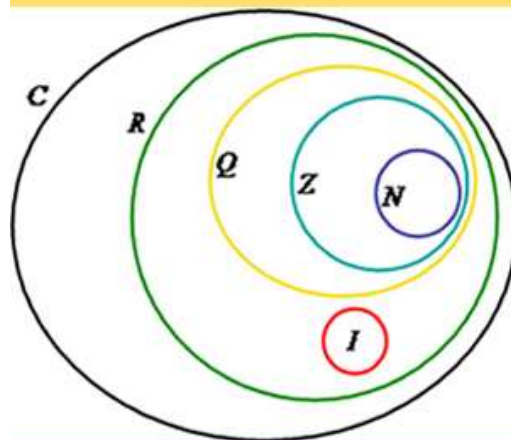


NÚMEROS COMPLEXOS:
HISTÓRIA, TEORIA E PRÁTICA



MARCELO SANTOS CHAVES

1317

Números Complexos

Marcelo Santos Chaves



Editado por la Fundación Universitaria Andaluza Inca Garcilaso para eumed.net

Derechos de autor protegidos. Solo se permite la impresión y copia de este texto para uso personal y/o académico.

Este libro puede obtenerse gratis solamente desde
<http://www.eumed.net/libros-gratis/2013a/1317/index.htm>

Cualquier otra copia de este texto en Internet es ilegal.

NÚMEROS COMPLEXOS: HISTÓRIA, TEORIA E PRÁTICA

MARCELO SANTOS CHAVES

**Belém-PA
Junho-2013**

C512n Chaves, Marcelo Santos

Números Complexos: História, Teoria e Prática.

54p. : il. Color. ; 21x30 cm.

Inclui referências

1. Números Complexos. 2. Historia da Matemática. 3. Fundamentos. 4. Engenharia Elétrica I. Título.

CDD 510.990.629

EPIGRAFE

“A obtenção de um delta negativo não perturbava os matemáticos do século 11. Em sua arrogância eles limitavam-se a afirmar que para este caso, a equação do 2º grau não tinha solução.”

Marcelo Santos Chaves

"Quem sabe a posteridade possa me agradecer por ter mostrado que os antigos não sabiam de tudo."

Pierre de Fermat

APRESENTAÇÃO

O presente trabalho se propõe a explorar a teoria dos números complexos. Seu surgimento. Sua evolução histórica. Seu processo de sistematização e consolidação enquanto saber matemático. Suas aplicações nos ramos da geometria plana e na engenharia elétrica.

Para este fim dividiremos este trabalho em 3 capítulos, onde no primeiro capítulo discorreremos sobre a recorrência dos números complexos na história, do Renascimento até o século XIX com William Hamilton. No segundo capítulo trataremos de dar conta da apresentação de todos os fundamentos dos números complexos, a partir de deduções de formulas e ilustrações gráficas. No terceiro discorreremos sobre algumas aplicações dos complexos em outras áreas do conhecimento científico, afim de aferir sua precisão e utilidade nas ciências modernas.

Como suporte teórico, utilizaremos diversas referencias bibliográficas capazes de subsidiar na transposição de todo acúmulo desta teoria ao longo de quatro séculos, na expectativa de poder alcançar a plenitude do saber matemático, no que tange Números Complexos.

PRESENTATION

This paper aims to explore the theory of complex numbers. Its emergence. Its historical evolution. Process of systematization and consolidation as mathematical knowledge. Its applications in the fields of plane geometry and electrical engineering.

For this purpose we will divide this work into three chapters, the first chapter where we will discuss the recurrence of complex numbers in history from the Renaissance to the nineteenth century with William Hamilton. In the second chapter we will try to give an account of the presentation of all the basics of complex numbers, from deductions formulas and graphic illustrations. In the third we will discuss some applications of the complexes in other areas of scientific knowledge in order to assess its accuracy and usefulness in the modern sciences.

Theoretical support, we use several bibliography able to subsidize the implementation of all accumulation of this theory over four centuries, the expectation of being able to reach the fullness of mathematical knowledge, regarding Complex Numbers.

PRESENTACIÓN

Este trabajo tiene como objetivo estudiar la teoría de los números complejos. Su emergencia. Su evolución histórica. Proceso de sistematización y consolidación como conocimiento matemático. Sus aplicaciones en el campo de la geometría plana y la ingeniería eléctrica.

Para ello vamos a dividir este trabajo en tres capítulos, el primer capítulo donde veremos la repetición de los números complejos en la historia desde el Renacimiento hasta el siglo XIX, con William Hamilton. En el segundo capítulo vamos a tratar de dar cuenta de la presentación de todos los conceptos básicos de los números complejos, de deducciones fórmulas e ilustraciones gráficas. En la tercera veremos algunas aplicaciones de los complejos en otras áreas del conocimiento científico con el fin de evaluar su exactitud y utilidad de las ciencias modernas.

Apoyo teórico, utilizamos varios bibliografía capaz de subvencionar la ejecución de todos acumulación de esta teoría lo largo de cuatro siglos, la esperanza de poder llegar a la plenitud del conocimiento matemático, en cuanto a números complejos.

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1: representação geométrica de um par ordenado.....	25
Gráfico 2: representação geométrica dos números complexos.....	26
Gráfico 3: representação vetorial dos números complexos.....	27
Gráfico 4: representação do conjugado de um número complexo.....	28
Gráfico 5: representação do teorema de Pitágoras no plano.....	30
Gráfico 6: representação do argumento de um complexo.....	31
Gráfico 7: representação do complexo $Z = a + bi$	32
Gráfico 8: representação do argumento de um complexo.....	32
Gráfico 9: representação da forma geométrica de um complexo.....	33
Gráfico 10: representação da forma trigonométrica de um complexo.....	34
Gráfico 11: representação da forma trigonométrica de um complexo dado.....	36
Gráfico 12: representação na forma geométrica de uma raiz cúbica de um complexo dado.....	44
Gráfico 13: representação na forma geométrica das raízes cúbicas de um complexo dado.....	46
Gráfico 14: representação na forma geométrica da rotação de um complexo.	49

LISTA DE IMAGENS

Imagem 1: Girolamo Cardano.....	14
Imagem 2: capa de <i>Ars Magna</i>	14
Imagem 3: Raffaello Bombelli.....	16
Imagem 4: capa de <i>Álgebra</i>	16
Imagem 5: Leonhard Euler.....	17
Imagem 6: Abraham de Moivre.....	17
Imagem 7: Johann Karl Friedrich Gauss.....	18
Imagem 8: Jean Robert Argand.....	18
Imagem 9: Caspar Wessel.....	18
Imagem 10: William Rowan Halmilton.....	19
Imagem 11: Conjunto dos Números Complexos (C).....	22

SUMÁRIO

Considerações Iniciais	11
Capítulo I – Surgimento e Evolução	12
1. O surgimento e evolução dos Números Complexos	13
1.1 A problemática raiz quadrada de -1.....	13
1.2 <i>Ars Magna</i> : um marco histórico do período moderno.....	14
1.3 As contribuições de Bombelli.....	15
1.4 As contribuições do século XVIII e surgimento da nomenclatura <i>i</i>	17
1.5 De Gauss à consolidação com Hamilton no século XIX.....	17
Capítulo II – A Teoria	20
2. Fundamentos dos Números complexos	21
2.1 Unidade imaginária.....	21
2.2 O conjunto dos Números Complexos.....	21
2.3 Forma algébrica.....	23
2.4 Igualdade e operações.....	23
2.4.1 <i>Adição e subtração de números complexos</i>	23
2.4.2 <i>Multiplicação de números complexos</i>	24
2.5 Representação geométrica dos números complexos	25
2.6 Conjugado de um número complexo.....	26
2.7 Divisão de números complexos.....	28
2.8 As potências de <i>i</i>	29
2.9 Módulo de um número complexo.....	30
2.10 Argumento de um número complexo.....	31
2.11 Forma trigonométrica de um número complexo.....	33
2.12 Multiplicação de números complexos na forma trigonométrica.....	34
2.13 Divisão de números complexos na forma trigonométrica.....	36
2.14 Potenciação de números complexos na forma trigonométrica.....	38
2.15 Raízes enésimas de números complexos (Radiciação).....	40
2.16 Equações binômias e trinômias.....	45
Capítulo III – Os Complexos e a natureza	47
3. Aplicações dos Números complexos	48
3.1 Os números complexos e a geometria.....	48
3.2 Os números complexos e a engenharia elétrica.....	49
5. Considerações Finais	50
6. Referências	53

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

As descobertas matemáticas muitas vezes parecem ser, a princípio, totalmente dissociáveis de qualquer correspondência com a natureza, fazendo-nos ter a impressão de que não possuem aplicação prática. Ante a tal premissa, faz-se necessário compreender que o estudo dos Números Complexos não deve ser um fim em si mesmo, pois este deve estar intimamente relacionado ao conhecimento de sua evolução histórica, bem como no domínio de seus fundamentos e em suas variadas aplicações, afim de que esses aspectos possam caminhar juntos, através de uma análise histórica e aplicativa.

É com esta perspectiva que o conceito de Números Complexos é formado no presente trabalho. Este último se propõe a apresentar, em 3 (três) capítulos, o processo de evolução histórica dos Números Complexos ao longo de quatro séculos; seus fundamentos; e suas aplicações em outros ramos da ciência como na geometria plana e Engenharia Elétrica.

No primeiro capítulo trataremos de dar conta do surgimento dos Números Complexos na Europa Renascentista do século XVI, apresentando todos os conhecimentos agregados nesta temática em quatro séculos, desde Girolamo Cardano até sua total sistematização na forma algébrica com William Hamilton no século XIX. No segundo capítulo apresentaremos, com riqueza de detalhes e ilustrações gráficas, os fundamentos dos Números Complexos, dissecando todo acúmulo produzido por grandes ícones da matemática como Bombelli e Gauss, ao longo de quatro séculos. No terceiro capítulo trataremos de identificar a aplicabilidade dos Números Complexos no ramo das rotações de coordenadas no plano cartesiano, assim como sua aplicação no estudo da teoria dos circuitos elétricos de corrente alternada.

Este trabalho fundamentou-se em uma ampla bibliográfica (artigos, dissertações e principalmente em Livros) capaz de dar conta do surgimento e resgate histórico dos Números Complexos; capaz de dar conta de seus fundamentos a partir de deduções de fórmulas e resolução de problemas, através dos mais variados exemplos; capaz de dar conta da constituição de ilustrações de aplicabilidades dos complexos nos diversos ramos da ciência.

CAPÍTULO I
SURGIMENTO E EVOLUÇÃO

1. O SURGIMENTO E EVOLUÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Ao longo da história, solucionar equações sempre foi um tema que maravilhoudiversos matemáticos. Na Babilônia, antigos matemáticosobtiveram grandes êxitos em resolver equações do 2º grau fundamentados no que atualmente denominamos de “completamento de quadrado”. Cabe o destaque também dos matemáticos gregos, que exerceramimportantefunçãoprocesso evolutivo da matemática, onde resolviam alguns modelos de equações do 2º grau com o auxílio de régua e compasso. Com o subjugamento da Grécia por Roma praticamente encerrou com o domínio da Matemática Grega.E com a queda do Império Romano em 476 depois de Cristo, e a posterior a ascensão do Cristianismo junto aos povos Bárbaros (francos) no ano 496 D.C, a Europa ingressou na chamada “Idade das Trevas” e o processo evolutivo da Matemática passou a ser protagonizado pelas nações árabes e hindus. Nas pesquisas em Álgebra, os matemáticos hindus evoluíram bastante, sendo *Baskara* o nome mais marcante no senso comum quando mencionamos equações do 2º grau. Porém a formula de *Baskara* não foi descoberta por ele, mas sim pelo matemático hindu Sridhara, no século XI (CERRI e MONTEIRO, 2001).

1.1 A PROBLEMÁTICA RAIZ QUADRADA DE -1

Vamos resgatar as conclusões de *Baskara* no tocante a equação do 2º grau. Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$ a formula de *Baskara* impõem que suas raízes são:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Note que, dependendo de quais valores a , b e c venham a assumir, poderíamos ter como resultado de $\Delta = b^2 - 4ac$ um valor negativo. Ante a tal situação, este fato era algo que não preocupava os matemáticos antes do século XVI. Eles simplesmente limitavam-se a afirmar que, sob a ótica do conjunto dos números reais, a equação “não possuía solução”.

Com o advento do regaste neoclássico ocorrido na Europa no século XVI, conhecido na história como *Renascimento*, este modo rígido e restrito de pensar uma solução para a equação do 2º com um *Delta* negativo passou a ser objeto de profundos estudos e debates na Europa renascentista, e nos séculos que se seguiriam.

1.2 ARS MAGNA: UM MARCO HISTÓRICO DO PERÍODO MODERNO

Em 1545, momento áureo da Renascença, o matemático, físico e médico italiano Girolamo Cardano (1501-1576) publicou em 1545 uma obra notável chamada *Ars Magna*, trazendo grande impacto sobre os algebristas de sua época. Em sua obra, pela primeira vez, foram exibidas as resoluções de equações de 3ª grau (chamadas cúbicas) e de 4º grau (chamada quárticas). Como o próprio Cardano assegurou em sua obra, a sugestão para a solução das equações cúbicas foi a ele fornecida pelo matemático italiano Niccolo Tartaglia (1500-1557) e a resolução das equações quárticas tinha sidopreliminarmente descoberta por seu antigo auxiliar Ludivico Ferrari (1522-1565).

A relevância da obra *Ars Magna* de Cardano foi tão expressiva que o ano de 1545 passou a ser tido como o marco inicial do período moderno da história da Matemática.



Imagem 1: Girolamo Cardano



Imagem 2: capa de *Ars Magna*

A fórmula indicada por Cardano para a resolução das equações cúbicas do tipo $x^3 + ax + b = 0$, em *Ars Magna*, fora:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

1.3 AS CONTRIBUIÇÕES DE BOMBELLI

Alguns anos depois, em 1572, um outro matemático italiano, o engenheiro hidráulico Raffaello Bombelli (1526-1573), publicou uma obra denominada *Álgebra*, na qual debatia um problema bastante relevante. Ele sabia de antemão, que a equação cúbica do tipo $x^3 + 15x + 4 = 0$ tinha como soluções os seguintes valores:

$$\begin{aligned}x_1 &= 4 \\x_2 &= -2 + \sqrt{3} \\x_3 &= -2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

Entretanto, ao se valer da fórmula de Cardano, Bombelli encontrava a seguinte expressão:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Como $\sqrt{-121}$ não é um contido no conjunto dos reais, Bombelli se dispôs a obter os números **a** e **b** positivos, tais que:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} &= a + b \cdot \sqrt{-1} \\ \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} &= a - b \cdot \sqrt{-1}\end{aligned}$$

A partir de sucessivos desenvolvimentos algébricos, Bombelli constatou que $a = 2$ e $b = 1$, pois assim teria $x = 4$. Para isso, começou a operar com o símbolo $\sqrt{-1}$ da mesma forma como operava com qualquer número real.



Imagem 3: Raffaello Bombelli



Imagem 4: capa de *Álgebra*

Dessa forma, corroborando com Cerri e Monteiro (2001), questões realmente perturbadoras surgiram no mundo matemático do século XVI, e não podiam ser ignoradas, a partir da imperatividade em ter que se operar com $\sqrt{-1}$. Como pode a raiz quadrada de um número negativo possibilitar uma solução?! Para o caso em questão, além da extração de raízes quadradas de números negativos, também nos deparamos com uma extração de raízes cúbicas de números de natureza desconhecidas. Quando, nas equações de grau 2º a fórmula de Baskara levava à raiz quadrada de números negativos, era fácil dizer que aquilo indicava a “não existência de soluções”. Agora, entretanto, nota-se que há equações de grau 3 com soluções reais conhecidas, mas cuja determinação passava pela extração de raízes quadradas de números negativos. Isto não ocorre só com esta equação. Neste sentido, não havia como negar que os números reais eram insuficientes para se tratar de equações algébricas. O que estava acontecendo no século XVI era semelhante ao que ocorreu no tempo dos gregos antigos, quando se verificou a insuficiência dos números racionais com a construção do número $\sqrt{2}$, que não era racional: o conceito de número precisava ser estendido.

1.4 AS CONTRIBUIÇÕES DO SÉCULO XVIII E SURGIMENTO DA NOMENCLATURA “i”

A partir dos feitos algébricos de Bombelli, os matemáticos começaram a utilizar em seus postulados raízes quadradas de números negativos e, somente no século XVIII, o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) estereotipou representar algebricamente $\sqrt{-1}$ pela letra *i*. nesta mesma esteira de acontecimentos no século XVIII, Abraham de Moivre (1667-1754) introduziu métodos mais sofisticados na investigação das propriedades dos números complexos, relacionando-os com a trigonometria.



Imagem 5: Leonhard Euler

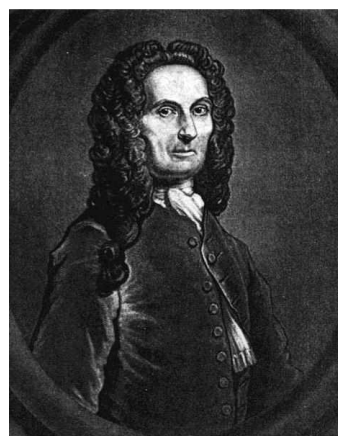


Imagem 6: Abraham de Moivre

1.5 DE GAUSS À CONSOLIDAÇÃO COM HAMILTON NO SÉCULO XIX

No início do século XIX, ante a todo acúmulo obtido sobre os números complexos até então, a Europa iria tomar conhecimento em 1799 da representação geométrica dos números complexos no plano, concebida pelo matemático, físico e astrônomo Johann Karl Friedrich Gauss (1777-1855), em sua tese de doutorado ora denominada *New Demonstration Of The Theorem That Every Rational Integral Algebraic Function In Variable Can Be Solved Into Real Factors Of First Or Second Degree*.

Fora Gauss o inventor do termo “Números Complexos”, e em sua tese apresentou uma detalhada explicação de como os números complexos

poderiam ser desenvolvidos segundo uma teoria exata, apoiada na representação desses números no plano cartesiano. Antes dele, o matemático suíço Jean Robert Argand (1768-1822) e o matemático norueguês Caspar Wessel (1745-1818) já haviam escrito sobre a representação geométrica dos complexos no plano, porém a pouca representatividade desses matemáticos fez com que seus trabalhos não alcançassem a notoriedade merecida na época.



Imagem 7: Johann Karl Friedrich Gauss



Imagem 8: Jean Robert Argand



Imagem 9: Caspar Wessel

Finalmente, em 1837, o irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865) logrou o último degrau dessas descobertas reconhecendo os números complexos como sendo um par ordenado de números reais (a,b) e reescrevendo as definições geométricas de Gauss na forma algébrica.



Imagem 10: William Rowan Halmilton

Ante a este breve e objetivo resgate histórico e evolutivo dos números complexos, vamos a seguir refletir sobre o que fato fora definido e sistematizado como sendo a Teoria dos Números Complexos na atualidade.

CAPÍTULO II
A TEORIA

2. FUNDAMENTOS DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Neste capítulo iremos apresentar todos os fundamentos dos números complexos, devidamente sistematizados, utilizados atualmente no ensino básico e superior, produto do acúmulo de 4 séculos de pesquisas e inovações.

2.1 UNIDADE IMAGINÁRIA

Chamamos unidade imaginária ao número i tal que:

$$i^2 = -1, \text{ ou seja, } i = \sqrt{-1}$$

Assim, no conjunto dos números complexos, as equações do 2º grau com $\Delta < 0$ possuem solução não-vazia.

2.2 O CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Dentre os conjuntos numéricos já conhecidos temos o conjunto dos números naturais, representado da seguinte forma:

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

Para dar viabilidade às subtrações, este conjunto foi ampliado e assim obtivemos o conjunto dos números inteiros, representado da seguinte forma:

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

Para dar viabilidade às divisões, estendemos este derradeiro e assim obtivemos o conjunto dos números racionais, que podem ser representados por uma fração, com numerador e denominador inteiros:

$$\mathbf{Q} = \left\{ x = \frac{a}{b}, \text{ com } a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z} \text{ e } b \neq 0 \right\}$$

Em \mathbf{Q} , a equação $x^2 = 2$ não pode ser resolvida, ou seja, as soluções $x = \sqrt{2}$ e $x = -\sqrt{2}$ não podem ser representadas pela fração $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$ e a e b pertencentes a \mathbf{Z} . $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ são exemplos dos números chamados irracionais (\mathbf{Irr}).

Ao se fazer a união dos racionais com os irracionais surgem os números reais (\mathbb{R}):

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Logo, podemos definir \mathbb{N} como uma parte de \mathbb{Z} , \mathbb{Z} como uma parte de \mathbb{Q} e $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, e este último conjunto \mathbb{R} e escrever:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$$

Inferimos que, $x \in \mathbb{R}$ então $x^2 \geq 0$. Assim, a equação $x^2 + 1 = 0$ não possui solução em \mathbb{R} , pois:

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \pm\sqrt{-1}$$

Logo, não existe um número real x que elevado ao quadrado resulte em -1 . E por conta de tal fenômeno é que temos de ampliar o conjunto dos números reais para obter um novo conjunto de números, ora denominado conjunto dos Números Complexos (\mathbb{C}).

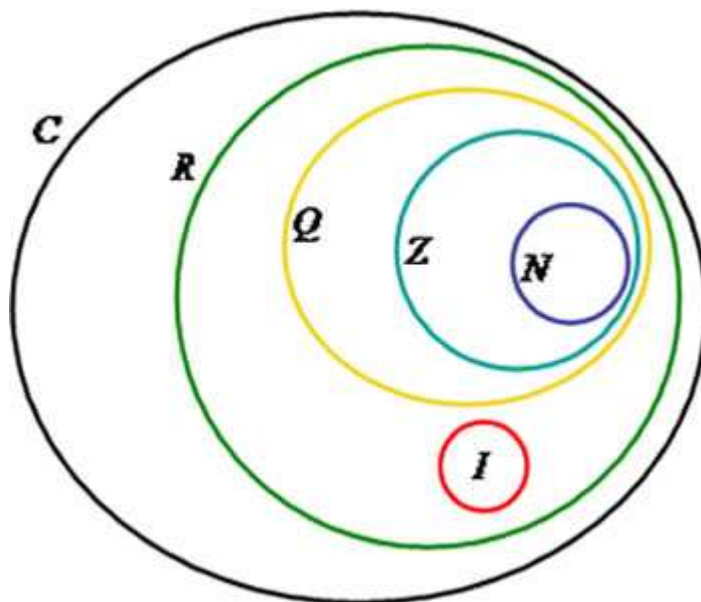


Imagem 11: Conjunto dos Números Complexos (\mathbb{C})

Inferimos que, o conjunto \mathbf{C} é aquele formado pelos números que podem ser expressos na forma $Z = a + bi$, em que $a \in \mathbf{IR}$, $b \in \mathbf{IR}$ e $i = \sqrt{-1}$, ou seja:

$$\mathbf{C} = \{Z = a + bi \mid a \in \mathbf{IR}, b \in \mathbf{IR}, i = \sqrt{-1}\}$$

2.3 FORMA ALGÉBRICA

Note que a forma $Z = a + bi$ é denominada forma algébrica de um número complexo, em que a é a parte real e b , a parte imaginária.

Tomando um número complexo $Z = a + bi$, temos:

$$\left. \begin{array}{l} a = 0 \\ b \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow Z = bi \text{ (imaginário puro)}$$

$$b = 0 \Rightarrow Z = a \text{ (real)}$$

2.4 IGUALDADE E OPERAÇÕES

Dados dois números complexos, $Z_1 = a_1 + b_1i$ e $Z_2 = a_2 + b_2i$, dizemos que eles são **iguais** quando a parte real de Z_1 for igual à de Z_2 e o mesmo ocorrer com as partes imaginárias:

$$a_1 + b_1i = a_2 + b_2i \Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ e } b_1 = b_2$$

Considere, por exemplo, os complexos $Z_1 = (a+1) + 4i$ e $Z_2 = 3 + (2-b)i$. Teremos $Z_1 = Z_2$ se ocorrer:

$$(a+1) + 4i = 3 + (2-b)i \Rightarrow \begin{cases} a+1 = 3 \Rightarrow a = 2 \\ 2-b = 4 \Rightarrow -2 \end{cases}$$

2.4.1 ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Faz-se a adição ou a subtração dos complexos $Z_1 = a_1 + b_1i$ e $Z_2 = a_2 + b_2i$ somando ou subtraindo as partes reais, a_1 e a_2 , e as partes imaginárias, b_1 e b_2 :

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) &= (a_1 + a_2) + (b_1i + b_2i) \\ (a_1 + b_1i) - (a_2 + b_2i) &= (a_1 - a_2) + (b_1i - b_2i)\end{aligned}$$

Exemplo:

Dado os complexos, $Z_1 = 2 - 3i$ e $Z_2 = 4 + 6i$ calcule $(Z_1 + Z_2)$, $(Z_1 - Z_2)$ e $(Z_2 - Z_1)$.

Resolução:

$$\text{a) } (Z_1 + Z_2) = 2 - 3i + 4 + 6i = 6 + 3i$$

$$\text{b) } (Z_1 - Z_2) = 2 - 3i - (4 + 6i) = -2 - 9i$$

$$\text{c) } (Z_2 - Z_1) = 4 + 6i - (2 - 3i) = 2 + 9i$$

2.4.2 MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Na multiplicação dos complexos $Z_1 = a_1 + b_1i$ e $Z_2 = a_2 + b_2i$, procede-se da mesma forma como na multiplicação de dois binômios, substituindo i^2 por -1 . Assim:

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= a_1 + b_1i \\ Z_2 &= a_2 + b_2i \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} Z_1 \cdot Z_2 &= (a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i) \\ &= a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2i + a_2 \cdot b_1i + b_1 \cdot b_2i^2 \end{aligned}$$

Como $i^2 = -1$, temos:

$$(a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)i$$

Exemplo:

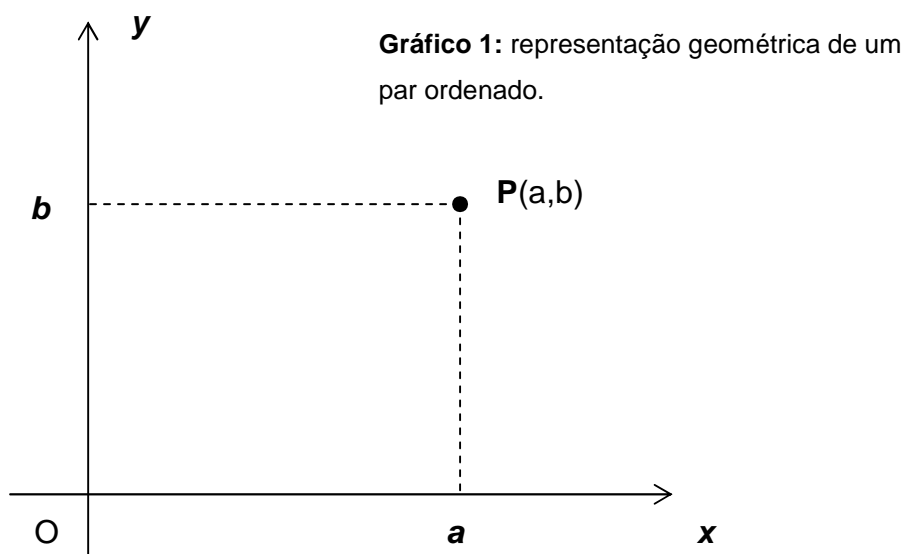
Obtenha o produto dos complexos $Z_1 = 2 + i$ e $Z_2 = 2 - i$.

Resolução:

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= 2 + i \\ Z_2 &= 2 - i \end{aligned} \right\} \Rightarrow Z_1 \cdot Z_2 = (2 + i) \cdot (2 - i) = 4 - i^2 = 5$$

2.5 REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Para cada número complexo $Z = a + bi$ está associado o par de números reais (a,b) . Esta foi a conclusão de Gauss em sua tese de doutorado em 1799. Sua tese ainda sustenta que cada par de números reais (a,b) está associada a um único ponto do plano cartesiano. Logo, podemos associar a cada número complexo $Z = a + bi$ o ponto P do plano de coordenadas a e b , isto é, $P(a,b)$.



O plano cartesiano no qual estão exibidos os números complexos é denominado *plano complexo* de ou *plano de Argand-Gauss*.

Logo, dizemos que o ponto $P(a,b)$ é o afixo do número complexo $a + bi$.

Exemplo:

Represente geometricamente os números complexos:

$$Z_1 = 3 - 2i, Z_2 = 5, Z_3 = -2i, Z_4 = 2 + i \text{ e } Z_5 = -2 + i.$$

Resolução:

$$Z_1 = 3 - 2i \Rightarrow (3, -2)$$

$$Z_2 = 5 \Rightarrow (5, 0)$$

$$Z_3 = -2i \Rightarrow (0, -2)$$

$$Z_4 = 2 + i \Rightarrow (2, 1)$$

$$Z_5 = -2 + i \Rightarrow (-2, 1)$$

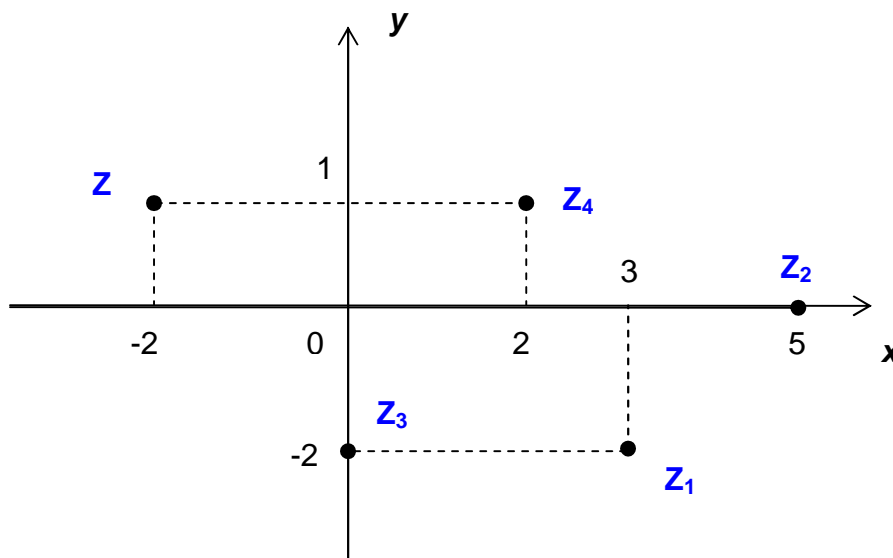


Gráfico 2: representação geométrica dos números complexos.

Ante a esta representação, corroboramos com Dante (2011) sobre as seguintes considerações:

1º) Os números complexos reais pertencem ao eixo Ox, mantendo a correspondência segundo a qual para cada número real existe um ponto de reta;

2º) Os números imaginários puros pertencem ao eixo Oy.

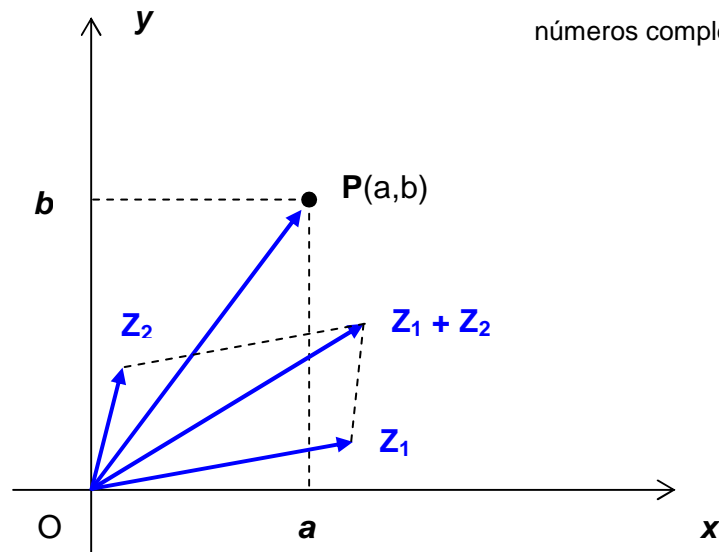
3º) Os demais números complexos ($a + bi$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$) pertencem aos vários quadrantes, de acordo com os sinais de **a** e **b**.

4º) Para cada número complexo existe um único ponto e vice-versa.

5º) Podemos associar a cada complexo $Z = a + bi$ um único vetor com extremidades no ponto **O**, origem do sistema de coordenadas cartesianas, e no ponto **P(a,b)**.

No plano complexo ao lado, além do número complexo $Z = a + bi$, estão representados outros dois números complexos, Z_1 e Z_2 , e a soma deles, $Z_1 + Z_2$ (diagonal do paralelogramo formado por Z_1 e Z_2).

Gráfico 3: representação vetorial dos números complexos.



6º) A associação dos números complexos $Z = a + bi$ aos vetores permite o uso dos números complexos em diversos campos nos quais as grandezas são vetoriais. Um exemplo disso é o estudo da eletricidade em nível superior. Neste espaço acadêmico os conceitos de corrente elétrica, voltagem, impedância, etc. usam números complexos.

2.6 CONJUGADO DE UM NÚMERO COMPLEXO

O conjugado de um número complexo $Z = (a,b) = a + bi$ é o número complexo $\bar{Z} = (a,-b) = a - bi$. Assim:

Se $Z = 2 + 3i$, então $\bar{Z} = 2 - 3i$

Se $Z = -3 - 4i$, então $\bar{Z} = -3 + 4i$

Geometricamente, o conjugado \bar{Z} de Z é representado pelo simétrico de Z em relação ao eixo Ox .

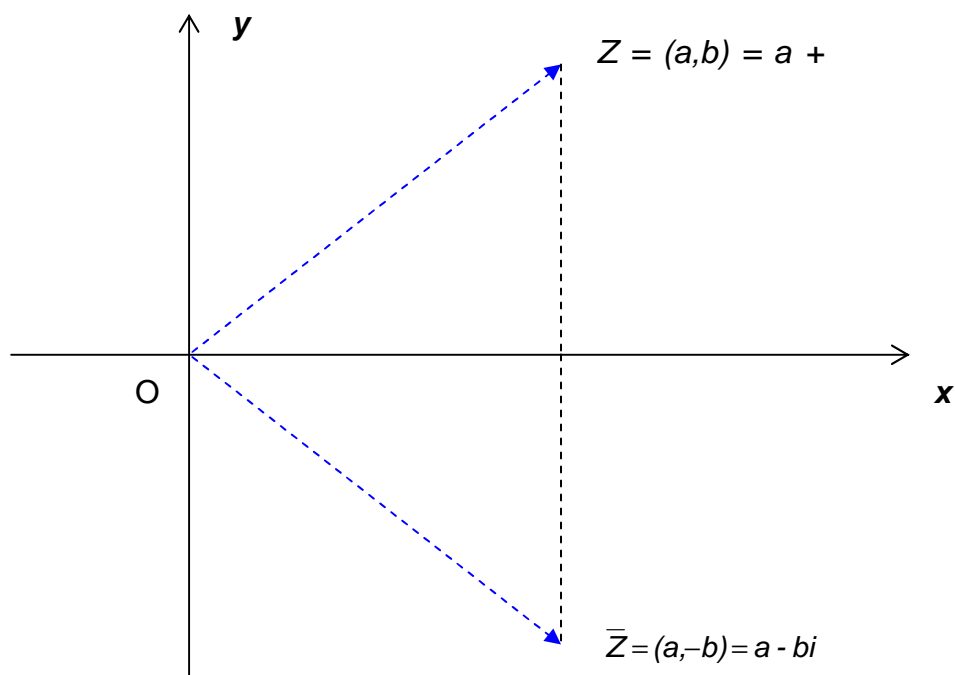


Gráfico 4: representação do conjugado de um número complexo.

2.7 DIVISÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Considere os complexos Z_1 e Z_2 com $Z \neq 0$, podemos fazer $\frac{Z_1}{Z_2}$ multiplicando o numerador e o denominador da fração pelo conjugado do denominador. Assim:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_1 \cdot \bar{Z}_2}{Z_2 \cdot \bar{Z}_2}$$

Exemplo:

Efetue a divisão de $Z_1 = 2 + 4i$ por $Z_2 = 5 - 3i$.

Resolução:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2 + 4i}{5 - 3i} \Rightarrow \frac{(2 + 4i) \cdot (5 + 3i)}{(5 - 3i) \cdot (5 + 3i)} = \frac{10 + 6i + 20i + 12i^2}{5^2 + 3^2} \Rightarrow \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{-2 + 26i}{34}$$

2.8 AS POTÊNCIAS DE “i”

Efetuada algumas potências de i^n , com $n \in \mathbb{N}$, podemos obter um critério para determinar uma potência genérica de i :

$$\begin{array}{ll} i^0 = 1 & i^4 = i^3 \cdot i = 1 \\ i^1 = i & i^5 = i^4 \cdot i = i \\ i^2 = i \cdot i = -1 & i^6 = i^5 \cdot i = -1 \\ i^3 = i^2 \cdot i = -i & i^7 = i^6 \cdot i = -i \end{array}$$

Note que já é possível perceber uma repetição dos números 1, i , -1 e $-i$.
Veja mais algumas potências:

$$\begin{array}{lll} i^8 = 1 & i^{12} = 1 & i^{16} = 1 \\ i^9 = i & i^{13} = i & i^{17} = i \\ i^{10} = -1 & i^{14} = -1 & i^{18} = -1 \\ i^{11} = -i & i^{15} = -i & i^{19} = -i \end{array}$$

Assim, para obter a potência i^n , basta calcular i^r , em que r é o resto da divisão de n por 4.

Exemplo:

Calcule as potências de i .

a) i^{27} b) i^{129} c) i^{2022}

Resolução:

a)

$$\begin{array}{r|l} 27 & 4 \\ 3 & 6 \end{array} \quad \Rightarrow i^{27} = i^3 \Rightarrow i^{27} = -i$$

b)

$$\begin{array}{r|l} 129 & 4 \\ 09 & 32 \end{array} \quad \Rightarrow i^{129} = i^1 \Rightarrow i^{129} = i$$

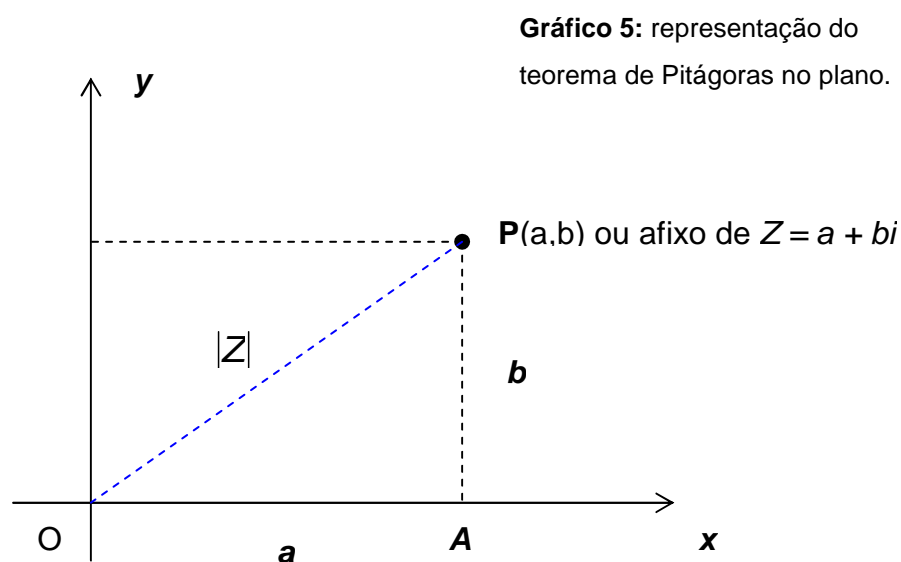
c)

$$\begin{array}{r|l}
 2022 & 4 \\
 \hline
 022 & 505 \\
 02 &
 \end{array}
 \Rightarrow i^{2022} = i^2 \Rightarrow i^{2022} = -1$$

2.9 MÓDULO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Geometricamente falando, o módulo de um número complexo é a distância da origem do sistema de coordenadas **O** ao afixo de **Z**.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo **OAP**, teremos:



$$|Z|^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Note que essa igualdade vale também para os pontos situados nos eixos e nos demais quadrantes.

Então podemos afirmar que, dado um número complexo $Z = a + bi$, chama-se *módulo* de **Z** e indica-se por $|Z|$ o número real positivo ou nulo dado por:

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Exemplo:

Vamos determinar o módulo dos seguintes complexos:

a) $Z = 4 + 3i$

Se $Z = 4 + 3i$, então :

$$|Z| = |4 + 3i| = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

b) $Z = -3 - 2i$

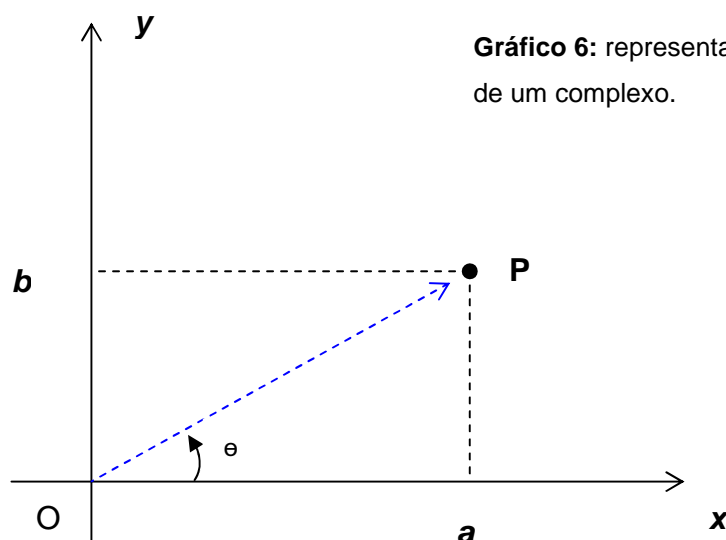
Se $Z = -3 - 2i$, então :

$$|Z| = |-3 - 2i| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

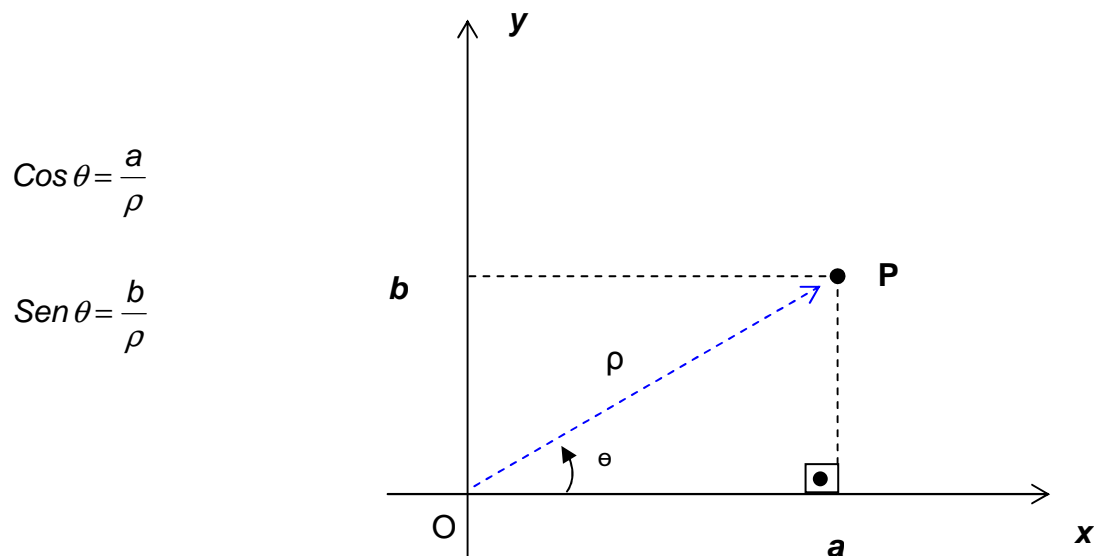
2.10 ARGUMENTO DE UM NÚMERO COMPLEXO

O argumento de um número complexo $Z = a + bi$, com $Z \neq 0$, é o número $\theta (0 \leq \theta < 2\pi)$, que corresponde à medida do ângulo formado entre a reta \overline{OP} e o eixo \overline{Ox} , no sentido anti-horário.

$$\arg(Z) = \theta, 0 \leq \theta < 2\pi$$



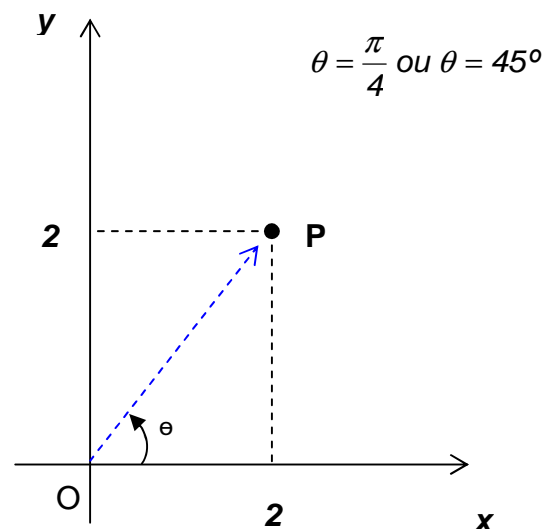
Considere um número complexo $Z = a + bi$, obtemos θ a partir de duas relações que podemos estabelecer entre os valores de a , b e ρ :

Gráfico 7: representação do complexo $Z = a + bi$.**Exemplo:**

Calcule o argumento θ do número complexo $Z = 2 + 2i$.

Resolução:

$$\left. \begin{aligned} |Z| = \rho = \sqrt{2^2 + 2^2} &\Rightarrow \rho = 2\sqrt{2} \\ \text{Cos } \theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} &\Rightarrow \text{Cos } \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{Sen } \theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} &\Rightarrow \text{Sen } \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \arg(Z) = \theta = \frac{\pi}{4}$$

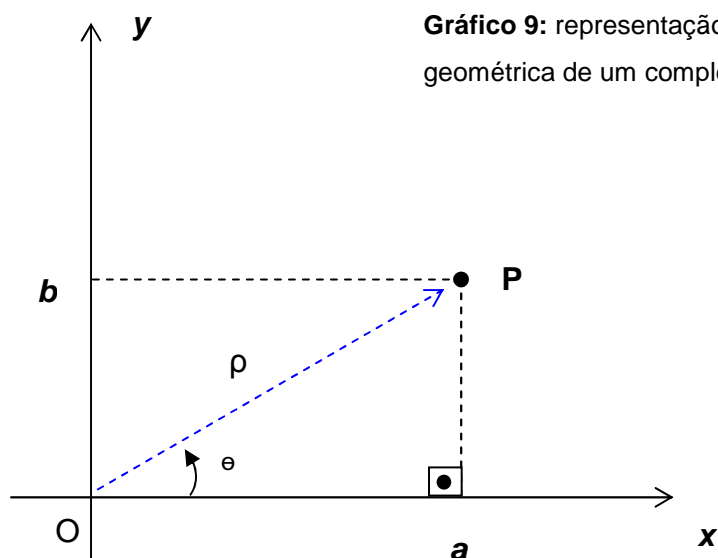
Gráfico 8: representação do argumento de um complexo.

2.11 FORMA TRIGONOMÉTRICA DE UM NÚMERO COMPLEXO

Todo número complexo $Z = a + bi$, não-nulo, pode ser expresso em função do módulo, do Seno e do Cosseno do argumento de Z :

$$\cos \theta = \frac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho \cdot \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{b}{\rho} \Rightarrow b = \rho \cdot \sin \theta$$



Substituindo os valores de a e b em $Z = a + bi$, obtemos:

$$Z = \rho \cdot \cos \theta + i \cdot \rho \cdot \sin \theta$$

$$Z = \rho \cdot (\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$$

Assim, o complexo $Z = a + bi$, com $Z \neq 0$, pode ser escrito na forma:

$$Z = \rho \cdot (\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$$

Exemplo:

Determine a forma polar (trigonométrica) de $Z = 1 - \sqrt{3}i$:

Resolução:

$$\rho = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} \Rightarrow \rho = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \operatorname{Sen} \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{3}$$

$$\text{Assim: } Z = 2 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \cdot \operatorname{Sen} \frac{5\pi}{3} \right).$$

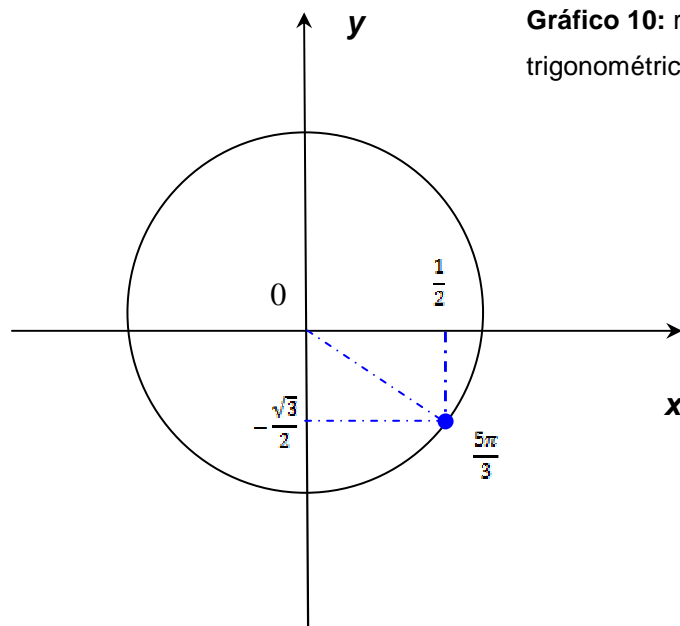


Gráfico 10: representação da forma trigonométrica de um complexo.

2.12 Multiplicação de números complexos na forma trigonométrica

Dados os números complexos Z_1 e Z_2 , consideremos na forma trigonométrica:

$$Z_1 = |Z_1| \cdot (\cos \theta_1 + i \cdot \operatorname{Sen} \theta_1)$$

$$Z_2 = |Z_2| \cdot (\cos \theta_2 + i \cdot \operatorname{Sen} \theta_2)$$

O produto $Z_1 \cdot Z_2$ é dado por:

$$Z_1 \cdot Z_2 = |Z_1| \cdot (\cos \theta_1 + i \cdot \text{Sen } \theta_1) \cdot |Z_2| \cdot (\cos \theta_2 + i \cdot \text{Sen } \theta_2)$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = |Z_1| \cdot |Z_2| \cdot (\cos \theta_1 + i \cdot \text{Sen } \theta_1) \cdot (\cos \theta_2 + i \cdot \text{Sen } \theta_2)$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = |Z_1| \cdot |Z_2| \cdot (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \text{Sen } \theta_1 \cdot \text{Sen } \theta_2) + i \cdot (\text{Sen } \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \text{Sen } \theta_2 \cdot \cos \theta_1)$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = |Z_1| \cdot |Z_2| \cdot [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \text{Sen } (\theta_1 + \theta_2)]$$

Portanto:

$$Z_1 \cdot Z_2 = |Z_1| \cdot |Z_2| \cdot [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \text{Sen } (\theta_1 + \theta_2)]$$

Dessa forma, o produto de dois números complexos escritos na forma trigonométrica é o número complexo cujo módulo é igual ao produto dos módulos dos fatores e cujo argumento é igual à soma dos argumentos dos fatores, reduzida à 1ª volta $[0 \leq \arg (Z_1 \cdot Z_2) < 2\pi]$.

Exemplo:

Vamos calcular o produto $Z_1 \cdot Z_2$ com $Z_1 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \text{Sen } \frac{\pi}{4} \right)$ e

$$Z_2 = 3 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \text{Sen } \frac{\pi}{2} \right).$$

Substituindo os dados do problema na fórmula, temos:

$$Z_1 \cdot Z_2 = 2 \cdot 3 \cdot \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) + i \cdot \text{Sen } \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = 6 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \cdot \text{Sen } \frac{3\pi}{4} \right)$$

Fazendo a interpretação geométrica desse problema, obtemos:

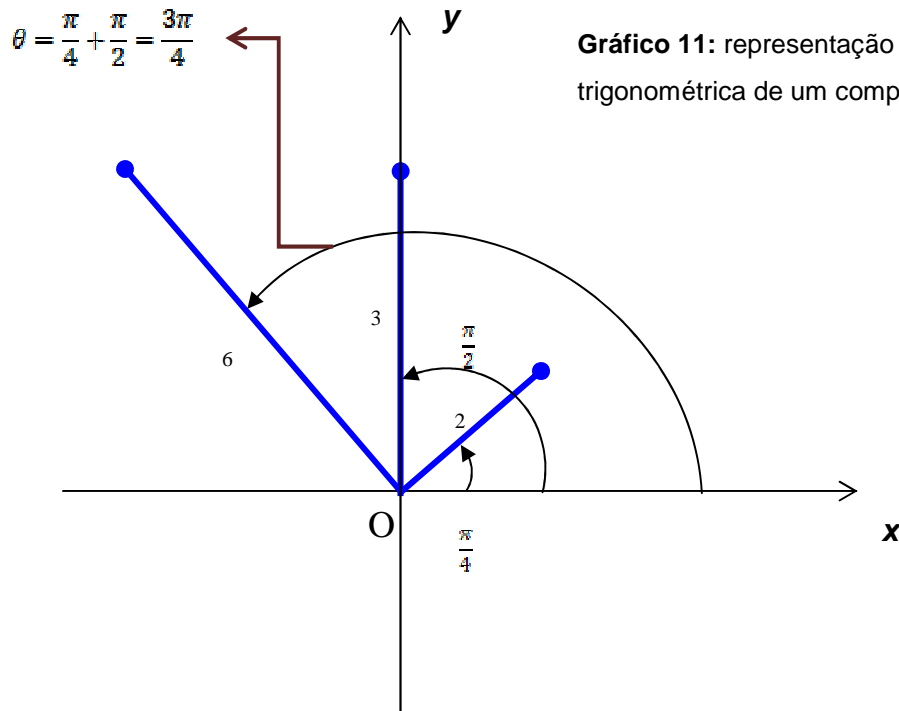


Gráfico 11: representação da forma trigonométrica de um complexo dado.

Note que em $Z_1 \cdot Z_2$ houve uma rotação positiva a Z_1 de um ângulo igual ao ângulo de Z_2 . Ou seja, nesse caso, houve uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ a Z_1 . Como o argumento de Z_1 era $\frac{\pi}{4}$ e Z_1 recebeu uma rotação de $\frac{\pi}{2}$, o produto $Z_1 \cdot Z_2$ passa a ter argumento igual a $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$. Já o módulo $Z_1 \cdot Z_2$ é 6, que corresponde a $2 \cdot 3$, ou $|Z_1| \cdot |Z_2|$.

2.13 DIVISÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

Dados os números complexos Z_1 e Z_2 na forma trigonométrica:

$$Z_1 = |Z_1| \cdot (\cos \theta_1 + i \cdot \operatorname{Sen} \theta_1)$$

$$Z_2 = |Z_2| \cdot (\cos \theta_2 + i \cdot \operatorname{Sen} \theta_2)$$

Podemos obter o quociente $\frac{Z_1}{Z_2}$, para $Z_2 \neq 0$; assim:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} \cdot [\text{Cos}(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \text{Sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

A demonstração dessa relação pode ser feita mostrando que o produto de $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} \cdot [\text{Cos}(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \text{Sen}(\theta_1 - \theta_2)]$ por Z_2 é igual a Z_1 .

Dessa forma, a divisão de dois números complexos na forma trigonométrica, com o segundo número diferente de $\mathbf{0}$, é o número complexo cujo módulo é o quociente dos módulos e cujo argumento é a diferença dos argumentos dos dois números na ordem dada, reduzida à 1ª volta $\left[0 \leq \arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) < 2\pi\right]$.

Exemplo:

Efetue o cálculo do quociente $\frac{Z_1}{Z_2}$ para $Z_1 = 2 \cdot \left(\text{Cos}\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{Sen}\frac{\pi}{4}\right)$ e $Z_2 = 3 \cdot \left(\text{Cos}\frac{\pi}{2} + i \cdot \text{Sen}\frac{\pi}{2}\right)$.

Substituindo Z_1 e Z_2 na fórmula dada, temos:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2}{3} \cdot \left[\text{Cos}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \text{Sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2}{3} \cdot \left[\text{Cos}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \text{Sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2}{3} \cdot \left[\text{Cos}\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \cdot \text{Sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right) \right]$$

$$\text{Logo, } \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2}{3} \cdot \left[\text{Cos}\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \cdot \text{Sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right) \right]$$

Como $\frac{7\pi}{4}$ é um ângulo cônico de $-\frac{\pi}{4}$, então: $0 \leq \frac{7\pi}{4} < 2\pi$.

2.14 POTENCIAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

A potenciação Z^n , $n \in \mathbb{N}^*$, é dada por $Z^n = \underbrace{Z \cdot Z \cdot \dots \cdot Z}_{n \text{ fatores}}$.

Dessa forma, se um número complexo Z está representado na forma trigonométrica $Z = |Z| \cdot (\cos \theta + i \cdot \text{Sen } \theta)$, temos:

$$Z^n = \underbrace{Z \cdot Z \cdot \dots \cdot Z}_{\text{multiplicação n fatores}} = \underbrace{|Z| \cdot |Z| \cdot \dots \cdot |Z|}_{\text{produto de n módulos}} \cdot \left[\left(\cos \underbrace{\theta + \theta + \dots + \theta}_{\text{soma de n argumentos}} \right) + i \cdot \text{Sen} \left(\underbrace{\theta + \theta + \dots + \theta}_{\text{soma de n argumentos}} \right) \right]$$

$$Z^n = |Z|^n \cdot [\cos(n\theta) + i \cdot \text{Sen}(n\theta)] \Rightarrow \mathbf{1^\circ \text{ Regra de De Moivre}}$$

Para $n = 0$, temos:

$$Z^0 = Z^0 \cdot [\cos(0 \cdot \theta) + i \cdot \text{Sen}(0 \cdot \theta)] = 1 \cdot (\cos 0 + i \cdot \text{Sen } 0) = 1 \cdot (1 + 0) = 1$$

Assim, podemos dizer que a potenciação de ordem n de um número complexo escrito na forma trigonométrica é o número complexo cujo módulo é igual ao módulo do número elevado a n e cujo argumento é igual ao argumento do número multiplicado por n , reduzido à primeira volta $[0 \leq \arg(Z^n) < 2\pi]$.

Exemplos:

1º) Considere o número $Z = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \text{Sen} \frac{\pi}{3} \right)$, vamos determinar Z^7 .

Resolução:

Na forma trigonométrica, temos:

$$\begin{aligned} Z^7 &= \left[2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \text{Sen} \frac{\pi}{3} \right) \right]^7 \\ Z^7 &= 2^7 \cdot \left(\cos 7 \cdot \frac{\pi}{3} + i \cdot \text{Sen} 7 \cdot \frac{\pi}{3} \right) \\ Z^7 &= 128 \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{3} + i \cdot \text{Sen} \frac{7\pi}{3} \right) \\ \text{Logo, } Z^7 &= 128 \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{3} + i \cdot \text{Sen} \frac{7\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

Na forma algébrica, temos:

$$Z = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \operatorname{Sen} \frac{\pi}{3} \right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + i \cdot \sqrt{3}$$

$$Z^7 = 128 \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{3} + i \cdot \operatorname{Sen} \frac{7\pi}{3} \right) = 128 \cdot \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 64 - 64\sqrt{3}i$$

$$\text{Logo, } Z^7 = 64 - 64\sqrt{3}i$$

2º) Calcule a potência $(1-i)^{10}$.

Resolução:

Uma das formas é multiplicar $(1-i)$ por ele mesmo, usando dez fatores. Outra é desenvolver a expressão $(1-i)$ usando o binômio de Newton. Uma terceira maneira é escrever o número complexo $(1-i)$ na forma trigonométrica e usar a fórmula de *De Moivre*. Veja:

$$Z = 1 - i$$

$$a = 1$$

$$b = -1$$

Então:

$$|Z| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{a}{|Z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{Sen} \theta = \frac{b}{|Z|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left. \vphantom{\operatorname{Sen} \theta} \right\} \Rightarrow \theta = \arg(Z) = \frac{7\pi}{4}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

Assim:

$$Z = 1 - i = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \cdot \operatorname{Sen} \frac{7\pi}{4} \right)$$

Logo:

$$Z^{10} = (1-i)^{10} = (\sqrt{2})^{10} \cdot \left[\cos \left(10 \cdot \frac{7\pi}{4} \right) + i \cdot \operatorname{Sen} \left(10 \cdot \frac{7\pi}{4} \right) \right]$$

Mas:

$$(\sqrt{2})^{10} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10} = 2^{\frac{10}{2}} = 2^5$$

$$10 \cdot \frac{7\pi}{4} = \frac{70\pi}{4} = \frac{35\pi}{2}$$

$\frac{35\pi}{2}$ corresponde a oito voltas mais $\frac{3\pi}{2}$, isto é:

$$\frac{35\pi}{2} = \frac{32\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 16\pi + \frac{3\pi}{2} = 8 \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2}$$

Ou seja, $\frac{35\pi}{2}$ é cômruo de $\frac{3\pi}{2}$.

Portanto:

$$Z^{10} = (1-i)^{10} = 2^5 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \operatorname{Sen} \frac{3\pi}{2} \right)$$

Na forma algébrica, temos:

$$Z^{10} = (1-i)^{10} = 32 \cdot [0 + i \cdot (-1)]$$

$$Z^{10} = (1-i)^{10} = 32 \cdot 0 + 32i = -32i$$

$$\text{Logo: } Z^{10} = -32i$$

2.15 RAÍZES ENÉSIMAS DE NÚMEROS COMPLEXOS (RADICIAÇÃO)

Dado um numero complexo Z e um numero natural n , $n > 1$, definimos em \mathbf{C} :

“A raiz enésima de Z é um numero complexo ω tal que $\omega^n = Z$.”

Exemplo:

1º) 2, -2, 2i e -2i são as raízes quartas do numero complexo 16.

2, pois $2^4 = 16$

-2, pois $(-2)^4 = 16$

2i, pois $(2i)^4 = 16$

-2i, pois $(-2i)^4 = 16$

Existe, portanto, em \mathbf{C} , quatro raízes quartas de 16.

2º) i e $-i$ são as raízes quadradas do número complexo -1 .

i , pois $i^2 = -1$

$-i$, pois $(-i)^2 = -1$

Existe, portanto, em \mathbf{C} , duas raízes quadradas de -1 .

3º) 3 e -3 são raízes quadradas do número complexo 9 .

3 , pois $3^2 = 9$

-3 , pois $(-3)^2 = 9$

Existe, portanto, em \mathbf{C} , duas raízes quadradas de 9 .

4º) 1 , -1 , i e $-i$ são raízes quartas do número complexo 1 .

1 , pois $1^4 = 1$

-1 , pois $(-1)^4 = 1$

i , pois $i^4 = 1$

$-i$, pois $(-i)^4 = 1$

Existe, portanto, em \mathbf{C} , quatro raízes quadradas de 1 .

5º) A única raiz quinta de 0 é 0 , pois 0 é o único número complexo tal que $0^5 = 0$.

Nestes termos, quantas são as raízes enésimas de um número complexo $Z \neq 0$ e como podemos determiná-las? Observe:

Consideremos o número complexo $Z \neq 0$ tal que $Z = |Z| \cdot (\cos \theta + i \cdot \operatorname{Sen} \theta)$. Encontrar as raízes enésimas de Z significa determinar todos os números complexos distintos do tipo:

$$\omega = |\omega| \cdot (\cos \alpha + i \cdot \operatorname{Sen} \alpha)$$

De modo que $\omega^n = Z$, para $n > 1$, ou seja, procurar números ω tal que:

$$[|\omega| \cdot (\cos \alpha + i \cdot \operatorname{Sen} \alpha)]^n = |Z| \cdot (\cos \theta + i \cdot \operatorname{Sen} \theta)$$

Aplicando a 1ª Regra de *De Moivre*, temos:

$$|\omega|^n \cdot (\cos n\alpha + i \cdot \operatorname{Sen} n\alpha) = |Z| \cdot (\cos \theta + i \cdot \operatorname{Sen} \theta)$$

Fazendo a igualdade:

$$\omega^n = |\omega|^n \cdot (\cos n\alpha + i \cdot \operatorname{Sen} n\alpha) = Z = |Z| \cdot (\cos \theta + i \cdot \operatorname{Sen} \theta)$$

Vem $|\omega|^n = |Z|$, $\cos n\alpha = \cos \theta$ e $\operatorname{Sen} n\alpha = \operatorname{Sen} \theta$.

De $|\omega|^n = |Z|$, temos $|\omega| = \sqrt[n]{|Z|}$ (sempre real positivo).

De $\cos n\alpha = \cos \theta$ e $\operatorname{Sen} n\alpha = \operatorname{Sen} \theta$, temos:

$$n\alpha = \theta + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad (\text{com } k \in \mathbb{Z})$$

Mas, para que $0 \leq \alpha < 2\pi$, é necessário que $0 \leq k < n$.

Assim, concluímos que:

$$\omega_k = \sqrt[n]{|Z|} \cdot \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \cdot \operatorname{Sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \Rightarrow \text{2ª Regra de De Moivre}$$

Após $k = n - 1$, os valores começam a se repetir. Então, de 0 a $n - 1$, temos n raízes distintas.

Observemos que essa fórmula também pode ser escrita dessa forma:

$$\omega_k = \sqrt[n]{|Z|} \cdot \left[\cos \left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n} \right) + i \cdot \operatorname{Sen} \left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \right]$$

Assim, qualquer número complexo Z , não-nulo, admite n raízes enésimas distintas. Todas elas têm módulo igual a $\sqrt[n]{|Z|}$ e seus argumentos formam uma progressão aritmética de primeiro termo $\frac{\theta}{n}$ e razão $\frac{2\pi}{n}$.

Geometricamente, as n raízes são vértices de um polígono regular de n lados. Logo, sabendo uma delas e sabendo quantas são no total, é possível obter as $n - 1$ raízes desconhecidas.

Exemplo:

Determine as raízes cúbicas de $-i$ e interprete as mesmas geometricamente.

Resolução:

Escrevendo Z na forma trigonométrica, temos:

$$Z = -i$$

$$a = 0$$

$$b = -1$$

Então:

$$|Z| = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{0}{1} = 0 \\ \operatorname{Sen} \theta = \frac{-1}{1} = -1 \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = \arg(Z) = \frac{3\pi}{2}$$

Portanto:

$$Z = 1 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \operatorname{Sen} \frac{3\pi}{2} \right)$$

Usando a 2ª Regra de *De Moivre*, vem:

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \cdot \operatorname{Sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) = \sqrt[3]{1} \cdot \left(\cos \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \cdot \operatorname{Sen} \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right)$$

$$\sqrt[3]{1} = 1 \text{ (real positivo)}$$

Como $n = 3$, então k poderá ser 0, 1 ou 2. Assim temos:

- Para $k = 0$

$$\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} = \frac{\frac{3\pi}{2}}{3} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

- Para $k = 1$

$$\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} = \frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$$

- Para $k = 2$

$$\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} = \frac{\frac{3\pi}{2} + 4\pi}{3} = \frac{\frac{11\pi}{2}}{3} = \frac{11\pi}{6}$$

Note que $\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ é uma PA de razão $\frac{4\pi}{6}$.

Dessa forma, as raízes cúbicas de $-i$ são:

$$\omega_0 = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \operatorname{Sen} \frac{\pi}{2} \right) = \cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \operatorname{Sen} \frac{\pi}{2} = 0 + i \cdot 1 = i$$

$$\omega_1 = 1 \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \cdot \operatorname{Sen} \frac{7\pi}{6} \right) = \cos \frac{7\pi}{6} + i \cdot \operatorname{Sen} \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\omega_2 = 1 \cdot \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \cdot \operatorname{Sen} \frac{11\pi}{6} \right) = \cos \frac{11\pi}{6} + i \cdot \operatorname{Sen} \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

Interpretando geometricamente, as três raízes cúbicas estão sobre uma circunferência de raio $|\omega| = 1$ e dividem a circunferência em três arcos congruentes de $\frac{4\pi}{6} \text{ rad}$, formando um triângulo equilátero de vértices P_0, P_1 e P_2 . Se calculássemos ω_3 , encontraríamos $\omega_3 = \omega_0$ e P_3 coincidiria com P_0 . E assim por diante: $P_4 \equiv P_1, P_5 \equiv P_2$, etc.

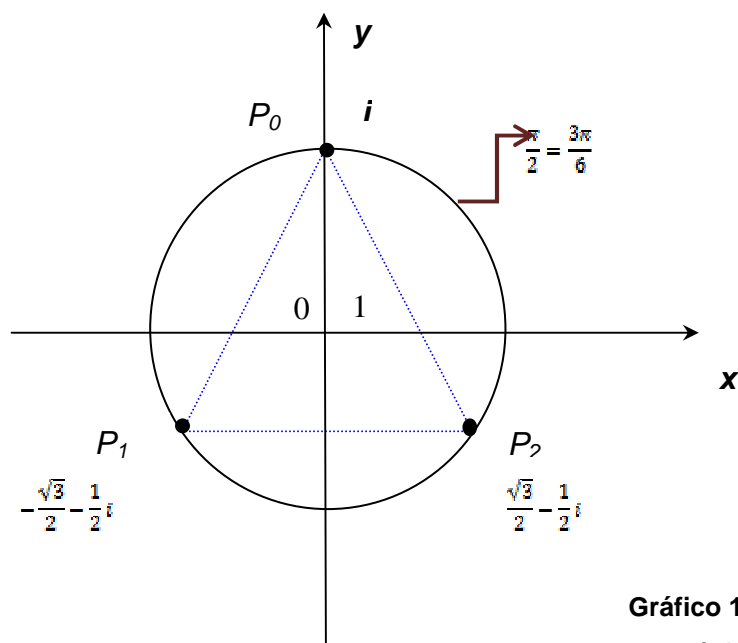


Gráfico 12: representação na forma geométrica de uma raiz cúbica de um complexo dado.

2.16 EQUAÇÕES BINÔMIAS E TRINÔMIAS

Qualquer equação que possa ser reduzida à forma abaixo, é chamada *equação binômia*:

$$ax^n + b = 0 \text{ (com } a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C} \text{ e } n \in \mathbb{N}, a \neq 0, b \neq 0 \text{ e } n \in \mathbb{N} \text{)}$$

Para resolvê-la, isolamos x^n no primeiro membro e aplicamos a segunda fórmula de *De Moivre*:

$$ax^n + b = 0 \Leftrightarrow x^n = \frac{-b}{a}$$

Essa equação admite n raízes enésimas de $\frac{-b}{a}$.

Outro tipo muito comum de equação que envolve números complexos é o que se pode reduzir à chamada equação trinômia:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \text{ (com } a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C} \text{ e } c \in \mathbb{C}, a \neq 0, b \neq 0 \text{ e } n \in \mathbb{N} \text{)}$$

Para solucioná-la, fazemos uma mudança de variável, $x^n = y$, obtendo uma equação do 2º grau:

$$ay^2 + by + c = 0$$

cujas soluções são y' e y'' .

Retornamos então nas equações iniciais, pois $y' = x^n$ e $y'' = x^n$.

Resolvendo-as, temos as raízes da equação inicial.

Exemplo:

Em \mathbb{C} , encontre as raízes da equação $2x^3 - 16i = 0$.

Resolução:

$$2x^3 - 16i = 0$$

$$2x^3 - 16i = 0 \Rightarrow 2x^3 = 16i \Rightarrow x^3 = 8i$$

Vamos procurar as raízes cúbicas de $8i$:

$$Z = 8i$$

$$a = 0$$

$$b = 8$$

Então :

$$|Z| = \sqrt{(0)^2 + (8)^2} = 8$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{0}{8} = 0 \\ \operatorname{Sen} \theta = \frac{8}{8} = 1 \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = \arg(Z) = \frac{\pi}{2}$$

Portanto:

$$Z = 8i = 8 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \operatorname{Sen} \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\omega_k = \sqrt[n]{|Z|} \cdot \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \cdot \operatorname{Sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

Como $n = 3$, $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$, $\sqrt[3]{8} = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$, temos:

$$\omega_0 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \operatorname{Sen} \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} + i$$

$$\omega_1 = 2 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \cdot \operatorname{Sen} \frac{5\pi}{6} \right) = -\sqrt{3} + i$$

$$\omega_2 = 2 \cdot \left(\cos \frac{9\pi}{6} + i \cdot \operatorname{Sen} \frac{9\pi}{6} \right) = -2i$$

Logo, o conjunto solução da equação $2x^3 - 16i = 0$ é $S = \{\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i, -2i\}$.

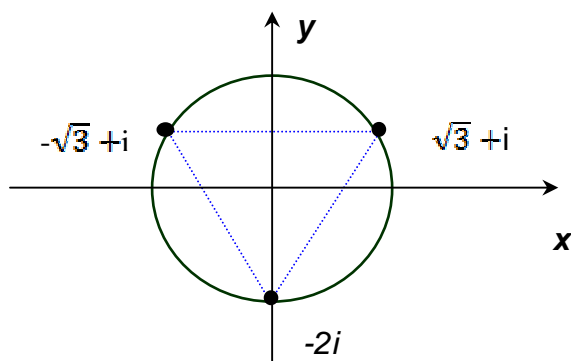


Gráfico 13: representação na forma geométrica das raízes cúbicas de um complexo dado.

CAPÍTULO III
OS COMPLEXOS E A NATUREZA

3. APLICAÇÕES DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Como já discorrido no primeiro capítulo, os números complexos surgiram no século XVI ao longo das inovações dos procedimentos gerais para resolução de equações algébricas de 3º e 4º grau. Já século XVII os números complexos foram utilizados de forma tímida para viabilizar os cálculos. E no século XVIII são mais utilizados a medida que se verifica o quanto os números complexos permitem a junção de vários resultados dispersos da Matemática no conjunto dos números reais. No entanto, nada foi feito para explicar o significado desses novos números. No século XIX temos a representação geométrica dos números complexos, impulsionada pelas limitações da geometria, topografia e Física, em se trabalhar com o conceito de vetor no plano. Daí por diante, os números complexos passam a ser inseridos em vários ramos do conhecimento humano, dentro e fora da Matemática (DANTAS, 1991).

3.1 OS NÚMEROS COMPLEXOS E A GEOMETRIA

Uma aplicação relevante da multiplicação de números complexos na forma trigonométrica é a alternativa de se rotacionar coordenadas no plano. Este mesmo comportamento, antes exercido por uma matriz de rotação, pode ser agora também exercido pelos números complexos, pois na multiplicação de dois complexos na forma trigonométrica, multiplicam-se os módulos e somam-se os argumentos. Portanto, se um **ponto (a,b)** qualquer deve ser rotacionado em relação a origem, em graus α no sentido anti-horário, basta multiplicar o número complexo $a + bi$ pelo complexo $1 \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$.

Aplicação:

Encontre as novas coordenadas do ponto **A(3,4)** após uma rotação de 90º no sentido anti-horário em relação a origem.

Resolução:

O ponto A(3,4) representa geometricamente o complexo $Z = 3 + 4i$. para haver uma rotação de 90º no sentido anti-horário, precisamos multiplicar **Z** por

$1 \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$. Como $1 \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha) = i$, então basta multiplicar por i . Veja:

$$i \cdot (3 + 4i) = -4 + 3i = (-4, 3)$$

Então, as novas coordenadas do ponto A são -4 e 3 , ou seja $A'(-4, 3)$.

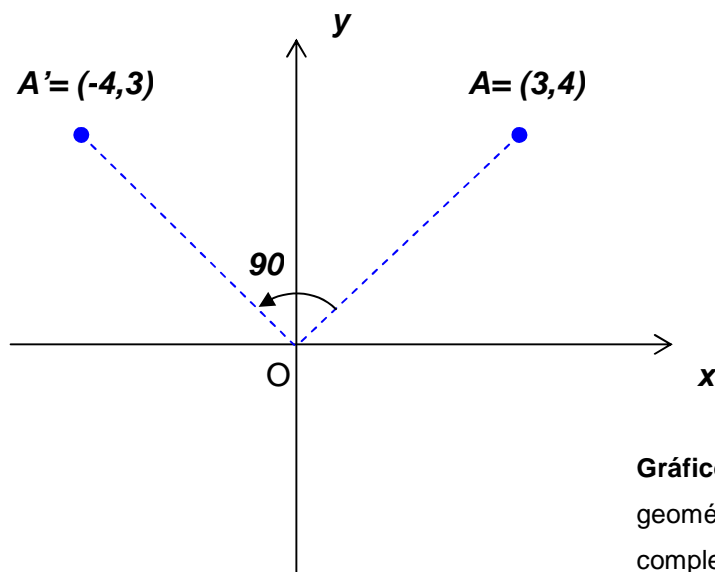


Gráfico 14: representação na forma geométrica da rotação de um complexo.

3.2 OS NÚMEROS COMPLEXOS E A ENGENHARIA ELÉTRICA

Deve-se ao cientista alemão Hermann Von Helmholtz (1821-1824) o pioneirismo na aplicação de números complexos à teoria de circuitos elétricos. A aplicação de números complexos na análise de circuitos elétricos de corrente alternada foi disseminada nos Estados Unidos por Arthur Edwin (1861-1939) e Charles Steinmetz (1865-1923) com auxílio de Julius Berg (1871-1941) no final do século XIX. Em 1823, Edwin admitiu o termo *Impedância* assim como os *números complexos* para os componentes dos circuitos elétricos de corrente alternada, o que foi seguido por Steinmetz. Desde então, os números complexos passaram a ser fundamentais no desenvolvimento da Engenharia Elétrica, enquanto ramo científico (IGM, 2010).

Segundo Dante (2011) em circuitos elétricos de corrente alternada, como por exemplo as instalações elétricas residências, as grandezas elétricas são analisadas com o recurso dos números complexos, o que facilita muito os cálculos. A relação $U = Ri$, estudada na Física do ensino médio e que se utiliza dos números reais, torna-se $U = Zi$, em que U é a tensão (diferença de potencial ou voltagem), Z é a impedância (resistência) e i é a corrente elétrica (variação de cargas elétricas ao longo do tempo), sendo essas grandezas representadas através de números complexos. Para que não houvesse confusão entre i , símbolo da corrente elétrica, e i , unidade imaginária, os engenheiros acordaram usar a letra j como representação da unidade imaginária na expressão algébrica do complexo $a + bj$. Além disso, adotaram a notação $|w|\angle\theta$ para a forma trigonométrica $|w|\cdot(\cos\theta + i\cdot\text{Sen}\theta)$ do número complexo w .

Aplicação:

Uma fonte de tensão de uma residência, de valor eficaz $220\angle 0^\circ$, alimenta uma carga de impedância $Z = (10 + 10j)$ ohm. Qual a corrente elétrica fornecida pela fonte?

Resolução:

Para obter a corrente elétrica i , façamos a seguinte relação:

$$U = Zi \Rightarrow i = \frac{U}{Z}$$

Para proceder este quociente, é preferível ter U e Z na forma trigonométrica.

Observe que já possuímos $U = 220\angle 0^\circ = 220\cdot(\cos 0^\circ + i\cdot\text{Sen} 0^\circ)$, e agora precisamos obter a forma trigonométrica de Z . Veja:

$$Z = 10 + 10j \Rightarrow |Z| = \sqrt{(10)^2 + (10)^2} \Rightarrow |Z| = 10\sqrt{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta &= \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

Então:

$$Z = 10 + 10j = 10\sqrt{2} \cdot (\cos 45^\circ + i \cdot \sin 45^\circ)$$

Desta forma, a corrente elétrica fornecida pela fonte é dada por:

$$\begin{aligned} i &= \frac{U}{Z} \\ i &= \frac{220}{10\sqrt{2}} \cdot [\cos(0^\circ - 45^\circ) + i \cdot \sin(0^\circ - 45^\circ)] \\ i &= 11\sqrt{2} \cdot [\cos(-45^\circ) + i \cdot \sin(-45^\circ)] \\ i &= 11\sqrt{2} \cdot \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right] \\ i &= 11 - 11i \end{aligned}$$

Como na engenharia elétrica a parte imaginária é expressa pela letra **j**, então a corrente pretendida é expressa por:

$$i = 11 - 11j$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para justificar o algoritmo da resolução de equações do terceiro grau, nascem os números complexos enquanto instrumentos de cálculos. Raffaele Bombelli (1526 - 1573), ao resolver a equação $x^3 = 15x + 4$ por meio do método de Cardano, e esbarrou com a raiz quadrada de um número negativo. Como ele percebeu que 4 era raiz da equação proposta, decidiu dar continuidade aos cálculos, crendo na existência desse tipo de raiz quadrada. Com isso ele não logrou êxito em chegar à solução da equação, no entanto a partir daí os matemáticos passaram a operar com esses novos números, sem reconhecê-los como tal, mas apenas como símbolos matemáticos, uma vez que eles não correspondiam a quantidades. Trezentos anos mais tarde, quando Gauss começa a dar uma feição geométrica para esses números, equações como a que Bombelli tentou resolver, são finalmente solucionadas, chegando-se a resultados que são números reais, apesar de as operações serem efetuadas com raízes quadradas de números negativos. A partir desse momento, eles são considerados como objetos do saber matemático, o que propiciou ao longo do tempo sua consolidação e sistematização com Hamilton em 1837, e daí em diante passamos a usar a representação algébrica ou a representação trigonométrica, para fins de desenvolvimento da potenciação e a radiciação dos números complexos (ROSA, 1998).

Através da análise histórica, pode-se concluir o quanto relevante tornou-se o estudo dos Números Complexos para o desenvolvimento da matemática, assim como para os demais ramos das ciências exatas. Discorrendo sobre sua história, constatamos que seu surgimento está intimamente relacionado à resolução de equações algébricas, especialmente as equações de 3º grau, e não as de 2º grau como é comum se afirmar. Foi possível constatar também que sua aceitação, compreensão e utilização ocorreram de forma lenta e gradual ao longo de quatro séculos. E nesta mesma esteira de conclusões, restou claro que, sua capacidade simplificativa e objetiva fez do mesmo um instrumento capaz de dar conta do desenvolvimento de novas tecnologias voltadas para os efeitos visuais (rotações de coordenadas), e para o pleno desenvolvimento da engenharia elétrica (estudo de correntes alternadas).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CANTONI, A. C. L.: “*Números Complexos e Alguns Resultados Clássicos da Geometria Plana*”. Especialização em Matemática. UFMG/ICE – 2008.

CERRI, C.; MONTEIRO, M.S. “*Historia dos Números Complexos*” Instituto de Matemática e Estatística da USP, São Paulo – 2001.

DANTAS, V. B.: “*Para que servem os números complexos?*” – artigo apresentado ao Instituto de Física - UFRSA/RN - 1991.

DANTE, L. R.: “*Matemática: Contexto e Aplicações*”. Vol. III. Editora Ática, 1^o Edição – São Paulo, 2011.

DE OLIVEIRA, C. N. C.: “*Números Complexos: Um Estudo dos Registros de Representação e Aspectos Gráficos*”. Mestrado em Educação Matemática. PUC/SP – 2010.

DI PAOLO, D. F.: “*Elaborando Trabalhos Acadêmicos e Científicos: TCC, Dissertações e Tese*”. Editora Paka-Tatu, 1^o Edição - Belém, 2009.

DO CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; Wagner, E. “*Trigonometria - Números Complexos*”, Editora IMPAVITAE, 1992.

DOMINGUES, H. H.: “*Fundamentos de Aritmética*”. Santa Catarina: Editora da UFSC, 2009.

EVES, H.: “*Introdução à história da matemática*”. Campinas: Ed. Da Unicamp, 2005.

FABIANI, F. S.: “*Números complexos via resolução de problemas*”. Mestrado em Educação Matemática – Universidade Estadual Paulista – Rio Claro, 1998.

GILBERTO, G. G. “*O Romance das Equações Algébricas*”, Editora Makron Books, 1997.

IEZZI, G.: “*Fundamentos de Matemática Elementar Vol6: Complexos, Polinômios e Equações*”. Editora Atual, 2^o Edição – São Paulo.

IGM – “*Aplicações de Números Complexos na Engenharia Elétrica*” – artigo publicado pelo Instituto Gauss de Matemática (IGM) em 13/08/2009. Disponível em <<http://www.igm.mat.br/>>(Acesso em 27/12/2012 às 20h:34min).

ROSA, M. S.: “*Números Complexos: Uma Abordagem Histórica Para Aquisição do Conceito*”. Mestrado em Ensino da Matemática – PUC/SP – 1998.

SPINELLI, W.: “*Nem tudo é abstrato no reino dos complexos*” – disponível em <http://www.nilsonjosemachado.net/sema20091027.pdf> (Acesso em 28/04/2013 às 22h:58min).

YOUSSEF, A. N.; SOAES, E.; FERNANDEZ, V. P.: “*Matemática Ensino Médio*”. Vol. Único. Editora Scipione, 1º Edição - São Paulo, 2011.