4. APLICACIÓ DE LA FUNCIÓ DE PARETO

4.1. La concepció teòrica del problema

V. Pareto[5] es va adonar que a Itàlia el 80% de la riquesa era propietat només del 20% de la població. Llavors va examinar altres països amb característiques diverses i va trobar, per a la seva sorpresa, que es produïa una distribució similar. Això també s'aplica a una gran varietat de qüestions quotidianes: la gent porta aproximadament el 20% de la roba preferida durant aproximadament el 80% del temps, passa el 80% del temps amb el 20% de les persones conegudes, etc.

El principi de Pareto té moltes aplicacions al control de qualitat. Constitueix la base del diagrama de Pareto, una de les eines claus que es fan servir a control de la qualitat total i al mètode *sis sigma*. El principi de Pareto ofereix la línia bàsica per a l'anàlis-ABC i l'anàlisi-XYZ, que són abastament emprats a la logística i el subministrament amb l'objectiu d'optimitzar l'estoc de productes, i els costos de manteniment i adquisició d'aquests estocs. A l'informàtica, el principi de Pareto es pot aplicar per a l'optimització de recursos a base d'observar que el 80% dels recursos són emprats pel 20% de les operacions. A l'enginyeria del software, sovint resulta una millor aproximació a la realitat el fet de suposar que el 90% del temps d'execució d'un programa d'ordinador es dedica a executar el 10% del codi (coneguda en aquest context com la **llei 90/10**). A les comunitats d'Internet, es calcula que un 1% dels usuaris creen contingut, 9% el modifiquen i l'altre 90% el consumeix passivament. En els negocis, sovint es poden assolir millores espectaculars a base d'identificar quins són els clients, activitats o processos que configuren aquest 20% que és responsable del 80% dels beneficis i llavors maximitzant la atenció que s'hi presta.

[5] El **principi de Pareto** (conegut també com la **llei 80-20**) diu que, en molts casos el, 80% dels efectes són conseqüència del 20% de les causes. El pensador en temes de gestió de negocis Joseph M. Juran va suggerir el principi i el va anomenar en honor de l'economista italià Vilfredo Pareto (1848-1923), que havia observat que el 80% dels ingressos a Itàlia procedien del 20% de la població. És una regla empírica habitual als negocis; per exemple el "80% de les vendes de productes agraris procedeixen del 20% de les explotacions". El principi de Pareto només està relacionat de forma tangencial amb l'Òptim de Pareto, que també va ser presentat pel mateix economista. Pareto va desenvolupar els dos conceptes en el context de l'estudi de la distribució d'ingressos i riquesa entre la població.

FIG. 3.9. Vilfredo Pareto.

Una aplicació 'inversa' del principi de Pareto és el que s'anomena concentrar-se a la 'Cua Llarga' en màrqueting d'internet. En comptes de concentrar-se en les paraules clau que tenen una alta popularitat i per les quals hi ha una forta competència, alguns s'han concentrat en les molt més abundants però més obscures frases que reben unes quantes buscades cada mes. I han creat pàgines web que són enginys optimitzats per a buscar aquestes frases; tenir èxit en això és més fàcil que concentrant-se en aquelles poques paraules que són més populars i per les quals hi ha molta competència.
Doncs bé, també resulta possible i aconsellable, al nostre cas, l'aplicació de la funció de l'economètra italià Vilfredo Pareto a la distribució de la superfície de la terra en aquestes contrades del sud de Catalunya. Així, l'esmentada distribució respondria a una funció hiperbòlica del tipus:

$$y = A/(x-a)^{\alpha} = f(x) \,,$$

on:

a = superfície de l'explotació més petita (Ha.). y = nombre d'explotacions de superfície > x. x = superfície (Ha.), variable independent.

A i α = paràmetres adimensionals que defineixen l'estructura de la propietat agrària a cadascun dels territoris analitzats.

És perfectament lògic que la corba en qüestió sigui asimptòtica (tingui branques hiperbòliques) per a: x=a i y=o, car:

$\lim_{x\to\infty} = A/(x-a)^{\alpha} = A/\infty = 0$, (asímptota horitzontal, paral·lela a l'eix OX, coincidint amb l'eix d'abscisses).

$\lim_{x\to a} = A/(x-a)^{\alpha} = A/0 = \infty$, (asímptota vertical, paral·lela a l'eix OY).

La seva representació gràfica simplificada, ens portaria a:

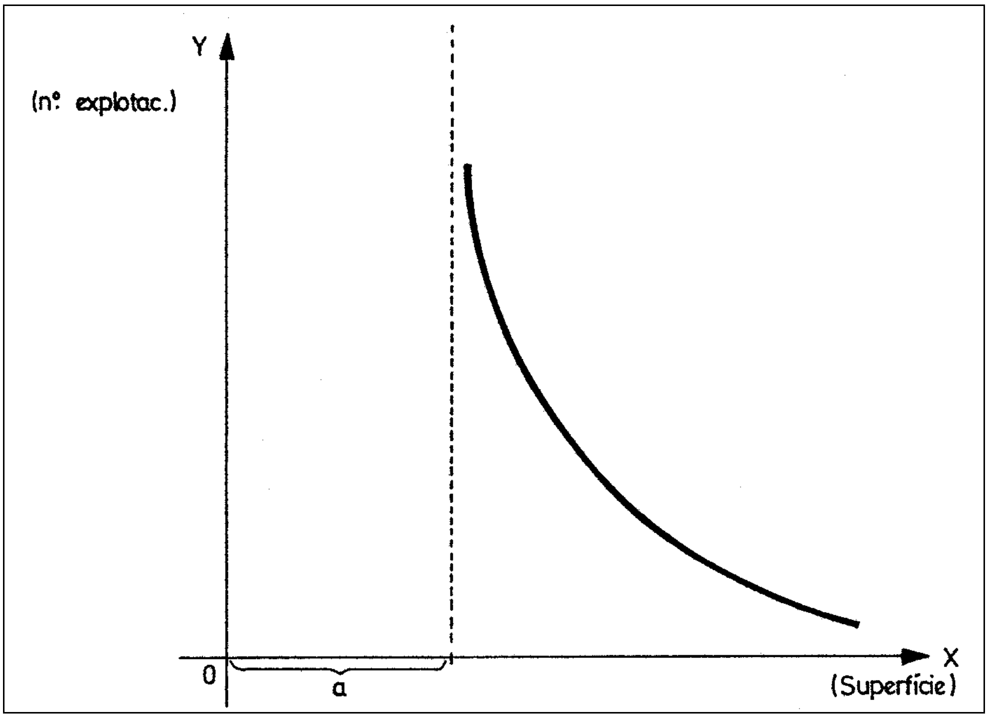

FIG. 3.10. Representació gràfica simplificada de la Funció de Pareto.

Si ara desplacem l'eix d'ordenades fins al punt : x=a, aleshores la funció de Pareto esdevindrà, simplement: $y = A/x^{\alpha}$, en la qual hem considerat que: a=0, o sigui, la superfície de l'explotació més petita és nul·la o, al menys, inapreciable. D'aquesta manera, el sentit de variabilitat d'ambdues variables és contrari. Malgrat això, i donada la metodologia d'elaboració del Cens Agrari objecte del nostre estudi, podem considerar una superfície mínima de 0,1 Hes., d'acord amb la definició **d'explotació agrícola amb terres**[6]. És digne de consideració, tanmateix, el fet que d'acord amb l'article 6 del Reglament (CEE) núm.: 2.159/89 de la Comissió i d'altres disposicions en matèria d'ajuts econòmics a les explotacions agràries (en forma de préstecs i subvencions a fons perdut)

[6] Veure annex núm.: 1 "El cens agrari: notes conceptuals i metodològiques".

per diferents conceptes, dits avantatges no seran d'aplicació a les parcel·les conreades amb superfície inferior a 0,2 Ha.[7]

Es tractarà, en definitiva, de l'ajustament d'una funció potencial per tècniques de regressió no lineal mínimo-quadràtica. Evidentment, l'expressió anterior es pot escriure (prenent logaritmes naturals o neperians) així:

$$\ln y = \ln A - \alpha \cdot \ln x$$

Un valor de la unitat per a α ofereix una cònica hipèrbola rectangular, és a dir, el lloc geomètric dels punts del plànol tals que el seu producte de coordenades (x·y) és una constant, A. Així:

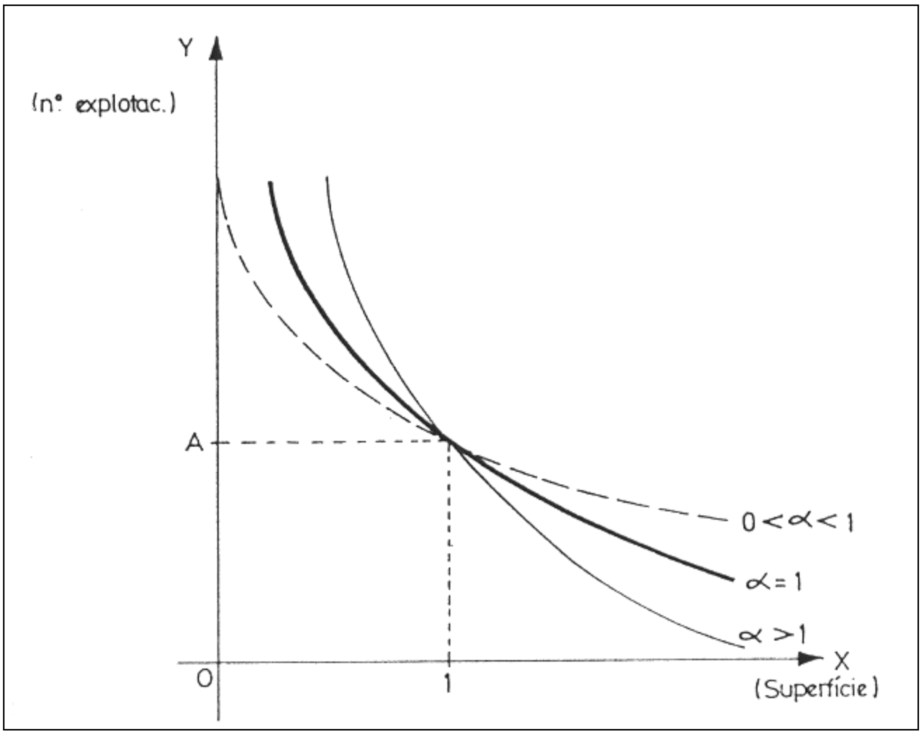

FIG. 3.11. Funció de Pareto segons els valors d'α.

De fet, aquesta transformació doblement logarítmica s'utilitza freqüentment en Estadística perquè correspon al supòsit d'una **elasticitat constant** entre **y** i **x**, i la simple aplicació dels mètodes lineals als logaritmes de les variables proporciona directament una estimació d'aquesta elasticitat, com ja tindrem ocasió de comprovar, en altres casos, al posterior capítol 5 del present treball.

4.2. Significació del paràmetre α

[7] També podríem considerar aquí aplicable al cas, possiblement, el concepte d'unitat mínima de conreu.

Veurem a continuació el significat del paràmetre $\boldsymbol{\alpha}$, per la qual cosa exposarem diferents interpretacions, algunes d'elles en contradicció aparent. A saber:

1a) La funció de Pareto, de dibuixar-se a escala doblement logarítmica, és una recta. En efecte, prenent logaritmes neperians o naturals en l'expressió inicial, s'obté:

$$\ln y = \ln A - \alpha \cdot \ln x = \beta - \alpha \cdot \ln x$$

on s'ha substituït: $\ln A = \beta$.

Si ara representem aquesta recta, resulta que $-\alpha$ és el coeficient angular o pendent negativa de la dita recta.

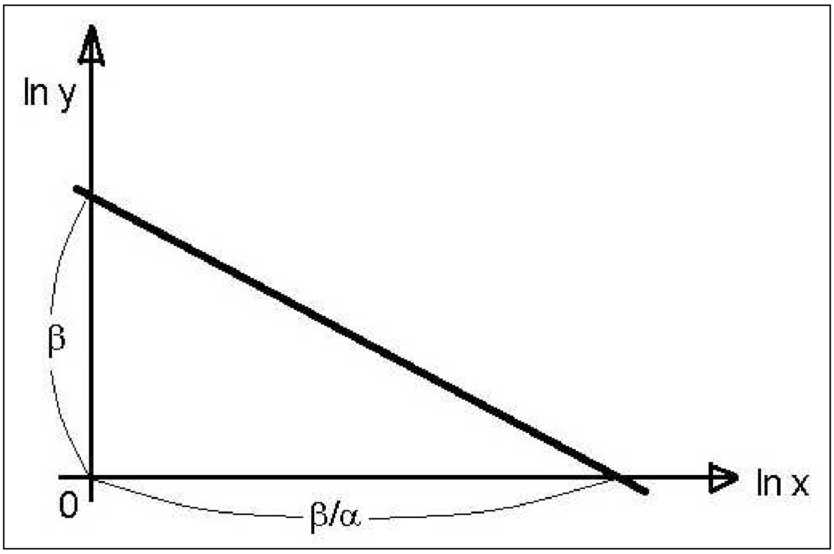

FIG. 3.12. Representació logarítmica de la funció de Pareto.

2a) Si calculem l'elasticitat de la funció de Pareto (hem de recordar que el concepte teòric d'elasticitat de la funció **y** ve donat pel límit del quocient dels increments relatius d'aquesta funció i de la variable **x** independent o explicativa "superfície", quan l'increment absolut d'aquesta darrera tendeix a zero), o sigui:

$$\frac{Ey}{Ex} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \frac{d \ln y}{d \ln x} = \frac{dy / y}{dx / x} = \frac{x}{y} \times \frac{dy}{dx} = \frac{x}{Ax^{-\alpha}} A(-\alpha)x^{-\alpha-1} = -\alpha$$

Llavors α és el coeficient d'elasticitat de la funció de Pareto que estem cercant. Majors especificacions teòriques i pràctiques sobre el concepte d'elasticitat d'una funció i de les seves implicacions econòmiques, es veuran posteriorment al capítol 5.

3a) Com ja s'ha demostrat: $Ey/Ex = -\alpha$

però: $Ey/Ex = dy/y \div dx/x$, llavors: $dy/y \div dx/x = -\alpha$

i operant resultarà l'equació diferencial de variables separades o separables:

$$dy/y = -\alpha \cdot dx/x \quad (1)$$

essent: dy/y el decreixement relatiu del nombre d'explotacions quan esdevé una variació de la superfície.

En efecte, integrant mitjançant una simple quadratura, en l'equació anterior (1), obtindrem:

$$\int \frac{dy}{y} = -\alpha \times \int \frac{dx}{x} \quad ; \text{ d'on:}$$

$\ln y = -\alpha \cdot \ln x + \ln A = \ln (A \cdot x^{\alpha})$, d'on es reconstrueix la integral general:

$$\mathbf{y = A \cdot x^{-\alpha}} \ ,$$

a on els diferents valors de la constant A, específics de l'estructura de la propietat agrària, ens donaran altres tantes integrals o solucions particulars.

De l'equació (1) podem extreure la següent interpretació del paràmetre α: **És la relació existent entre el decreixement relatiu del nombre d'explotacions i el creixement de la superfície**. A més el signe negatiu de l'equació (1) és perfectament lògic, ja que significa que un creixement o decreixement de la superfície originarà, respectivament, una disminució o augment del nombre d'explotacions de superfície major que **x**.

4a) Si considerem la variació de la superfície com a constant, o sigui: dx=ct., llavors dx/x (creixement relatiu de la superfície) disminueix quan x augmenta. D'aquí es pot deduir la següent conclusió: *El decreixement relatiu del nombre d'explotacions a mesura que la superfície augmenta és cada cop més petit, i la disminució del mateix és proporcional al nivell absolut (x) de la superfície.*

En efecte, l'equació (1) ens diu que:

$$dy/y = -\alpha \cdot dx/x$$

Si considerem dx = ct. $\rightarrow$ dx/x disminueix en créixer x. D'altra banda, és una constant, puix dy/y sols depèn de dx/x i, en definitiva, per ésser: dx=ct., sol depèn d'x, de manera que, tal com diu la llei de Pareto, dy/y (decreixement relatiu del nombre d'explotacions) depèn solament del nivell de superfície i, naturalment, del valor del coeficient α[8].

5a) Si fem dx/x = ct. llavors la variació relativa del nombre d'explotacions (dy/y) és proporcional al paràmetre α (veure l'anterior equació 1). Si α és gran, una variació percentual petita de la superfície assignarà una variació gran del nombre d'explotacions, i recíprocament si α és petita, succeeix tot just el contrari. Podria dir-se, doncs, que la "justícia" de la distribució de la propietat de la terra augmenta amb el valor del paràmetre α.

6a) Abans de donar una altra interpretació del paràmetre α, hem de fer, a efectes classificadors, un desenvolupament estadístic teòric de la funció de Pareto.

Definim la funció de Pareto com aquella que ens dóna el nombre d'explotacions de superfície superior a x; però també es pot definir en termes de probabilitat o de freqüència relativa, així: *La funció de Pareto ofereix la probabilitat de què les explotacions agràries tinguin nivells de superfície superiors a un valor predeterminat x.*

En efecte, expressat matemàticament, tenim que:

$$P(x) = A \cdot x^{-\alpha} = \Pr(\varepsilon > x)$$

O sigui, la probabilitat de que la variable aleatòria estadística ε sigui major que 0.

Tot recordant que les funcions de distribució d'una variable aleatòria estadística x es defineixen per:

$$F(x) = \Pr(\varepsilon \leq x)$$

podem relacionar la funció de Pareto P(x) amb la funció de distribució de la superfície F(x) de la següent forma:

$$F(x) = 1 - P(x) = 1 - A \cdot x^{-\alpha} \qquad (2)$$

ja que els successos són complementaris i la relació precedent (2) és la que lliga les probabilitats, en aquests casos.

---

[8] També una altra manera d'enunciar aquesta llei és que "a mesura que augmenta la superfície, és més fàcil passar a un nivell de superfície superior".

La funció de densitat de Pareto serà, doncs, la funció derivada:

$$f(x) = F'(x) = d/dx\ (1 - A \cdot x)^{-\alpha} = (\alpha \cdot A)/(x^{\alpha+1})$$

Si volem saber quina és la proporció d'explotacions en què la seva superfície es troba entre dos valors donats x_1 i x_2, operarem de la següent manera, tenint en compte la propietat additiva de l'interval d'integració $[x_1 , x_2]$ i la posterior aplicació de la regla de Barrow:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \left[F(x)\right]_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1) = (1 - A \bullet x_2^{-\alpha}) - (1 - A \bullet x_1^{-\alpha}) = A(x_1^{-\alpha} - x_2^{-\alpha})$$

Si ara anomenem x_0 el nivell mínim de superfície de les explotacions agràries considerades, la $P(x_0) = 1$, que és la probabilitat total, doncs, sembla clar que totes les explotacions tindran, com a mínim, aquesta superfície. Com que: $P(x_0) = A \cdot x_0^{-\alpha} = 1$, podem treure el valor de la constant: $A = x_0^{\alpha}$ i substituint les fórmules obtingudes fins aquí, ens apareixen les noves expressions, de gran utilitat:

$$P(x) = (x_0/x)^{\alpha} \quad (3)$$

sols definida per a $x > x_0$ ja que x_0 és el nivell mínim i a més perquè la probabilitat no pot ésser, en cap cas, major de la unitat. Altrament:

$F(x) = 1 - (x_0/x)^{\alpha}$ (4), i la seva derivada:

$$f(x) = \frac{\alpha \bullet x_0^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} = \frac{\alpha}{x_0}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha+1} = \frac{\alpha}{x} \times \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha} \qquad (5)$$

que prendrà el valor 0 si $x \leq x_0$.

Anem a calcular, tot seguit, l'esperança matemàtica o valor mitjà de la distribució contínua de la superfície de les explotacions que, com sabem, vindrà donada per l'expressió:

$$E(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \bullet f(x) \bullet dx$$

Com que en aquest cas de distribució de superfície, aquests límits d'integració no varien de $-\infty$ a $+\infty$ sinó que estan acotats inferiorment pel valor $x_0 < x$, $\forall$ x , l'esperança matemàtica serà:

$$E(\varepsilon) = \int_{x_0}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx = \int_{x_0}^{+\infty} x \cdot \frac{\alpha}{x_0} \cdot \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha+1} dx = \int_{x_0}^{+\infty} x^{-\alpha} \cdot \alpha \cdot x_0^{\alpha} \cdot dx =$$

$$= \alpha \cdot x_0^{\alpha} \cdot \int_{x_0}^{+\infty} x^{-\alpha} \cdot dx = -\frac{\alpha \cdot x_0^{\alpha}}{\alpha - 1} \cdot \left[\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_{x_0}^{+\infty}$$

, que és una integral impròpia de primera o bé de tercera espècie, en funció de la continuïtat o no de l'expressió que conforma l'integrand o funció subintegral.

Aquesta expressió manca, però, de sentit si $\alpha \leq 1$. En efecte, analitzem ambdós casos:

a) Si $\alpha = 1 \rightarrow E(\varepsilon) = -(x_0/0) \cdot [(1/\infty^0) - (1/x_0^0)]$

que és indeterminat.

b) Si $\alpha < 1 \rightarrow E(\varepsilon) = -(\alpha \cdot x_0^{\alpha})/(\alpha - 1) \cdot [1/x^h - 1/x_0^h]$

essent h<0, raó per la qual, en substituir els límits, ens surt l'esperança matemàtica de valor infinit, circumstància que no és pas possible. Només és factible, efectivament, per al cas $\alpha > 1$ en què l'esperança matemàtica val:

$$E(\varepsilon) = -\frac{\alpha \bullet x_0^{\alpha}}{\alpha - 1}\left[\frac{1}{\infty^{\alpha-1}} - \frac{1}{x_0^{\alpha-1}}\right] = \frac{\alpha \bullet x_0^{\alpha}}{\alpha - 1} \bullet \frac{1}{x_0^{\alpha-1}} = \frac{\alpha \bullet x_0}{\alpha - 1}$$

Ara bé, es compleix que: E (ε) = $\overline{X} = \dfrac{\alpha \bullet x_0}{\alpha - 1}$

essent $\overline{X}$ la mitjana aritmètica de la superfície de les explotacions.

D'aquí, podem extreure una interpretació del paràmetre , a saber:

$$\overline{X} = \frac{\alpha \bullet x_0}{\alpha - 1} \quad ; \quad \overline{X} \bullet \alpha - \overline{X} = \alpha \bullet x_0 \quad ; \quad \alpha\left(\overline{X} - x_0\right) = \overline{X} \rightarrow \alpha = \frac{\overline{X}}{\overline{X} - x_0}$$

A major diferència existent entre la superfície mitjana i la superfície mínima de les explotacions agràries (així és, a $|X - x_0|$ major) el valor del paràmetre **α** és menor i recíprocament, com després tindrem ocasió de comprovar. Però el fet que la superfície mitjana i la superfície mínima siguin més o menys pròximes o distants pot relacionar-se amb la major o menor justícia en la distribució de la propietat de la terra; llavors, segons aquesta interpretació, per a un coeficient **α** major la justícia distributiva és també major i recíprocament.

Malgrat això, com veurem posteriorment, en tots els ajusts realitzats per als set territoris en estudi l'any 1989, es té que: $0 < \alpha < 1$. Encara que sí podem corroborar que la distribució de la propietat agrària serà tant més justa quant menors siguin les diferències existents entre les superfícies.