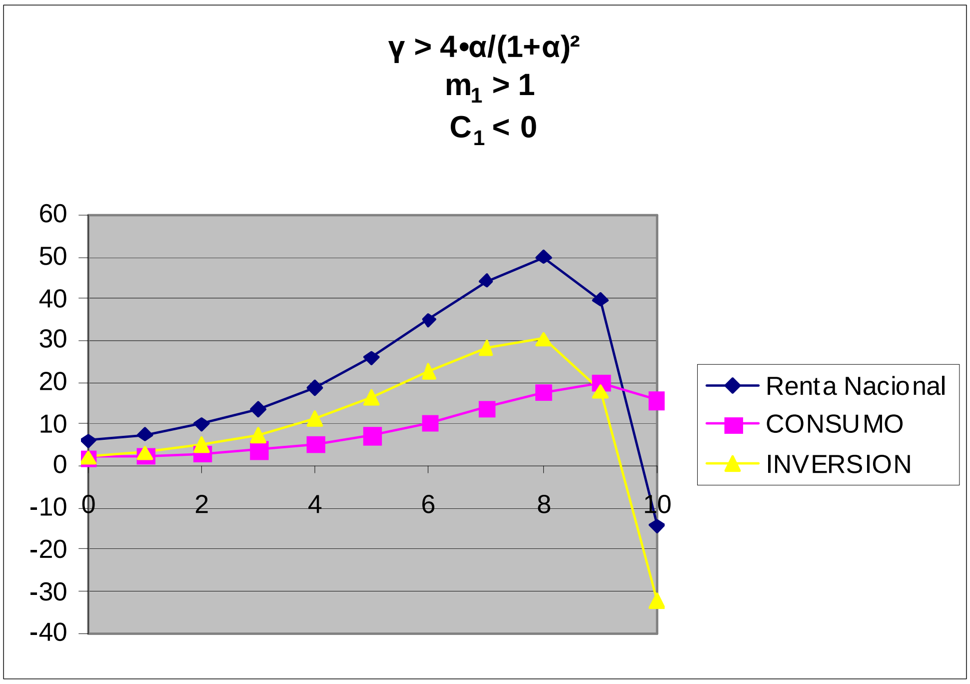
t	Y	C	I	G
0	6	2	2	2
1	12,036	3,33933333	6,69666667	2
2	25,4955493	6,69870267	16,7968467	2
3	53,6446244	14,1896896	37,4549348	2
4	110,188834	29,8562137	78,3326206	2
5	220,676179	61,3262079	157,349971	2
6	432,28028	122,818553	307,461727	2
7	831,435182	240,587991	588,847191	2
8	1575,49926	462,73987	1110,75939	2
9	2949,41785	876,852866	2070,56498	2
10	5466,82501	1641,51489	3823,31012	2



Mientras que si $C_1 < 0$, entonces será decreciente, aunque en un primer momento pueda ser creciente.

α =	**7,9**				
γ =	**0,39993953**				
Go =	**2**	**m1=**	**1,86872417**	**C1=**	**–18,1326535**
Co =	**2**	**m2=**	**1,69073763**	**C2=**	**25,0587843**
Io =	**2**				
Y* =	**–0,92613076**				

t	**Y**	**C**	**I**	**G**
0	6	2	2	2
1	7,55677079	2,39963717	3,15713362	2
2	9,94090331	3,02225134	4,91865197	2
3	13,50848	3,97576018	7,5327198	2
4	18,674413	5,4025751	11,2718379	2
5	25,7905165	7,46863593	16,3218805	2
6	34,7981343	10,314647	22,4834873	2
7	44,3769184	13,9171494	28,459769	2
8	50,0124656	17,7480838	30,2643818	2
9	39,8075987	20,0019619	17,8056368	2
10	–14,321872	15,9206322	–32,2425042	2



Caso 2: Dos raíces reales iguales: $\gamma = 4\bullet\alpha/(1+\alpha)^2$.

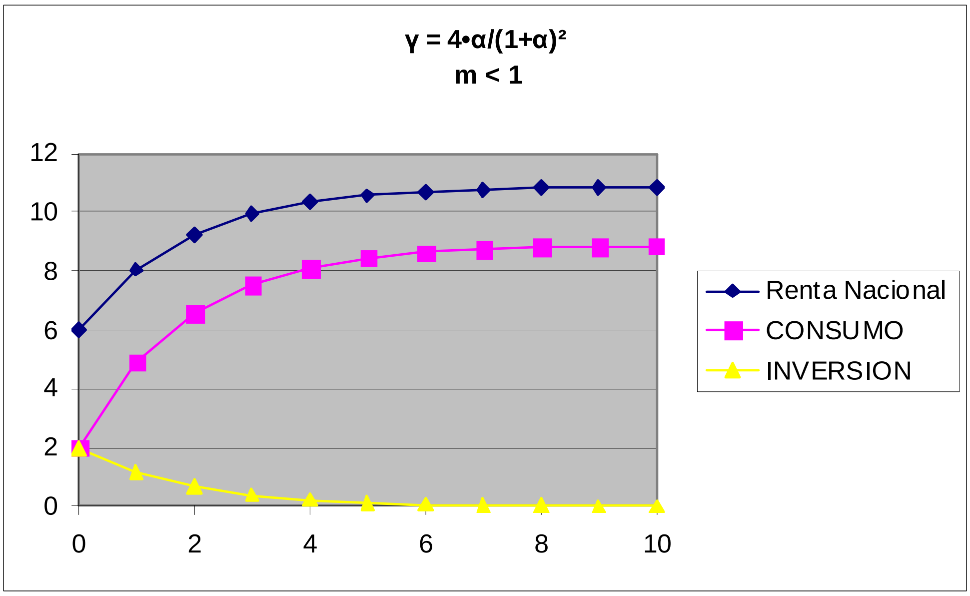
Por lo tanto $m = m_1 = m_2 = \gamma\bullet(1+\alpha)/2$, por lo tanto sustituyendo la condición de las raíces iguales se tiene:

$$m = [4\bullet\alpha/(1+\alpha)^2]\bullet(1+\alpha)/2 = 2\bullet\alpha/(1+\alpha)$$

a) m será menor que 1 ($m < 1$) si y solo si $\alpha < 1$, y en este caso la solución será convergente.

α =	**0,4**	
γ =	**0,81632653**	
Go =	**2**	**m=0,57142857**
Co =	**2**	
Io =	**2**	
Y* =	**10,8888889**	

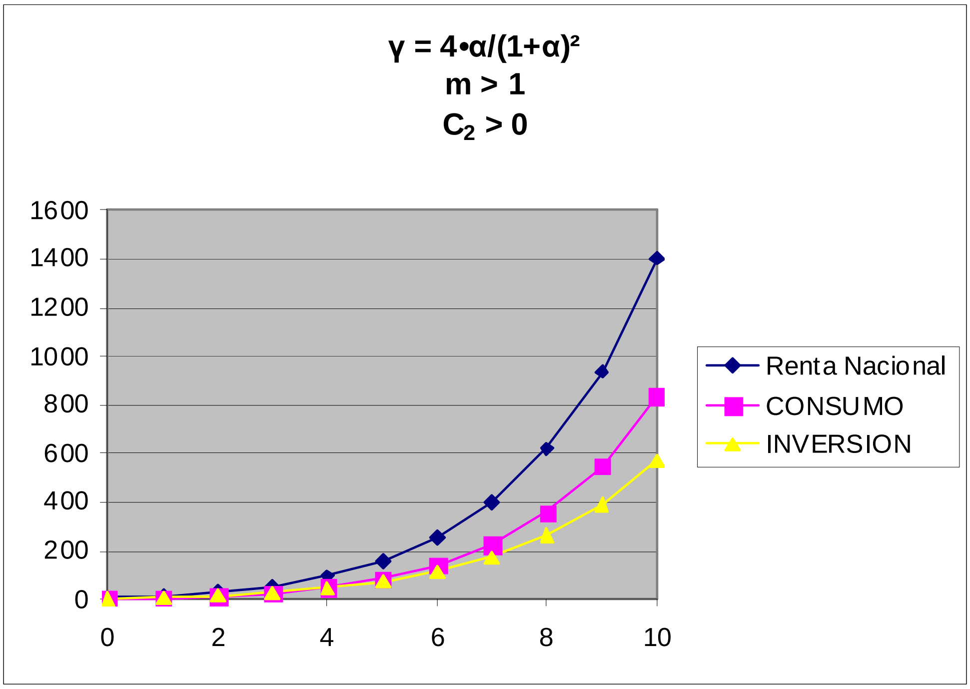
t	Y	C	I	G
0	6	2	2	2
1	8,05714286	4,89795918	1,15918367	2
2	9,24897959	6,57725948	0,67172012	2
3	9,93935867	7,55018742	0,38917118	2
4	10,3391928	8,11376212	0,22542988	2
5	10,5707146	8,44015674	0,13055785	2
6	10,7047548	8,62915476	0,07559921	2
7	10,7823426	8,73857467	0,04376796	2
8	10,8272474	8,80191235	0,02533507	2
9	10,8532321	8,83856933	0,01466279	2
10	10,8682661	8,85978132	0,0084848	2



b) de lo contrario la solución será divergente, dependiendo del signo de C_2. Si $C_2 > 0$, será creciente:

α =	**2**				
γ =	**0,88888889**				
Go =	**2**	**m=1,33333333**		**C1=**	**–12**
Co =	**2**			**C2=**	**9**
Io =	**2**				
Y* =	**18**				

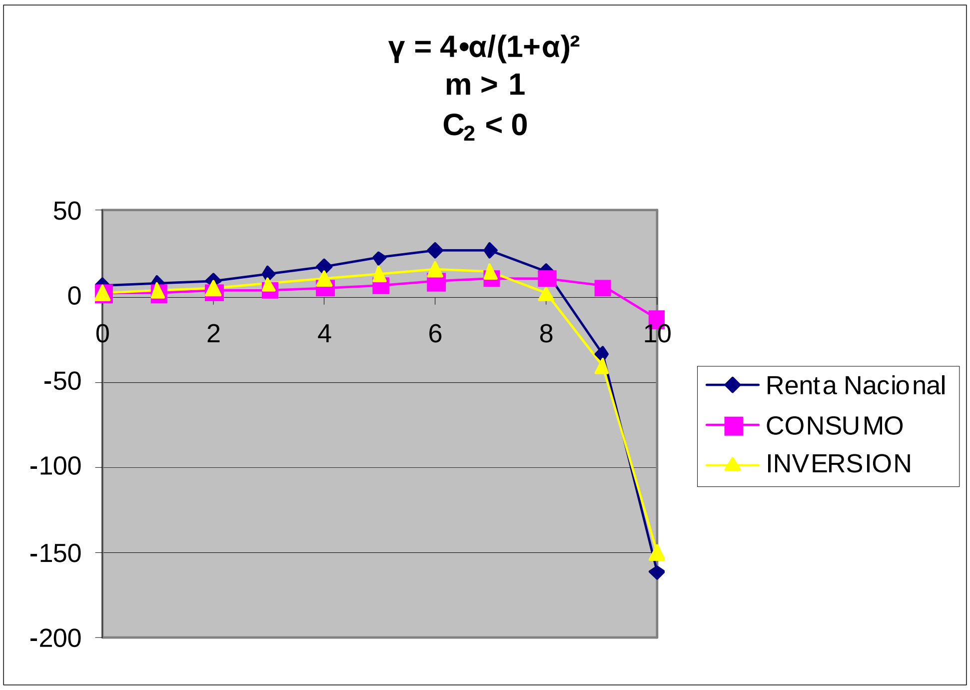
t	**Y**	**C**	**I**	**G**
0	6	2	2	2
1	14	5,33333333	6,66666667	2
2	28,6666667	12,4444444	14,2222222	2
3	53,5555556	25,4814815	26,0740741	2
4	93,8518519	47,6049383	44,2469136	2
5	157,061728	83,4238683	71,6378601	2
6	253,983539	139,610425	112,373114	2
7	400,068587	225,763146	172,305441	2
8	617,323274	355,616522	259,706752	2
9	936,962353	548,731799	386,230554	2
10	1403,10268	832,855425	568,247252	2



Mientras que si $C_2 < 0$, entonces será decreciente, aunque en un primer momento pueda ser creciente.

α =	**7,9**			
γ =	**0,39893953**			
Go =	**2**	**m=** 1,7752809	**C1=**	**2,67254778**
Co =	**2**		**C2=**	**–0,32028986**
Io =	**2**			
Y* =	**3,32745222**			

t	Y	C	I	G
0	6	2	2	2
1	7,50337079	2,39363717	3,10973362	2
2	9,73144805	2,9933912	4,73805685	2
3	12,9043172	3,88225929	7,02205792	2
4	17,1477273	5,14804222	9,99968511	2
5	22,2145321	6,84090624	13,3736258	2
6	26,8309096	8,86225493	15,9686546	2
7	27,2529885	10,7039104	14,5490781	2
8	14,2025279	10,8722944	1,3302335	2
9	–33,4641727	5,66594977	–41,1301224	2
10	–161,577616	–13,3501812	–150,227435	2



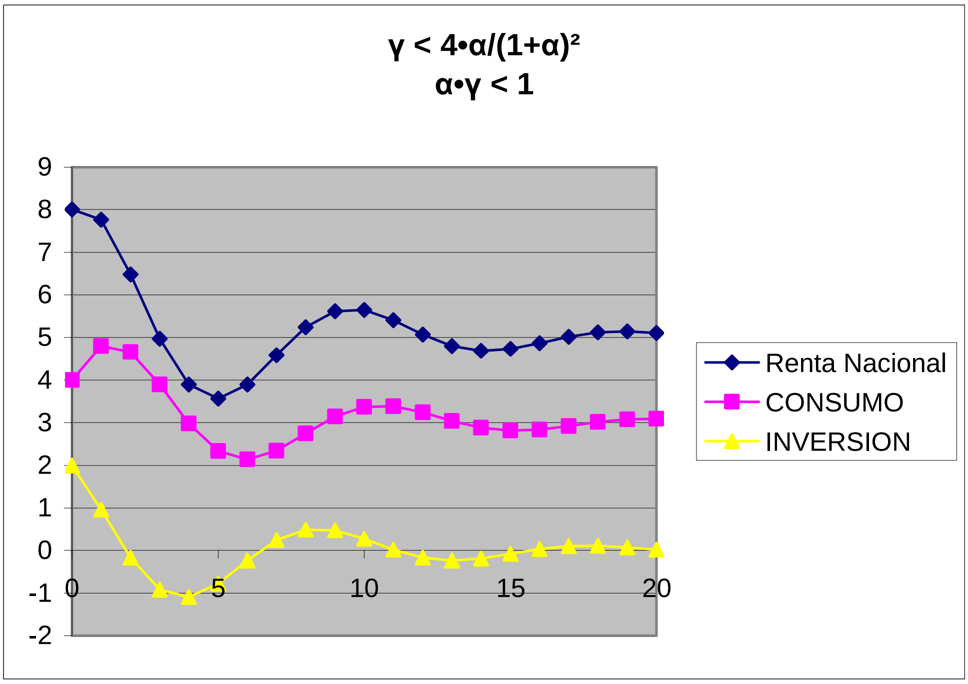
Caso 3: Dos raíces complejas: $\gamma < 4\cdot\alpha/(1+\alpha)^2$.

a) Como $R^2 = \alpha\cdot y$, se tendrá entonces que la trayectoria de la solución es oscilatoria amortiguada entorno de la solución particular si y solo si:

$$\alpha\cdot\gamma < 1.$$

α =	**1,2**				
γ =	**0,6**				
Go =	**2**		**M1=**	**0,66**	**0,53329167i**
Co =	**4**		**M2=**	**0,66**	**–0,53329167i**
Io =	**2**		**R =**	**0,84852814**	
Y* =	**5**				

t	**Y**	**C**	**I**	**G**
0	8	4	2	2
1	7,76	4,8	0,96	2
2	6,4832	4,656	–0,1728	2
3	4,970624	3,88992	–0,919296	2
4	3,89331968	2,9823744	–1,08905472	2
5	3,5603327	2,33599181	–0,77565911	2
6	3,89644899	2,13619962	–0,23975063	2
7	4,57987313	2,33786939	0,24200373	2
8	5,23998925	2,74792388	0,49206538	2
9	5,61927716	3,14399355	0,47528361	2
10	5,64465359	3,3715663	0,2730873	2
:	:	:	:	:
20	5,10504994	3,08784729	0,01720265	2

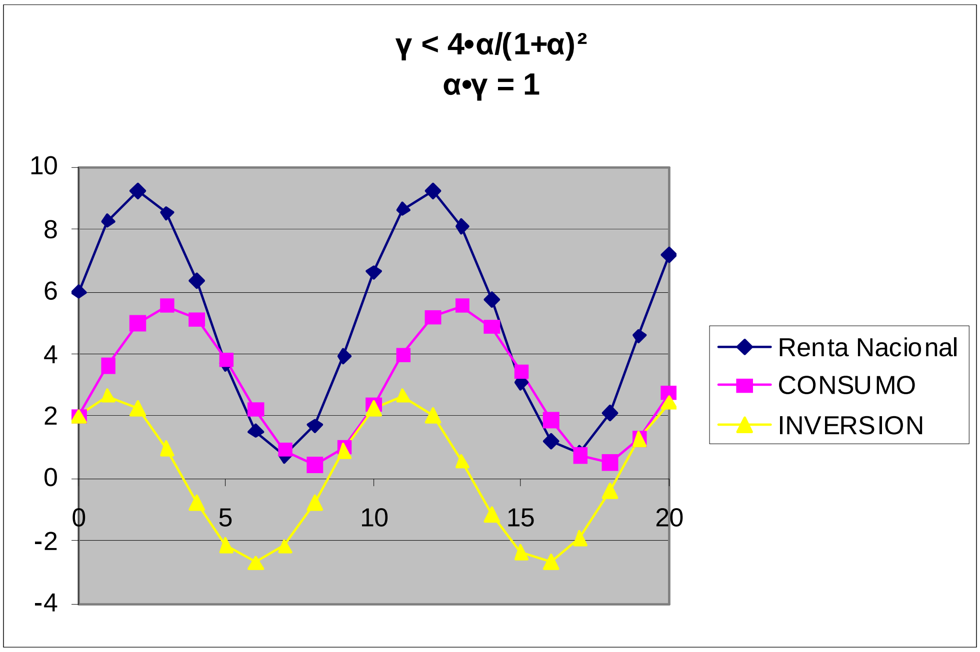


b) Si $\alpha \bullet \gamma = 1$, se tendrá entonces que la trayectoria de la solución es oscilara entorno de la solución particular entre los valores:

$$Y_p + C_1 + C_2 \;\; \text{y} \;\; Y_p - C_1 - C_2.$$

α =	**1,66666667**				
γ =	**0,6**				
Go =	**2**	**m1=**	**0,8**	**0,6i**	
Co =	**2**	**m2=**	**0,8**	**-0,6i**	
Io =	**2**	**R =**	**1**	**α=0,643501109**	
Y* =	**5**	**C_1=**	**1**		
		C_2=	**4,111111111**		

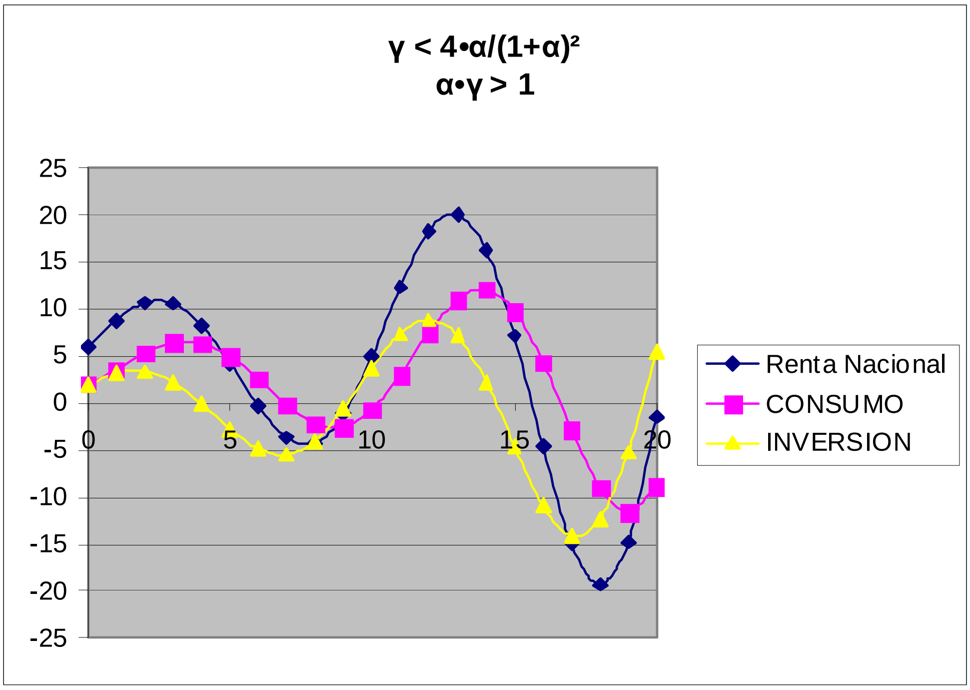
T	Y	C	I	G
0	6	2	2	2
1	8,26666667	3,6	2,66666667	2
2	9,22666667	4,96	2,26666667	2
3	8,496	5,536	0,96	2
4	6,36693333	5,0976	-0,73066667	2
5	3,69109333	3,82016	-2,12906667	2
6	1,538816	2,214656	-2,67584	2
7	0,77101227	0,9232896	-2,15227733	2
8	1,69480363	0,46260736	-0,76780373	2
9	3,94067354	1,01688218	0,92379136	2
10	6,61027403	2,36440412	2,24586991	2
:	:	:	:	:
20	7,18350077	2,74343128	2,44006949	2



c) Y, por último, si $\alpha \bullet \gamma > 1$, se tendrá entonces que la trayectoria de la solución es oscilatoria explosiva.

α =	**2**				
γ =	**0,6**				
Go =	**2**		**m1=**	**0,9**	**0,6244998i**
Co =	**2**		**m2=**	**0,9**	**-0,6244998i**
Io =	**2**		**R =**	**1,09544512**	
Y* =	**5**				

t	Y	C	I	G
0	6	2	2	2
1	8,8	3,6	3,2	2
2	10,64	5,28	3,36	2
3	10,592	6,384	2,208	2
4	8,2976	6,3552	-0,0576	2
5	4,22528	4,97856	-2,75328	2
6	-0,351616	2,535168	-4,886784	2
7	-3,7032448	-0,2109696	-5,4922752	2
8	-4,24390144	-2,22194688	-4,02195456	2
9	-1,19512883	-2,54634086	-0,64878797	2
10	4,94144983	-0,7170773	3,65852713	2
:	:	:	:	:
20	-1,47628223	-8,87275054	5,39646831	2



2.– El Modelo del ciclo económico de Hicks (Versión Simplificada).

El modelo:

1.– Se supone que la renta nacional (Y) consta de tres corrientes: Consumo (C), Inversión (I) y Gasto Público (G):

$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

2.– El consumo no se define como una función de la renta actual, sino de la renta del periodo anterior; y para simplificar se supone de que este consumo es proporcional a dicha renta:

$$C_t = C(Y_{t-1}) = \gamma \bullet Y_{t-1} \qquad (0 < \gamma < 1)$$

3.– La inversión se mantiene en una relación fija con respecto al incremento en el consumo y por lo tanto de la Renta:

$$I_t = \alpha \bullet \Delta C_{t-1} = k \bullet \Delta Y_{t-2} = k \bullet (Y_{t-1} - Y_{t-2}) \qquad (k > 0)$$

4.– El gasto Público se supone que aumenta en el tiempo a la tasa constante g:

$$G_t = G_o \bullet (1 + g)^t$$

De esta manera el modelo queda representado con el siguiente sistema de ecuaciones:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

$$C_t = \gamma \bullet Y_{t-1} \qquad (0 < \gamma < 1)$$

$$I_t = k \bullet (Y_{t-1} - Y_{t-2}) \qquad (k > 0)$$

$$G_t = G_o \bullet (1 + g)^t$$

Solución del modelo:

Sustituyendo las tres últimas ecuaciones en la primera:

$$Y_t = \gamma \bullet Y_{t-1} + k \bullet (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + G_o \bullet (1 + g)^t$$

reagrupando términos y normalizando:

$$Y_{t+2} - (\gamma + k) \bullet Y_{t+1} + k \bullet Y_t = G_o \bullet (1 + g)^{t+2}.$$

Las raíces características de esta ecuación son:

$$m_1 = ((\gamma + k) + \sqrt{(\gamma + k)^2 - 4gk})/2$$
$$m_2 = ((\gamma + k) - \sqrt{(\gamma + k)^2 - 4gk})/2$$

las cuales serán reales y diferentes si:

$$(\gamma + k)^2 > 4 \bullet k;$$

reales iguales si:

$$(\gamma + k)^2 = 4 \bullet k;$$

y complejas si:

$$(\gamma + k)^2 < 4 \bullet k;$$

Mientras que la solución particular será:

$$Y_p = G_o(1 + g)^{t+2} /[k - (\gamma + k)(1 + g) + (1 + g)^2].$$

y representa la trayectoria de equilibrio.

Análisis de la solución:

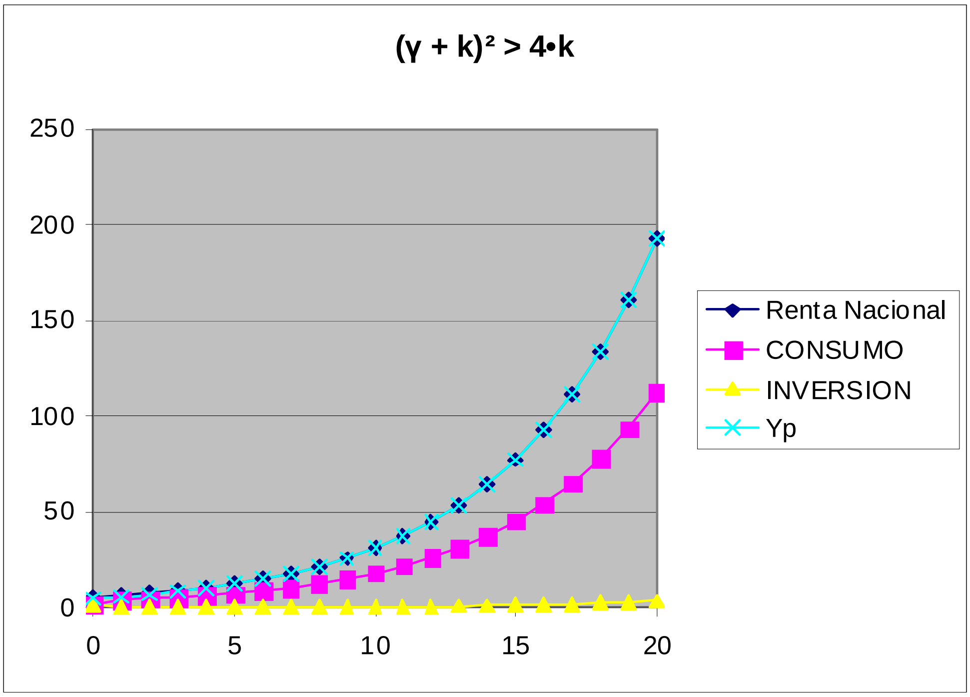
Caso 1: Dos raíces reales distintas: $(\gamma + k)^2 > 4 \bullet k$.

Es claro que tanto m_1 como m_2 son positivas y que $m_1 > m_2$, por lo tanto la trayectoria de la solución será convergente a la solución particular si $m_1 < 1$, y esta condición se da por ser $\gamma < 1$.

α =	**0,2**	**m_1=0,61078784**
γ =	**0,7**	**m_2=0,22921216**
Go =	**2**	

Co =	**2**
Io =	**2**
g =	**0,2**
k =	**0,14**

t	**Y**	**C**	**I**	**G**	**Yp**
0	6	2	2	2	5,03496503
1	7,04	4,2	0,44	2,4	6,04195804
2	7,9536	4,928	0,1456	2,88	7,25034965
3	9,151424	5,56752	0,127904	3,456	8,70041958
4	10,7208922	6,4059968	0,16769536	4,1472	10,4405035
5	12,7009901	7,50462451	0,21972554	4,97664	12,5286042
6	15,1398747	8,89069304	0,27721371	5,971968	15,034325
7	18,1057178	10,5979123	0,34144386	7,1663616	18,04119
8	21,6888544	12,6740024	0,41521802	8,59963392	21,6494281
9	26,0033979	15,1821981	0,50163913	10,3195607	25,9793137
10	31,1898875	18,2023785	0,60403609	12,3834728	31,1751764
:	:	:	:	:	:
20	193,028581	112,600066	3,75331593	76,6751998	193,028475



Caso 2: Dos raíces reales iguales: $(\gamma + k)^2 = 4 \bullet k$.

Por lo tanto $m = m_1 = m_2 = (\gamma + k)/2$, por lo tanto sustituyendo la condición de las raíces iguales se tiene:

$$m = \sqrt{k}$$

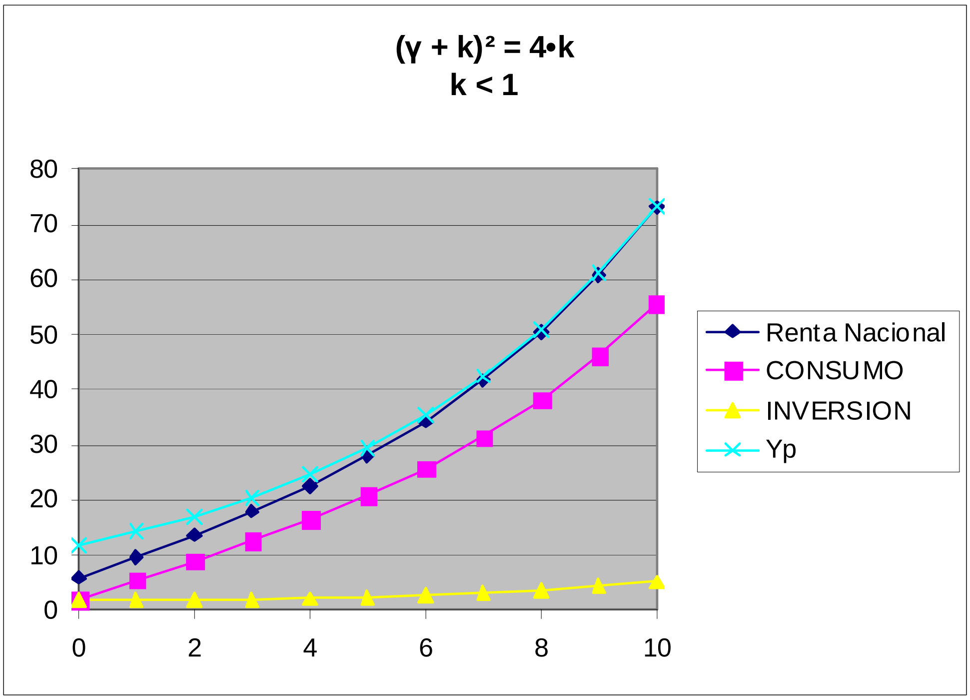
Y m será menor que 1 ($m < 1$) si y solo si $k < 1$, y en este caso la trayectoria de la solución será convergente a la solución particular.

α =0,54691816 **m_1=0,70710679**

γ =0,91421356 **m_2=0,70710677**

Go =	**2**
Co =	**2**
Io =	**2**
g =	**0,2**
k =	**0,5**

t	**Y**	**C**	**I**	**G**	**Yp**
0	6	2	2	2	11,85459
1	9,791445	5,485281	1,906163	2,4	14,22551
2	13,72719	8,951471	1,895722	2,88	17,07062
3	17,973462	12,54958	1,967874	3,456	20,48474
4	22,70191	16,43158	2,123133	4,1472	24,58169
5	28,09526	20,75439	2,364227	4,97664	29,49803
6	34,35371	25,68507	2,696675	5,97196	35,39763
7	41,70222	31,40663	3,129225	7,16636	42,4771
8	50,39862	38,12473	3,674251	8,59963	50,9725
9	60,74286	46,0751	4,34820	10,31956	61,16711
10	73,08754	55,53195	5,172121	12,38347	73,40054

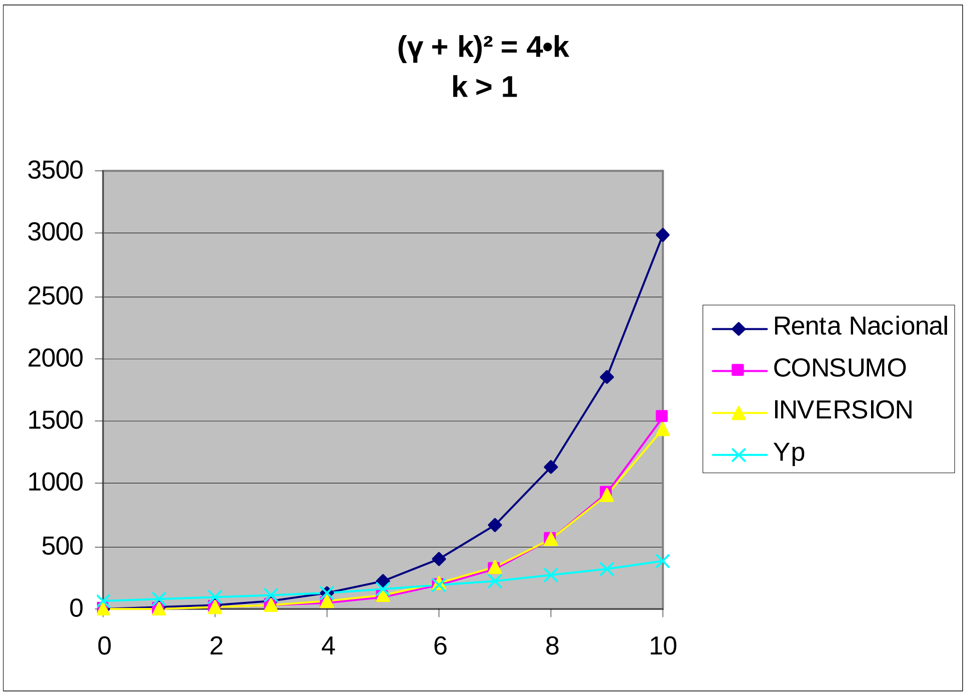


De los contrario (k > 1), será divergente.

α =2,41421356			**m_1=1,41421358**
γ =0,82842712			**m_2=1,41421354**
Go =	**2**		
Co =	**2**		
Io =	**2**		
g =	**0,2**		
k =	**2**		

t	**Y**	**C**	**I**	**G**	**Yp**
0	6	2	2	2	62,76226
1	14,54214	4,9706	7,1716	2,4	75,31471

2	32,01137	12,0471	17,0843	2,88	90,37765
3	64,91356	26,5191	34,9385	3,456	108,4532
4	123,7277	53,7762	65,8044	4,1472	130,1438
5	225,1044	102,4994	117,6283	4,97664	156,1726
6	395,2079	186,4826	202,7533	5,97196	187,4071
7	674,7742	327,4009	340,2069	7,16636	224,8885
8	1126,7336	559,0012	559,1327	8,59963	269,8662
9	1847,6550	933,4167	903,9189	10,31956	323,8395
10	2984,8739	1530,648	1441,8428	12,38347	388,6074



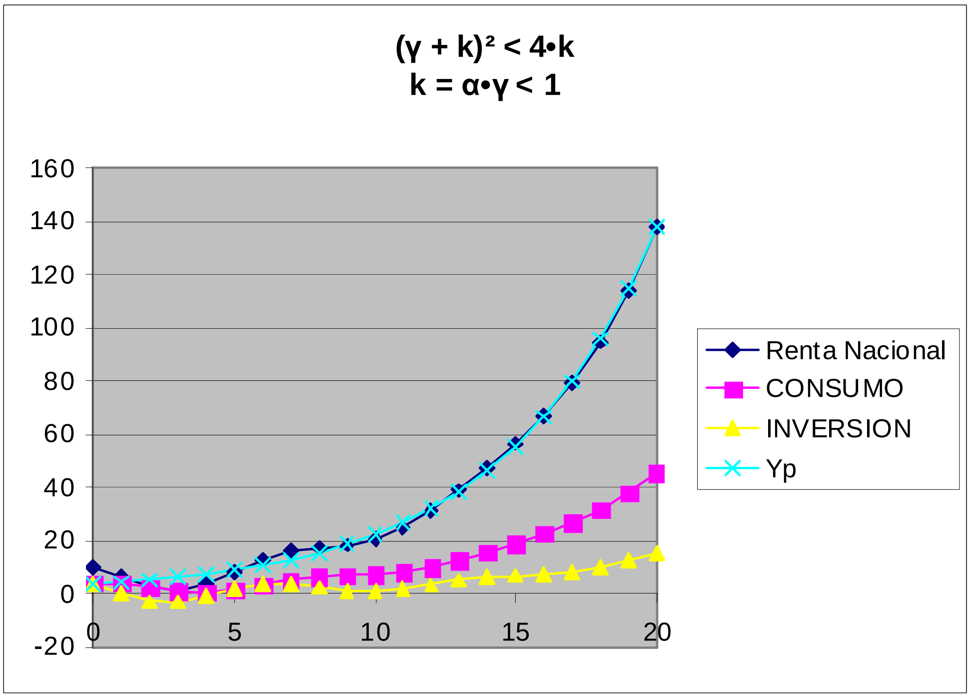
Caso 3: Dos raíces complejas: $(\gamma + k)^2 < 4 \cdot k$.

a) Como $R^2 = k = \alpha \cdot y$, se tendrá entonces que la trayectoria de la solución es oscilatoria amortiguada entorno de la solución particular si y solo si:

$$k = \alpha \cdot \gamma < 1.$$

α =	**2**	**m_1=**	**0,6**	**0,66332496i**
γ =	**0,4**	**m_2=**	**0,6**	**-0,66332496i**
Go =	**2**	**R =**	**0,89442719**	
Co =	**4**			
Io =	**4**			
g =	**0,2**			
k =	**0,8**			

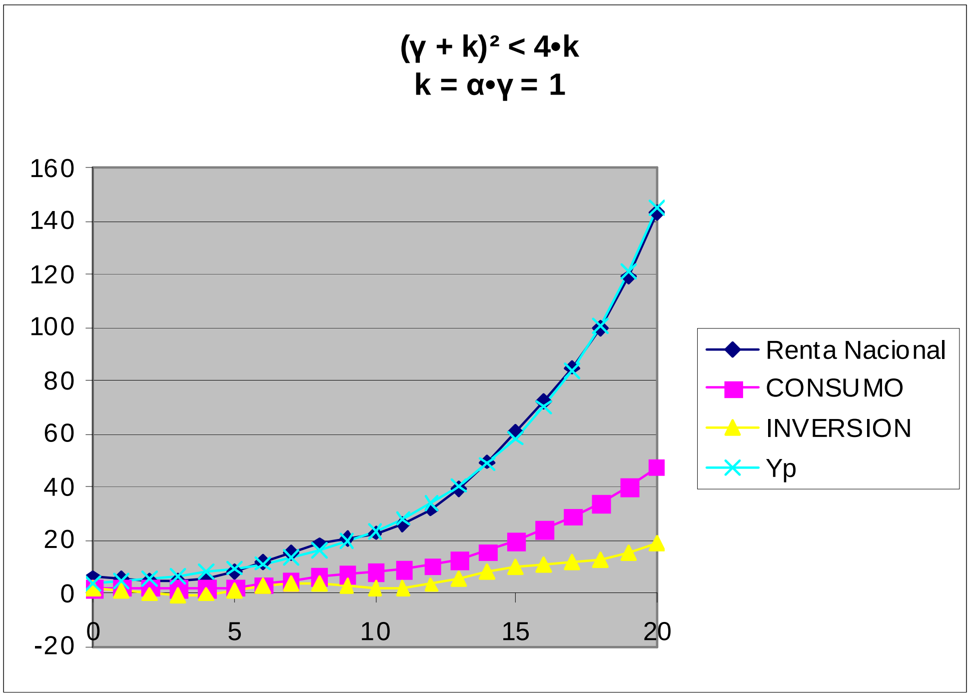
t	**Y**	**C**	**I**	**G**	**Yp**
0	10	4	4	2	3,6
1	6,4	4	0	2,4	4,32
2	2,56	2,56	–2,88	2,88	5,184
3	1,408	1,024	–3,072	3,456	6,2208
4	3,7888	0,5632	–0,9216	4,1472	7,46496
5	8,3968	1,51552	1,90464	4,97664	8,957952
6	13,01709	3,35872	3,6864	5,97196	10,749542
7	16,06943	5,20683	3,69623	7,16636	12,899451
8	17,46928	6,42777	2,44188	8,59963	15,479341
9	18,42715	6,98771	1,11987917	10,31960	18,575209
10	20,52063	7,37086	0,76630	12,38347	22,290251
:	:	:	:	:	:
20	137,88502	45,72310	15,48671	76,67519	138,01536



b) Mientras que si k = 1 entonces las solución fluctuara entorno a la trayectoria de la solución particular y la amplitud de esta fluctuación de dependera a las constantes C_1 y C_2:

α =	**2,5**	**m_1=**	**0,7**	**0,7141428i**
γ =	**0,4**	**m_2=**	**0,7**	**-0,7141428i**
Go =	**2**	**R =**	**1**	θ = 0,79539883
Co =	**2**	**C_1=**	**2,21052632**	
Io =	**2**	**C_2=**	**0,92860679**	
g =	**0,2**			
k =	**1**			

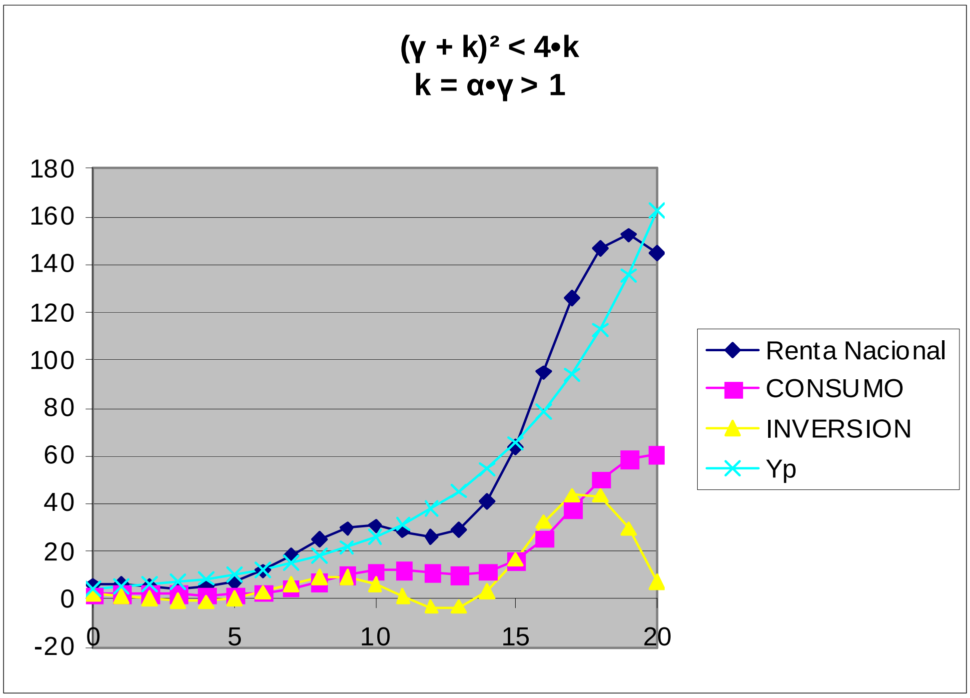
t	Y	C	I	G	Yp
0	6	2	2	2	3,78947368
1	5,8	2,4	1	2,4	4,54736842
2	5	2,32	-0,2	2,88	5,45684211
3	4,656	2	-0,8	3,456	6,54821053
4	5,6656	1,8624	-0,344	4,1472	7,85785263
5	8,25248	2,26624	1,0096	4,97664	9,42942316
6	11,85984	3,300992	2,58688	5,971968	11,3153078
7	15,5176576	4,743936	3,60736	7,1663616	13,5783693
8	18,4645146	6,20706304	3,6578176	8,59963392	16,2940432
9	20,6522235	7,38580582	2,94685696	10,3195607	19,5528519
10	22,8320712	8,2608894	2,18770893	12,3834728	23,4634222
:	:	:	:	:	:
20	143,194868	47,6017908	18,9178773	76,6751998	145,279326



c) De lo contrario, k >1, será oscilatoria divergente expansiva.

α =	**3,5**	**m_1=**	**0,9**	**0,7681146i**
γ =	**0,4**	**m_2=**	**0,9**	**-0,7681146i**
Go =	**2**	**R =**	**1,18321596**	
Co =	**2**			
Io =	**2**			
g =	**0,2**			
k =	**1,4**			

t	Y	C	I	G	Yp
0	6	2	2	2	4,23529412
1	6,2	2,4	1,4	2,4	5,08235294
2	5,64	2,48	0,28	2,88	6,09882353
3	4,928	2,256	–0,784	3,456	7,31858824
4	5,1216	1,9712	–0,9968	4,1472	8,78230588
5	7,29632	2,04864	0,27104	4,97664	10,5387671
6	11,935104	2,918528	3,044608	5,971968	12,6465205
7	18,4347008	4,7740416	6,4942976	7,1663616	15,1758246
8	25,0729498	7,37388032	9,09943552	8,59963392	18,2109895
9	29,6422892	10,0291799	9,29354854	10,3195607	21,8531874
10	30,6374637	11,8569157	6,39707515	12,3834728	26,2238248
:	:	:	:	:	:
20	145,016297	60,8910257	7,4500717	76,6751998	162,371011



3.– El Modelo de inventario de Metzler.

El modelo:

1.– El Ingreso total (Y) producido en un periodo es igual a la producción de bienes para el consumo (U) más la los bienes producidos para inventario (S) más la inversión neta no inducida (V), supuesta constante:

$$Y_t = U_t + S_t + V$$

2.– Las ventas en cualquier periodo son una proporción constante del ingreso en el periodo anterior[5]:

$$U_t = \beta \bullet Y_{t-1} \qquad (0 < \beta < 1)$$

3.– La producción para el inventario es la diferencia entre las ventas reales y las pronosticadas el periodo anterior; es decir existe el intento de mantener el inventario en un nivel constante:

$$S_t = (U_t - U_{t-1}) = \beta \bullet (Y_{t-1} - Y_{t-2}) \qquad (0 < \beta < 1)$$

De esta manera el modelo queda representado con el siguiente sistema de ecuaciones:

$$Y_t = U_t + S_t + V$$
$$U_t = \beta \bullet Y_{t-1} \qquad (0 < \beta < 1)$$
$$S_t = \beta \bullet (Y_{t-1} - Y_{t-2}) \qquad (0 < \beta < 1)$$

Solución del modelo:

Sustituyendo las dos últimas ecuaciones en la primera:

$$Y_t = \beta \bullet Y_{t-1} + \beta \bullet (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + V$$

reagrupando términos y normalizando:

$$Y_{t+2} - 2\beta \bullet Y_{t+1} + \beta \bullet Y_t = V$$

Las raíces características de esta ecuación son:

$$m_1 = \beta + \sqrt{\beta(\beta - 1)}$$
$$m_2 = \beta - \sqrt{\beta(\beta - 1)}$$

las cuales serán complejas dada la condición de que $0 < \beta < 1$

---

5 Realmente los que se supone es que las ventas esperadas son iguales al consumo en el periodo anterior:

$$U_t = C_{t-1}$$

y el consumo es una proporción β del ingreso en el mismo periodo:

$$C_t = \beta \bullet Y_t$$

Mientras que la solución particular será:

$$Y_p = V/(1 – \beta).$$

y representa el punto de equilibrio.

Análisis de la solución:

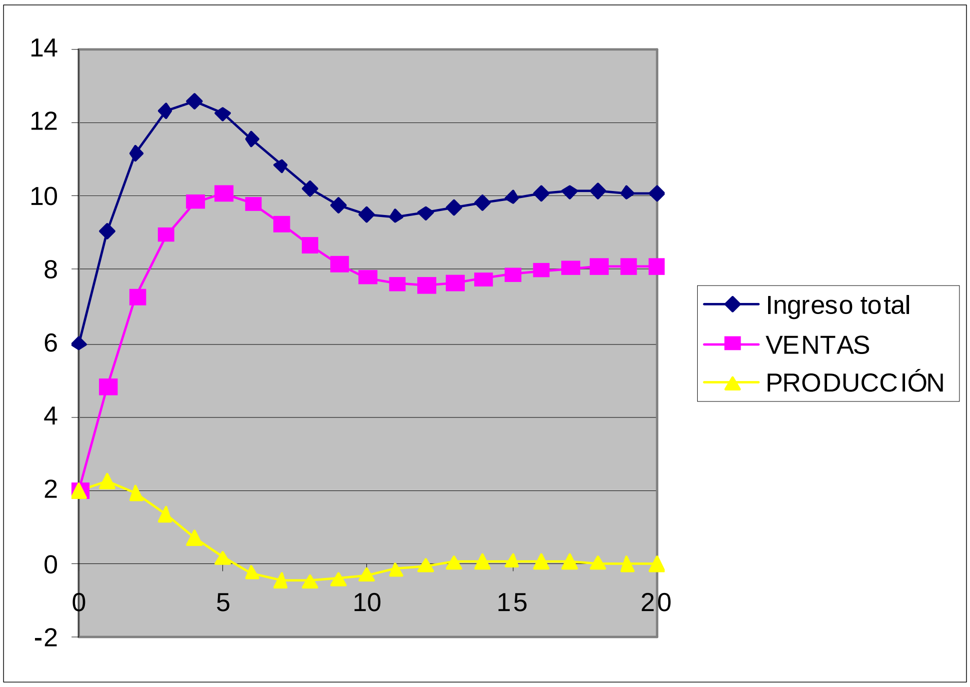
Dado que:

1) Se tiene como solución dos raíces complejas

2) y que $R^2 = \beta$, se tendrá entonces que la solución es amortiguada.

β =	**0,8**
U_0 =	**2**
S_0 =	**2**
V =	**2**
Y* =	**10**

t	**Y**	**U**	**S**	**V**
0	6	2	2	2
1	9,04	4,8	2,24	2
2	11,1776	7,232	1,9456	2
3	12,310144	8,94208	1,368064	2
4	12,5729434	9,8481152	0,72482816	2
5	12,2265463	10,0583547	0,16819159	2
6	11,5595429	9,78123702	–0,22169413	2
7	10,8207521	9,24763431	–0,42688217	2
8	10,1837756	8,65660172	–0,47282608	2
9	9,73935555	8,14702051	–0,40766496	2
10	9,50705558	7,79148444	–0,28442886	2
:	**:**	**:**	**:**	**:**
20	10,0673678	8,07816444	–0,01079665	2



14
12
10
8
6
4
2
0
-2
0
5
10
15
20
Ingreso total
VENTAS
PRODUCCIÓN

4.– Teorema de la telaraña y las expectativas (Goodwin).

El modelo es similar al modelo A.1, con la diferencia que los precios para los oferentes vienen dados por unas expectativas:

$$\hat{P}_t = P_{t-1} + \rho(P_{t-1} - P_{t-2})$$

De esta manera se tiene como modelo:

$$D_t = O_t.$$

$$D_t = \alpha - ß \cdot P_t \qquad (\alpha, ß > 0)$$

$$O_t = -\gamma + \delta \cdot \hat{P}_t \qquad (\gamma, \delta > 0)$$

$$\hat{P}_t = P_{t-1} + \rho(P_{t-1} - P_{t-2})$$

Solución del modelo:

Sustituyendo las ecuaciones en la ecuación de equilibrio:

$$\alpha - ß \cdot P_t = -\gamma + \delta \cdot P_{t-1} + \delta\rho \cdot (P_{t-1} - P_{t-2})$$

reagrupando términos y normalizando:

$$P_{t+2} + (\delta / ß)(1 + \rho) \cdot P_{t+1} - (\delta\rho/\beta) \cdot P_t = (\alpha + \gamma)/\beta$$

Las raíces características de esta ecuación son:

$$m_1 = \frac{-\delta(1+\rho) + \sqrt{\delta^2(1+\rho)^2 + 4\delta\rho\beta}}{2\beta}$$

$$m_2 = \frac{-\delta(1+\rho) - \sqrt{\delta^2(1+\rho)^2 + 4\delta\rho\beta}}{2\beta}$$

las cuales serán reales, y m_1 positiva ($m_1 > 0$), m_2 negativa ($m_2 < 0$), y el valor absoluto de m_2 mayor que el de m_1 ($|m_2| > |m_1|$).

Mientras que la solución particular será:

$$Y_p = (\alpha + \gamma) / (\beta + \delta).$$

y representa el punto de equilibrio.

Análisis de la solución:

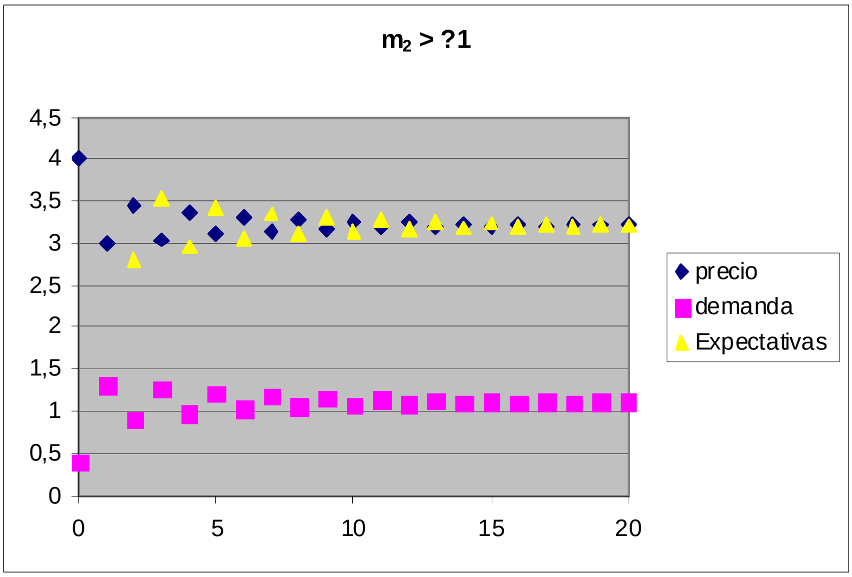
a) Si $m_2 > -1$ (o sea $|m_2| < 1$), y esto se da si:

$$ß > \delta(1 + 2\rho)$$

entonces será oscilatoria amortiguada:

α =	**4**		**m_1=0,13807119**
β =	**0,9**		**m_2= –0,80474**
γ =	**0,5**		
δ =	**0,5**		
ρ=	**0,2**		
P_0 =	**4**		
P_1 =	**3**		
P* =3,21428571			

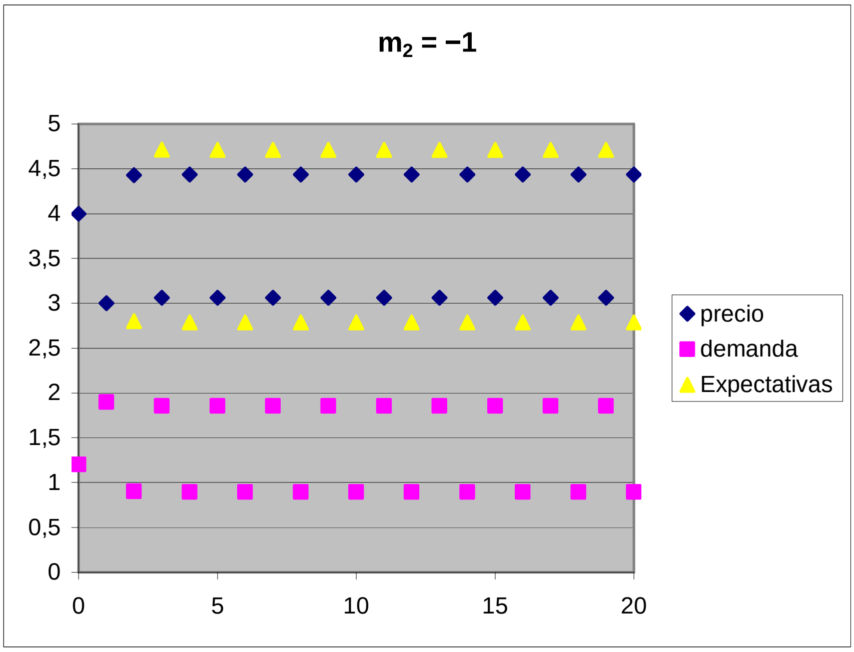
t	**P**	**D**	**O**	$\bar{P}$
0	4	0,4		
1	3	1,3		
2	3,44444444	0,9	0,9	2,8
3	3,03703704	1,26666667	1,26666667	3,53333333
4	3,35802469	0,97777778	0,97777778	2,95555556
5	3,09876543	1,21111111	1,21111111	3,42222222
6	3,30727023	1,02345679	1,02345679	3,04691358
7	3,13946045	1,1744856	1,1744856	3,34897119
8	3,27450084	1,05294925	1,05294925	3,10589849
9	3,16582838	1,15075446	1,15075446	3,30150892
10	3,25328117	1,07204694	1,07204694	3,14409389
:	:	:	:	:
20	3,21872751	1,10314524	1,10314524	3,20629049



b) Si $m_2 = -1$, oscilará entre dos valores: $P^* - C_2$, $P^* + C_2$:

α =	**4**	**m_1=0,14285714**	
β =	**0,7**	**m_2=**	**–1**
γ =	**0,5**	**C_1=**	–0,4375
δ =	**0,5**	**C_2=**	0,6875
ρ=	**0,2**		
P_0 =	**4**		
P_1 =	**3**		
P* =	**3,75**		

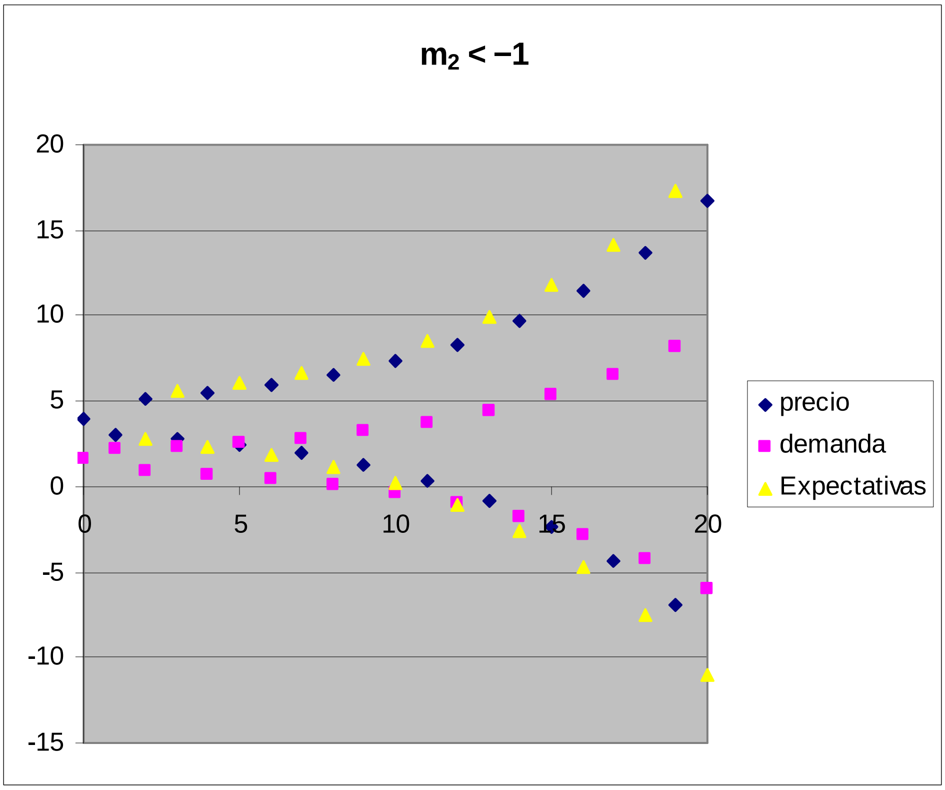
t	**P**	**D**	**O**	P
0	4	1,2		
1	3	1,9		
2	4,42857143	0,9	0,9	2,8
3	3,06122449	1,85714286	1,85714286	4,71428571
4	4,43731778	0,89387755	0,89387755	2,7877551
5	3,06247397	1,85626822	1,85626822	4,71253644
6	4,43749628	0,8937526	0,8937526	2,78750521
7	3,06249947	1,85625037	1,85625037	4,71250074
8	4,43749992	0,89375005	0,89375005	2,78750011
9	3,06249999	1,85625001	1,85625001	4,71250002
10	4,4375	0,89375	0,89375	2,7875
:	:	:	:	:
20	4,4375	0,89375	0,89375	2,7875


$m_2 = -1$
5
4,5
4
3,5
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
0
5
10
15
20
precio
demanda
Expectativas

c) y si $m_2 < -1$ (o sea $|m_2| > 1$) entonces será oscilatoria explosiva:

α =	**4**		**m_1=0,14549722**
β =	**0,6**		**m_2= –1,1455**
γ =	**0,5**		
δ =	**0,5**		
ρ=	**0,2**		
P_0 =	**4**		
P_1 =	**3**		
P* =	**4,09090909**		

t	P	D	O	$\bar{P}$
0	4	1,6		
1	3	2,2		
2	5,16666667	0,9	0,9	2,8
3	2,83333333	2,3	2,3	5,6
4	5,52777778	0,68333333	0,68333333	2,36666667
5	2,44444444	2,53333333	2,53333333	6,06666667
6	5,97685185	0,41388889	0,41388889	1,82777778
7	1,93055556	2,84166667	2,84166667	6,68333333
8	6,56558642	0,06064815	0,06064815	1,1212963
9	1,25617284	3,2462963	3,2462963	7,49259259
10	7,33809156	–0,4028549	–0,4028549	0,19429012
:	:	:	:	:
20	16,7221817	–6,033309	–6,033309	–11,066618



C.– MODELOS DE ORDEN MAYOR QUE 2.

1.– El Modelo del ciclo económico de Hicks.

Este modelo es una generalización del modelo B.2.

El modelo:

1.– Se supone que la renta nacional (Y) consta de tres corrientes: Consumo (C), Inversión (I) y Gasto Público (G):

$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

2.– El consumo no se define como una función de la renta actual, sino de la renta de los periodos anteriores; y para simplificar se supone de que este consumo es proporcional a dicha renta:

$$C_t = C(Y_{t-1}, Y_{t-2}, \ldots, Y_{t-n})$$

$$C_t = \gamma_1 \bullet Y_{t-1} + \gamma_2 \bullet Y_{t-2} + \ldots + \gamma_n \bullet Y_{t-n} \qquad (0 < \sum\gamma_i < 1)$$

3.– La inversión se mantiene en una relación fija con respecto a los incremento de la renta de n periodos anteriores:

$$I_t = k_1 \bullet \Delta Y_{t-2} + k_2 \bullet \Delta Y_{t-3} + \ldots + k_n \bullet \Delta Y_{t-n-1} \quad (k_1, k_2, \ldots, k_n > 0)$$

$$I_t = k_1 \bullet (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + k_2 \bullet (Y_{t-2} - Y_{t-3}) + \ldots + k_n \bullet (Y_{t-n} - Y_{t-n-1}) \quad (k_1, k_2, \ldots, k_n > 0)$$

4.– El gasto Público se supone que aumenta en el tiempo a la tasa constante g:

$$G_t = G_o \bullet (1 + g)^t$$

De esta manera el modelo queda representado con el siguiente sistema de ecuaciones:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

$$C_t = \gamma_1 \bullet Y_{t-1} + \gamma_2 \bullet Y_{t-2} + \ldots + \gamma_n \bullet Y_{t-n} \qquad (0 < \sum\gamma_i < 1)$$

$$I_t = k_1 \bullet (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + k_2 \bullet (Y_{t-2} - Y_{t-3}) + \ldots + k_n \bullet (Y_{t-n} - Y_{t-n-1}) \quad (k_1, k_2, \ldots, k_n > 0)$$

$$G_t = G_o \bullet (1 + g)^t$$

Solución del modelo (para el caso n = 2):

En este caso se tiene el sistema de ecuaciones:

$Y_t = C_t + I_t + G_t$

$C_t = \gamma_1 \bullet Y_{t-1} + \gamma_2 \bullet Y_{t-2}$ $\qquad (0 < \gamma_1 + \gamma_2 < 1)$

$I_t = k_1 \bullet (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + k_2 \bullet (Y_{t-2} - Y_{t-3})$ $\qquad (k_1, k_2 > 0)$

$G_t = G_o \bullet (1 + g)^t$

Sustituyendo las tres últimas ecuaciones en la primera:

$$Y_t = \gamma_1 \bullet Y_{t-1} + \gamma_2 \bullet Y_{t-2} + k_1 \bullet (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + k_2 \bullet (Y_{t-2} - Y_{t-3}) + G_o \bullet (1 + g)^t$$

reagrupando términos y normalizando:

$$Y_{t+3} - (\gamma_1 + k_1) \bullet Y_{t+2} - (\gamma_2 + k_2 - k_1) \bullet Y_{t+1} + k_2 \bullet Y_t = G_o \bullet (1 + g)^{t+3}.$$

Por lo tanto la solución vendrá dada por las raices de la ecuación cúbica:

$$x^3 - (\gamma_1 + k_1) \bullet x^2 - (\gamma_2 + k_2 - k_1) \bullet x + k_2 = 0$$

y la solución particular por:

$$Y_p = G_o \bullet (1 + g)^{t+3} / [(1 + g)^3 - (\gamma_1 + k_1) \bullet (1 + g)^2 - (\gamma_2 + k_2 - k_1) \bullet (1 + g) + k_2]$$

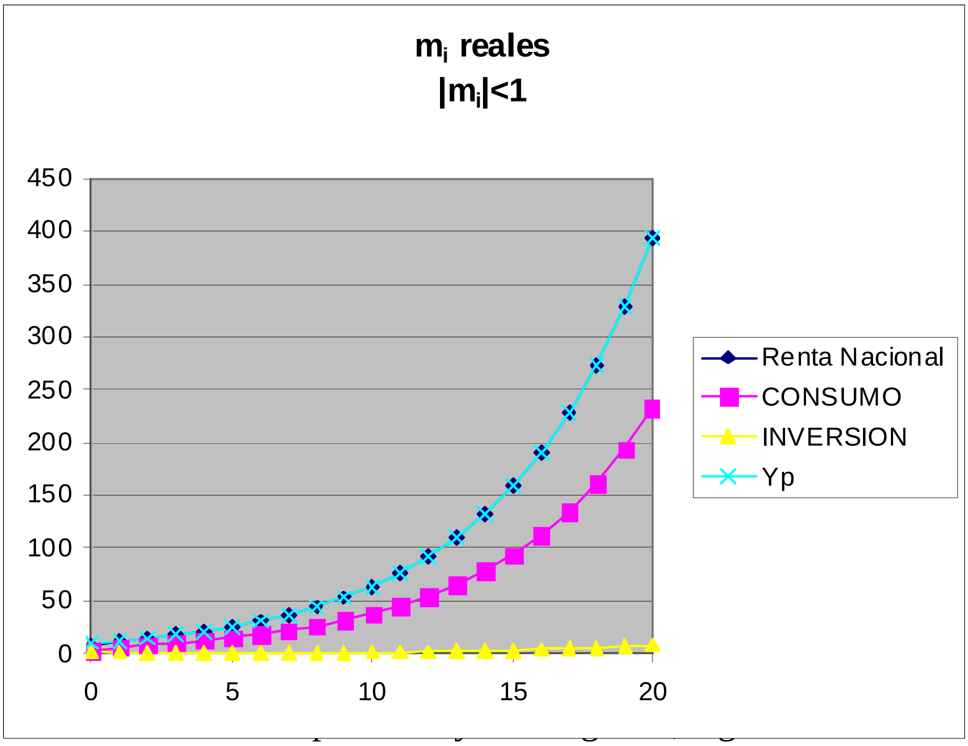
Análisis de la solución:

Dado que el término independiente (k_2) es mayor que cero, y el coeficiente del término cuadrático ($-(\gamma_1 + k_1)$) es negativo tenemos los siguientes casos:

a) Dos raices reales positivas y una negativa, todas de módulo menor que 1. En este caso la solución converge a la solución particular:

γ_1 =	0,7		m_1= 0,62072308	
γ_2 =	0,01		m_2= 0,27736095	0I
Go =	4		m_3=-0,05808404	0I
Co =	2			
Io =	2			
g =	0,2			
k_1 =	0,14			
k_2 =	0,01			

t	Y	C	I	G	Yp
0	8	2	2	4	10,2795955
1	11,9	5,6	1,5	4,8	12,3355146
2	14,716	8,41	0,546	5,76	14,8026175
3	17,76544	10,4202	0,43324	6,912	17,763141
4	21,3324496	12,582968	0,4550816	8,2944	21,3157692
5	25,5935249	15,1103691	0,52987574	9,95328	25,578923
6	30,7049485	18,1287919	0,63222063	11,943936	30,6947076
7	36,8403325	21,7493992	0,75821007	14,3327232	36,8336492
8	44,2046181	26,0952822	0,91006799	17,1992678	44,200379
9	53,0431112	31,311636	1,09235382	20,6391214	53,0404548
10	63,6502016	37,572224	1,31103189	24,7669457	63,6485457
:	:	:	:	:	:
20	394,095033	232,625548	8,11908503	153,3504	394,095019

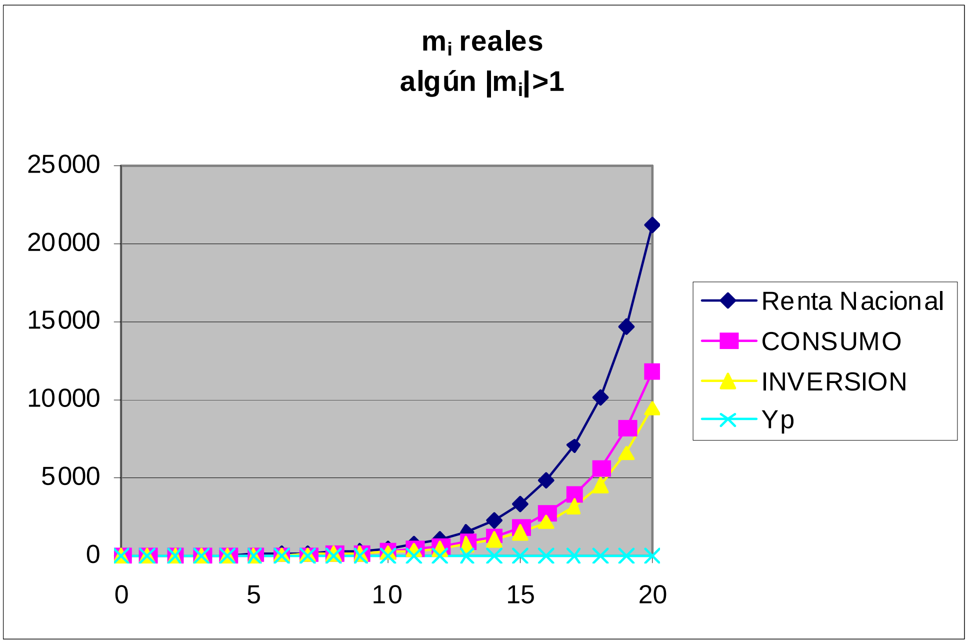


b
) mayor que 1. En

γ_1 =	0,8		m_1= 1,58891618

γ_2 =	**0,1**	**m_2= 1,07834917**	**0i**
Go =	**4**	**m_3=-1,16726536**	**0i**
Co =	**2**		
Io =	**2**		
g =	**-0,1**		
k_1 =	**0,7**		
k_2 =	**2**		

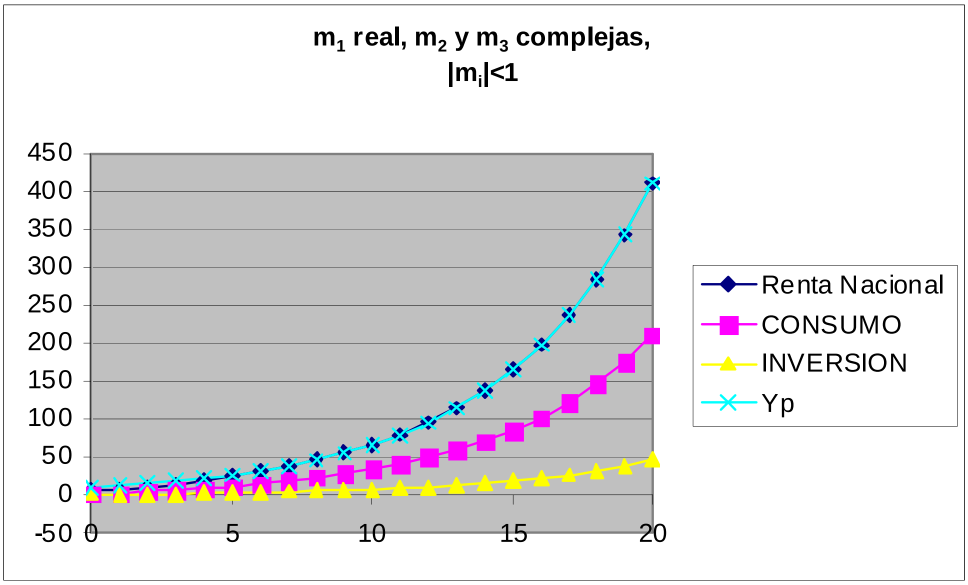
t	**Y**	**C**	**I**	**G**	**Yp**
0	8	2	2	4	11,480315
1	11,5	6,4	1,5	3,6	10,3322835
2	15,69	10	2,45	3,24	9,29905512
3	25,401	12,552	9,933	2,916	8,36914961
4	38,1229	20,3208	15,1777	2,6244	7,53223465
5	61,18761	30,49832	28,32733	2,36196	6,77901118
6	92,664949	48,950088	41,589097	2,125764	6,10111006
7	144,208704	74,1319592	68,1635573	1,9131876	5,49099906
8	216,124139	115,366963	99,0353066	1,72186884	4,94189915
9	327,877307	172,899311	153,428314	1,54968196	4,44770924
10	485,754647	262,301846	222,058087	1,39471376	4,00293831
:	:	:	:	:	:
20	21194,6427	11752,2974	9441,859	0,48630662	1,39573829



c) Dos raices complejas conjugadas y una real negativa, todas de módulo menor que 1. En este caso la solución converge de manera oscilatoria a la trayectoria particular:

γ_1 =	**0,2**	**m_1=**	**-0,83519329**	
γ_2 =	**0,5**	**m_2=**	**0,71759665**	**0,28934212i**
Go =	**4**	**m_3=**	**0,71759665**	**-0,28934212i**
Co =	**2**			
Io =	**2**			
g =	**0,2**			
k_1 =	**0,4**			
k_2 =	**0,5**			

t	**Y**	**C**	**I**	**G**	**Yp**
0	8	2	2	4	10,7329193
1	7,9	1,6	1,5	4,8	12,8795031
2	11,3	5,58	-0,04	5,76	15,4554037
3	14,432	6,21	1,31	6,912	18,5464845
4	19,7836	8,5364	2,9528	8,2944	22,2557814
5	24,83264	11,17272	3,70664	9,95328	26,7069376
6	31,49768	14,858328	4,695416	11,943936	32,0483252
7	38,2391152	18,715856	5,190536	14,3327232	38,4579902
8	46,625025	23,396663	6,02909408	17,1992678	46,1495882
9	55,8087655	28,4445626	6,7250815	20,6391214	55,3795059
10	67,1076624	34,4742656	7,8664511	24,7669457	66,4554071
:	**:**	**:**	**:**	**:**	**:**
20	411,441883	211,412154	46,6793298	153,3504	411,474364

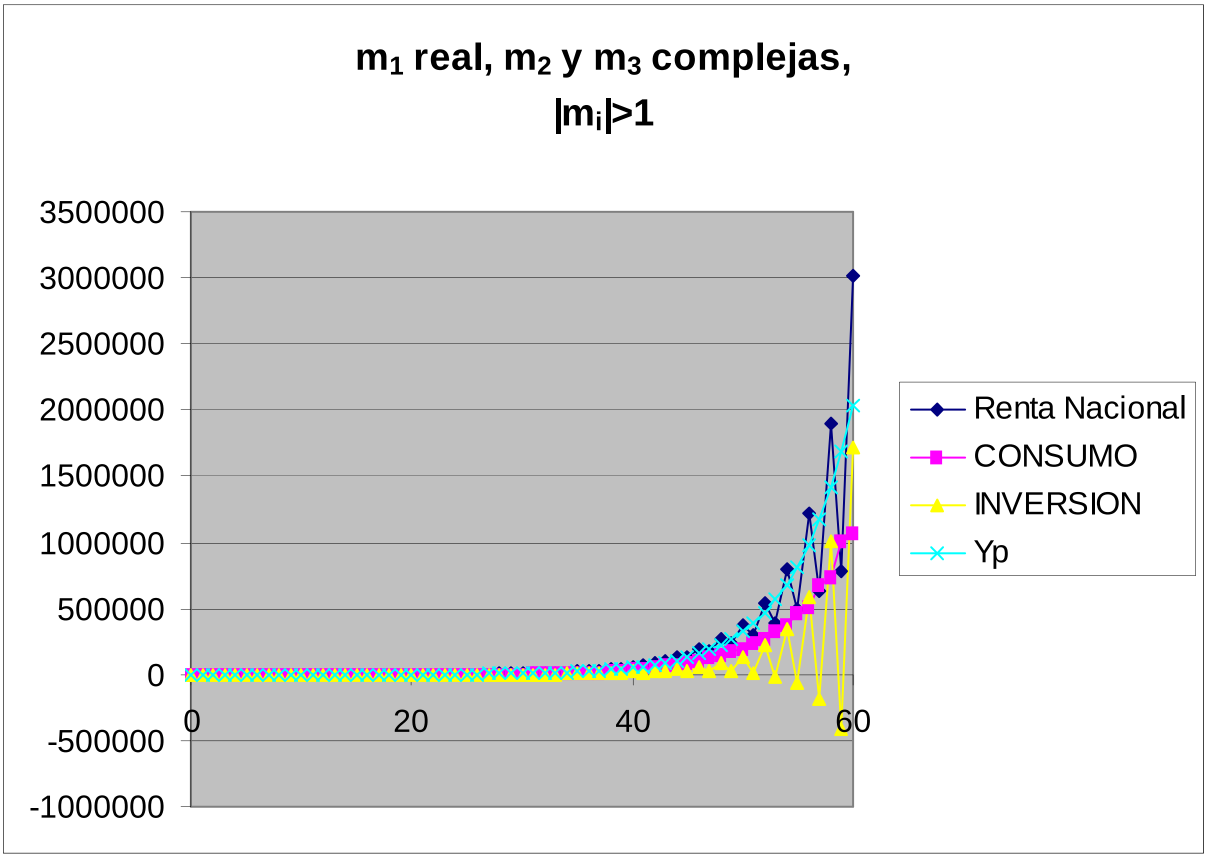


d) Dos raices complejas conjugadas y una real negativa, algunas de módulo mayor que 1. En este caso la solución diverge de manera oscilatoria de la trayectoria particular:

γ_1 =	0,4	m_1=	-1,34909172
γ_2 =	0,4	m_2=	1,12454586 0,26387046i
Go =	4	m_3=	1,12454586-0,26387046i
Co =	2		
Io =	2		
G =	0,2		
k_1 =	0,5		
k_2 =	1,8		

t	Y	C	I	G	Yp
0	8	2	2	4	36
1	9,5	3,2	1,5	4,8	43,2

2	13,51	7	0,75	5,76	51,84
3	20,821	9,204	4,705	6,912	62,208
4	32,9003	13,7324	10,8735	8,2944	74,6496
5	50,64125	21,48852	19,19945	9,95328	89,57952
6	75,973771	33,41662	30,613215	11,943936	107,495424
7	109,578702	50,6460084	44,5999705	14,3327232	128,994509
8	153,82126	74,2209892	62,4010034	17,1992678	154,793411
9	208,609262	105,359985	82,6101551	20,6391214	185,752093
10	276,76976	144,972209	107,030606	24,7669457	222,902511
:	:	:	:	:	:
20	1584,67735	1065,28365	366,043298	153,3504	1380,1536
30	6605,17549	3795,2227	1860,44754	949,505255	8545,5473
40	63863,649	36174,4243	21810,1385	5879,08627	52911,7764
50	372517,113	198431,433	137683,928	36401,7526	327615,773
60	3021269,59	1070376,95	1725502,58	225390,057	2028510,52



2.– El Modelo de de inventario de Metzler.

A diferencia del Modelo B3, el segundo enunciado en el cual se suponia que las espectativas de ventas son iguales al consumo del periodo anterior, se supone que las mismas son iguales al consumo del periodo anterior más una proporción del incremento del periodo anterior:

$$U_t = C_{t-1} + \rho(C_{t-1} - C_{t-2}) = \beta Y_{t-1} + \rho\beta(Y_{t-1} - Y_{t-2})$$

Por lo cual la producción para existencias quedaría como:

$$S_t = (U_t - U_{t-1}) = \beta \bullet (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + \rho\beta[(Y_{t-1} - Y_{t-2}) - (Y_{t-2} - Y_{t-3})]$$

Por lo tanto queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$Y_t = U_t + S_t + V$$

$$U_t = \beta Y_{t-1} + \rho\beta(Y_{t-1} - Y_{t-2}) \qquad (0 < \beta < 1)$$

$$S_t = \beta(1+\rho)Y_{t-1} - \beta\bullet(1+2\rho)Y_{t-2} + \rho\beta\, Y_{t-3} \qquad (0 < \beta < 1)$$

Solución del modelo:

Sustituyendo las dos últimas ecuaciones en la primera:

$$Y_t = \beta \bullet Y_{t-1} + \rho\beta(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + \beta(1+ \rho)Y_{t-1} - \beta \bullet (1+2\rho)Y_{t-2} + \rho\beta\, Y_{t-3} + V$$

reagrupando términos y normalizando:

$$Y_{t+3} - 2\beta \bullet (1 + \rho)Y_{t+2} + \beta \bullet (1 + 3\rho)Y_{t+2} - \beta\rho \bullet Y_t = V$$

Por lo tanto la solución vendrá dada por las raices de la ecuación cúbica:

$$x^3 - 2\beta \bullet (1 + \rho) \bullet x^2 + \beta \bullet (1 + 3\rho) \bullet x - \beta\rho = 0$$

y la solución particular por:

$$Y_p = V/(1- \beta)$$

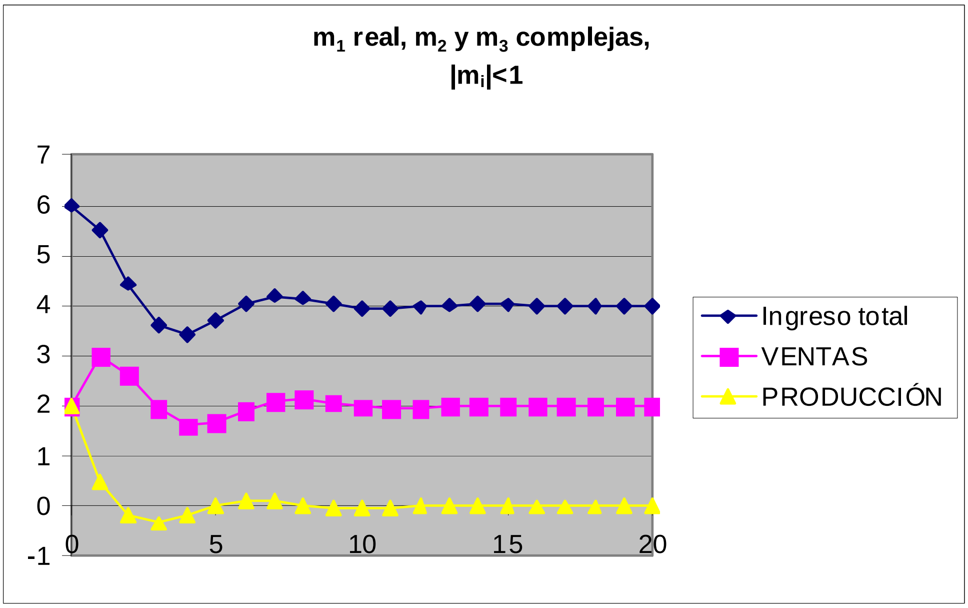
Análisis de la solución:

Dado que el término independiente ($\beta\rho$) es negativo, y el coeficiente del término cuadrático ($-2\beta \bullet (1 + \rho)$) es negativo también, tenemos los siguientes casos:

a) Dos raices complejas conjugadas y una real positiva, todas de módulo menor que 1. En este caso la solución converge de manera oscilatoria a la trayectoria particular:

β =	0,5	m_1= 0,27330117	
ρ =	0,5	m_2= 0,61334941	0,73385575i
U_0 =	2	m_3= 0,61334941	-0,73385575i
U_1 =	3		
S_0 =	2		
V =	2		
Y* =	4		

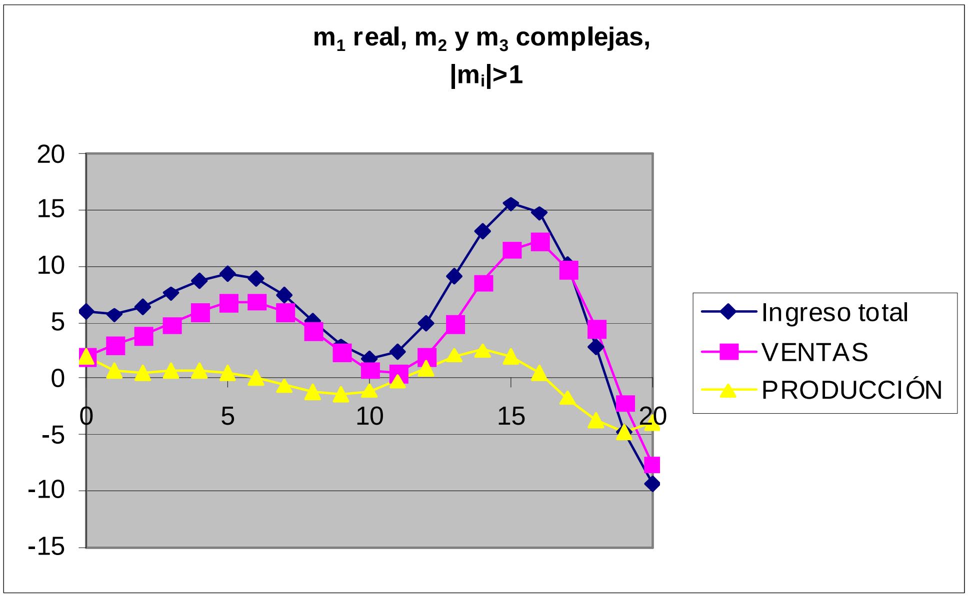
t	Y	U	S	V
0	6	2	2	2
1	5,5	3	0,5	2
2	4,4375	2,625	-0,1875	2
3	3,6171875	1,953125	-0,3359375	2
4	3,42871094	1,60351563	-0,17480469	2
5	3,69909668	1,66723633	0,03186035	2
6	4,042099	1,91714478	0,12495422	2
7	4,20162773	2,10680008	0,09482765	2
8	4,15764403	2,14069605	0,01694798	2
9	4,03139111	2,06782609	-0,03643498	2
10	3,94228544	1,98413233	-0,04184688	2
:	:	:	:	:
20	4,00186251	1,99989594	0,00196657	2



b) Dos raices complejas conjugadas y una real positiva, una al menos de módulo mayor que 1. En este caso la solución diverge de manera oscilatoria a la trayectoria particular:

β =	**0,7**	**m_1=**	**0,34278286**
ρ =	**0,8**	**m_2=**	**1,08860857 0,66979001i**
U_0 =	**2**	**m_3=**	**1,08860857 -0,66979001i**
U_1 =	**3**		
S_0 =	**2**		
V =	**2**		
Y* =	**6,66666667**		

t	**Y**	**U**	**S**	**V**
0	6	2	2	2
1	5,7	3	0,7	2
2	6,3974	3,822	0,5754	2
3	7,6014308	4,868724	0,7327068	2
4	8,78383317	5,99525881	0,78857437	2
5	9,38172737	6,81082855	0,57089882	2
6	8,96587086	6,90202991	0,06384095	2
7	7,44206999	6,04322996	-0,60115997	2
8	5,17514389	4,35612051	-1,18097662	2
9	2,95102323	2,35312211	-1,40209888	2
10	1,74716929	0,82020869	-1,07303939	2
:	**:**	**:**	**:**	**:**
20	-9,42244632	-7,59102154	-3,83142478	2

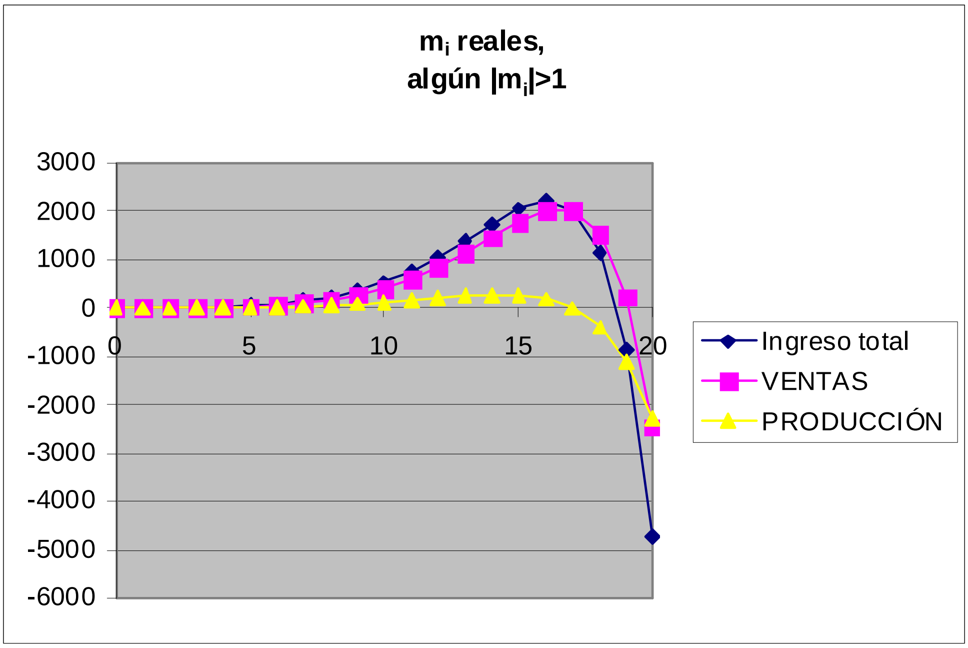


c) Tres raices reales positivas, alguna de módulo mayor que 1. En este caso la solución diverge de solución particular:

β =	**0,85**		**m_1= 1,66194825**
ρ =	**1**		**m_2= 1,36274446**
U_0 =	**2**		**m_3= 0,37530729**
U_1 =	**3**		
S_0 =	**2**		
V =	**2**		
Y* =	**13,3333333**		

t	**Y**	**U**	**S**	**V**
0	6	2	2	2
1	5,85	3	0,85	2

2	8,41325	4,845	1,56825	2
3	15,1422963	9,330025	3,81227125	2
4	28,4621648	18,5906411	7,87152371	2
5	51,9002026	35,5147284	14,3854742	2
6	90,2818638	64,0375043	24,2443595	2
7	149,891514	109,363996	38,5275182	2
8	238,481185	178,07599	58,4051949	2
9	364,954329	278,010228	84,9441017	2
10	538,461009	417,713352	118,747656	2
:	:	:	:	:
17	2010,19803	2008,92326	-0,72522168	2
18	1144,95674	1540,83325	-397,876506	2
19	-867,855715	237,758133	-1107,61385	2
20	-4729,94511	-2448,56795	-2283,37717	2



D.– MODELOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES.

1.– Modelo de Renta Nacional de dos Paises.

El Modelo:

Este modelo es parecido al modelo A.3, pero es entre dos países en donde las exportaciones del uno es igual a las importaciones del otro

Se suponen las siguientes macromagnitudes:

– La "Renta Nacional" (Y_i),
– el "Consumo" (C_i),
– la "Inversión" (I_i),
– las importaciones (M_i) y
– las exportaciones (X_i),

todas referidas al tiempo de manera tal que se cumpla la igualdad:

$$Y_{it} = C_{it} + I_{it} + X_{it} - M_{it}.$$

Se formulan las siguientes hipótesis:

1.– La función de consumo, $C_i = C_i(Y)$, es de carácter lineal:

$$C_{it} = a_i + c_i \bullet Y_{it} \qquad (a \geq 0,\ 0 < c < 1)$$

(c es la propensión marginal al consumo).

2.– El sistema económico se supone en régimen de pleno empleo. Ello implica que un determinado volumen de renta, destinado a la inversión, una vez se haya verificado ésta, provocará un incremento en la capacidad del sistema, y en consecuencia, en la propia renta nacional:

$$\Delta Y_{it} = Y_{it+1} - Y_{it} = r_i \bullet I_{it} \qquad (r > 0)$$

(r_i se lo que se denomina factor de crecimiento).

3.– Las importaciones son una proporción de la renta nacional más una importación inducida:

$$M_{it} = M_{0i} + m_i \bullet Y_{it} \qquad (M_0 \geq 0,\ 0 < m < 1)$$

4.– Las importaciones de un país son iguales a las exportaciones del otro:

$$X_{it} = M_{jt}$$

De esta manera el modelo se expresa mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{array}{ll}
Y_{1t} = C_{1t} + I_{1t} + X_{1t} - M_{1t} & Y_{2t} = C_{2t} + I_{2t} + X_{2t} - M_{2t} \\
C_{1t} = a_1 + c_1 \bullet Y_{1t} & C_{2t} = a_2 + c_2 \bullet Y_{2t} \\
Y_{1t+1} - Y_{1t} = r_1 \bullet I_{1t} & Y_{2t+1} - Y_{2t} = r_2 \bullet I_{2t} \\
M_{1t} = M_{01} + m_1 \bullet Y_{1t} & M_{2t} = M_{02} + m_2 \bullet Y_{2t} \\
X_{1t} = M_{2t} & X_{2t} = M_{1t}
\end{array}
$$

Solución del modelo:

Sustituyendo la segunda, cuarta y quinta ecuación en la primera, y ésta en la tercera:

$$Y_{1t+1} = (1 + r_1 \bullet (1 - c_1 + m_1)) \bullet Y_{1t} + r_1 \bullet (M_{01} - a_1) - r_1 M_{2t},$$

$$Y_{2t+1} = (1 + r_2 \bullet (1 - c_2 + m_2)) \bullet Y_{2t} + r_2 \bullet (M_{02} - a_1) - r_2 M_{1t},$$

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores las cuartas ecuaciones:

$$Y_{1t+1} = (1 + r_1 \bullet (1 - c_1 + m_1)) \bullet Y_{1t} - r_1 m_2 \bullet Y_{2t} + r_1 \bullet (M_{01} - M_{02} - a_1),$$

$$Y_{2t+1} = (1 + r_2 \bullet (1 - c_2 + m_2)) \bullet Y_{2t} - r_2 m_1 \bullet Y_{1t} + r_2 \bullet (M_{02} - M_{01} - a_2),$$

Haciendo:

$$
\begin{array}{ll}
A_{11} = 1 + r_1 \bullet (1 - c_1 + m_1) & A_{12} = -r_1 m_2 \\
A_{21} = -r_2 m_1 & A_{22} = 1 + r_2 \bullet (1 - c_2 + m_2)
\end{array}
$$

y

$$B_1 = r_1 \bullet (M_{01} - M_{02} - a_1)$$

$$B_2 = r_2 \bullet (M_{02} - M_{01} - a_2)$$

tenemos el siguiente sistema:

$$Y_{t+1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} Y_t + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

Cuya solución viene dado por:

$$Y_t = A^{t} \cdot Y_0 + [I - A]^{-1} \cdot \boldsymbol{b}$$

ya que el determinante de [I – A] viene dado por:

$$r_1 r_2([1-c_1]\,[1-c_2] + [1-c_1]m_2 + [1-c_2]m_1)$$

y este nunca será nulo.

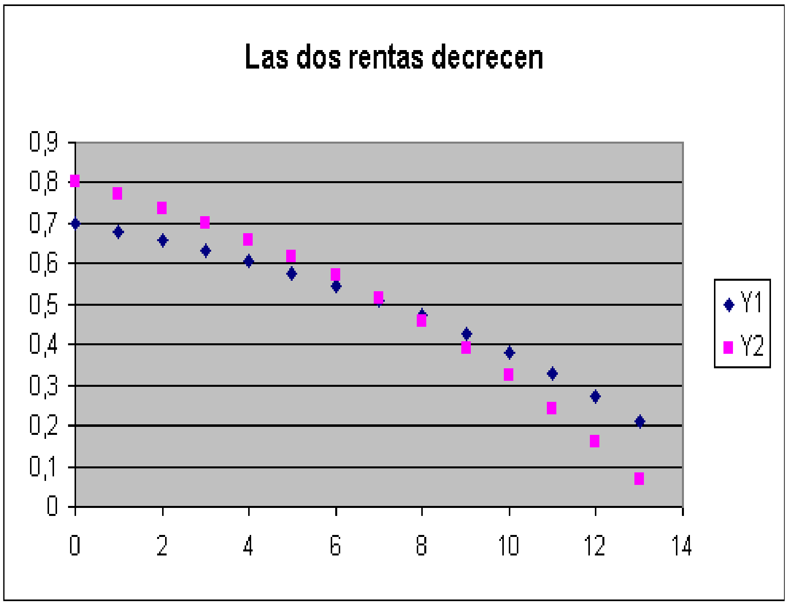
Análisis de la solución:

Pueden darse los siguientes casos:

a) Que las dos rentas sean decrecientes:

	PAIS 1	**PAIS 2**
a =	**0,5**	**0,5**
c =	**0,5**	**0,5**
r =	**0,2**	**0,2**
m=	**0,3**	**0,2**
M_0=	**0,2**	**0,2**
Yo =	**0,7**	**0,8**
Y* =	**0,9**	**1,1**

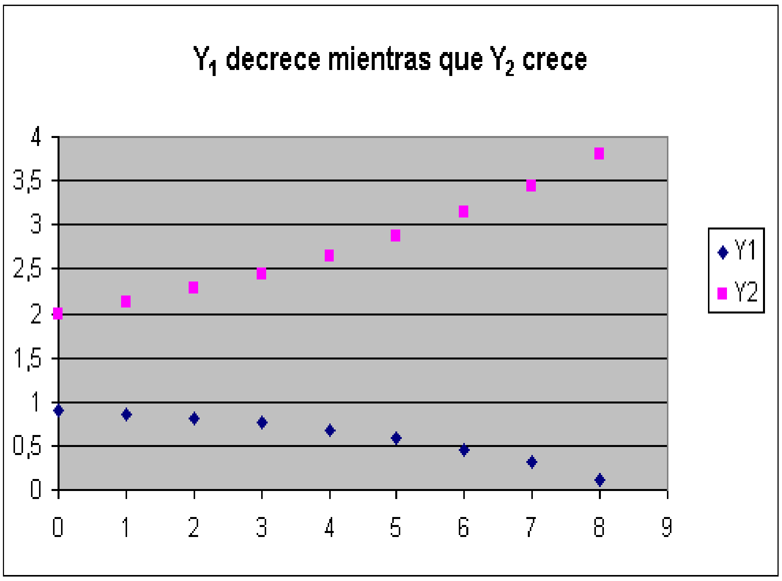
t	**Y_1**	**Y_2**
0	0,7	0,8
1	0,68	0,77
2	0,658	0,737
3	0,633	0,701
4	0,607	0,661
5	0,578	0,617
6	0,546	0,569
7	0,510	0,515
8	0,471	0,457
9	0,428	0,393
10	0,381	0,322
11	0,329	0,244
12	0,272	0,158
13	0,210	0,064



b) Una sea creciente y la otra decreciente:

	PAIS 1	**PAIS 2**
a =	**0,5**	**0,5**
c =	**0,5**	**0,5**
r =	**0,2**	**0,2**
m=	**0,3**	**0,2**
M_0=	**0,2**	**0,2**
Yo =	**0,9**	**2**
Y* =	**0,9**	**1,1**

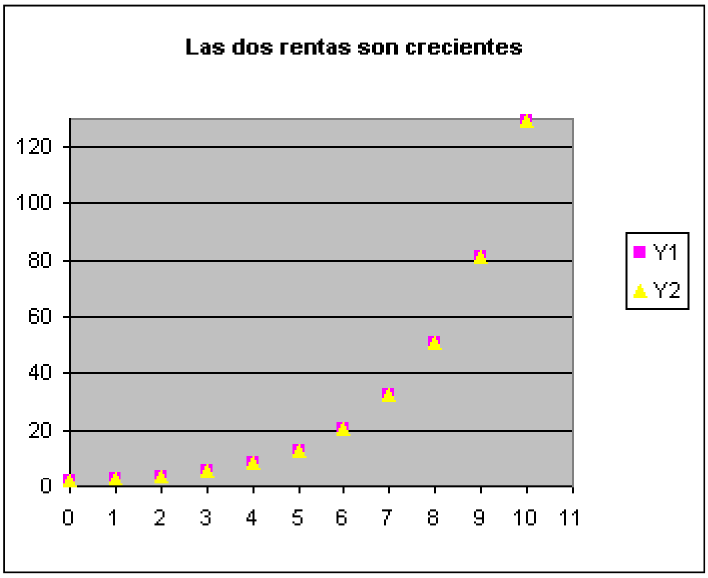
t	**Y_1**	**Y_2**
0	0,9	2
1	0,864	2,126
2	0,817	2,272
3	0,757	2,441
4	0,681	2,637
5	0,584	2,865
6	0,463	3,132
7	0,312	3,442
8	0,124	3,805



c) Que las dos rentas sean crecientes:

	PAIS 1	PAIS 2
a =	0,5	0,5
c =	0,3	0,5
r =	1	1
m=	0,2	0,3
M_0=	0,2	0,2
Yo =	2	2
Y* =	0,83333333	0,83333333

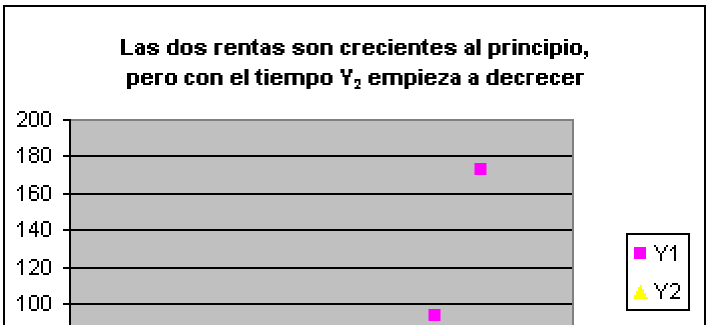
t	Y_1	Y_2
0	2,000	2,000
1	2,700	2,700
2	3,820	3,820
3	5,612	5,612
4	8,479	8,479
5	13,067	13,067
6	20,407	20,407
7	32,151	32,151
8	50,941	50,941
9	81,006	81,006
10	129,110	129,110



d) Que las dos rentas son crecientes al principio, pero luego una de ellas empieza adecrecer:

	PAIS 1	PAIS 2
a =	0,5	0,5
c =	0,3	0,5
r =	1,1	1
m=	0,2	0,3
M_0=	0,2	0,2
Yo =	2	2
Y* =	0,83333333	0,83333333

t	Y_1	Y_2
0	2,000	2,000



1	2,770	2,700
2	4,071	3,806
3	6,296	5,537
4	10,152	8,207
5	16,944	12,242
6	29,129	18,146
7	51,428	26,337
8	93,100	36,621
9	172,635	46,798
10	327,550	49,209
11	635,035	22,566

CAPÍTULO 9

MODELOS FINANCIEROS

1) Modelo de Inversión Inicial con reinversión de Intereses.

Enunciado:

Se dispone de un Capital K_o el cual se deposita en una cuenta que paga periódicamente intereses de i% sobre el Capital disponible en esta cuenta. Estos Intereses pasan a formar parte del Capital disponible para el periodo siguiente.

Ecuación del modelo:

$$K_{t+1} = (1 + i\%)\bullet K_t$$

Solución del modelo:

Por ser la ecuación del modelo la ecuación (e) con:

$$A = (1 + i\%)$$

se tiene entonces que:

$$K_t = K_o\bullet(1 + i\%)^t.$$

2) Modelo de Inversión Inicial con reinversión de Intereses e Inversión Periódica de una Renta Fija R.

Enunciado:

Se dispone de un Capital K_o el cual se deposita en una cuenta que paga periódicamente intereses de i% sobre el Capital disponible en esta cuenta. Estos Intereses pasan a formar parte del Capital disponible para el periodo siguiente, además de un monto fijo R que se invierte en cada periodo.

Ecuación del modelo:

$$K_{t+1} = (1 + i\%)\bullet K_t + R$$

Solución del modelo:

Por ser la ecuación del modelo la ecuación (f) con:

$$A = (1 + i\%) \ \text{ e } \ B = R$$

se tiene entonces que:

$$K_t = R/(–i\%) + [K_o – R/(–i\%)]•(1+i\%)^t,$$

o sea:

$$K_t = [K_o + R/i\%)]•(1+i\%)^t – R/i\%.$$
$$= K_o•(1+i\%)^t + R•[(1+i\%)^t – 1]/i\%.$$

3) Modelo de Inversión Inicial con reinversión de Intereses e Inversión Periódica de una Renta Creciente R_t.

Enunciado:

Se dispone de un Capital Ko el cual se deposita en una cuenta que paga periódicamente intereses de i% sobre el Capital disponible en esta cuenta. Estos Intereses pasan a formar parte del Capital disponible para el periodo siguiente, además de un monto creciente $R_t = (t+1)•R$ que se invierte en cada periodo.

Ecuación del modelo:

$$K_{t+1} = (1 + i\%)•K_t + (t+1)•R$$

o

$$\Delta K_t – i\%•K_t = (1 + t)•R$$

Solución del modelo:

Utilizando el método de Variación de Parámetros, con:

$$A = –i\% \ \text{ e } \ f(t) = (1+t)•R,$$

se tiene:

$$K_t = K_o•(1+i\%)^t + (1+i\%)^{t–1}• \sum_{k=0}^{t-1} (1+k)\bullet R/(1+i\%)^k$$

usando sumación por parte y simplificando:

$$K_t = K_o•(1+i\%)^t + (R/i\%)•\{[(1+i\%)^t – 1]•(1+i\%)/i\% – t\}.$$

BIBLIOGRAFÍA

ALLEN, R.G.D.: *Mathematical Económics. Second Edition*. MacMilan St.Martin´s Press. London. 1973.

BISHIR, JHON W. – DREWES, DONALD W.: *Mathematics in the Bheavioral and Social Sciences.* Harcourt, Brace & World. New York, 1970.

BLALOCK, HUBERT M. Jr.: *Construcción de Teorías en Ciencias Sociales. De las formulaciones verbales a las matemáticas.* Ed. Trillas. México, 1984.

BURGHES, D.N. – WOOD, A.D.: *Mathematical Models in the Social,Management and Life Sciences.* Ellis Horwood. Chichester, 1980.

CHIANG, ALPHA C. – WAINWRIGH, KEVIN: *Métodos Fundamentales de Economia Matemática. Cuarta Edición.* Mc Graw-Hill, México, 2006

DAMERON, PASCALE: *Mathématiques des Modèles Économiques. Analyse Dynamique*. Ed. Economica. Paris. 2001.

GANDOLFO, GIANCARLO: *Métodos y Modelos Matemáticos de la Dinámica Económica*, Editorial Tecnos, Madrid**.** 1976.

GOLDBERG, SAMUEL: *Ecuacioness en Diferencias Finitas*, Editorial Marcombo, Barcelona**.** 1964.

MAYNARD SMITH, J.: *Ideas Matemáticas en Biología*, C.E.C.S.A., México**.** 1977.

SCHMITH, J. WILLIAM: *Mathematical Foundations for Management Sciences and System Analysis*, Academic Press, New York**.** 1974.

SVIREZHEV, YU.M. – LOGOFET, D.O.: *Stability of Biological Communities*, MIR, Moscú**.** 1983.

TAKAHASHI, TAKEHITO: *Ecaucioens en Diferencias con Aplicaciones*, Grupo Editorial Iberoamérica, México**.** 1990.

SEGÖ, GIORGIO P. (Ed.): *New Quantitative Techniques For Economic Analysis*. Academic Press. New York. 1982.

VEGAS PÉREZ, A. – LÓPEZ CACHERO, M.: *Elementos de Matemáticas para Economistas*. Ediciones Pirámide, S.A. Madrid. 1976.

WEBER, JEAN E.: *Matemáticas para Administración y Economía. Cuarta Edición*. Harla, México, 1984.

WOODS, J. E.: *Mathematical Economics. Topics in multi-sectorial economics*. Longman, London, 1978.