Modelo alternativo para caracterizar la producción del sector eléctrico en México

Alexander Galicia Palacios[1]
Miguel Flores Ortega[2]

Resumen

En este trabajo se presenta un modelo de la función de producción translogarítmica para el sector eléctrico en México; el procedimiento para estimar esta función parte de un análisis estructural de las principales características de la función de producción y se realiza la comparación con la función Cobb-Douglas y se evalúa de forma empírica la sensibilidad de los parámetros de la función y su relación con los factores de la producción.

Se examinan los métodos para estimar la función de producción translogaritmica y se propone un modelo general, basado en una función inversa de demanda que adiciona la tecnología de producción. La función de producción describe la relación que existe entre los niveles de los factores productivos de entrada y los niveles de producción de los productos de salida. Los resultados muestran, que si el análisis estadístico presenta resultados negativos las pruebas de especificación paramétrica han sido estimadas erróneamente.

Palabras clave: Función de producción, función translogaritmica, factores de la producción, función de costos, función Cobb-Douglas.

Clasificación JEL: C1, C2, C14, E13, E23

Abstract

This paper presents a model of the translog production function for the electricity sector in Mexico, the procedure for estimating this function from a structural analysis of the main features of the production function and makes the comparison with the Cobb-Douglas and empirically evaluates the sensitivity of the parameters of the function and its relation to the factors of production.

It discusses methods for estimating the translog production function and proposes a general model based on inverse demand function that adds the technology of production. The production function describes the relationship between levels of productive inputs and production levels of output products. The results show that if statistical analysis shows negative parametric specification tests have been estimated incorrectly.

Keywords: production function, translog function, factors of production, cost function, Cobb-Douglas.

JEL Classification: C1, C2, C14, E13, E23

1. Introducción

En el estudio de la ciencia económica el análisis de la producción se efectúa con modelos de carácter dinámico y resulta relevante analizar la conformación de la dotaciones de factores productivos que repercuten en los costos y precios, tanto en términos absolutos como relativos, en este contexto es deseable obtener una función de producción que represente la combinación óptima de factores de la producción que permitan obtener de forma eficiente la cantidad de un producto al mínimo costo que representa la condición del nivel máximo de producción.

Cuando se utiliza un modelo reducido, donde las variables de la función de producción se expresan en unidades de trabajo se esta frente a un modelo de crecimiento neoclásico; la función de producción sirve de base para determinar qué parte del aumento de la producción se debe al crecimiento de un factor en particular y qué parte corresponde al progreso tecnológico, tanto endógeno o exógeno, en este sentido la función de producción se utiliza como base para estimar la producción potencial y la estructural del uso de los factores de la producción, para lograr esto se utiliza un modelo que es una generalización del que utilizaron Christensen, Jorgenson y Lau (1971,1973, 1975), y se mantiene el supuesto teórico de la dualidad que introdujo Diewert (1974).

El trabajo se estructura en siete apartados, se inicia con una introducción, al que sigue un segundo apartado donde se presentan los conceptos principales de la teoría sobre la función de producción neoclásica; en el tercer apartado se resumen los aspectos de la función de producción Cobb-Douglasy se deja en la cuarta sección el desarrollo de la función

[1] Estudiante del Doctorado en Ciencias Económicas, Escuela Superior de Economía del Instituto Politécnico Nacional.
[2] Profesor Investigador de la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, de la Escuela Superior de Economía del Instituto Politécnico Nacional.

translogarítmica y en el quinto se analizan los argumentos teóricos de la función translogarítmica de producción y la transformación para obtener los costos de producción; en la sección seis se presenta la metodología para caracterizar de forma empírica el modelo de la función translogarítmica de producción y los costos de producción para el sector eléctrico Mexicano, por ultimo se presentan las conclusiones de la investigación.

2. Fundamentos de la función de producción neoclásica

Una función de producción se define por la relación de tecnológica que hay entre los insumos utilizados y los bienes producidos a partir de los insumos, representa la cantidad máxima de producción que se puede obtener empleando eficientemente una cantidad dada de los factores de la producción. En una economía donde la oferta Y_t , se encuentra determinada por tres factores productivos que son el trabajo L_t la suma total invertida en el proceso productivo, el capital K_t que suma de todos los bienes físicos que se utilizan en la producción y la tecnología A_t que es un factor no tangible en el proceso de producción, la matemática que se conoce como función de producción neoclásica:

$$Y_t = F(K_t, L_t, A_t) \quad (2)$$

La función de producción de la expresión 2 cumple con las siguientes propiedades:

- **Homogeneidad de grado uno**, se conoce como rendimientos constantes a escala, sí se incrementan en las mismas proporciones el capital K_t y el trabajo L_t se duplica la producción; esta propiedad se expresa de forma matemática como:

$$F(\lambda K, \lambda L, A) = \lambda F(K, L, A) = \lambda F(K, L, A) \quad (2.1)$$

Es debe señalar que el factor tecnológico es el conocimiento que lleva a la mezcla óptima de los factores: capital K_t y trabajo L_Y , por esta razón para obtener el doble del producto no es necesario duplicar el uso de los factores, solo utilizarlos en la proporción adecuada.

- **La productividad marginal de los factores es positiva pero decreciente**: la tecnología presenta rendimientos decrecientes del capital y del trabajo cuando se incrementa la producción. Un incremento del factor trabajo sin cambiar el monto del capital incrementa la producción en una proporción que no cambia con el tiempo. Por otro lado, si se incrementa el monto del capital se incrementa la producción pero lo hace invariante a lo largo del tiempo. Esto significa que la productividad marginal del capital y del trabajo son positivos pero diferentes.

Esto significa que la productividad marginal de un factor se obtiene de la derivada parcial de la producción con respecto al factor en cuestión y se expresa de la forma siguiente:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \frac{\partial F}{\partial L} > 0\right] \quad (2.2)$$

La segunda derivada presenta resultados negativos; por lo tanto existen rendimientos decrecientes y se expresa por:

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0\right] \quad (2.3)$$

- **Condiciones de Inada**: implica que la productividad marginal del capital se aproxima a cero cuando el capital tiende a infinito y tiende a infinito cuando el capital se aproxima a cero:

$$\frac{lim_{k\to\infty} \partial F}{K} = 0, \frac{lim_{k\to 0} \partial F}{\partial k} = \infty \quad (2.4)$$

De forma análoga cuando la función representa al factor trabajo se escribe como:

$$\frac{lim_{L\to 0}\partial F}{\partial L} = 0 \text{ y} \frac{lim_{L\to 0}\partial F}{\partial L} = \infty \qquad (2.5)$$

3. Aspectos generales de la función de producción Cobb-Douglas

La función Cobb-Douglas satisface las propiedades de una función de producción neoclásica ($0 < \alpha < 1$) que se escribe como:

$$y_t = A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \qquad (3)$$

La función presenta las siguientes propiedades:

- Rendimiento de capital = (Producto marginal del Capital) $\cdot K = \alpha Y$
- Rendimiento del trabajo=(Producto marginal del trabajo) $\cdot L = (1-\alpha)Y$

Donde:
$\alpha = \text{constante que mide el rendimineto del capital}$

Y toma la forma:

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \qquad (3.1)$$

Donde:
$\alpha = producto\ marginal\ del\ capital$

La función Cobb-Douglas presenta las característi:

- Rendimientos de escala constantes:

$$A(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{1-\alpha} = \lambda AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = \lambda Y \qquad (3.2)$$

- La producción marginales del capital y del trabajo es positiva:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} > 0 \qquad (3.3)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = (1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha} > 0 \qquad (3.4)$$

- La producción marginal es decreciente:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = \alpha(\alpha-1)AK^{\alpha-2}L^{1-\alpha} < 0 \qquad (3.5)$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = (1-\alpha)(-\alpha)AK^{2}L^{-\alpha-1} < 0 \qquad (3.6)$$

- Cumple con los requisitos de Inada:

$$\lim_{K\to\infty} \frac{\partial AK}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} = 0, \lim_{K\to 0} \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} = \infty \qquad (3.7)$$

$$\lim_{L \to \infty} \frac{\partial Y}{\partial L} = (1-\alpha) A K^{\alpha} L^{-\alpha} = 0, \quad \lim_{L \to 0} \frac{\partial Y}{\partial L} = (1-\alpha) A K^{\alpha} L^{-\alpha} = \infty \qquad (3.8)$$

4. Función translogarítmica

Al realizar el análisis del grado de sustitución entre los factores de la producción, mediante la estimación de las formas funcionales tradicionales de Cobb-Douglas y la Función de Sustitución de Elasticidad Constante (CES), se encontró que en particular la última resulta ser muy restrictivas para las elasticidades de sustitución analizadas, para la función Cobb-Douglas las elasticidades de sustitución son iguales a uno, mientras que la función de elasticidad de sustitución constante (CES) admite la posibilidad de elasticidades de sustitución diferentes a uno, pero no permite que existan elasticidades de sustitución negativas que corresponde a la condicción de complementos entre insumos.

La forma funcional de la ecuación logarítmica que propuesó Christensen, Jorgenson y Lau (1971), permite estimar el grado de sustitución de los factores productivos de forma flexible y se expresa de forma matemática como:

$$\begin{aligned} lnF = {} & \alpha_0 + \alpha_I lnI + \alpha_C \ln C + B_K lnK + \beta_L lnL + \alpha_A lnA + \frac{\gamma_{AA}}{2}(lnA)^2 + \frac{\gamma_{II}}{2}(lnI)^2 \\ & + \frac{\gamma_{CC}}{2}(lnC)^2 + \gamma_{IC} lnC + \gamma_{IA} ln\, I\, lnA + \gamma_{CA} ln\, C\, ln\, A + \frac{\varepsilon_{KK}}{2}(lnK)^2 \\ & + \frac{\varepsilon_{LL}}{2}(lnL)^2 + \varepsilon_{KL} \ln K \ln L + \varepsilon_{KA} \ln K \ln A + \varepsilon_{LA}\, ln\, L\, ln\, A \\ & + \delta_{IK} ln\, I\, ln\, K + \delta_{IL} ln\, I\, ln\, L + \delta_{CK} ln\, C\, ln\, K + \delta_{CL}\, ln\, C\, ln\, L = 0. \qquad (4) \end{aligned}$$

Donde:
I- cantidad de la investigación
C- cantidad de consumo
K - cantidad de capital
L- cantidad de trabajo
A - índice de productividad

La función propuesta por Christensen, Jorgenson y Lau (1971), asume que la maximización de los beneficios conducen a la productividad marginal condicional del tipo:

$$\frac{piI}{pkK} = \frac{\partial lnF}{\frac{\partial lni}{\frac{-\partial lnF}{\partial lnK}}}$$

$$= \frac{\alpha_I + \gamma_{II} lnI + \gamma_{IC} lnC + \delta_{IK} lnK + \delta_{IL} lnL + \gamma_{IA} lnA}{-(\beta_K + \delta_{IK} lnI + \delta_{CK} lnC + \varepsilon_{KK} lnK + \varepsilon_{KL} lnL + \varepsilon_{KA} lnA} \qquad (4.1)$$

Por lo tanto una función de utilidad translogarítmica se expresar como:

$$\begin{aligned} \ln(\pi + 1) = {} & \alpha_0 + \alpha_I lnp_I + \alpha_C lnp_C + \beta_K lnp_K + \beta_L lnp_L + \alpha_A lnA + \frac{1}{2}\gamma_{AA}(lnA)^2 + (lnA)^2 \\ & + \frac{\gamma_{II}}{2}(lnp_I)^2 + \frac{\gamma_{CC}}{2}(lnp_I)^2 + \gamma_{IC} lnp_I lnp_c + \gamma_{IA} lnp_I lnA + \gamma_{CA} lnp_C lnA \\ & + \frac{\varepsilon_{KK}}{2}(lnp_K)^2 + \frac{\varepsilon_{LL}}{2}(lnp_L)^2 + \varepsilon_{KL} lnp_K lnp_L + \varepsilon_{KA} lnp_K lnA \\ & + \varepsilon_{LA} lnp_L lnA + \delta_{IK} lnp_I lnp_K + \delta_{IL} lnp_I lnp_L + \delta_{CK} lnp_C lnp_K \\ & + \delta_{CL} lnp_C lnp_L = 0 \qquad (4.2) \end{aligned}$$

Donde:

p_I −precio de la investigación
p_C −precio del consumo
p_K −precio de capital
p_L −precio de la fuerza de trabajo

La función de producción óptima utiliza la dotación de factores que describe la ecuación:

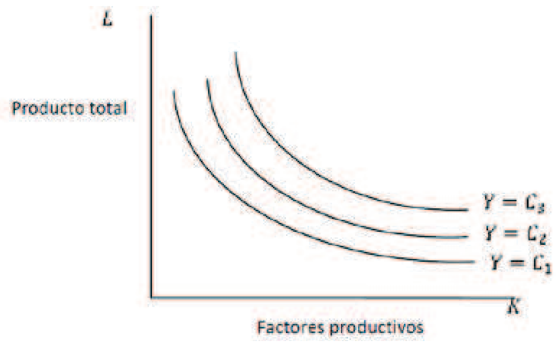
$$\frac{piI}{pkK} = \frac{\partial ln\pi}{\frac{\partial ln p_I}{\frac{-\partial ln\pi}{\partial ln p_K}}}$$

$$= \frac{\alpha_I + \gamma_{II} lnp_I + \gamma_{IC} lnp_C + \delta_{IK} lnP_K + \delta_{IL} lnp_L + \gamma_{IA} lnA}{-(\beta_K + \delta_{IK} lnp_I + \delta_{LK} lnp_C + \varepsilon_{KK} lnp_K + \varepsilon_{KL} lnp_L + \varepsilon_{KA} lnA} \quad (4.3)$$

5. Argumentos teóricos para el planteamiento de la función translogaritmica de producción y costos

En el análisis clásico de isocuantas, se observa que en los procesos de producción cuando se utilizan proporciones diferentes de los factores se sustituye un factor por otro de forma tal que se produce la misma cantidad del producto de manera eficiente. El argumento teórico que sustenta esta relación es el concepto de Tasa Marginal de Sustitución (TMS), el cuál mide la relación de intercambio entre factores de la producción, al aumentar la utilización de un factor se disminuye el uso de otro siempre que la producción permanezca constante.

Grafica 4.1. Curvas de isocuantas de una función de producción



Fuente: elaboración propia

La relación de cambio de la productividad marginal mediante la combinación óptima de los factores productivos se expresa de la forma siguiente:

$$TMS_{L,K} = \frac{\Delta K}{\Delta L} = \frac{PMg_L}{PMg_K} \qquad (5)$$

En base al grado de sustitución de los factores productivos, la función de producción asume una de las siguientes estructuras:

- **Coeficientes fijos:** no se permite la sustitución de los factores en términos de la relación capital-trabajo $\left(\frac{K}{L}\right)$, pero se acepta que alguno de estos factores se utilicen en un mayor grado, sí se mantiene el nivel de producción constante la función de producción se expresa como:

$$Q = \min(\beta_K K, \beta_L L) \qquad (5.1)$$

Donde:

βi = coeficiente técnico del factor i,

$i K, L$=

dado que:

$$Q = \beta_K * K = \beta_L * L \qquad (5.2)$$

Por lo tanto:

$$\frac{K}{L} = \frac{\beta_L}{\beta_K} \qquad (5.3)$$

Coeficientes variables o continuos: cuando se admite la sustitución capital- trabajo $(\frac{K}{L})$, en el proceso de producción. La cualidad más importante de una función de producción es el grado de homogeneidad, desde el punto de vista matemático se dice que una función de producción es homogénea de grado n si cada factor se multiplica por un número l, y la producción corresponde a ln veces el producto inicial:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^n F(K, L) = \lambda^n Q \qquad (5.4)$$

donde:
n= es constante y denota el grado de homogeneidad

l= es cualquier número real positivo

Es importante identificar cuando un factor se trata como fijo o variable por lo que se emplean categorías para determinar el nivel de utilización; un factor se asume fijo cuando no se modifica la cantidad que se utiliza en el proceso de producción. Por lo tanto, se afirma que en el corto plazo existen factores que se utilizan de forma fija, pero en el largo plazo todos los factores de la producción son variables.

6. Caracterización del modelo de la función translogaritmica de producción y de costos para el sector eléctrico en México

Cuando un factor de la producción es fijo y otro variable se aplica la ley de rendimientos decrecientes, la cuál dice que a partir de un nivel de producción dado cuando se agrega una cantidad adicional del factor variable al factor fijos, la unidad marginal del incremento de la producción cada vez es menos, se debe aclarar que la ley sólo es válida en el corto plazo.

La caracterización del modelo de producción translogaritmico para el sector eléctrico se expresa por la ecuación:

$$lnF = \frac{\alpha_0 + \alpha_{II} lnI + \alpha_{IK} lnK + \alpha_{IL} lnL + \alpha_C lnC + \alpha_{FL} lnFC + \alpha_y lnY}{-(\beta_K + \delta_{IK} lnI + \delta_{CK} lnC + \varepsilon_{KK} lnK + \varepsilon_{KL} lnL + \varepsilon_{FL} lnFC + \varepsilon_{KY} lnY} \qquad (6)$$

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
lnF = {} & \alpha_0 + \alpha_I lnI + \alpha_C lnC + \beta_K lnK + \beta_L lnL + \alpha_{FC} lnFC + \alpha_Y lnY + \frac{\alpha_{II}}{2}(lnI)^2 \\
& + \frac{\alpha_{CC}}{2}(lnC)^2 + \frac{\alpha_{FC}}{2}(lnFC)^2 + \frac{\alpha_{YY}}{2}(lnY)^2 + \alpha_{IC} lnIlnC + \alpha_{FC} lnIlnFC \\
& + \frac{\varepsilon_{KK}}{2}(lnK)^2 + \frac{\varepsilon_{LL}}{2}(lnL)^2 + \frac{\varepsilon_{FC}}{2}(lnFC)^2 + \varepsilon_{KL} lnKlnL + \varepsilon_{KA} lnKlnI \\
& + \alpha_{IY} lnIlnY + \alpha_{CY} lnClnY + \frac{\varepsilon_{KK}}{2}(lnK)^2 + \frac{\varepsilon_{LL}}{2}(lnL)^2 + \varepsilon_{KL} lnKlnL \\
& + \varepsilon_{IFC} lnIlnFC + \varepsilon_{CY} lnClnY + \varepsilon_{LY} lnLlnY + \delta_{IK} lnIlnK + \delta_{IL} lnIlnL \\
& + \delta_{CK} lnClnK + \delta_{CL} lnClnL + \delta_{CY} lnClnY = 0 \qquad (6.1)
\end{aligned}
$$

Donde:

I- cantidad de la investigación (tecnología)

K - cantidad de capital

L- cantidad de trabajo

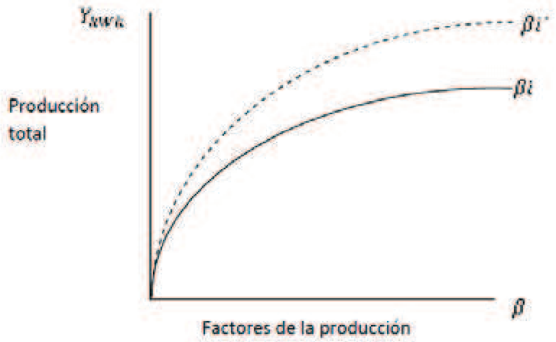
C- cantidad de consumo (número de clientes/ longitud de las líneas de distribución Km).

Fc - factor de carga (mide el nivel del uso de la planta).

Y- Producción (salida total kWh)

El modelo la producción mide por el número total de kWh entregados, por lo tanto C y Fc, son variables de salida y las variables de entrada son K y L. La característica principal que presenta esta función es que es homogénea en el precio de los factores de la producción y no decreciente en los precios de los factores de entrada y de salida.

Grafica 4.1. Curva de cambio en un factor de la producción



Fuente: elaboración propia

Un cambio tecnológico desplaza la función de producción en sentido ascendente y esto significa que con los mismos insumos se logra mayor producción, la curva de trazo continuo representa la cantidad máxima de producción que puede obtenerse con los factores de la producción, con la mejora en la tecnología y de las prácticas de gestión la función de producción se desplaza en sentido ascendente.

Para caracterizar el modelo de la función translogarítmica de producción para el sector eléctrico es necesario utilizar el concepto de dualidad introducido por Diewert (1974), que es necesario para el estudio de la relación producción y costos; que asume que existen condiciones donde se observa una dualidad entre una y otra.

Por lo tanto, para un planteamiento de la estructura empírica de la función de producción se aplica por cualquiera de ellas, ya que por un lado la función de producción resulta atractiva cuando el nivel de producto es endógeno y por otro cuando el nivel de salida es exógeno; la estimación de una función de costos es más atractiva ya que plantea como argumentos un nivel de salida y un factor precio que permite la estimación de forma directa. Como lo plantea Green (1976), las utilidades de la industria eléctrica no se puede determinar en función del nivel de producción para maximizar las ganancias, porque se tiene la obligación de suministrar la energía eléctrica a precios regulados y las decisiones para determinar el nivel de los factores para producirla no es una opción, la especificación de los niveles de los factores es una decisión endógena y la producción la rige una variable exógena.

La función de costos implica derivar un conjunto de ecuaciones de demanda y no se han desarrollado funciones de costo con características atractivas como: linealidad en sus parámetros y estructuras de producción generales.

Una función de costos que se propone para el sector eléctrico en México se expresa de la forma:

$$lnF = \frac{\alpha_I + \gamma_{II} lnp_I + \gamma_{IC} lnp_C + \delta_{IK} lnP_K + \delta_{IL} lnp_L + \gamma_{IA} lnA}{-(\beta_K + \delta_{IK} lnp_I + \delta_{CK} lnp_C + \varepsilon_{KK} lnp_K + \varepsilon_{KL} lnp_L + \varepsilon_{KA} lnA} \quad (6.2)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \ln(\pi+1) = {} & \alpha_0 + \alpha_I lnp_I + \alpha_C lnp_C + \beta_K lnp_K + \beta_L lnp_L + \alpha_A lnA + \frac{1}{2}\gamma_{AA}(lnA)^2 + (lnA)^2 \\ & + \frac{\gamma_{II}}{2}(lnp_I)^2 + \frac{\gamma_{CC}}{2}(lnp_I)^2 + \gamma_{IC} lnp_I lnp_c + \gamma_{IA} lnp_I lnA + \gamma_{CA} lnp_C lnA \\ & + \frac{\varepsilon_{KK}}{2}(lnp_K)^2 + \frac{\varepsilon_{LL}}{2}(lnp_L)^2 + \varepsilon_{KL} lnp_K lnp_L + \varepsilon_{KA} lnp_K lnA \\ & + \varepsilon_{LA} lnp_L lnA + \delta_{IK} lnp_I lnp_K + \delta_{IL} lnp_I lnp_L + \delta_{CK} lnp_C lnp_K \\ & + \delta_{CL} lnp_C lnp_L = 0 \qquad (6.3) \end{aligned}$$

Conclusión

En el trabajo se analizaron las funciones de producción de Cobb-Duglas y translogarítmica y su aplicación para representar la producción de electricidad, y en base a la revisión de la literatura sobre el tema se establece la viabilidad para caracterizar el modelo del sector eléctrico en México, se establece el procedimiento para obtener resultados numéricos mediante la generalización de las propuestas de Christensen, Jorgenson y Lau, donde se admite la premisa de la dualidad teórica sobre las funciones de producción y costo, que permiten determinar cuál es la máxima producción que se espera al mínimo costo, se encontró que las funciones de producción presentan características no lineales, mientras que las funciones de costos presentan características lineales que facilita la estimación.

En un pronóstico de series de tiempo los valores agregados de los precios, cantidad de producto y factores productivos influyen entre sí, por lo tanto, es conveniente especificar un modelo econométrico para obtener estimaciones consistentes, al plantear hipótesis económicas de simetría y homogeneidad, indispensables para emplear la función translogarítmica.

Queda pendiente la aplicación para obtener resultados numéricos, ya que todavía es materia de estudio para presentar detalladamente un modelo que optimice la producción del sector eléctrico en México, por lo que la próxima generalización consistirá en proporcionar un modelo con datos reales del sector.

Bibliografía

Azofeifa Georgina y Villanueva Marlene. (1996), Estimación de una función de producción: Caso Costa Rica, Banco Central de Costa Rica, Departamento de Investigaciones Económicas, pp 101.

Christensen, L, Jorgenson, D., and Lau, L. (1973), Transcendental Logarithmic Production Frontiers, *The Review of Economics and Statistics*, February, pp 28-45.

Christensen, L., Jorgenson, D., and. Lau, L. (1971), Conjugate Duality and the Transcendental Logarithmic Production Function, *Econometrica,* 39, pp 255 256.

Christensen, L. and W. Greene (1976), Economies of Scales in US Electronic Power Generation, *Journal of Political Economy*, 84, pp 655-676.

Cobb, C., and Douglas, P. (1928), A Theory of Production, *The American Economic Review*, 18, Supplement, pp 139-72.

Diewert, W. (1971), An Application of The Shephard Duality Theorem: A Generalized Leontief Production Function, *Journal of Political Economy,* 79, pp 481-507.

Douglas, P.H., (1948) Are There Laws of Production? *American Economic Review*, 38, 1-41.

Laurits R. Christensen, Dale W. Jorgenson, Lawrence J. Lau. (1975), Association Transcendental Logarithmic Utility Functions, The American Economic Review, Vol. 65, No. 3, pp. 367-383.

Wooldridge, J.M., A test for functional form against nonparametric alternatives, *Econometric Theory*, 8, 452-475. 1992.