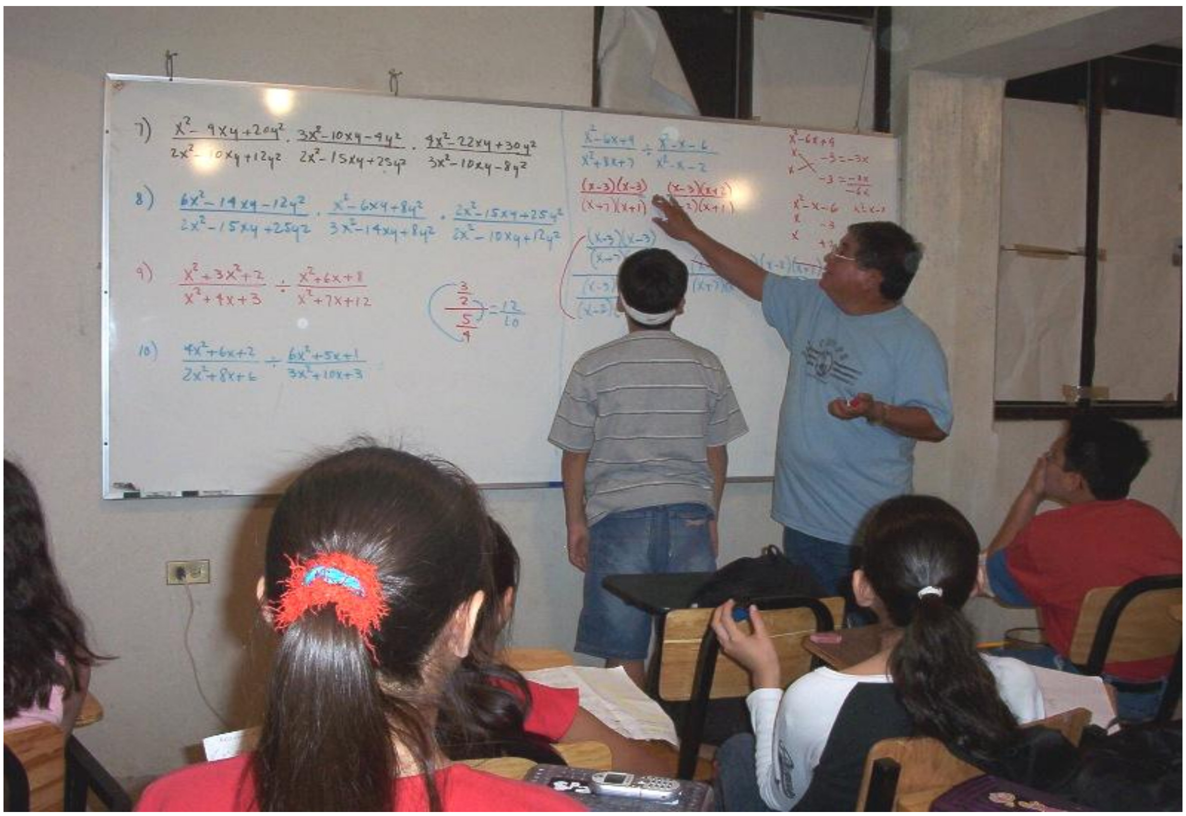
-TITULO DE LA OBRA-

EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE EN LA MATEMATICA DESDE UNA PROPUESTA METODOLOGICA.

NOMBRE DE LA METODOLOGIA.- <u>MERYAD</u>



Alumnos de sexto grado de primaria aprendiendo álgebra

AUTOR.- ERNESTO NAVARRO CUMPEAN

ernacu51@hotmail.com
ernacu51@yahoo.com.mx

AGRADECIMIENTO

A Amalia Cumpeán Vázquez (†)*; no sólo me dio la vida, sino que su vida la entregó por mí. Ejemplo de abnegación y entrega. A ella le debo lo que soy.* ***Gracias madre.***

A Mary, *mi esposa y madre de mis hijos; incondicionalmente siempre me apoyó y sé que me seguirá apoyando en todas las actividades profesionales. Cuantas veces le he dicho de mis deseos de asistir a algún curso o congreso educativo nacional o en el extranjero, siempre ha estado de acuerdo conmigo; a mi regreso jamás me pidió rendición de cuentas.* ***Gracias Mary.***

A nuestros hijos Ernesto y Adriana, Adriana y Ernesto. *Fue con ellos con quienes por primera vez experimenté en el uso de esta metodología. Fue con ellos con quienes por primera vez me di cuenta de la extraordinaria capacidad que tiene los niños y adolescentes para el aprendizaje de la matemática. Fue con ellos con quienes pasé las horas más felices de mi práctica docente.* ***Gracias hijos.***

A mis hermanos *que contribuyeron económicamente en mis estudios profesionales.* ***Gracias a todos.***

E. Navarro

RECONOCIMIENTO

A la Doctora en Pedagogía, Argelia Fernández Díaz*, catedrática de la Universidad de Ciencias Pedagógicas, "Enrique José Varona" de la Habana, Cuba. Sus grandes conocimientos la han llevado a impartir cursos y conferencias en maestrías y doctorados en universidades de diversos países de Sudamérica. Me han sido muy valiosas sus sugerencias, aportaciones y revisión para la culminación y publicación de esta obra.* ***Muchas gracias Doctora.***

La matemática es como un gran árbol con muchas ramas; yo estoy en una rama pequeña de ese árbol

Albert Einstein

INDICE

I.- INTRODUCCIÓN

La matemática es la más simple, la más perfecta y la más antigua de las ciencias.

Diariamente todos los seres humanos sin darse cuenta y sin importar el lugar donde se encuentren, hacen uso de la matemática. Por ejemplo: al despertar por la mañana puede hacer un cálculo mental sobre el tiempo que le llevará para llegar a su trabajo, al cruzar una calle calculará si podrá hacerlo ante la proximidad de un vehículo, contará el cambio que recibe al pagar el pasaje en un autobús o el ama de casa calculará si el dinero que posee le alcanza para hacer unas compras. Sin embargo, esta maravilla creada por el genio del hombre para el descubrimiento de la verdad y que honra el espíritu humano, es temida y por lo mismo rechazada por la gran mayoría de las personas y especialmente por los estudiantes. El rechazo es con frecuencia una herencia dictada por el medio, generación tras generación, según la cual el aprendizaje de la matemática es de gran dificultad. La matemática es la llave de oro que abre todas las ciencias y en la cual se sustenta todo el desarrollo científico y tecnológico actual, ya que toda educación científica que no se inicia con la matemática es imperfecta en su base, pues la escalera de la sabiduría tiene sus peldaños hechos de números.

Se considera que los altos índices de reprobación en matemática no son exclusivos de una determinada institución o lugar, sino más bien es un problema que afecta por lo general a todos los países del mundo, a alumnos de todos los niveles sociales, económicos y culturales; ello origina rezago y deserción escolar de gran cantidad de estudiantes.

En investigaciones realizadas por Navarro Cumpeán, se encontró que el 88.26% de los alumnos de nuevo ingreso a estudiar una carrera de ingeniería a una institución de educación superior de México reprobó un examen de matemática de nivel secundaria.

Según el International Business Times del 11 de enero de 2013, en promedio, en el sexenio comprendido entre los años del 2007 al 2012, de acuerdo con los resultados de la Evaluación Nacional de Logro Académico en los Centros

Escolares (ENLACE) realizada en los niveles de primaria y secundaria; el 67.3% de los estudiantes de primaria, y el 87.7% de los estudiantes de secundaria obtuvieron resultados de insuficientes en matemática que corresponde a más de 9 millones de estudiantes en los últimos niveles de desempeño académico.

El muy bajo nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes origina que, un porcentaje muy bajo de los egresados de bachillerato ingresen a estudiar una carrera de ingeniería. Por el contrario, la gran mayoría de los egresados escogerán para estudiar una carrera profesional a aquellas cuyo plan de estudios no requiere de la matemática para su fundamentación y sólo en ocasiones se necesita del manejo de conceptos elementales.

Independientemente que para algunos alumnos el encuentro con la matemática es una experiencia de efectos traumáticos, se observa la presión familiar y social, cuando ellos sienten que no alcanzan los resultados previstos y esperados por el profesor; se sienten tristes y no logran continuar con los ejercicios más aún por el temor y el miedo al fracaso.

Esa vivencia afectiva negativa que se produce, no siempre se acompaña de los procedimientos didácticos más adecuados que utilizan los profesores para continuar su trabajo y la mayoría de estos, en ocasiones lo que logran es más que la alegría, el rechazo al aprendizaje de la asignatura.

Sin embargo, el interés y la motivación por la materia, si bien tiene una estrecha relación en cómo se transmite la misma; también es influenciado por un contexto más amplio, la familia en la cual está inmerso el estudiante.

Es frecuente que ellos escuchen de algunos de sus padres el rechazo que tuvieron hacia la materia y los problemas para aprobarla. Es necesario generar una actitud positiva en los estudiantes hacia la materia, de modo que se posibilite su aprendizaje. Lo ideal sería que él tuviera oportunidad de estudiarla como un juego, que él puede practicar libremente y con responsabilidad. Pero un juego donde logre ver la importancia de su estudio para su futura vida tanto profesional como cotidiana. Es probable que se despierte en él un interés mayor desde el primer momento en que participa, desarrolla su iniciativa y se descubre a sí mismo, dado que hay un interés práctico. Esto último es importante para llegar a la resolución de cualquier problema.

En las clases de matemática siempre se dice a los alumnos acerca de la gran utilidad de esta ciencia y que todo el desarrollo científico y tecnológico actual se lo debemos a la matemática. Sin embargo, en el aula, porque así lo establecen los planes y programas de estudio y por la deficiente preparación de algunos profesores, se hace demasiado énfasis en que los alumnos memoricen definiciones, leyes y términos que ninguna utilidad tienen en la aplicación de la matemática. Dándole en cambio poca atención a la resolución de problemas, siendo que resolver problemas es la mejor manera de realizar un buen aprendizaje. Lo anterior contribuye a que el alumno rechace la matemática al no ver una utilidad práctica en lo que aprende. Además, es un hecho que la reprobación en esta materia produce frustración en el alumno, el profesor y en la sociedad.

La enseñanza-aprendizaje de la matemática a nivel mundial ha planteado siempre un problema bastante paradójico. En efecto, existe una cierta categoría de estudiantes que, por una parte inteligentes y que incluso pueden dar prueba de ello en otros campos de una inteligencia superior, pero que fracasan más o menos sistemáticamente en matemática; **¿por qué no se forma ese mismo interés en el aprendizaje de la matemática?, ¿por qué les es difícil y en ocasiones imposible de aprender la matemática?, <u>¿qué o quién origina ese rechazo?.</u>**

El presente trabajo tiene como objetivo central dar a conocer los resultados que se obtienen al trabajar la Matemática Superior con estudiantes de Educación Secundaria, a través de una Propuesta Metodológica diseñada por el autor. En este documento se detalla una metodología que facilita y motiva el aprendizaje de la matemática; con el uso de esta metodología, en etapas avanzadas del aprendizaje la participación del profesor va gradualmente reduciéndose ya que el estudiante aprende a aprender solo.

II- DESARROLLO

II.1.- UNA FUNDAMENTACIÓN DESDE LA TEORÍA

Cambiar las actitudes, hábitos y prácticas pedagógicas no se logra a través de reglamentos y normatividades; por el contrario, para que los alumnos y profesores reencuentren sentido al aprendizaje, el docente debe realizar un proceso reflexivo en el que estén presentes los fines y objetivos de la educación. “Para avanzar en el propósito de conciliar cantidad con calidad, será necesario inducir y fomentar métodos de enseñanza adecuados a la dimensión masiva de la matrícula” (MENDOZA ROJAS: 1991: 117), es decir, “elevar la calidad de la educación en todos los niveles a partir de la formación integral de los docentes” (MENDOZA ROJAS: 1991: 115).

Cuando el docente se desempeñe en el aula con verdadera vocación de servicio, empezará a notar que “la motivación aumenta cuando el individuo desenvuelve el sentimiento de que es capaz de alcanzar sus metas personales, es decir, desarrollar la valorización del YO o sea a aprender” (LIBANEO: 1988: 45). Es fundamental la motivación para realizar con efectividad cualquier actividad que se emprenda, al respecto Bertha Medina y Carolina Rodríguez citados por BATLLORI y ACUÑA (1988: 140) dicen, ”el objetivo es propiciar la motivación a través de la alegría de descubrir, y lograr así que el alumno realice operaciones lógicas abstractas”. La motivación ha sido definida por AZCOAGA (1974: 82) “como el conjunto de condiciones que hacen posible el aprendizaje, es más, que lo hacen necesario... Motivar para una determinada forma de aprendizaje escolar significa crear estímulos convenientes que susciten la atención tónica. Estos estímulos deben necesariamente ser de tipo sensoperceptivo adecuados para evitar la monotonía”.

Bertha Medina y Carolina Rodríguez citados por BATLLORI y ACUÑA (1988: 139) afirman que “el rechazo del alumno a la matemática se debe en parte, a una actitud heredada a través de generaciones, las cuales han planteado a esta ciencia como materia de gran dificultad para su aprendizaje, y en parte a que efectivamente para algunos alumnos resulta difícil”. Lo anterior origina según Guevara Cisneros citado por el autor antes mencionado (1988: 85) que, “muchos alumnos seleccionan su licenciatura buscando aquella que no tenga relación con la matemática”.

Alvarado Monterrubio citado por BATLLORI y ACUÑA (1988: 6) en sus investigaciones realizadas al estudiar la relación de alumnos egresados de Bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades, durante los años de 1973 al 1983 y aspirantes a cursar las carreras profesionales encontró que, el 8.55% eligió carreras donde se supone que el alumno tiene una interacción fuerte con la matemática; en cambio el 23% eligió carreras con una interacción suave con la matemática y el 32.57% eligió aquellas carreras con una interacción débil con la mencionada materia.

Alvarado Monterrubio define estas interacciones como:

- Interacción fuerte.- las diversas asignaturas que conforman el plan de estudios requieren de la matemática para la descripción, explicación y predicción de los conceptos fundamentales en el campo teórico y experimental, por tanto, se requiere de un conocimiento profundo de la misma.
- Interacción suave.- las asignaturas del plan de estudios requieren de la matemática como una herramienta, lo cual implica la comprensión de sus conceptos para su aplicación en el estudio de los fenómenos que se observan en la naturaleza y en la sociedad. El manejo de la matemática en este nivel, requiere de la destreza en la aplicación de operadores y modelos matemáticos.
- Interacción débil.- las asignaturas del plan de estudios no requiere de la matemática para su fundamentación y sólo en ocasiones se necesita del manejo de conceptos elementales.

Las definiciones sobre aprendizaje son tan variadas como diversas son las teorías psicológicas sobre este proceso humano; pero ciertas características se repiten con frecuencia. El aprendizaje es cambio de conducta relativamente permanente, es resultado de la práctica, es progresiva adaptación, es un cambio de actitud, es una reacción a una situación dada, es una actividad mental por la que se adquieren hábitos, es una modificación de la personalidad, es un desarrollo estimulado, es la respuesta correcta a estimulaciones...

El fenómeno educativo, dada su complejidad y multideterminación, puede asimismo ser explicado e intervenido desde otras ciencias humanas, sociales y educativas.

En este apartado se presentan algunas aportaciones recientes de la denominada CONCEPCIÓN CONSTRUCTIVISTA al terreno del aprendizaje escolar y la intervención educativa.

Carretero citado por DIAZ BARRIGA Y HERNANDEZ ROJAS (1997: 27) afirma que el constructivismo “básicamente puede decirse que es la idea que mantiene que el individuo - tanto en los aspectos cognitivos y sociales del comportamiento como en los afectivos - no es un mero producto del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia que se va produciendo día a día como resultado de la interacción entre esos dos factores. En consecuencia, según la posición constructivista, el conocimiento no es una copia fiel de la realidad, sino una construcción del ser humano. ¿Con qué instrumentos realiza la persona dicha construcción?. Fundamentalmente con los esquemas que ya posee, es decir, con lo que ya construyó en su relación con el medio que lo rodea”.

Dicho proceso de construcción va a depender de dos aspectos fundamentales:

a) De los conocimientos previos o representación que se tenga de la nueva información o de la actividad o tarea a resolver.

b) De la actividad externa o interna que el aprendiz realice al respecto.

La concepción constructivista del aprendizaje escolar se sustenta en la idea de que la finalidad de la educación que se imparte en las instituciones educativas es promover los procesos del crecimiento personal del alumno en el marco de la cultura del grupo al que pertenece. Estos aprendizajes no se producirán satisfactoriamente a no ser que se suministre una ayuda específica a través de la participación del alumno en actividades intencionales, planificadas y sistemáticas que logren propiciar en éste una actividad mental constructiva. Por lo tanto, la construcción del conocimiento escolar puede analizarse desde dos vertientes:

a) Los procesos psicológicos implicados en el aprendizaje.

b) Los mecanismos de influencia educativa susceptibles de promover, guiar y orientar dicho aprendizaje.

Es evidente que desde una postura constructivista, se rechaza la concepción del alumno como un mero receptor o reproductor de los saberes culturales, así como tampoco se acepta la idea de que el desarrollo es una simple acumulación de aprendizajes específicos. “La mejor construcción del conocimiento se da cuando al alumno se le enfrenta a problemas significativos que debe resolver. Más que aprender habilidades de pensamiento el alumno debe comprometerse con la solución de uno de estos problemas en los que se le pide utilice su conocimiento generativo y aplique ciertas estrategias para la solución de problemas” (ALLAN A: 1997: 44).

Se puede afirmar, que la construcción del conocimiento escolar es en realidad un proceso de elaboración, en el sentido de que el alumno selecciona, organiza y transforma la información que recibe de muy diversas fuentes, estableciendo relaciones entre dicha información y sus ideas o conocimientos previos. Construir significados nuevos implica un cambio en los esquemas de conocimiento que se poseen previamente, introduciendo nuevos elementos o estableciendo nuevas relaciones entre dichos elementos. Así, el alumno podrá ampliar o ajustar dichos esquemas o bien reestructurarlos a profundidad como resultado de su participación en un proceso intelectual. “El desarrollo intelectual no se produce por simple maduración, por el paso del tiempo o por el crecimiento, sino que es el resultado de un larguísimo trabajo de construcción que se realiza cada día, a cada minuto, en todos los intercambios que el sujeto realiza con el medio” (DELVAL: 1984: 80).

DIAZ BARRIGA Y HERNANDEZ ROJAS(1997: 29), integran los siguientes siete principios de aprendizaje que se asocian a una concepción constructivista:

1.- El aprendizaje es un proceso constructivo interno, autoestructurante

2.- El grado de aprendizaje depende del nivel de desarrollo cognitivo

3.- El punto de partida de todo aprendizaje son los conocimientos previos

4.- El aprendizaje es un proceso de (re)construcción de saberes culturales

5.- El aprendizaje se facilita gracias a la mediación o interacción con los otros

6.- El aprendizaje implica un proceso de reorganización interna de esquemas

7.- El aprendizaje se produce cuando entra en conflicto lo que el alumno ya sabe con lo que debería saber.

Resnick citado por DIAZ BARRIGA Y HERNANDEZ ROJAS (1997: 30) afirma que “la forma en que la institución escolar busca fomentar el conocimiento contradice frecuentemente la forma en que se aprende fuera de ella. El conocimiento fomentado en la escuela es individual, fuera de ella es compartido; el conocimiento escolar es simbólico-mental, fuera de ella es físico-instrumental". "El aprendizaje en el mundo real no es como el aprendizaje en la escuela. Se asemeja más al aprendizaje donde los novatos, con el apoyo de un guía experto o modelo, asumen cada vez más responsabilidad hasta que son capaces de funcionar en forma independiente" E. Woolfolk (1995: 277).

Para EUSSE ZULUAGA (1994: 35) el instrumento con el cual el docente genera y propicia el proceso enseñanza-aprendizaje es el programa de estudios, en el cual los conocimientos están organizados en bloques o unidades, con sus objetivos, traducidos en contenidos que deben propiciar el aprendizaje. Dichos conocimientos se convierten en el objeto de estudio del proceso enseñanza-aprendizaje, y representan la concreción de la ciencia como proceso. En un programa de estudios, el conocimiento está organizado en los contenidos que lo integran, y se le proporciona al docente para ser trabajado con los alumnos sin que haya participado en su selección u organización, aunque esto no se puede generalizar. Los conocimientos organizados en teorías y contenidos, y estructurados en un programa de estudios, es decir "lo dado", constituye el material a partir del cual puede iniciarse el proceso de construcción del conocimiento dentro del proceso enseñanza-aprendizaje; esto es, puede vislumbrarse la posibilidad de lo "dándose", lo posible, lo no construido pero posible de construirse. Es en el sentido de apropiación y transformación de lo real, que el profesor se presenta como mediador entre la realidad objetiva y la experiencia que poseen los alumnos.

La capacidad de pensar y explicar no siempre van juntas, podemos organizar un planteamiento crítico y no ser explicativo y viceversa; estos dos aspectos deben conjugarse en el acto de enseñar a pensar pensando. Las formas de pensar son formas de relacionarse con la realidad, esto es apropiarse de ella para explicarla, problematizar o formarse juicios. En estos procesos están presentes los parámetros culturales de valor, ideológicos y dogmáticos, que van a influir en las formas de pensar. La razón categorial consiste en la transmisión de formas de pensar, e implica pensar, ordenar, estructurar, racionalizar; implica a su vez la ruptura de una estructura lógica y la incorporación de una realidad prevista. La razón categorial consiste en aprender a razonar desde lo que se sabe para lograr la cristalización del razonamiento humano, que a su vez constituye la base de nuevos procesos.

En general se acepta que las fuentes de la invención matemática residen a veces, en las realidades del mundo que nos rodea y que muchos de los resultados matemáticos son parte de la base conceptual con que cuentan los científicos para la comprensión y descripción del mundo físico. Desde el punto de vista pedagógico la relación matemática-realidad se ha interpretado o utilizado de varias maneras; algunas de ellas son las siguientes:

1.- Enseñar contenidos matemáticos a partir de problemas reales.

2.- Enseñar a aplicar contenidos matemáticos.

3.- Enseñar matemática aplicada.

4.- Enseñar cómo se ha aplicado la matemática.

En la concepción tradicional el aprendizaje del alumno depende directamente de la influencia del profesor y de la metodología de la enseñanza utilizada. En la concepción constructivista, además de tomarse en cuenta estos dos factores, se pone de relieve lo siguiente:

1.- La importancia del conocimiento previo del alumno.

2.- Que los contenidos tengan una cierta lógica intrínseca que el alumno pueda relacionar con lo que ya conoce.

3.- La motivación del alumno para aprender significativamente.

En las clases de matemática siempre se dice a los alumnos acerca de la gran utilidad de esta ciencia y que todo el desarrollo científico y tecnológico actual se lo debemos a la matemática. Sin embargo, en el aula, *porque así lo establecen los planes y programas de estudio y por la deficiente preparación de algunos profesores*, se hace demasiado énfasis en que el alumno memorice definiciones, leyes y términos que ninguna utilidad práctica tienen en la aplicación de la matemática. ***Dándole en cambio poca atención a la resolución de problemas, siendo que resolver problemas es la mejor manera de realizar un buen aprendizaje.*** Lo anterior contribuye a que el alumno rechace la matemática al no ver una utilidad práctica en lo que aprende.

Uno de los aspectos fundamentales de la metodología que se describe en este documento es que, nunca se pide al alumno que memorice leyes, teoremas, axiomas, etc.; es más, en muchas ocasiones ni siquiera se le mencionan, todo su trabajo en el aula es totalmente práctico. Todas las leyes, teoremas, etc, que el alumno necesita saber, es mediante la aplicación y comprensión matemática de las mismas.

Muy significativo para los alumnos es, por ejemplo, cuando se estudia la trigonometría, aprenden a resolver problemas de la asignatura de estática que se imparte en algunas carreras de ingeniería; o cuando se estudia la geometría analítica, aprenden a resolver problemas de la asignatura de topografía que se imparte a estudiantes de ingeniería civil.

La motivación y como consecuencia el aprendizaje aumentan cuando el alumno ve el resultado de la adquisición de los nuevos conocimientos y se da cuenta de lo que es capaz de hacer

Para que haya una buena enseñanza-aprendizaje de la matemática se requiere que el profesor tenga habilidad, creatividad e ingenio; si no hay una buena preparación del profesor, ninguna metodología será eficaz o el aprendizaje será muy por debajo de lo esperado; si el alumno no entiende de una manera, el profesor debe de disponer de otras alternativas; **es necesario transmitir seguridad y confianza al estudiante**, para que él sienta que todas sus preguntas serán respondidas satisfactoriamente; **si el alumno recibe de su instructor inseguridad en la enseñanza, casi seguro que se bloqueará su aprendizaje**. Es necesario que el profesor provoque y logre que sus alumnos lo admiren, desarrollar su autoestima, alegría por descubrir y construir; todo esto originará una mente receptiva y fértil. Una buena metodología es muy importante para el buen aprendizaje, pero también las buenas actitudes que tenga el alumno por aprender; la escuela y el profesor podrán contribuir mucho a la formación y desarrollo de éstas.

Durante todo el tiempo que se ha trabajado con esta metodología, se ha observado que, invariablemente, en el aprendizaje de la matemática se presentan las etapas que Piaget menciona:

1.- *Preliminar o de juego; las actividades son más bien desordenadas sin objeto aparente; el sujeto debe tener libertad de experimentar; encuentra satisfacción en la actividad.*

Con el uso de esta metodología, casi siempre se ha trabajado con alumnos de entre doce y trece años de edad, a quienes solamente se les pide que, como punto de partida, tengan buen dominio de la suma, resta, multiplicación y división. Se comienza con el álgebra y en sus cuadernos de trabajo, al principio se observan en forma muy desordenada los problemas que han resuelto; hacen preguntas como, ¿esto para qué me sirve?, o, ¿y esto en que me va a ayudar después?. Sin embargo, se alegran al comprobar en su libro de texto que el resultado obtenido por ellos está correcto; se alegran y compiten entre ellos para ver quien lo hace bien y en menor tiempo.

2.- *Juegos estructurados; es más dirigida y orientada, aunque aún no se llega a una clara comprensión de lo que se busca.*

Se ha observado que los alumnos, cuando ya tienen un fuerte avance en el álgebra, manifiestan una gran motivación al ellos ver que sus conocimientos son mayores que los de alumnos o familiares que estudian niveles académicos superiores a ellos. Aquí ya están aplicando lo aprendido en álgebra con los nuevos conocimientos de la misma. En esta etapa, ya no hacen las preguntas, ¿esto para qué me sirve?, o, ¿y esto en que me va a ayudar después?.

Aquí ya se empieza a observar el orden en la resolución de los problemas que realizan. Para el obtener el orden en el desarrollo de los problemas, se les recuerda constantemente que lo hagan siguiendo los ejemplos que el instructor realiza en el pizarrón.

3.- *Proporciona la adecuada práctica para aplicar y fijar los conceptos que han sido formados.*

Se considera que es en la trigonometría cuando se empieza a presentar esta tercera etapa. Aquí ellos aplican el álgebra y la trigonometría en la resolución de problemas de la vida diaria. Es de mucha motivación para ellos resolver problemas sencillos que se imparten en la materia de estática correspondiente a las carreras de ingeniería.

El cambio de una etapa a la siguiente, no se da de inmediato, sino que es un proceso que requiere largo tiempo y trabajo por parte del alumno y el profesor.

II.2. PROPUESTA METODOLÓGICA

La posibilidad de que el profesor aplique una propuesta metodológica que conlleve a que el sujeto se implique con más motivación en la misma, que no solamente manifieste problemas y necesidades, sino posibles soluciones garantiza un proceso de enseñanza aprendizaje con una mayor eficacia. La propuesta metodológica a la que arriba el autor, es producto de una sistematización a partir de los resultados que obtiene desde varias experiencias a través de las cuales se corrobora su viabilidad. Se define por el autor como propuesta metodológica para el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática, como; conjunto de fases y acciones educativas que desde el cumplimiento de algunos principios y requisitos didácticos que favorecen la eficacia del proceso de enseñanza de la Matemática, además de que contribuye al desarrollo de la personalidad. Se compone además de un conjunto de recomendaciones para la realización de los ejercicios por los alumnos en las diferentes ramas de la matemática. Sus componentes son;

A. Objetivo general.

B. Principios pedagógicos a cumplimentar.

C. Fases y acciones por cada fase.

D. Requisitos didácticos a cumplir por los profesores para su aplicación.

E. Algunas recomendaciones para la realización de los ejercicios por los alumnos en las diferentes ramas de la matemática.

F. Sistema de conocimientos para el curso con los profesores y estudiantes

A continuación se describe cada uno de sus componentes.

A.- Objetivo general.

Contribuir al fortalecimiento del aprendizaje de la matemática desde la enseñanza media básica en función de la preparación en esta ciencia para sus estudios en bachillerato y el nivel superior.

B- Principios pedagógicos a cumplimentar.

Las acciones que se generan a partir de la aplicación de la propuesta metodológica, facilitarán a los profesores el cumplimiento de estos principios en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la matemática.

En la literatura pedagógica no existe un consenso definitivo en cuanto a la denominación de estos principios, por lo que coexisten diversos sistemas, basta citar los elaborados por L. Klingberg (1977) y las cubanas Guillermina Labarrere y Gladys Valdivia (1986) y Fátima Addine (1998), entre otros.

Se asume por el autor por considerarlos más completos y que se aviene de forma más certera con el propósito del autor los planteados por la pedagoga cubana, Dra. Fátima Addine.

En la literatura se refleja como los principios del proceso pedagógico devienen en normas y procesos de acción que fundamentan pedagógicamente el proceso de educación de la personalidad. Significa entender que los principios cumplen una función lógica y gnoseológica cuando sirven de instrumento lógico para explicar, organizar y fundamentar la búsqueda de conocimientos, como tener en cuenta que cumplen la función metodológica de esclarecer una estrategia ulterior de conocimientos para alcanzar determinados fines. Esto significa entender los principios como reguladores del proceso pedagógico. Entre los principios de la Dra. Fátima Addine, que asume el autor están:

1- Vinculación de la educación con la vida, el medio social y el trabajo de educación de la personalidad.

2- Unidad de lo instructivo, lo educativo y lo desarrollador.

3- Unidad de lo afectivo y lo cognoscitivo en el proceso de formación de la personalidad... implica la necesidad de que la educación se construya a partir de las condiciones económicas, políticas y sociales en que vive el sujeto. Esto significa que las nuevas generaciones no solamente se apropien de un sistema de conocimientos, sino que puedan aplicarlo en un futuro al convertirse en productores dentro de la sociedad.

La vinculación con la vida se garantizará en la medida en que se relacionen todas las actividades y ejercicios que realicen los alumnos con los elementos de la realidad contextual en la que viven, cuando busquen soluciones que podrán vincular con la vida. Para ello es necesario ubicar al alumno como protagonista fundamental del proceso pedagógico.

La unidad de lo instructivo, lo educativo y lo desarrollador, que se fundamenta en la unidad en la actividad del profesor de la instrucción con la educación. De esto se infiere que al impartir los contenidos matemáticos se utilicen métodos productivos que posibiliten desarrollar hábitos, habilidades y capacidades de forma tal que formen convicciones y un pensamiento flexible que le facilite la autotransformación y la de su entorno.

Esto permite una orientación activo - transformadora y no pasivo-descriptiva de la personalidad. Este principio puede cumplimentarse con la vinculación de los elementos teóricos y la realidad donde vive el sujeto para hacerlo reflexionar acerca de cómo es posible la transformación cualitativa de esa realidad.

El principio de la unidad de lo afectivo y lo cognoscitivo se sustenta en que los profesores asuman la tarea de contribuir a desarrollar los procesos cognoscitivos, las capacidades y habilidades y que contribuyan a desarrollar las motivaciones, convicciones y voluntad, entre otros elementos afectivos. De esta forma el conocimiento teórico adquiere un significado diferente, que garantiza la vinculación de lo motivacional afectivo y lo cognoscitivo instrumental, lo que promueve una actuación más eficaz de su personalidad.

Significa asumir que estos principios deben servir de fundamento a todas las acciones que se emprendan. Asumir estos principios al instrumentar la aplicación de la propuesta metodológica garantiza la eficacia del proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática por los alumnos implicados.

C- Fases y acciones por cada fase.

<u>Fase 1.</u>

Sensibilización de los implicados.

Objetivo. Contribuir a la sensibilización para que los implicados logren familiarizarse con la tarea que van asumir desde el objetivo del curso.

En las reuniones previstas con cada uno de los implicados se pondrán videos de los resultados ya obtenidos con la aplicación de la propuesta metodológica en otras ocasiones para poder sensibilizar más a los implicados. Además de algunas entrevistas realizadas a algunos estudiantes participantes.

Acciones.

- **Reunión con los padres.**

La sensibilización de los padres ante esta tarea es sumamente importante. Permite que haya una mejor comprensión y compromiso para que sus hijos e hijas logren una mayor motivación para emprenderlo.

- **Reunión con los alumnos.**

Con esta reunión se pretende promover una mayor motivación hacia el objetivo previsto por los alumnos que participarán. Se permite lograr con esto un conocimiento previo de lo que realizarán y la importancia que tiene su participación.

- **Reunión con los profesores de matemática que serán promotores del curso.**

Permite esta reunión que los profesores conozcan cuña es su rol en el curso y la forma diferente en que trabajarán. Una mayor sensibilización de los profesores garantiza un mayor compromiso ante la tarea que realizarán.

Fase 2.

Preparación de los profesores que impartirán el curso.

Objetivo: Preparar a los profesores en contenido y formas didácticas de asumir el curso.

En esta fase se harán tantas sesiones según sea necesario en función de que los profesores queden bien preparados tanto en los requisitos didácticos a cumplir por los profesores para la aplicación de la propuesta metodológica como en algunas recomendaciones para la realización de los ejercicios por los estudiantes en las diferentes ramas de la matemática.

Las sesiones se establecerán según sean los resultados que se obtengan de la preparación inicial que tienen los profesores para este empeño. Para eso es importante conocer el dominio que tiene de la matemática los profesores que se prepararán.

El dominio de los contenidos por parte de los profesores se establece desde la realización de algunos ejercicios que se utilizarán desde las diferentes ramas de la matemática en estas sesiones. No es necesario que se someta a los profesores a ningún test o prueba para comprobar sus conocimientos, esto redundaría en una desmotivación de los profesores hacia el curso.

Se harán sesiones de contenidos según sea necesario y como mínimo tres sesiones de trabajo para que los profesores lleguen a dominar la manera de actuar ante los alumnos desde esta propuesta metodológica. Se debe establecer un consenso de los ejercicios posibles y en la forma de actuar similar de los profesores.

Es de obligatoriedad en cada sesión de la preparación de los profesores no solamente trabajar contenidos sino también la preparación pedagógica y didáctica, Por tanto cada sesión debe tener el objetivo previsto y el sistema de conocimientos a impartir así como la preparación en principios y requisitos a cumplimentar en cada tipo de ejercicio.

Cada sesión que posteriormente prepare cada profesor para los alumnos debe contemplar todos los componentes del proceso pedagógico; objetivo, contenidos, métodos a utilizar, forma de organizar la docencia y medios a utilizar.

Al final de las sesiones que se realicen se determinan cuáles son los profesores que están preparados para aplicar la propuesta metodológica.

<u>Fase 3</u>.

Curso para los estudiantes.

Objetivo. Ejecutar el curso con los alumnos.

Las sesiones del curso están en dependencia del diagnóstico inicial de los alumnos.

Acciones.

- **<u>Diagnóstico inicial.</u>**

Este diagnóstico se realizará a través de:

1- Entrevista individual del porqué se interesa por el curso y qué conoce de los contenidos que conforman el curso desde su autopercepción.

2- Es necesario una prueba de entrada y una prueba de salida de los conocimientos básicos del curso para poder establecer una comparación de entrada y salida y comprobar el proceso de aprendizaje en los alumnos.

- **<u>Ejecución de las sesiones del curso con los alumnos.</u>**

En estas sesiones se deben cumplimentar todos los requisitos y recomendaciones que se tienen en cuenta en la propuesta metodológica.

Cada sesión debe tener.

- **Introducción.**

Donde se conozca la situación actual de los alumnos, preocupaciones, se revisa la tarea y se conversa con los alumnos acerca de sus avances. Se introduce el contenido a tratar.

- **Desarrollo.**

  El profesor explica los contenidos a tratar y se introducen los ejercicios a tratar. Se le da prioridad a las dificultades que puedan tener para realizarlos. Se comprueban los resultados.

- **Conclusiones**.

Se orienta tarea si fuera necesario y se comenta con los alumnos cómo se sintieron en el aprendizaje en esa sesión.

➢ **<u>Diagnóstico final.</u>**

Se aplicará una prueba de salida que tenga los mismos requerimientos de la prueba de entrada. Se comparan los resultados con la prueba de entrada. Esto permite un conocimiento desde lo académico de los resultados obtenidos.

Unido a estos resultados se debe argumentar por parte de cada profesor cómo ha sido la conducta de los alumnos en el curso y se debe establecer desde una reflexión grupal qué ha aprendido en cuanto a sistema de conocimientos se refiere, cada uno de los participantes pero además, cómo lo ha preparado para la vida y su futuro profesional el curso.

El resultado de la comparación de las pruebas de entrada y salida, así como los que se recoge de la reflexión grupal y la observación diaria de los profesores a los alumnos en las diferentes sesiones permite arribar al diagnóstico final en cada alumno donde se deben recoger las potencialidades y fortalezas alcanzadas por cada uno de ellos, así como sus debilidades tanto en la personalidad como en los conocimientos matemáticos.

Cada alumno debe reconocer sus resultados y tratar de trazarse metas para erradicar las debilidades.

D- Requisitos didácticos para la aplicación de la propuesta metodológica.

Estos requisitos parten de la experiencia del autor en la aplicación de la propuesta metodológica y en su conocimiento didáctico para la enseñanza de la matemática. Su cumplimiento cabal permite un mejor aprendizaje en los alumnos, un mayor compromiso y permanencia en el curso.

Con algunos ajustes, se considera que los requisitos siguientes se pueden aplicar muy bien en el aula escolar.

1- Es imprescindible que el profesor tenga un dominio amplio de lo que está enseñando; de preferencia con conocimientos matemáticos mucho más avanzados del nivel en el que se encuentra enseñando.

2- Se hace necesario y obligatorio que tanto el maestro de matemática y sobre todo sus alumnos tengan el libro de texto para uso personal, así como contar con libros de consulta; sin el uso de éste, los resultados que se obtengan serán muy por debajo del que se puede lograr; ya que desde la primera hora de iniciado el curso, empleando esta metodología, el alumno debe empezar a resolver problemas contenidos en su libro, comparando el resultado por él obtenido con el que proporciona el autor. Si al iniciar el curso no se cuenta con el libro de texto, el profesor debe suplir a éste con problemas elaborados por él mismo.

3- Es necesario hablar a los alumnos los grandes avances en la ciencia y la tecnología que ha proporcionado la ciencia matemática a la humanidad; el objetivo del aprendizaje de esta ciencia y los grandes beneficios que ellos obtendrán en la vida al aprender lo que usted desea que ellos aprendan.

4- Emocionalmente transmita a sus alumnos el deseo que tiene en que ellos aprendan, y que capten ese deseo; esto es fundamental. Un profesor que no siente alegría por enseñar, jamás originará en sus alumnos alegría por aprender.

5- No se admiten los insultos y castigos a sus alumnos; no desesperarse si tienen dificultades para comprender algo; nunca ridiculizarlos. Tenga presente que no todos tienen la misma habilidad; sin embargo, todos la pueden desarrollar; el aprendizaje es cuestión de práctica y tiempo. Nunca los humille, haciéndolos sentir seres inferiores y usted el sabio por ser el profesor. Nunca diga que el diez es del autor del libro, el nueve del profesor y el resto del alumno; no sea jactancioso. Sea humilde en el trato con ellos. Recuerde que usted está en esto por propio gusto o interés.

6- Mantenga una comunicación constante con sus padres. Si tiene algún estudiante con problemas de indisciplina, platique con los padres de ellos; si persiste ésta, sepárelo del grupo pero nunca lastimarlos.

7- Dedique algunos minutos de la clase para platicar con sus alumnos sobre cosas para ellos interesantes; juegue y bromee con ellos, pero siempre con respeto, no sea muy insistente en esto; si es posible, a las alumnas hábleles de usted. No los trate como niños o adolescentes, sin embargo comprenda bien la edad en que se encuentran; parece ser que les agrada que se les hable como adultos. Hábleles con cariño, pero sin fastidiarlos.

8- Diga a sus alumnos que para el aprendizaje, así como el desarrollo de habilidades y destrezas de la matemática se requiere mucho tiempo. Que resolver un problema probablemente se requiera de sólo unos minutos, pero también en ocasiones se requerirá de algunas horas o tal vez días; pero que eso es lo que las hace interesantes y divertidas.

9- Si sus alumnos son adolescentes que por primera vez se inician en el estudio del álgebra, probablemente a pocos días o semanas de iniciado el curso sientan mareos, confusión y tal vez olvido de lo ya aprendido. No se preocupe, eso es temporal; pasado este estado, ya no se vuelve a presentar.

10- Los alumnos sólo usarán cuaderno, de preferencia de cuadrícula, lápiz, borrador; al iniciar no es necesaria aún la calculadora científica. Se necesitará hasta cuando se vean los logaritmos o la Trigonometría.

11- A los alumnos no los pase al pizarrón a resolver problemas. **Todo el trabajo es totalmente práctico**, él siempre lo realizará en su mesa banco.

12- **No es necesario que sus alumnos memoricen los teoremas, axiomas, leyes, etc. relacionados con el tema en estudio**; y menos que en la resolución de un problema que el profesor realice y explique en el pizarrón lo relacione con las diversas leyes matemáticas implicadas en el mismo. Sin embargo, sí es necesario definir algunas cosas como qué es una base, un exponente, un radical, factores, etc. Hacer que los alumnos memoricen leyes, axiomas, teoremas, etc, y los relacionen en la resolución de problemas, <u>es hacerles su aprendizaje tedioso y cansado</u>. El autor de esta propuesta metodológica, a un grupo de alumnos de nivel secundaria que en un año y medio aprendieron hasta el cálculo integral, el final del curso reviso sus cuadernos de notas y sólo había dos definiciones, el Teorema de Pitágoras y la definición de derivada (cálculo diferencial); las apuntaron porque ellos lo quisieron y no porque el instructor se las haya dictado.

13- En el pizarrón el profesor debe resolver y explicar varios problemas de ejemplo del tema en estudio y **dejarlos en él, no borrarlos**; tampoco que los alumnos pierdan tiempo en copiarlos, no tiene caso perder tiempo en eso, no los estudiaran posteriormente.

14- Utilizando su libro, seleccione problemas semejantes a los desarrollados en el pizarrón y pida a sus alumnos que los resuelvan, utilizando como guía los desarrollados en el pizarrón. De preferencia pida que resuelvan aquellos problemas cuyo resultado lo proporciona el autor para que el resultado por ellos obtenido lo comparen con el del libro; si no coincide, entonces pídales que lo analicen para localizar el error cometido, hasta que lo obtengan; si aún así no lo obtienen, entonces intervenga usted para ayudarlos o por último resolvérselos.

15- Cuando sus alumnos ya hayan resuelto los problemas semejantes a los escritos en el pizarrón; borre éste y resuelva y explique detalladamente más problemas con un mayor grado de dificultad; no los borre ni que sus alumnos los copien; repita lo descrito en el párrafo anterior.

16- Los problemas por resolver que proporcionan lo libros, generalmente siempre están ordenados de tal manera que el grado de dificultad va aumentando; esto es para que los conocimientos que se vayan adquiriendo, sean aplicados en la resolución de los problemas más difíciles. Cuando sus alumnos ya hayan resuelto los problemas cuyo resultado proporciona el autor del libro, entonces pídales que escojan y resuelvan aquellos problemas sin el resultado incluido.

17- Cuando usted realice problemas en el pizarrón, sea siempre ordenado en el desarrollo del mismo; pida a sus alumnos que lo imiten. Sea ordenado hasta para borrar el pizarrón.

18- Si en la resolución de un problema en el pizarrón que sea ejemplo del tema en estudio, sus alumnos no lo comprenden; inténtelo mediante otras alternativas; <u>sea habilidoso y creativo</u>.

19- En todo momento, en base al orden o disciplina existente en su grupo de alumnos, en el aula usted va a decidir cuándo y cómo permitirá a sus alumnos intercambiar ideas y conocimientos.

20- Durante la enseñanza del álgebra, en determinados momentos de la misma, suprima algunos pasos en la resolución de algunos problemas; tal vez lo comprendan, si es así, esto los motivara mucho.

21- <u>Tenga presente que la matemática no se aprende a la primera y para siempre</u>. Sus estudiantes aprenderán algo “bien” -sobre todo en el álgebra- y tiempo después lo habrán olvidado, esto es natural que suceda; no se desanime ni desespere, es más fácil recordar que aprender algo nuevo. La experiencia de autor es que el álgebra básica de uso frecuente la aprenden muy bien definitivamente hasta el cálculo diferencial.

22- En etapas avanzadas del álgebra, cuando a manera de ejemplo, resuelva un problema en el pizarrón, no hable mencionando lo que está haciendo, proceda lentamente en el desarrollo del problema; con las manos y dedos haga señalamientos para expresar lo que esté realizando. Voltee a observar las caras de sus alumnos para ver en ellas si lo están comprendiendo; si no lo entienden, repítalo o inténtelo de otra manera.

23- En el estudio del álgebra, cuando trate el tema de la resolución y gráfica de un par ecuaciones lineales con dos incógnitas, emplee conocimientos de geometría analítica tales como, identificación de rectas paralelas o mentalmente calcular las intersecciones de las rectas con los ejes X e Y, para ellos esto es de mucha motivación.

24- Cuando enseñe a despejar en fórmulas; haga y que el alumno aprenda a suprimir pasos y que al final lo realice en uno y mentalmente.

25- Con el fin de incrementar el desarrollo de habilidades, destrezas y creatividad, siempre que se hagan gráficas, no permita que los alumnos utilicen material de dibujo; las gráficas o figuras que tengan que hacer, lo realicen manualmente o usando materiales u objetos que tengan o estén a su alcance.

26- Cuando en el pizarrón resuelva problemas de ejemplo, si comete un error u omisión y se da cuenta de ello; no lo corrija, mejor diga a sus alumnos (si es que ellos aún no han visto) que usted cometió un error y que sean ellos los que lo localicen.

27- Cuando alguno de sus alumnos le haga una buena pregunta, buena aportación sobre el tema o localizado un error por usted cometido; felicítelo resalte ante el grupo esa aportación, pero no caiga en la adulación. Es muy positivo estimularlos.

28- Para usted no debe ser suficiente que sus alumnos resuelvan algunos problemas de un determinado tema y considerar que ya lo dominan bien. Es necesario resolver docenas de ellos, pues existe una gran diversidad de los mismos. Aunque ya hayan resuelto gran cantidad de problemas sobre un tema, muy probablemente lo hayan olvidado si después de muchos días no han tratado algo relacionado con lo mismo. Recuerde, El buen aprendizaje de la matemática es: práctica, práctica y más práctica.

29- El alumno obtiene un buen aprendizaje cuando resuelve problemas con alto grado de dificultad del tema en estudio y lo sabe relacionar con lo nuevo. Nunca se quede en lo sencillo; exigir el máximo de los alumnos, ellos pueden dar mucho más de lo que usted se imagina, pero hay que ser cauteloso. Solicíteles que resuelvan siempre hasta los últimos problemas propuestos o por resolver del tema en estudio.

30- La resolución de los problemas siempre será de lo muy fácil a lo muy difícil. Nunca quedarse en lo fácil; se aprende resolviendo lo difícil. Pero tenga precaución, pudiera ser que los problemas difíciles tengan algo que ellos desconocen porque aún no ha sido tratado.

31- Siempre que sea posible y necesario, enseñe a sus alumnos a comprobar los resultados por ellos obtenidos.

32- Al iniciar el estudio del álgebra, siempre que el tema en estudio lo permita, comience con ejemplos de problemas que contengan sólo números.

33- Si el libro de texto en uso, a su juicio no tiene los suficientes problemas para satisfacer el aprendizaje de sus alumnos, consulte otros libros o invéntelos.

34- Ayude a sus alumnos a que realicen actividades de gimnasia mental. Enséñelos y que aprendan hacer mentalmente sumas, restas, divisiones y multiplicaciones.

35- Experimente cuando sus alumnos pueden iniciar poco a poco a aprender solos algunos temas.

36- Si sus alumnos están concentrados resolviendo problemas, siempre que sea posible, no los interrumpa; en ocasiones se molestan cuando se los interrumpe.

37- En ocasiones los alumnos manifiestan cansancio en el aprendizaje. Nunca se les debe exigir más; se les puede hablar de otros temas o invitarlos a resolver ciertos juegos matemáticos preparados de antemano.

38- En trigonometría, siempre que sea posible, resuelva problemas aplicados a la vida real. Si usted tiene conocimientos de física, aplique la matemática en la resolución de problemas que considere que sus alumnos pueden comprender y resolver.

39- En trigonometría, siempre que sea posible, realice las deducciones de las formulas que use.

40- En trigonometría existen algunos problemas que tienen varias maneras de solucionar; usted resuelva de una manera, de preferencia la más complicada y pida a sus alumnos que encuentren las demás; si es necesario ayúdelos orientándolos a encontrarlas. Más adelante se señalarán algunos de estos problemas.

41- No se sorprenda que muy probablemente en el estudio de la trigonometría y geometría analítica, sus alumnos hayan olvidado algunos procedimientos algebraicos; no se moleste, recuérdeselos.

42- En etapas avanzadas de su estudio, pida a sus alumnos que lean y relean en su libro el tema a tratar y después solicíteles que analicen los problemas resueltos; a continuación que ellos resuelvan los problemas propuestos, tomando como guía los resueltos en el libro. Que analicen un problema (el más fácil) de los resueltos en el libro y después que resuelvan de los propuestos por el autor y que sean semejantes al analizado. Luego que analicen el siguiente problema resuelto y que resuelvan los semejantes; que continúen así con los siguientes. Para realizar lo anterior se recomienda que los problemas que se resuelvan, sean aquellos cuyos resultados están incluidos en el libro, para que el alumno haga la comparación correspondiente y corrección si es necesaria; después resolver los que no incluyen el resultado. Durante el desarrollo de esta actividad el profesor deberá auxiliar a los alumnos aclarando dudas. Probablemente todos o la mayoría de sus alumnos coincidan en no poder resolver un determinado problema, explique la manera de resolverlo o resuélvalo usted; si esto se presenta frecuentemente en un determinado tema, muy probablemente se deba que aún no están preparados para abordarlo, porque faltan conocimientos previos; se sugiere que el profesor explore y determine que conocimientos faltan y los trate de inmediato o también tratar otro tema que se considere con menor grado de dificultad; después regrese e intente nuevamente con el tema en dificultad. ¡Cuidado!, también pude ser que si el alumno no interpreta algo se deba a fallas en el profesor; recuerde que la enseñanza de la matemática es cuestión de habilidad y creatividad. En etapas avanzadas el alumno puede aprender solo.

43- De preferencia, los problemas a tratar en clase, no los resuelva antes en cubículo o en casa, sino únicamente en el aula. Esto es muy importante ya que al desarrollarlo así, tendrá que analizar, hacer planteamientos, buscar alternativas de solución, hacer figuras y gráficas (de preferencia a mano sin auxilio de material de dibujo), solicitar opiniones de los alumnos, etc.; lo anterior enriquecerá la capacidad de razonamiento de ellos. Probablemente cometa errores u omisiones, pero eso contribuye de igual forma al desarrollo del razonamiento ya que se volverán a hacer nuevos planteamientos, alternativas de solución, etc. No apenarse si no encuentra la solución al problema; pida a sus alumnos que lo analicen en sus casas y que en la próxima sesión se volverá a discutir; en casa o cubículo analícelo bien y resuélvalo usted, después explíquelo; no sin antes haber preguntado quién encontró la solución.

44- No es necesario que haga dosificación de los temas, muy probablemente se equivoque en el tiempo que asigne a cada uno.

Si los conocimientos matemáticos del profesor son deficientes, ninguna metodología que use proporcionará un buen aprendizaje en sus alumnos. El profesor que tenga muy buenos conocimientos matemáticos, fácilmente podrá aplicar esta metodología; y por tal motivo, podrá usar cualquier libro de texto que a su juicio contenga lo que él impartirá o podrá inventar problemas en el momento que sea necesario. Tal vez tampoco requerirá ver y analizar los ejercicios matemáticos que se describen posteriormente.

E- Algunas recomendaciones para la realización de los ejercicios por los estudiantes en las diferentes ramas de la Matemática.

Para aplicar eficazmente estas recomendaciones didácticas en el proceso de enseñanza - aprendizaje, es necesario que el profesor o instructor tenga un dominio amplio de lo que está enseñando; de preferencia con conocimientos mucho más avanzados. Para que haya una buena enseñanza-aprendizaje de la matemática se requiere que el profesor tenga habilidad, creatividad e ingenio; si no hay una buena preparación del profesor, ninguna metodología será eficaz o el aprendizaje será muy por debajo de lo esperado; si el alumno no entiende de una manera, el profesor debe de disponer de otras alternativas; es necesario transmitir seguridad a sus alumnos, para que tenga confianza en que todas sus preguntas serán respondidas satisfactoriamente; si el alumno recibe de su profesor inseguridad en la enseñanza, casi seguro que se bloqueará su aprendizaje. Es necesario que el profesor provoque y logre que sus alumnos lo admiren, desarrollar su autoestima, alegría por descubrir y construir; todo esto originará una mente receptiva y fértil. Una buena metodología es muy importante para el buen aprendizaje, pero también las buenas actitudes que tenga el alumno por aprender; la escuela y los profesores podrán contribuir mucho a la formación y desarrollo de éstas.

Cuando se desarrolló esta metodología de enseñanza-aprendizaje, fue con grupos pequeños, donde no se aplicaban exámenes, no se tomaba lista de asistencia, no se prohibía llegar tarde ni salir antes del tiempo de salida, no se elaboraban reportes y citatorios a los padres, jamás se encargaron tareas y nunca se pasó a un alumno a resolver problemas en el pizarrón, tampoco se revisaron sus cuadernos; todo su trabajo fue siempre en el mesa banco; actualmente se continua haciendo esto. **Se considera que con algunas precauciones producto de la reflexión, estudio y experimentación, esta metodología se puede ajustar muy bien a las condiciones en el aula del alumno escolarizado, aumentando significativamente su aprendizaje.**

F.- Sistema de conocimientos para el curso con los profesores y para los estudiantes.

A nivel mundial existen muchas causas por las que se presenta el problema del rechazo y no aprendizaje de la matemática. Sin embargo, y así lo han manifestado en diversos eventos educativos nacionales y mundiales; una de las causas fundamentales es el bajo nivel de conocimientos matemáticos de gran cantidad de profesores y no sólo de un país en especial.

Por lo anterior, es imprescindible que en México se realice una intensa y permanente capacitación de los profesores de matemática, principalmente de quienes se encuentran en educación media básica y bachillerato. En estos niveles educativos existen buenos profesores, pero es necesario que lo sean todos. Para que el profesor de matemática se desempeñe eficientemente en su enseñanza, es necesario que tenga un nivel de conocimientos superior al del nivel en que se encuentra enseñando. Por lo tanto la buena capacitación deberá ser impartida por profesores de matemática de nivel más avanzado, en este caso se encuentran en las instituciones de educación superior.

La capacitación no debe ser sólo en la ampliación de los conocimientos matemáticos, sino también en la enseñanza de metodologías que faciliten y motiven en los estudiantes el aprendizaje de esta hermosa ciencia.

Jamás se mejorará educación superior, si antes no se mejora académicamente al alumno que acude a ella a estudiar una carrera.

La propuesta metodológica que aquí se menciona ha dado excelentes resultados, pero estos han sido obtenidos en grupos pequeños y con alumnos que tienen el deseo de aprender matemática; obviamente, junto a estos adolescentes hay padres responsables y muy comprometidos con la educación de sus hijos. Ha sido imposible experimentar con grupos de alumnos heterogéneos de escuelas públicas o privadas.

Por lo que se describe más adelante en el apartado "comentarios del autor", es_muy probable que el buen aprendizaje de la matemática también se presente en grupos escolarizados, aunque no con los resultados hasta hoy obtenidos; pero esto quedará sólo en "muy probable" por la desarticulación que existe entre las autoridades de los diversos niveles educativos, donde cada quien es dueño de su territorio y jamás permitirán la realización de una experimentación investigación. Lo mismo sucedería con la capacitación de los profesores.

II.3- RESULTADOS OBTENIDOS DESDE LA UTILIZACIÓN DE LA PROPUESTA METODOLÓGICA

Durante poco más de una década se ha estado trabajando en la enseñanza aprendizaje de la matemática con alumnos de diferentes niveles educativos, principalmente de nivel escuela secundaria; los resultados obtenidos siempre han sido extraordinarios, ya que estos jóvenes durante sus estudios de secundaria, bachillerato y profesional siempre han dado muestra de sus habilidades y conocimientos matemáticos. Un grupo de alumnos de segundo año nivel secundaria, en un año y medio aprendieron el álgebra, trigonometría, geometría analítica, cálculo diferencial y gran parte del cálculo integral. Un grupo de niños que iniciaban el estudio de sexto grado de primaria, iniciaron también el estudio de la matemática; en poco menos de dos años aprendieron el álgebra, la trigonometría y la geometría analítica.

Se ha descubierto que la mejor edad para iniciar a aprender la alta matemática es entre doce y trece años. A esta edad su autoestima aún no está lesionada; en ellos aún no se ha iniciado el rechazo a la matemática; su mente es muy receptiva limpia y fértil. Lo contrario sucede con los alumnos de edad más avanzada.

Como se mencionó anteriormente en este documento; esta metodología consiste exclusivamente en la resolución de problemas; las definiciones, leyes, etc, aunque se mencionan, <u>no se da importancia en la memorización de las mismas, sino en su comprensión matemática mediante la resolución de problemas</u>

Se considera que lo mencionado en el párrafo anterior ha ocasionado que gran cantidad de los que fueron alumnos en estos cursos de matemática, se hayan desempeñado exitosamente en sus estudios de bachillerato y profesional. A continuación se citara sólo algunos, ya que muchos de ellos emigraron a otras ciudades a realizar sus estudios profesionales y no hay comunicación con ellos.

Ernesto Navarro Acosta, hijo del autor. Con él fue con quien por primera vez se experimentó y se descubrió de la enorme capacidad que tienen los niños y adolescentes para el aprendizaje de la matemática. Cuando él iniciaba a estudiar tercero de secundaria y como una forma de disciplinarlo por algunas malas conductas, decidió castigarlo enseñándole matemática. Para él, a las dos semanas, aquel castigo se convirtió en su pasatiempo favorito. Antes se tenían problemas para que estudiara e hiciera sus tareas escolares; pero ahora le dedicaba mucho tiempo a aprender matemática. Fue tanta su motivación que en un año aprendió bastante bien el álgebra, la trigonometría, la geometría analítica y los principios del cálculo diferencial; eso sabía al terminar sus estudios de secundaria. Obviamente, sus estudios de bachillerato fueron bastante exitosos. Ingresó a estudiar una carrera de ingeniería y una maestría las que terminó exitosamente.

Adriana Navarro Acosta, también hija del autor. Cuando se inició con Ernesto ella estudiaba bachillerato; unos meses después ella se incorporó a aprender matemática, pero Ernesto ya la superaba ampliamente en conocimientos, por lo que se tuve que dar enseñanza separada. Adriana terminó exitosamente bachillerato, una carrera de ingeniería y una maestría.

Tanto Ernesto como Adriana, durante sus estudios de bachillerato y de ingeniería, frecuentemente en su casa eran visitados por sus compañeros de estudio para recibir asesoría por parte de ellos.

Debido al resultado obtenido con Ernesto y Adriana, se decidió formar un grupo de alumnos de segundo grado de secundaria. Se formó con alumnos de muy altas calificaciones, no por ser los únicos que pueden aprender la matemática, sino por sus buenas actitudes y además que junto a ellos hay padres responsables. El único requisito para formar parte del grupo era, y siempre ha sido así, el buen dominio de la aritmética. Sin embargo, todos estos alumnos ya tenían algunos conocimientos del álgebra elemental correspondiente a ese nivel de estudios; pero en un año y medio aprendieron el álgebra, la trigonometría y la geometría analítica correspondientes a los programas de estudio de bachillerato y el cálculo diferencial e integral a educación superior. El grupo estaba formado, entre otros alumnos, por:

Flor Elizabeth Saldívar Meléndez, una de las alumnas más brillantes. Cuando ella cursaba segundo secundaria, junto con otros compañeros del mismo nivel de estudios se formó un grupo de alumnos. En un año y medio aprendió álgebra, trigonometría, geometría analítica, cálculo diferencial y gran parte de lo programado en cálculo integral. Ingresó a estudiar bachillerato de tres años; puesto que ya tenía un excelente dominio de la matemática que se imparte en ese nivel de estudios su desempeño académico fue extraordinario, tanto que superó a sus profesores de matemática ya que constantemente los corregía. Sus compañeros de grupo preferían que ella fuera la que impartiera la clase porque le entendían mejor que a sus profesores. Hacer lo anterior le originó el deseo de ser profesora de matemática. Al terminar el bachillerato ingresó a una escuela formadora de profesores; también aquí su desempeño fue extraordinario; se graduó con el más alto promedio, no sólo de su especialidad, sino de su generación. Actualmente es profesora de matemática en nivel secundaria. Su papá una ocasión comentó, “a mi hija, la matemática le cambió la vida para siempre”.

Miriana de Lourdes Zapata Hernández; También alumna excelente; fue del mismo grupo de Flor Elizabeth y compañeras de la misma escuela secundaria. Estudió bachillerato y fue una estudiante brillante. Al terminar bachillerato ingresó a estudiar Psicología Clínica, pero al terminar el cuarto semestre se sintió incompleta; ingresó a estudiar también la carrera de ingeniería industrial en una institución de educación superior. Sus profesores de matemática frecuentemente comentaban de su enorme habilidad para la matemática; se graduó en las dos carreras.

Eriko Padrón Regalado; también formó parte del grupo de Flor Elizabeth y Miriana; igual que ellas, sus estudios de bachillerato fueron extraordinarios. Obtuvo el primer lugar en un concurso nacional de biología de bachillerato; se le preguntó, por qué en biología y no en matemática y su respuesta fue, “deseo estudiar ingeniería bioquímica, ya tengo muy buenos conocimientos en matemática, necesito tenerlos también en biología”. Al terminar bachillerato fue becado por, tal vez, la institución educativa de más prestigio en México.

Jesús Cortez de la Fuente; también del grupo anterior; cursó su bachillerato sin ningún problema académico. Becado por la misma institución que becó a Padrón Regalado.

Posteriormente se formó un grupo con alumnos de sexto grado de primaria (11 años de edad); el único requisito para formar parte del grupo era el buen dominio de la aritmética; y cuando iniciaron el curso de matemática sólo eso sabían. Este grupo de pequeños en poco menos de dos años aprendieron el álgebra, la trigonometría y la geometría analítica; por cansancio no continuaron con el estudio del cálculo diferencial e integral. Varios de ellos aparecen en la fotografía de la portada de este documento. Se mencionan a algunos de ellos a continuación:

América Azuara; ella formó parte de un grupo de alumnos de sexto año de primaria que aparecen en la portada de este documento. Aprendió el álgebra, la trigonometría y la geometría analítica. Obviamente, por su edad, su aprendizaje fue más lento, en un tiempo de poco menos de dos años. Sus estudios de secundaria y bachillerato fueron sobresalientes; ella también corregía a sus profesores de matemática y asesoraba a sus compañeros de estudio. Actualmente estudia sin ningún problema académico la carrera de ingeniería civil.

Teresa de Jesús Uvalle Crespo; también formó parte del grupo de sexto año de primaria y compañera de América Azuara. Sus estudios de secundaria y bachillerato fueron sobresalientes; ella también corregía a sus profesores de matemática y asesoraba a sus compañeros de estudio. Actualmente estudia la carrera de Contador Público con desempeño académico sobresaliente. Su mamá, amiga del autor, comenta que su hija se ha convertido en asesora matemática de sus compañeros universitarios.

Jesús Colín Gálvez; del mismo grupo de América Azuara y Tere Uvalle. Sus estudios de secundaria y bachillerato fueron extraordinarios; veía los errores de sus profesores y los auxiliaba en la impartición de la clase. Frecuentemente a su casa acudían compañeros de clase a recibir asesoría en matemática. Actualmente estudia medicina en una universidad de mucho prestigio en el país. Tanto él como sus padres comentan que lo aprendido en el curso de matemática, le ha servido mucho para su desempeño en otras áreas del conocimiento.

Jesús Acosta Ortiz; del mismo grupo de América Azuara; a su corta edad ya mostraba una habilidad natural para la matemática; se caracterizaba por querer siempre resolver mentalmente los problemas; frecuentemente discutía sobre la forma más rápida para resolverlos. Con mucho éxito estudió el bachillerato;

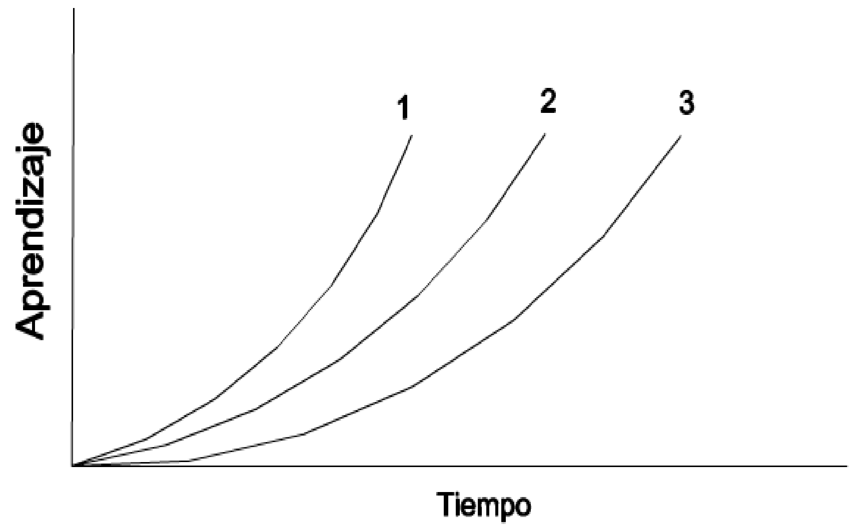
actualmente estudia la carrera de biomedicina. Jesús Acosta es el niño que en la fotografía aparece parado junto al instructor.

Andrea Rico Villalobos (13 años de edad); inició a estudiar matemática los primeros días de septiembre de 2012, cuando iniciaba a el primer grado de educación secundaria; actualmente (abril de 2013) ya está aprendiendo la geometría analítica. Probablemente para diciembre de 2013 ya tenga gran avance en el aprendizaje del cálculo integral. Sus papás la llevaron a estudiar matemática porque tenía problemas en su aprendizaje.

Algo extraordinario que hacían la mayoría de estos pequeños, principalmente del grupo de Flor Elizabeth, es que en su mochila escolar cargaban sus libros de matemática para realizar problemas en los minutos de descanso que tenían en sus escuelas; algunos de ellos se citaban muchos minutos antes de la entrada para juntos realizarlos. En ocasiones les encargaban de tarea en sus escuelas demasiada carga académica para realizar en sus casas que tenían que faltar a su clase de matemática; otras veces que no querían faltar a su clase de matemática, llevaban su material para realizar sus tareas a la vez que estudiaban matemática…Eso tiene esta ciencia, cuanto más se aprende, más se quiere aprender; cuando se presenta esto, es porque ya hay amor por ella.

Algunos padres de familia del grupo de alumnos que aprendieron hasta el cálculo integral, al término del mismo comentaron que a sus hijos los observaban muy maduros y reflexivos en la toma de decisiones, diferentes al resto de jóvenes de su misma edad. Es indudable que el aprendizaje de la matemática proporciona al alumno seguridad y confianza. Entonces, el cambio de conducta de estos jóvenes, ¿sería consecuencia de lo aprendido en matemática?. Se considera que aquí hay gran cantidad de material para hacer investigación en otras áreas del conocimiento.

Se ha observado que el aprendizaje del alumno se comporta como la representación gráfica siguiente:



Esta curva promedio representa como se da el aprendizaje de la matemática a través del tiempo; la amplitud de ella dependerá de la habilidad del alumno para aprender; al inicio el aprendizaje es muy lento, gradualmente va acelerando hasta hacerse muy acelerado. Es obvio que la pendiente de la curva jamás será infinita y en ella se presentan saltos originados por el grado de dificultad de algunos temas o por las diferentes habilidades que presentan los alumnos; habilidades diferentes que se representan por las tres curvas.

Al principio el aprendizaje es muy lento, en ocasiones probablemente creerá que no están aprendiendo, en sus cuadernos verá “garabatos” y desorden en su escritura; en el aprendizaje de algunos temas, probablemente muchos alumnos entrarán en un estado de confusión, sentirán mareos y tal vez dolor de cabeza, quizá un breve olvido total de lo aprendido; no se debe preocupar ni perder la paciencia, increíblemente contrario a como sucede con los alumnos mayores, estos pequeños no desistirán ni rechazarán la matemática, sino que se reirán y persistirán, aún no teniendo una idea clara de cuál es el objetivo de su aprendizaje. Sus dudas acerca de la aplicación de la matemática, se irán aclarando en las partes más avanzadas del Algebra, pero será en el estudio de la Trigonometría y la Geometría Analítica, al aplicar los conocimientos del Algebra, donde definitivamente adquieran una visión clara del objetivo de su aprendizaje. Al paso del tiempo su aprendizaje va acelerando gradualmente, siendo muy acelerado en el Cálculo Diferencial e Integral. Con esta metodología se enseña al alumno a que aprenda solo; a juicio del autor, el mejor aprendizaje se da cuando se aprende solo. En etapas avanzadas de la enseñanza, es muy poca la intervención del profesor.

II.4 MUESTRA DE EJERCICIOS PARA APLICAR DESDE LA PROPUESTA METODOLÓGICA

Objetivo: Recomendar las características de los ejercicios a realizar por los alumnos y algunas sugerencias para el profesor ante esta realización.

Al tratar aquí problemas de algebra, trigonometría, geometría analítica y cálculo, no se pretende que el profesor aprenda matemática. Como se mencionó antes; para aplicar esta metodología es necesario que el profesor tenga amplios conocimientos de lo que está enseñando; de preferencia con conocimientos superiores al que se encuentra como docente. El único objetivo de abordar lo siguiente es transmitir algunas experiencias del autor; experiencias que en la práctica han dado resultados excelentes. El autor de este documento hace relación con estos problemas de matemática aplicada, porque es el área del conocimiento donde profesionalmente se ha desempeñado; pero el profesor de matemática que aplique esta metodología lo podrá relacionar con lo que sabe.

ÁLGEBRA

Material requerido por el alumno.- cuaderno de cuadrícula, libro de álgebra

Conocimientos previos.- sólo la aritmética.

Se considera que, por no ser necesario, no se incluirán ejemplos del total del contenido temático del álgebra y que se detallan en el Anexo 1;

Suma

Puede iniciar desarrollando en el pizarrón pequeñas sumas horizontales con números positivos, después números negativos, luego la combinación de positivos y negativos. Sugiera a sus alumnos que resuelvan problemas semejantes a los anteriores si los encuentra en su libro de texto; si no hay, entonces que sean de su creación. Todo esto será muy fácil para ellos.

$13 + 6 + 12 + 4 =$

$13 - 6 + 12 - 4 =$

$13 + 6 - 12 + 4 =$

$8 + 9 + 11 + 6 =$

$-8 - 9 - 11 + 6 =$

No olvide, desde un principio use la terminología matemática **y los <u>problemas que usted realice a manera de ejemplo, déjelos en el pizarrón para que los alumnoslos usen como guía</u>.**

Cuando sus alumnos estén concentrados resolviendo algún problema, procure hasta donde sea posible no interrumpirlos.

Continúe con las sumas algebraicas paro ahora usando literales con exponente uno. Mezcle sumas con literales diferentes. Siempre resolviendo problemas, usted algunos en el pizarrón para ejemplo y ellos en su cuaderno. Probablemente pregunten por qué se usan letras y qué significan.

$6m + 2n - 4m + 5n + m - n =$

$-4m - 2n + 8m - 6n + 4m - n =$

$6x - 3y + 8x - 5y - 9x + y =$

$-11x - 12y + 2x - 5y + 4x - 6y =$

Después puede usar sumas algebraicas con literales y exponente diferentes de uno. Primero términos con literales y exponente iguales, incluyendo exponentes fraccionarios. Después combinando términos con literales y exponentes diferentes. Incluya también términos con radicales; lo anterior es para que ya se enteren de la existencia de estos. Por ejemplo:

$-6x^2 + 4x^2 - 3x^2 - 5x^2 - 3x^2 =$

$$4x^2y^5 + 8x^3y^4 + 7x^2y^5 + 12x^3y^4 =$$

$$7\frac{xy}{a} - 5\frac{xy}{a} + 6\frac{xy}{b} + 3\frac{xy}{b} + 8\frac{xy}{a} - \frac{xy}{b} =$$

$$3x^{2/3}y^{5/2} - 7x^{2/5}y^{1/3} - 4x^{2/3}y^{5/2} + 11x^{2/5}y^{1/3} =$$

$$3\sqrt{2x^2 - 3y^2} + \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{2x^2 - 3y^2} - 5\sqrt{x^2 + y^2} =$$

Recuerde; sus alumnos siempre deberán resolver gran cantidad de problemas. Siempre desde lo fácil a lo muy difícil.

<u>Multiplicación</u>

Explique y que el alumno comprenda, qué es la multiplicación, el por qué de la ley de los signos, si tienen dificultad para su interpretación, no se preocupe; que las aprendan sin saber el origen, cuando ellos generen más conocimiento, la vuelve a explicar y la interpretarán con facilidad. Por ejemplo:

$(+)(-)(+)(-)(+)=$

$(-)(-)(-)(-)(+)=$

$(-)(-)(+)(+)(-)(-)=$

En el pizarrón desarrolle horizontalmente pequeñas multiplicaciones primero con números positivos, luego con negativos y después con la combinación de ambos. Si en sus alumnos hay cansancio por resolver muchos problemas del mismo tema, pase a otro o que resuelvan algunos problemas de temas ya vistos. Al realizar la multiplicación en el pizarrón se sugiere que se haga explicando verbalmente y con flechas usando colores diferentes, o con gis; por ejemplo:

$(6)(-2)(-1)(-2)=$ $\qquad$ $(3)(-1)(-1)(-1)=$

$(-2)(-5)(4)(-1)=$ $\qquad$ $(-4a)(3)(-5)(-3)=$

Que resuelvan problemas

Ahora ya puede usar en las multiplicaciones literales con exponentes enteros, primero positivos y después negativos. Antes tendrá que explicar verbal y visualmente en el pizarrón la ley de los exponentes relacionada con esto; para explicar lo anterior primero utilice números como base y después hágalo con literales. Que sus alumnos resuelvan problemas sencillos, explique problemas con mayor grado de dificultad y que ellos resuelvan problemas relacionados, aumente el grado de dificultad y que continúen resolviendo problemas. **Recuerde que, los problemas que usted haga en el pizarrón, deben quedar en él para guía de sus alumnos cuando estén trabajando en su mesa banco**.

$(-a)(-b)(-c)=$

$(-2a)(-3b)(-4c)=$

$(-5a)(2b)(-3c)(-2c)=$

$3(a+b)=$

$4(x+y)=$

$2(3x+2y)=$

$6(-5x-4y)=$

$-3(-3x-4y)=$

$3x^{2/3}y^{1/2}\cdot 4x^{1/3}y^{3/2}=$

$4x^{-3/2}y^{4/3}\cdot x^{1/3}y^{-2/3}\cdot 2x^{4/5}y=$

$\left(2x^{1/3}-3y^{4/5}\right)\left(3x^{3/2}+5y^{1/5}\right)=$

$\left(a^{3/2}b^{1/3}c^{1/2}-2b^{2}c^{3}\right)\left(a^{3/2}c^{1/4}-3b^{3/5}\right)=$

Que realicen la multiplicación y reduzcan términos semejantes. Tal vez aquí sus alumnos hayan olvidado cómo reducir términos semejantes. Recuérdeselo.

$3(a+b)+5(a+b)+6(a+b)-3(a+b)-7(a+b)=$

$-5(3a-2b-4c)-4(3a-2b-4c)+7(3a-2b-4c)=$

$-5x(3a-2b-4c)-6x(3a-2b-4c)+9x(3a-2b-4c)=$

Productos notables

Primero con números

(5 + 3) (3 +2) = 15 + 10 + 9 + 6 = *(8 – 6) (-7 – 5) = -56 - 40 + 42 + 30 =*

Convine

$(3x-3)(5x+4)=$ $(-2ax+3by)(ax-2y)=$

$(7x-2y)(2a+3b)=$ $(6x+3y)(6a+4b)=$

$3(5x+3y)(5a+4b)=$ $-3(6x-3y)(3a-2b)=$

Con exponentes enteros, positivos y negativos

$2x^{2}y.\ xy.\ 3x^{3}y=$ $3a^{2}b^{3}.\ 2a^{3}b^{-1}.\ 3a^{-1}b^{-4}=$

$x^{4}.\ x^{-2}.\ x^{3}.\ x^{-1}=$ $2a^{2}b^{3}.\ 3ab^{2}.\ 4a^{2}b=$

$3x^{4}.2x^{-2}.\ 3x.\ x^{3}=$ $12a^{3}b^{3}c^{3}.\ 2ab^{-4}c^{-5}.\ 2a^{-3}b^{-5}c^{-6}=$

Con exponentes fraccionarios

$3x^{2/3}y^{1/2}\cdot 4x^{1/3}y^{3/2}=$

$4x^{-3/2}y^{4/3}\cdot x^{1/3}y^{-2/3}\cdot 2x^{4/5}y=$

$\left(2x^{1/3}-3y^{4/5}\right)\left(3x^{3/2}+5y^{1/5}\right)=$

$\left(a^{3/2}b^{1/3}c^{1/2}-2b^{2}c^{3}\right)\left(a^{3/2}c^{1/4}-3b^{3/5}\right)=$

Recuerde, que sus alumnos resuelvan gran cantidad de problemas de su libro de texto; primero lo que incluyen el resultado y después los de resultado no incluido

Sea creativo; probablemente aquí usted ya esté en posibilidades de ampliarse a manera de exploración un poco con otras cosas sin que éstas sean parte de la enseñanza en ese momento, se motivarán si lo comprenden aunque sea un poco.

Ecuaciones lineales en una variable

Explique por qué es una ecuación lineal

Este tipo de ecuaciones no los enseñe como tradicionalmente lo hacen algunos profesores, fácilmente se confunden; inclusive en algunos libros las presentan así:

$4x + 10 = 1 - 2x$

$4x + 10 + 2x - 10 = 1 - 2x + 2x - 10$

$6x = -9$

$x = -9/6$

Cuando se realiza matemática aplicada, nunca se hace eso.

Más fácil; primero inicie con ejemplos que tengan sólo números, explicando por qué cualquier cantidad cambia de signo al pasar a uno u otro lado del signo igual, por ejemplo:

$8 + 4 = 12$ luego entonces $8 = 12 – 4 = 8$ del mismo modo $4 = 12 – 8 = 4$

o también $8 + 4 - 12 = 0$ de igual manera $- 12 = - 4 - 8 = - 12$

Después combine números y literales

$8x – 3 = 5x + 6$	$12x - 6 – 3x = 8 + 2x$
$8x – 5x = 6 + 3$	$12x – 3x – 2x = 8 + 6$
$3x = 9$	$7x = 14$
$x = 9/3 = 3$	$x = 14 / 7 = 2$

Que resuelvan problemas semejantes a los anteriores

Realice ejemplos con más grado de dificultad y que resuelvan problemas

Recuerde; resuelva dos o tres problemas tipo y que queden en el pizarrón, para que sus alumnos los vean y se guíen por ellos.

Factorización

Inicie con factorización; son fáciles de aprender y de gran motivación para ellos. Una forma que se facilita mucho para factorizar es la siguiente:

$6x^2 – 13x + 6 = 0$	$2x^2 + 4ax – 6a^2$	$8a^3 + 36a^2 + 6a + 27$
$2x$ $\quad$ $-3 = 9x$	$2x$ $\quad$ $-2a = -2ax$	$4a^2$ $\quad$ $3 = 6a$
$3x$ $\quad$ $-2 = \underline{-4x}$	x $\quad$ $3a = \underline{6ax}$	$2a$ $\quad$ $9 = 36a$
$-13x$	$4ax$	$36a^2+6a$
$(2x – 3)(3x – 2)$	$(2x – 2a)(x + 3a)$	$(4a^2 + 3)(2a + 9)$

Claro que el resultado final se obtendrá quizá después de proponer algunos factores, hasta que se encuentre la combinación correcta..

Aquí puede aprovechar para enseñarlos a resolver ecuaciones de segundo grado usando este método. Por ejemplo:

$6x^2 – 13x + 6 = 0$

$2x$ $\quad$ $- 3 = - 9x$

$3x$ $\quad$ $-2 = \underline{- 4x}$

$-13x$

(2x – 3) (3x – 2) = 0

(2x – 3) = 0   (3x – 2) = 0

Explique por qué cada factor se iguala a cero y despeje

Que resuelvan problemas de más alto grado de dificultad. Sea creativo, por ejemplo.

$2(a+b)-3a(a+b)=$

$a^2+4ab+4b^2+2+2b=$

$(a+b)^2+4(a+b)+4=0$

Que resuelvan problemas con más alto grado de dificultad

Factorización de diferencia de cuadrados

Haga la demostración del por qué de ese resultado. Primero con números.

(16 – 9) = 7   si factorizamos *(4 – 3)(4 + 3) = (1)(7)= 7*

$x^2 - 4 = \underline{(x-2)(x+2)} = x^2 + 2x - 2x - 4 = \underline{x^2 - 4}$

$x^2-y^2+2(x-y)=$

$$x^2-4xy+4y^2-a^2-2ab-b^2=$$

Factorización de suma y diferencia de cubos.-

Igual que en la diferencia de cuadrados, demuestre el por qué del resultado. Aquí se pueden presentar dificultades en la comprensión de esto. Que sus alumnos resuelvan problemas sencillos; después, si no pueden con problemas difíciles, entonces aborde algo ya visto o un tema nuevo que usted considere fácil. Por ejemplo: resolver ecuaciones de segundo grado utilizando la fórmula general, sin aun demostrar la fórmula; puede usar ecuaciones factorizables para comprobar los resultados. Posteriormente, la fórmula general se verá más en detalle al tratar completando el trinomio cuadrado perfecto. Después regrese a factorización de suma y diferencia de cubos; probablemente ya tengan más habilidad para resolver problemas difíciles de este tema.

Primero explique con números

$8-27=-19=(2-3)(2^2+(2)(3)+3^2)=(-1)(19)=-19$

$8+27=35=(2+3)(2^2-(2)(3)+3^2)=(5)(7)=35$

Que resuelvan problemas como:

$(x^3-y^3)=(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3+x^2y+xy^2-x^2y-xy^2-y^3=x^3-y^3$

$8a^3+64b^3=$

$27(a+1)^3+b^3=$

$x^6+64y^6=$

$\frac{8a^3}{27b^3}-\frac{27b^3}{8a^3}=$

Aplique problemas más difíciles

Factorización por factor común

De lo fácil a lo difícil. Problemas como:

$3(x-y)-b(x-y)=$

$x^2-y^2+2(x-y)=$

$8x^3(a-b)-64y^3(a-b)=$

Recuerde expresarse siempre con la terminología

Multiplicación y división de fracciones, reduciendo a términos mínimos.

Los tipos de factorización aprendidos anteriormente, se reforzarán al tratar este tipo de problemas.

Inicie con fracciones pequeñas utilizando primero números y después literales; que sus alumnos resuelvan problemas. Aumente el grado de dificultad. No incluya de su libro aquellos problemas que incluyan suma y diferencia de cubos, si es que sus alumnos aún tienen problemas con esta factorización. Déjelos para el final

Resolver este tipo de problemas se les facilita mucho y es de más motivación para ellos. Que sus alumnos que resuelvan problemas como los siguientes, pero antes que realicen problemas sencillos:

$$\frac{x^2+4xy-12y^2}{x^2+7xy+6y^2}\cdot\frac{x^2-6xy-7y^2}{x^2-xy-12y^2}\div\frac{x^2-9xy+14y^2}{x^2-xy-12y^2}=$$

$$\frac{3a^2-a-10}{8a^2-2a-3}\cdot\frac{10a^2+a-2}{3a^2+20a+25}\div\frac{5a^2+8a-4}{12a^2+11a-15}=$$

Adición de fracciones reduciendo a términos mínimos

Igual que en el caso anterior; aquí se reafirmará el conocimiento sobre los diversos tipos de factorización y adquirirán más habilidad en esto.

Inicie con fracciones pequeñas, utilizando primero números y luego literales; que resuelvan primero problemas sencillos y después provoque que sus alumnos resuelvan problemas con alto grado de dificultad.

Pida a sus alumnos que reduzcan a términos mínimos problemas como los siguientes:

$$\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}+\frac{2x}{y^2-x^2}=$$

$$\frac{1}{2a^2+3a+1}+\frac{5a}{2a^2-a-3}+\frac{a+2}{4a^2-4a-3}=$$

$$\frac{3a-1}{(a-1)(a+1)}-\frac{a+3}{(a+1)(a+2)}-\frac{1}{(a+2)}=$$

<u>Fracciones complejas</u>

Primero con números.

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}=$$

$$\frac{7-\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}-1}=$$

Después agregue problemas como los siguientes:

$$\frac{y-\frac{y^2-1}{2}}{\frac{2}{y}-\frac{2}{y^2}}=$$

$$\frac{\frac{6}{y^2+y-6}+1}{\frac{9}{y^2+2y-8}+1}$$

<u>Binomio al cuadrado</u>

Demuéstrelo con número por ejemplo con:

$(3 + 2)^2 = (5)^2 = 25$ $\quad$ $(3 + 2)(3 +2) = 9 + \mathbf{6 + 6} + 4 = 25 = 9 + 2(6) + 4 = 25$

$(1° + 2°)^2 = (1°)^2 + 2(1°)(2°) + (2°)^2$

$(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Usted también lo puede demostrar geométricamente con la superficie de un cuadrado perfecto.

Aumente el grado de dificultad

$(a - b)^2 =$ $(2x + 3y)^2 =$ $(3^a - 2b)^2 =$

$(ax^2 + b^3y^2)^2 = (ax^2 + b^3y^2)(ax^2 + b^3y^2) = a^2x^4 + ab^3x^2y^2 + ab^3x^2y^2 + b^6y^4$

$= a^2x^4 + 2ab^3x^2y^2 + b^6y^4$

Incluya también fracciones y radicales, por ejemplo:

$$\left(\frac{2a^2}{3x} - \frac{4b}{5y^2}\right)^2 = \qquad \left(\sqrt{2x} - \sqrt{3y}\right)^2 =$$

Enséñeles a elaborar el triángulo de Pascal y que eleven binomios a la "n" potencia. También podrán elevar polinomios al cuadrado; el poder realizar esto, es muy motivante para ellos.

Recuerde; el buen aprendizaje se obtiene al resolver problemas con alto grado de dificultad.

<u>Binomio al cubo</u>

Proceda como en el caso anterior

Ecuaciones lineales en dos variables

Que sus alumnos primero aprendan a graficar, obteniendo una serie de puntos; o bien, obteniendo las intersecciones de la recta con los ejes X e Y. Que sus alumnos aprendan a identificar cuando son rectas paralelas; para esto tendrá que aplicar algunos principios de Geometría Analítica. Aquí es un momento oportuno para que aprendan a graficar curvas.Al tratar los métodos de eliminación por suma o resta, igualación y sustitución; que aprendan a despejar y luego a despejar mentalmente; esto es de mucha motivación para el alumno. Recuerde; es necesario que los alumnos resuelvan gran cantidad de problemas.

Aproveche que ya dominan los métodos mencionados en el párrafo anterior para aplicarlos en resolver un par de ecuaciones cuadráticas con dos incógnitas o una ecuación cuadrática y una ecuación lineal

Se sugiere que aquí no se traten los problemas en palabras que están incluidos en este apartado; se considera que a este nivel aun no están en posibilidades de realizarlas. Esto se puede abordar cuando se tenga un avance en la Trigonometría. Pero si usted desea intentarlo, hágalo.

<u>Exponentes</u>

A este nivel los estudiantes ya tendrán algún conocimiento en el manejo de los exponentes, adquiridos cuando se trato la multiplicación.

Las leyes de los exponentes explíquelas y demuéstrelas utilizando números y después con literales. Por ejemplo:

$2^4 = 2^1 . 2^1 . 2^1 . 2^1 = 2^4 = 2^2 . 2^2 = 2^4 = 2^1 . 2^3 = 2^4$

$(2^2)^3 = 2^2 . 2^2 . 2^2 = 2^6 = 64$ también $(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$

$(2 . 3)^4 = 6^4 = 2^4 . 3^4 = 16 . 81 = 1296$

$\frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$ $\frac{x^4}{x^6} = x^{4-6} = x^{-2}$

Que sus alumnos resuelvan problemas relacionados con los anteriores; si no es necesario esto porque les es muy fácil, entonces aumente el grado de dificultad.

Que simplifiquen cada expresión, dejando los resultados libres de exponentes negativos o nulos.

$\left(\frac{p^{-3}r^{-2}}{4^0 p^2 r^{-1}} \right)^{-5} =$ $\frac{x^{-1}y^2 + x^2 y^{-1}}{x^{-1} + y^{-1}} =$ $\left(\frac{4^{-1/3}x^{1/2}y^{5/2}}{5^{1/3}x^{-5/2}y^{-3/2}} \right)^{-3} =$

A esta altura del curso el maestro ya debe tener un buen dominio de la técnica; por lo tanto pasaremos a lo siguiente:

TRIGONOMETRÍA

Material requerido por el alumno.- cuaderno de cuadrícula, libro de texto de trigonometría y calculadora científica. Ver anexo 2

Conocimientos previos.- algebra

Es probable que el alumno haya olvidado algunas cosas de álgebra, es natural; el profesor debe recordárselas.

La solución de problemas de triángulos, identidades trigonométricas y ecuaciones trigonométricas, requiere del conocimiento del álgebra elemental. En este nivel de estudio, el alumno ya debe tener un buen dominio de ésta; casi seguro que algunos aspectos de la misma estarán olvidados, sin embargo, ellos lo recordarán con facilidad.

Siempre que sea posible, al abordar un tema incluya la comprobación de los teoremas y las derivaciones de las fórmulas. No considere como muy necesario que el alumno aprenda el dominio total de la comprobación y deducción.

Al iniciar la trigonometría, el estudiante ya habrá empezado a aprender a relacionar los conocimientos adquiridos en algebra; pero es aquí donde él aprende a hacer una buena relación de esos conocimientos; para esto es fundamental la participación del profesor.

Si el profesor conduce bien al alumno en el estudio de la trigonometría, con toda seguridad originará en él una gran motivación y alegría por aprender; en el estudio de ésta es donde el alumno puede empezar a jugar alegremente con los problemas que resuelve; para esto es necesario que los problemas que resuelva originen y hagan crecer la imaginación de él. (ver los problemas que se anexan)

Igual que en el estudio del álgebra; es necesario iniciar los temas resolviendo problemas sencillos, aumentando gradualmente la dificultad hasta la resolución de problemas complejos.

En trigonometría el profesor debe guiar al alumno a que aprenda a analizar un problema, a relacionar los datos con otros, a buscar caminos para hallar la solución, con ese objeto hay que ayudarlo planteándole una serie de preguntas de acuerdo al problema, por ejemplo: *¿qué es lo que el problema plantea* ?, *¿cuáles son los datos con los que se cuenta?, ¿cuáles son las incógnitas?, ¿qué relación hay entre los datos que pueden ayudarle a encontrar la o las soluciones?, ¿cómo, lo que plantea el problema lo puede relacionar con el conocimiento que ya se tiene?*. *También, el alumno puede hacer gráficas o esquemas del problema; explicar o analizar la solución encontrada; elaborar un diagrama y explicar la conveniencia de seguir o no sus ramificaciones*. **El profesor tiene el deber de guiar al alumno a que aprenda a realizar lo anterior.**

Cuando el alumno realice gráficas o esquemas, de preferencia que no se auxilie de material de dibujo. Es de gran motivación para ellos adquirir esta destreza.

Muchos de los problemas de trigonometría tienen varias formas de resolver; resuélvalo usted de una manera e invite a sus alumnos a que encuentren la otra u otras. **Nunca impida o limite a sus alumnos a que exploren, descubran y construyan.**

Resolver problemas en los que solamente se hace aplicación directa de alguna fórmula, no conducen a una construcción del conocimiento. Por el contrario, se deben resolver problemas donde se tengan que hacer igualaciones, sustituciones, despejes, gráficas, etc.

Algo muy necesario en trigonometría es que los alumnos aprendan a cómo obtener las identidades trigonométricas fundamentales.

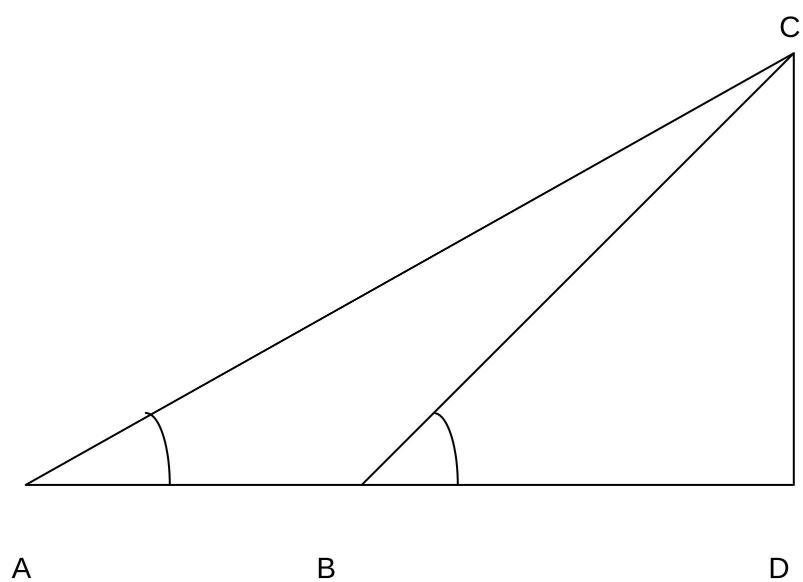
Cuando sus alumnos estén concentrados resolviendo algún problema, procure hasta donde le sea posible no interrumpirlos; en ocasiones se molestan.

Ensaye.- pida a sus alumnos que un determinado tema nuevo, en su libro lo lean, analicen e interpreten la deducción de la fórmula; si lo realizan, entonces que analicen los problemas resueltos del tema en estudio. Después que resuelvan problemas y que comparen el resultado obtenido con el que proporciona el autor.

Las primeras aplicaciones de las funciones trigonométricas fueron para topografía, navegación e ingeniería; por lo mismo, generalmente la mayoría de los libros de texto son escritos por personas relacionadas con estas actividades. Estos libros contienen gran cantidad de problemas resueltos y por resolver que involucran aspectos relacionados con las actividades antes mencionadas. Si hay problemas que no contengan algunas de estas actividades, usted los puede transformar, haciéndolos más atractivos para sus alumnos. *Es necesaria mucha creatividad de parte del profesor.*

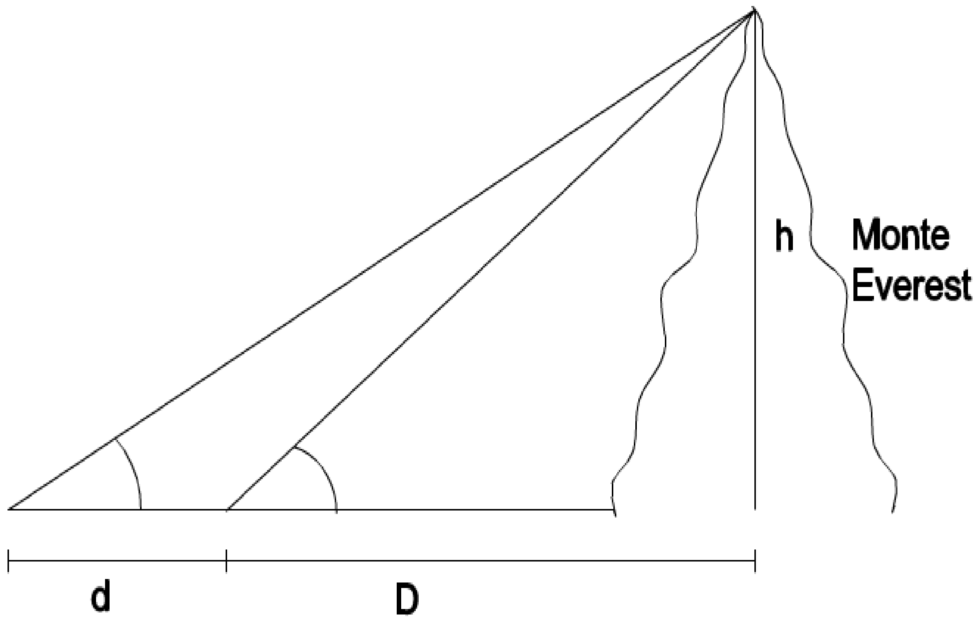
Un problema que se presenta a continuación frecuentemente los libros lo incluyen de la manera siguiente.

En la figura, dados los ángulos A y B y la longitud del segmento AB del triangulo, encuentre la longitud del lado CD y BD.



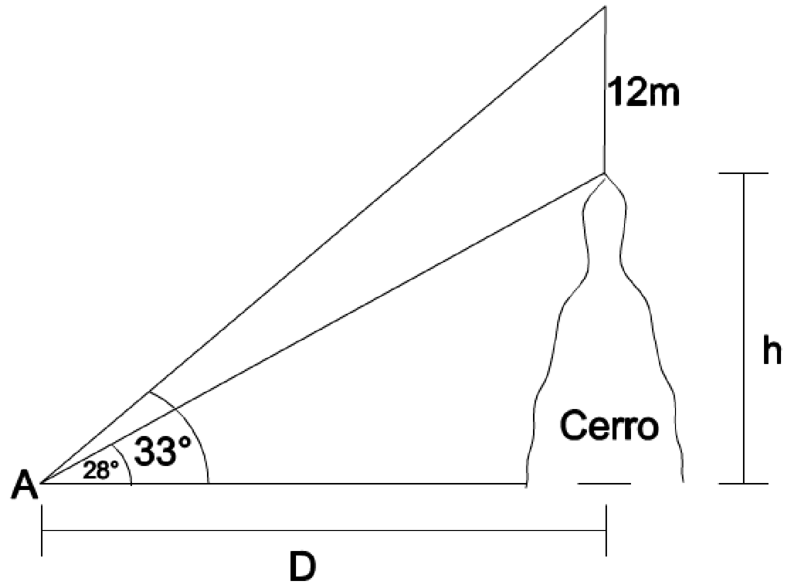
Por qué mejor no transformarlo de la manera siguiente y resultará más interesante para el estudiante:

1.- Dados los valores de los ángulos marcados en la figura, así como la distancia **d,** encuentren la altura (h) del Monte Everest. Para elaborar este problema el profesor tendrá que investigar la verdadera altura de ese monte, luego asignar valores a los ángulos para determinar la distancia AB y proporcionar esta información a sus alumnos.



El problema anterior tiene varias formas diferentes de resolver, pida a sus alumnos que las encuentren; pero no sólo la altura del Monte Everest, sino todos los lados y ángulos de los triángulos. Desde luego que el profesor debe saber cuándo es el momento oportuno de solicitar esto. Porque aquí el estudiante va a emplear las funciones trigonométricas, las leyes de los senos y otras.

2.- Una antena de microondas de 12 metros de altura se encuentra en la cima de una montaña; un observador se encuentra ubicado en el punto A, desde el cual se miden los ángulos (invéntelos); por ejemplo 33° y 28° respectivamente. Calcular la altura de la montaña *h*, así como la distancia horizontal que hay ente el observador y la vertical que baja de la antena.



Este problema, igual que el anterior, tiene varias formas de resolver; pida a sus alumnos que encuentren los demás lados y ángulos de los triángulos.

Si sus alumnos ya han aprendido a calcular superficies de triángulos oblicuángulos; pueden aquí recordarlo calculando las superficies en todos los triángulos de las figuras de los dos problemas anteriores. Si aun no ha sido tratado ese tema: cuando lo trate, pida a sus alumnos que repitan nuevamente los cálculos realizados en los dos problemas anteriores, pero ahora incluyendo las superficies. Si el tiempo y el espacio lo permiten, en un lugar adecuado (por ejemplo un patio de casa o escuela) organice una práctica de campo resolviendo los problemas anteriores; si hay espacio suficiente haga secciones triangulares; si no tiene cinta, mida los lados aunque sea a pasos tomando en cuenta la medida de un paso…sea creativo. Diga a sus alumnos que, para medir aproximadamente longitudes o superficies de grandes terrenos donde no se requiere exactitud y si rapidez, si no se cuenta con material adecuado para la medición, para tal fin se puede contar el número de postes de la cercas límites y multiplicar por la separación entre los mismos; o bien, usar el número de postes de energía eléctrica, si los hay…hay otras maneras de realizar rápidamente las mediciones.

En los libros de trigonometría busque o invente problemas como los que se mencionan a continuación. Problemas como estos provocan la imaginación de los alumnos y la motivación por aprender

3.- Sobre un peñasco situado en la orilla del mar se encuentra un faro de 125 pies de altura. Desde lo alto del faro, el ángulo de depresión a un submarino situado en la superficie del mar es de 28°40’ y desde la base del faro, el ángulo de depresión al mismo submarino es de 18°20’. Calcule la distancia horizontal al submarino y la altura del peñasco

El problema siguiente es muy semejante al anterior.

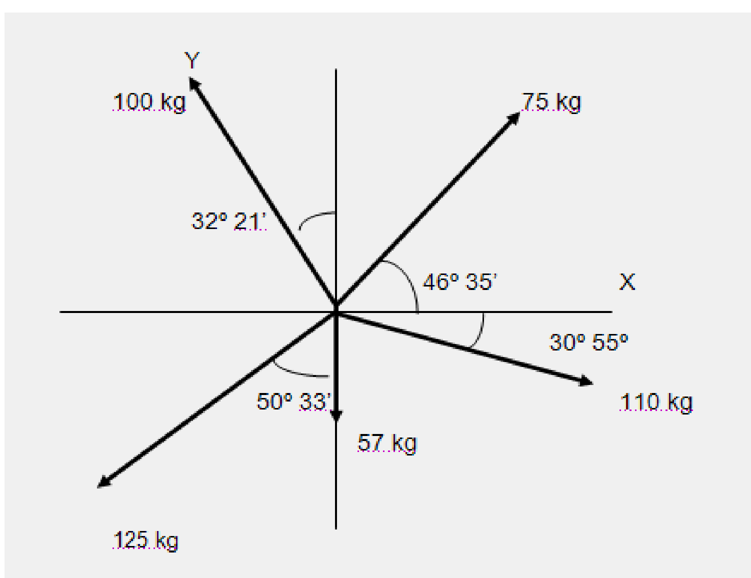
4.- Un destructor navega hacia el este, cuando observa un faro con una orientación N62°10’E. Después de que el destructor ha navegado 2250 metros, el faro se encuentra a N48°25’E. Si el curso se mantiene igual; ¿cuál será la menor distancia entre el destructor y el faro?.

5.- Un piloto vuela desde el punto A una distancia de 125 km/h en la dirección N38°20’O y regresa. Por un error el piloto vuela los 125 km/h de regreso en la dirección S51°40’E; ¿a qué distancia quedó de A, y en qué dirección debe volar para regresar al punto de partida?.

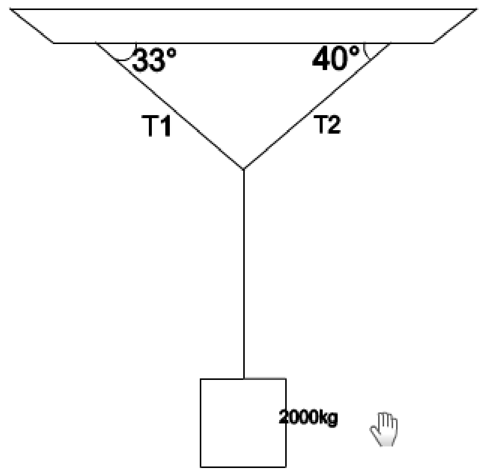
Probablemente el profesor no tenga conocimiento de cómo se miden los rumbos; lo puede investigar en cualquier libro de topografía, internet o suprima esos problemas e invente otro

El profesor puede hacer para el alumno de más motivación su aprendizaje, pidiéndoles que resuelvan ciertos problemas de física que estén muy relacionados con la trigonometría; por ejemplo los siguientes:

6.- Encontrar la magnitud, ubicación y ángulo de inclinación de la resultante del sistema de fuerzas siguiente

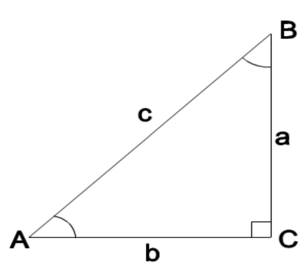


7.- Con la información que se proporciona, calcule las tensiones T_1 y T_2 de los cables marcados en la figura siguiente:



Es muy importante que el alumno aprenda muy bien a deducir las identidades trigonométricas fundamentales. Es muy importante que aprendan esto ya que tiene mucha aplicación en integración por sustitución trigonométrica; deduzca algunas y pida a los alumnos que hagan lo mismo con las demás. Por ejemplo:

En el triángulo rectángulo siguiente:



Usando el Teorema de Pitágoras; deduzca

$a^2 + b^2 = c^2$ dividiendo todo sobre c^2, tenemos:

$sen^2\, A + cos^2\, A = 1$ o $cos^2\, B + sen^2\, B = 1$

Pida a los alumnos que continúen; ahora ellos que dividan entre a^2 *y* b^2

De igual modo, usando las funciones trigonométricas, deduzca

$\frac{a/c}{b/c} = \frac{a}{b} = \tan A$ $\quad \frac{senA}{\cos A} = \tan A$ o $\quad \frac{a}{b}\frac{b}{a} = \tan A \cot A = 1$ $\quad \cot A = \frac{1}{\tan A}$

Pueden continuar haciendo más deducciones.

GEOMETRIA ANALITICA

Material requerido por el alumno.- cuaderno de cuadrícula, libro de Geometría Analítica, calculadora científica, y probablemente papel milimétrico. Ver anexo 3

Conocimientos previos.- algebra y trigonometría.

Tal vez el alumno ya haya olvidado algunas cosas de álgebra.

Igual que en trigonometría, siempre que sea posible, al abordar un tema incluya las deducciones de las fórmulas. No considere como muy necesario que el alumno aprenda con dominio total de la comprobación y deducción.

Al tratar la geometría analítica, el alumno ya debe tener un buen dominio de análisis y razonamiento; sin embargo, el profesor debe continuar guiando al alumno a que aprenda a analizar un problema, a relacionar los datos con otros, a buscar caminos para hallar la solución, con ese objeto hay que ayudarlo planteándole una serie de preguntas de acuerdo al problema, por ejemplo: *¿qué es lo que el problema plantea ?, ¿cuáles son los datos con los que se cuenta?, ¿cuáles son las incógnitas?, ¿qué relaciones entre los datos pueden ayudarle a encontrar la o las soluciones?, ¿cómo, lo que plantea el problema lo puede relacionar con el conocimiento que ya se tiene?.* También, el alumno puede hacer gráficas o esquemas del problema; explicar o analizar la solución encontrada; elaborar un diagrama y explicar la conveniencia de seguir o no sus ramificaciones.

Resuelva usted algunos problemas de ejemplo

Recuerde.- siempre hay que ir de lo muy fácil a lo muy difícil.

Cuando sus alumnos estén concentrados resolviendo algún problema, procure hasta donde le sea posible no interrumpirlos.

Ensaye.- pídales a sus alumnos que un determinado tema nuevo, en su libro lo lean, analicen e interpreten la deducción de la fórmula; si lo realizan, entonces que analicen los problemas resueltos del tema en estudio. Después que resuelvan problemas y que comparen el resultado obtenido con el que proporciona el autor.

Resolver problemas en lo que solamente se hace aplicación directa de alguna fórmula, no conducen a una construcción del conocimiento. Por el contrario, se deben resolver problemas donde se tengan que hacer gráficas, despejes, igualaciones, sustituciones, etc. Por ejemplo:

1.- Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es -4 y que pasa por el punto de intersección de las rectas $2x + y – 8 = 0$ *y* $3x – 2y - + 9 = 0$

Pida a sus alumnos que primero grafiquen el par de ecuaciones para ubicar el punto de intersección; después que comprueben resolviendo el par de ecuaciones por los diversos métodos que hay y luego que continúen con el razonamiento siguiente.

2.- Hallar la superficie del trapecio formado por las rectas $3x – y – 5 = 0,$ $x – 2y = 0$ $\quad x – 2y + 5 = 0$ *y* $x + 3y – 20 = 0$

3.- Hallar la longitud de la cuerda focal de la parábola $x^2 + 8y = 0$ que ese paralela a la recta $3x + 4y -7 = 0$

4.- Hallar los radios vectores del punto (3, 7/4) que está sobre la elipse $7x^2 + 16y^2 =12.$

5.- Una circunferencia tiene su centro en el punto (0, - 2) y es tangente a la recta $5x – 12y + 2 = 0.$ Hallar su ecuación.

6.- Una cuerda de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, está sobre la recta cuya ecuación es $x – 7y + 25 = 0$. Hallar la longitud de la cuerda.

7.- En cada una de las ecuaciones siguientes, hallar las coordenadas de los vértices y focos, las longitudes de los ejes mayor y menor, la excentricidad y la longitud de cada uno de los lados rectos de la elipse dada; $9x^2 + 4y^2 = 36,$ $x^2 + 3y^2 = 6,$ $16x^2 + 25y^2 = 400.$

8.- Hallar el lugar geométrico de un punto que se mueve, de tal manera que su distancia siempre es la misma a otro punto llamado centro.

Existen problemas en geometría analítica que también pueden ser resueltos aplicando las derivadas de cálculo diferencial. Se sugiere que, aunque aún el alumno desconoce lo anterior, a manera de ejemplo el profesor resuelva algunos problemas por derivación; esto es de gran motivación para el alumno. Marque en su libro, aquellos problemas que se resuelven así, y que sus alumnos los traten cuando sepan derivar.

Sugerencia para profesores con alumnos escolarizados.- puesto que resolver problemas es la mejor manera de realizar un buen aprendizaje de la matemática. Esto lo pueden realizar sus alumnos en el salón de clases y en sus casas. Marque en su libro aquellos problemas que usted ha resuelto en el pizarrón y no los incluya en el examen; informe a sus alumnos lo anterior y dígales que el examen sólo se incluirá problemas que ellos resolvieron en el aula o en sus casas.

CALCULO DIFERENCIAL

Material requerido por el alumno.- cuaderno de cuadrícula, libro de geometría analítica y calculadora científica. Es recomendable que sus alumnos tengan que usar papel milimétrico. Ver anexo 4.

Conocimientos previos.- algebra, trigonometría, y geometría analítica.

Muy probablemente el profesor tendrá que recordar a sus alumnos algunos aspectos de álgebra, trigonometría y geometría analítica.

El aprendizaje del cálculo diferencial no debe ser sólo sobre derivadas, sino resolver problemas como los siguientes.

SUGERENCIA.- en el cálculo diferencial, cuando se estudie el tema, “aplicaciones de la derivada”; incluya problemas como los siguientes:

1.- Hallar la ecuación de la normal a la parábola $y = 5x + x^2$ que forma un ángulo de 45° con el eje de las X.

2.- Hallar las ecuaciones de las tangentes al círculo $x^2 + y^2 = 58$ que son paralelas a la recta $3x – 7y = 19$.

3.- Hallar las ecuaciones de las normales a la hipérbola $4x^2 – y^2 = 36$, paralelas a la recta $2x + 5y = 4$.

4.- Hallar el ángulo de intersección del par de curvas siguiente: $y^2 = x + 1$ y $x^2 + y^2 = 13$.

5.- Un agricultor dispone de 3000 metros de malla para cercar un predio de forma rectangular contiguo a un rio de curso rectilíneo. Sabiendo que el lado adyacente al río no se requiere cercar; determine cuales son las dimensiones del predio de mayor área que se puede cercar.

6.- Hallar las dimensiones del rectángulo de mayor área que se puede inscribir en un círculo de 1 metro de diámetro.

En problemas como los anteriores, al resolverlos, se tiene que aplicar el álgebra, la trigonometría, la geometría analítica y el cálculo diferencial; los conocimientos anteriores se estarán reafirmando. Además resolverlos, a los alumnos produce gran satisfacción al ver lo que son capaces de realizar.

No es necesario abordar el cálculo integral; porque se considera que a este nivel, el lector profesor de matemática ya debe tener una idea muy clara de la aplicación de la metodología.

Generalmente, por lo menos así sucede en México, la enseñanza de la matemática se realiza con el aprendizaje de leyes, teoremas, axiomas, etc. y muy escasa actividad en la resolución de problemas. En los años que se tiene de estar primero experimentando y después trabajando con esta metodología con grupos de adolescentes; los alumnos han comentado que esta metodología de enseñanza aprendizaje se les hace divertida, contrario a lo que sucede en sus escuelas. Además, los planes y programas de estudio de educación básica proporcionados por la Secretaría de Educación Pública en México, contienen gran cantidad de temas en donde no hay o hay muy poca relación en aplicaciones posteriores; estos temas son los que en ocasiones contribuyen a originar el rechazo a tan hermosa ciencia. En lo detallado en álgebra, trigonometría, geometría analítica, etc de este documento se puede observar que no se menciona la Geometría Euclidiana; sin embargo, los conceptos de ella que se necesitan, se explican con detalle en el momento que es necesario.

III.- COMENTARIOS DEL AUTOR.

Cuando realicé mis estudios de primaria y secundaria, siempre tuve un total rechazo por la matemática, lo que me originó reprobaciones frecuentes; inclusive, tuve que repetir el tercero de secundaria debido a la reprobación en esta asignatura. Al estudiar bachillerato a fines de la década de los 60, mis profesores de matemática, física y química siempre fueron alumnos de la carrera de ingeniería química de una institución de educación superior. Estos jóvenes no tenían ningún conocimiento pedagógico; ahora recuerdo que ellos eran unos verdaderos expertos en la enseñanza; al que nos enseñaba matemática, le preguntábamos algo de química o física, y siempre con mucho entusiasmo nos daba la respuesta correcta; igual sucedía con el que nos enseñaba química, cuando le preguntábamos algo sobre matemática o física. Estos jóvenes primero me originaron una admiración hacia ellos y luego el deseo de ser su igual…y entonces vino el cambio en mí. Con sus excepciones, estudiantes como los de aquellas décadas ya no existen.

En México, la educación actual se ha descompuesto demasiado que, la gran mayoría de los que ingresan a estudiar una carrera de ingeniería no tienen ni los más elementales conocimientos de álgebra, muchos ni la aritmética. Lo peor es que la mayoría así continúan sus carreras; ***¿cómo y por qué llegaron hasta ese nivel de estudios?***. Por desgracia, estos jóvenes desconocen qué cantidad de conocimientos matemáticos deben tener para el nivel de estudios en que se encuentran; son jóvenes que desconocen su propia ignorancia. Lo anterior lo afirmo porque durante treinta años fui docente en una carrera de ingeniería.

En septiembre de 2013 una ONG de mi localidad deseó formar uno o dos grupos con alumnos de educación secundaria para que aprendieran matemática como lo planteado en esta propuesta. Se envió invitación a los miembros de esa organización con el fin de que inscribieran a sus hijos a recibir clase de matemática en un horario extraclase; el curso sería totalmente gratis para estos alumnos y los hijos de los trabajadores de estos miembros de la organización, no así para los demás que desearan asistir. Increíblemente sólo una niña de doce años que iniciaba el primero de secundaria asistió; su nombre, Andrea Rico Villalobos, a quien al final menciono en “Resultados Obtenidos”.

Casi sin excepción, la totalidad de los padres de familia en México sabe de lo mal que está la educación; entonces, ¿por qué ese desinterés?. Al respecto se cree que, entre otras causas, es por lo siguiente. Muy probable es que los padres de familia no quieren dedicar tiempo extra a sus hijos. Otro probable motivo es; en la asignación de calificaciones correspondientes a las evaluaciones que se realizan de la matemática y demás asignaturas de educación básica, el profesor proporciona puntos buenos por la realización de actividades que ninguna relación tienen con el aprendizaje; de tal manera que al final del semestre o año escolar el alumno puede terminar con calificación perfecta sin tener el menor conocimiento; o sea que los padres son engañados. La consecuencia es la formación de alumnos que terminan bachillerato con demasiado bajo nivel de conocimientos matemáticos y sin hábitos de estudio.

Probablemente la gran mayoría de los padres de familia ignoran cual es nuestra verdadera realidad educativa.

En la actualidad las escuelas formadoras de profesores de matemática y tal vez igual a las de otras especialidades, los planes y programas de estudio dan demasiada importancia a aspectos pedagógicos o humanísticos y muy poca a la formación matemática de sus alumnos; lo anterior trae como consecuencia que los egresados de esas escuelas tengan un muy bajo nivel de conocimientos matemáticos y cuando estos egresados se incorporan a la docencia, su enseñanza la enfocan más a aspectos teóricos y muy poco a la resolución de problemas, que es lo más importante en la enseñanza aprendizaje de la matemática. En los cursos de capacitación que se imparten para profesores de matemática se da demasiada importancia a determinadas teorías del aprendizaje y muy poco interés a la buena capacitación matemática.

IV.- CONCLUSIONES

- Todos los aprendizajes de la enseñanza están concatenados de tal manera que el nuevo conocimiento, el alumno fácilmente lo puede relacionar con lo que ya sabe.
- Muy significativo para los alumnos es, por ejemplo, desde que inician a estudiar la trigonometría, la geometría analítica y los cálculos diferencial e integral aprenden a resolver problemas aplicados a la vida diaria o que forman parte de las asignaturas de algunas carreras de ingeniería. Por ejemplo, en trigonometría se resuelven problemas relacionados con la estática; cuando se estudia la geometría analítica, aprenden a resolver problemas de la asignatura de topografía que se imparte a estudiantes de ingeniería civil; igual sucede con los cálculos. Cuando resuelven estos problemas se les dice que corresponden a estudios de ingeniería y su respuesta es de inmensa alegría.
- En grupos con alumnos no controlados se han obtenido excelentes resultados, a pesar de la no sistematicidad en su asistencia y la no realización siempre de las tareas <u>que se les sugiere</u> que realicen (nunca se les exige). El no control del grupo se debe a excesivas tareas que les encargan en sus escuelas lo que origina no resolver problemas en sus casas; inasistencias y retardos de alumnos a la clase de matemática; esto último origina que en ocasiones se suspenda la clase, o varios días estar repitiendo lo mismo a quienes si asisten. Inevitablemente cada dos meses se suspende la clase durante una semana porque ellos están en sus exámenes bimestrales. Estos pequeños aprenden matemática, sólo por el placer de aprender. Con grupos controlados, el éxito debe ser mucho mayor.
- Los niños y adolescentes han demostrado tener una gran habilidad para el aprendizaje de los idiomas e interpretar la lógica de la computadora; <u>también la tienen para el aprendizaje de la matemática; sólo falta saber enseñárselas</u>. La mejor edad para iniciar aprender la alta matemática, es la de 12 o 13 años, ya que en estos niños adolescentes su autoestima está intacta; aún no se ha iniciado el rechazo a esta ciencia y su mente es limpia y fértil. No se necesitan grandes capacidades, sólo muy buenas actitudes; buenas actitudes que el maestro en muchos casos puede formar y desarrollar en sus alumnos.

- Para la realización de esta enseñanza aprendizaje de la matemática sólo se necesita lo que ya existe en todas las aulas del mundo: aula, pizarrón, gis o marcadores, mesa bancos, cuaderno de cuadrícula, lápiz, libro de texto o fotocopias, calculadora científica sencilla y lo más importante pero tal vez difícil de encontrar, **mucho amor a la docencia**.
- Con lo que ya se tiene se puede mejorar mucho la educación.

BIBLIOGRAFIA

ADDINE, Fátima; A. Ma. GONZALEZ; S. RECAREY. Principios para la dirección del proceso pedagógico. ISP “EJV”, C. Hab, 1997. S/e p. 2

AZCOAGA, Juan E. Aprendizaje Fisiológico y Aprendizaje Pedagógico. Ed Biblioteca colección pedagógica No. 6. Rosario, Argentina 1974.

BATLLORI GUERRERO y ACUÑA ESCOBAR.- Materias con Alto Índice de Reprobación: Matemáticas. Serie: Sobre la Universidad, No. 13. UNAM. México. 1988.

DELVAL, Juan.- Crecer y pensar: La Construcción del Conocimiento en la Escuela. Ed. Laia. Barcelona, 1984.

DIAZ BARRIGA Y HERNANDEZ ROJAS.- Estrategias Docentes para un Aprendizaje Significativo. Editorial Mc Graw Hill, México, 1997.

E. WOOLFOLK, Anita.- Psicología Educativa (6a. Edición). Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. México, 1995.

EUSSE ZULUAGA Ofelia.- Proceso de Construcción del Conocimiento y su Vinculación con la Formación Docente. CISE UNAM. Perfiles Educativos No. 63, 1994

LABARRERE, Guillermina; VALDIVIA, Gladys (1986) Pedagogía. Ed. Pueblo y educación.Cuba.

LIBANEO, José Carlos. Tendencias Pedagógicas en la Práctica Escolar. Antología de la ENEP, Aragón No. 38, México 1988 (p.p 39-54).

L. Klingberg (1977) Didáctica general. Ed. Pueblo y educación. Cuba.

MENDOZA ROJAS, Javier. La evaluación y la educación superior. La metafísica de la deficiencia. México CISE UNAM 1991.

Anexo 1

ÁLGEBRA

I.- Operaciones en las Expresiones Algebraicas

1.- Adición y sustracción

2.- Multiplicación

3.- División

4.- Productos especiales

5.- Triángulo de Pascal

II.- Factorización y Operaciones con las Fracciones

1.- Tipos simples de factorización

2.- Trinomio general de segundo grado

3.- Factorización por agrupamiento

4.- Fracciones algebraicas

5.- Reducción a términos mínimos

6.- Multiplicación y división de fracciones

7.- Adición de fracciones

8.- Fracciones complejas

III.- Funciones y Relaciones

1.- Coordenadas rectangulares

2.- Relaciones y funciones

3.- Gráficas de funciones y relaciones

4.- La Fórmula de la distancia y el círculo

IV.- Ecuaciones Lineales

1.- Ecuaciones condicionales e identidades

2.- Operaciones con ecuaciones

3.- Ecuaciones lineales en una variable

4.- Problemas en palabras

5.- Ecuaciones lineales en dos variables

6.- Solución por métodos algebraicos

7.- Ecuaciones lineales con tres incógnitas

8.- Problemas en palabras que conducen a sistemas de ecuaciones lineales.

V.- Exponentes y Radicales

1.- Leyes de los exponentes

2.- Exponentes enteros, negativos y cero

3.- Exponentes fraccionarios

4.- Leyes de los radicales

5.- Adición y sustracción de radicales

6.- Multiplicación y división de radicales

VI.- Ecuaciones Cuadráticas

1.- Solución por factorización

2.- Solución usando fórmula

3.- Ecuaciones en forma cuadrática

4.- Ecuaciones conteniendo radicales

5.- Gráfica de una ecuación cuadrática

VII.- Sistemas que Envuelven Ecuaciones Cuadráticas

1.- La Gráfica de una ecuación cuadrática en X e Y

2.- Solución de un sistema cuadrático mediante gráficas

3.- Solución por métodos algebraicos

VIII.- Logaritmos

1.- La Función logarítmica

2.- Propiedades de los logaritmos

3.- Logaritmos comunes

4.- Logaritmos usados en los cálculos

5.- Ecuaciones exponenciales

6.- Logaritmos de un número en diferentes bases

IX.- Binomio de Newton

X.- Despeje en Fórmulas

Anexo 2

TRIGONOMETRÍA

I.- Angulos y Aplicaciones

1.- Introducción

2.- Angulo plano

3.- Medición de ángulos

4.- Longitud de arco

5.- Longitud de arco en un círculo unitario

6.- Area de un sector

II.- Funciones Trigonométricas de un Angulo Genérico

1.- Angulos en posición estándar

2.- Funciones trigonométricas de un ángulo genérico

3.- Signos de las funciones en los cuadrantes

4.- Funciones trigonométricas de los ángulos cuadrantales

5.- Uso de la calculadora electrónica en la trigonometría

III.- Funciones Trigonométricas de un Angulo Agudo

1.- Funciones trigonométricas de un ángulo agudo

2.- Funciones trigonométricas de ángulos complementarios

3.- Funciones trigonométricas de 30°, 45° y 60°

4.- Angulos de depresión y elevación

5.- Resolución de problemas

IV.- Solución de Triángulos Rectángulos

V.- Aplicaciones Prácticas

1.- Orientación

2.- Vectores

3.- Suma vectorial

4.- Componentes de un vector

5.- Resolución de problemas

VI.- Relaciones Básicas e Identidades

1.- Relaciones básicas

2.- Simplificación de expresiones trigonométricas

3.- Identidades trigonométricas

4.- Resolución de problemas

VII.- Funciones Trigonométricas de dos Angulos

1.- Suma de dos ángulos

2.- Diferencia de dos ángulos

3.- El doble de un ángulo

VIII.- Triángulos Oblicuángulos

1.- Triángulos oblicuángulos

2.- Ley de los senos

3.- Ley de los cosenos

IX.- Area de un Triángulo

1.- Cuatro métodos

X.- Aplicación de la Trigonometría en la resolución de algunos problemas de ingeniería.

Anexo 3

GEOMETRÍA ANALÍTICA

I.- Sistemas de Coordenadas

1.- Introducción

2.- Segmento rectilíneo dirigido

3.- Sistema coordenado en el plano

4.- Distancia entre dos puntos dados

5.- División de un segmento en una razón dada

6.- Pendiente de una recta

7.- Angulo de dos rectas

II.- Gráfica de una Ecuación y Lugares Geométricos

1.- Gráfica de una ecuación

2.- Intercepciones con los ejes

3.- Simetría

4.- Extensión de la curva

5.- Asíntotas

6.- Lugar geométrico

III.- La Línea Recta

1.- Definición de línea recta

2.- Ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada

3.- Otras formas de la ecuación de la recta

4.- Forma general de la ecuación de la recta

5.- Punto de intersección entre dos rectas

6.- Distancia de una recta a un punto dado

7.- Area de un polígono en función de las coordenadas de sus vértices

IV.- Ecuación de la Circunferencia

1.- Ecuación de la circunferencia; forma ordinaria

2.- Forma general de la ecuación de la circunferencia

3.- Determinación de una circunferencia sujeta a tres condiciones dadas

4.- Eje radical

5.- Tangente a una curva

6.- Problemas de lugares geométricos relativos a la circunferencia

V.- La Parábola

1.- Definiciones

2.- Ecuación de la parábola de vértice en el origen y eje un eje coordenado

3.- Ecuación de una parábola de vértice (h, k) y eje paralelo a un eje coordenado

4.- Ecuación de la tangente a una parábola

VI.- La Elipse

1.- Definiciones

2.- Ecuación de la elipse de centro en el origen y ejes de coordenadas los ejes de la elipse

3.- Ecuación de la elipse de centro (h, k) y ejes paralelos a los coordenados

4.- Propiedades de la elipse

VI.- La Hipérbola

1.- Definiciones

2.- Primera ecuación ordinaria de la hipérbola

3.- Asíntotas de la hipérbola

4.- Segunda ecuación ordinaria de la hipérbola

VII.- Aplicación de la Trigonometría y la Geometría Analítica en la resolución de algunos problemas de ingeniería.

Anexo 4

CALCULO DIFERENCIAL

I.- Variables, Funciones y Límites

1.- Variables y constantes

2.- Intervalo de una variable

3.- Funciones

4.- Variables independientes y dependientes

5.- Notación de funciones

6.- Límite de una variable

7.- Límite de una función

8.- Teoremas sobre límites

9.- Funciones continuas y discontinuas

II.- Derivación

1.- Introducción

2.- Incrementos

3.- Comparación de incrementos

4.- derivada de una función de una variable

5.- Regla general para la derivación

6.- Interpretación geométrica de la derivada

III.- Regla Para Derivar Funciones Algebraicas

1.- Aplicación de las Primeras Nueve Fórmulas de Derivación

2.- Derivación de funciones implícitas

IV.- Aplicaciones de la Derivada

1.- Dirección de una curva

2.- Ecuaciones de la tangente y la normal; longitudes de la subtangente y subnormal

3.- Máximos y mínimos de una función

4.- Primer método para calcular máximos y mínimos de una función

V.- Derivadas Sucesivas de una Función. Aplicaciones

1.- Definición de las derivadas sucesivas

2.- Obtención de las derivadas sucesivas en funciones implícitas

3.- Sentido de la concavidad de la curva

4.- Segundo método para determinar máximos y mínimos

5.- Puntos de inflexión

VI.- Derivación de Funciones Trascendentes

1.- Fórmulas de derivación; segunda lista formada por 17 fórmulas

VII.- Aplicación del cálculo en la resolución de algunos problemas de ingeniería

Anexo 5

CALCULO INTEGRAL

I.- Integración de Formas Elementales Ordinarias

1.- Integración

2.- Reglas para integrar las formas elementales ordinarias

3.- Aplicación de las veintitrés fórmulas de integración

4.- Integración de diferenciales trigonométricas

5.- Integración por partes

II.- Constante de Integración

1.- Determinación de la constante de integración por medio de condiciones iniciales.

2.- Significado geométrico

III.- Integral Definida

1.- La integral definida

2.- Cálculo de una integral definida

3.- Cálculo de áreas

IV.- Aplicación del Cálculo en la resolución de algunos problemas de ingeniería