

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL ECUADOR  
FACULTAD DE ECONOMÍA**

---

**DISERTACIÓN DE GRADO PREVIA A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE  
ECONOMISTA**

**EFICIENCIA, SOSTENIBILIDAD AMBIENTAL Y EQUIDAD  
INTERGENERACIONAL EN LOS MODELOS DE GENERACIONES  
TRASLAPADAS: LECCIONES DE POLÍTICA**

**VÍCTOR HERNÁN AGUIAR LOZANO**

**OCTUBRE, 2008  
QUITO – ECUADOR**

## **AGRADECIMIENTO**

*Agradezco de manera profunda a todas las personas que directa o indirectamente ayudaron a la culminación de esta disertación. En primer lugar a mis padres por su ayuda y soporte, en segundo lugar a mis hermanos por su invaluable apoyo, en tercer lugar a una persona especial, que sin estar, fue siempre un impulso para esta tarea. Y finalmente, a mi directora de tesis Mónica Mancheno, por su fundamental soporte y consejo. A mis lectores Lenin Pareño y Oscar Zapata; por su generosa disposición a ayudarme y por su importantísima guía. Así mismo, agradezco a Wilson Pérez por su ayuda desinteresada y por su supervisión insustituible para la realización de esta investigación. Sin duda, los agradecimientos pueden extenderse muchísimo más pero quiero dejar un agradecimiento fraterno a todos los profesores, compañeros, amigos y demás personas que hacen la querida Facultad de Economía de la PUCE, lugar donde he tenido los mejores años de mi vida y donde espero siempre volver.*

## ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO I.....	1
INTRODUCCIÓN.....	1
2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	3
2.1. Definición.....	3
2.1.1 La crisis ambiental: límites al crecimiento y desafíos a la teoría económica .....	3
2.1.2 Modelos de crecimiento económico: la importancia del modelo de generaciones traslapadas .....	7
2.1.3 Sostenibilidad, equidad intergeneracional y análisis de óptimos económicos... 10	
3. JUSTIFICACIÓN.....	14
4. Preguntas de investigación.....	14
5. Delimitación.....	15
6. HIPÓTESIS DE TRABAJO.....	15
7. OBJETIVOS.....	15
8. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN.....	16
8.1. Tipo de investigación: disertación teórica.....	16
8.2. Métodos de investigación.....	17
8.3. Procedimiento metodológico .....	17
CAPÍTULO II.....	20
MARCO TEÓRICO .....	20
1.1. Escuela Neoclásica.....	20
1.1.1 Modelo de Generaciones Traslapadas.....	20
1.1.2 Generaciones Traslapadas e ineficiencia dinámica .....	22
1.1.3 Generaciones Traslapadas centralizada y criterios de descuento temporal.....	22
1.1.4 Generaciones Traslapadas e incertidumbre .....	25
1.1.6. Criterios de óptimo económico .....	26
Teorema del bienestar y óptimo de Pareto. ....	26
Mejoras en el sentido de Pareto con transferencias.....	27
1.1.7 Compensaciones y criterios Kaldor-Hicks. ....	27
1.1.8 Desarrollo sustentable.....	28
1.1.9 Las sustentabilidad: fuerte y débil .....	31
1.1.10 La justicia intergeneracional.....	32
1.1.11 Rawls y el velo de ignorancia.....	33
1.1.12 La justicia según Rawls .....	34
1.1.14 El principio del velo de ignorancia aplicado a un contrato intergeneracional.....	36
1.1.15 La Economía Circular y las funciones del medio ambiente .....	37
1.2. Argumento.....	39
2. Evaluación del marco teórico.....	41
CAPÍTULO III .....	45
ESTADO DEL ARTE .....	45
GENERACIONES TRASLAPADAS CON RESTRICCIONES AMBIENTALES .....	45
1. Los modelos de generaciones traslapadas y el medioambiente.....	45
2. Modelos de generaciones traslapadas y medioambiente .....	46

2.1.	MGT con medioambiente desde el problema del consumidor.....	46
3.2	El Modelo de Generaciones Traslapadas, con el medio ambiente desde el problema de la firma.....	52
4.	Equidad intergeneracional y medioambiente .....	61
	CAPÍTULO IV .....	76
	UN MODELO DE GENERACIONES TRASLAPADAS CON MEDIO AMBIENTE .....	76
1.	Resolución modelo descentralizado .....	76
2.	Planteamiento y supuestos del modelo.....	76
2.1.	Problema del consumidor.....	76
2.2.	El problema de las firmas.....	78
2.3.	Medioambiente e índice ambiental .....	79
3.	Resultados del modelo descentralizado.....	88
3.1.	Consumidores:.....	88
3.2.	Firmas:.....	91
3.3.	Equilibrio del mercado de bienes:.....	91
3.4.	Dinámicas y estado estacionario:.....	91
3.4.	Estado estacionario: .....	92
3.5.	Dinámica local .....	98
4.	Comando central.....	102
4.1	Planteamiento y solución del modelo centralizado.....	102
4.2.	Estado estacionario y regla de oro .....	107
4.3	Regla de oro verde o edad de oro.....	113
4.4	Dinámicas del comando central.....	116
4.5	Análisis de óptimo paretiano: .....	117
4.6	Análisis de equidad intergeneracional .....	121
4.6	Análisis de sostenibilidad ambiental.....	129
4.7	Una extensión al modelo descentralizado: crecimiento endógeno .....	134
	CAPÍTULO V .....	137
	LECCIONES DE POLÍTICA, RESULTADOS, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....	137
1.	Lecciones de política, conclusiones y recomendaciones.....	137
2.	Sumario de resultados observados de los modelos presentados de las generaciones traslapadas, medioambiente, sostenibilidad y equidad intergeneracional.....	137
2.	Implicaciones de política observadas y sumario de las propuestas e instrumentos presentados. ....	146
3.	Resultados e implicaciones de política del modelo construido .....	150
4.	Conclusiones .....	169
5.	Recomendaciones .....	170
	BIBLIOGRAFÍA:.....	171

## Índice de Anexos<sup>1</sup>

A1.	Resolución Modelo Descentralizado .....	; <b>Error! Marcador no definido.</b>
A.2	Consumidores: .....	; <b>Error! Marcador no definido.</b>
A.3.	Firmas:.....	; <b>Error! Marcador no definido.</b>
A.4.	Equilibrio del mercado de bienes:.....	; <b>Error! Marcador no definido.</b>
A.5.	Dinámicas y estado estacionario: .....	; <b>Error! Marcador no definido.</b>
A.6.	Estado estacionario: .....	; <b>Error! Marcador no definido.</b>
A.7	Dinámica local .....	; <b>Error! Marcador no definido.</b>
B.	Simulaciones numéricas .....	; <b>Error! Marcador no definido.</b>
B.1	Modelo descentralizado básico .....	; <b>Error! Marcador no definido.</b>
B.2	Modelo con crecimiento poblacional.....	; <b>Error! Marcador no definido.</b>
B.3.	Crecimiento endógeno: .....	; <b>Error! Marcador no definido.</b>
C.	Comando Central .....	; <b>Error! Marcador no definido.</b>
C.1	Comando Central –considerando depreciación- d es 1:....	; <b>Error! Marcador no definido.</b>
C.1.2	Estado estacionario y regla de oro –considerando depreciación- d es 1;	; <b>Error! Marcador no definido.</b>
C.2	Comando central sin depreciación .....	; <b>Error! Marcador no definido.</b>
C.2.1	Estado estacionario y regla de oro .....	; <b>Error! Marcador no definido.</b>
D.	Regla de oro verde o edad de oro.....	; <b>Error! Marcador no definido.</b>
E.	Análisis de óptimo paretiano: .....	; <b>Error! Marcador no definido.</b>
E.1	Demostración para el caso de total depreciación;	; <b>Error! Marcador no definido.</b>
E.2	Demostración para el caso sin depreciación: ...	; <b>Error! Marcador no definido.</b>
F.	Análisis de equidad intergeneracional.....	; <b>Error! Marcador no definido.</b>
G.	Análisis de sostenibilidad ambiental.....	; <b>Error! Marcador no definido.</b>
F.	Extensión del modelo descentralizado con crecimiento endógeno: .....	; <b>Error! Marcador no definido.</b>
9.	BIBLIOGRAFÍA:.....	; <b>Error! Marcador no definido.</b>

---

<sup>1</sup> Anexo con numeración independiente.

## PRÓLOGO

La economía para mí fue un hallazgo muy venturoso. Sin haber tenido la oportunidad de acercarme a ella en mi educación secundaria, fue en honor a la verdad, un hecho del azar el haber escogido esta disciplina. Hoy, me siento muy feliz de haberla estudiado por cuatro años. La forma de pensar que ofrece es un ejercicio intelectual fascinante y que nunca deja de sorprenderme. Luego de este tiempo, sé que es muchísimo más lo que tengo que aprender y descubrir que lo que he aprendido y este hecho me motiva aún más. Es así, que este trabajo ha sido otro paso en el proceso de aprender economía.

Tengo claro, que la economía es una disciplina en construcción y que muchas veces un economista termina siendo un meteorólogo social. Todos sabemos, que los meteorólogos suelen fallar muchas veces, algunos pueden decir que demasiadas. Sin embargo, la sociedad los requiere puesto que su arte también ha permitido evitar catástrofes mayores, como en el caso de un huracán. El economista tiene una tarea similar y su trabajo puede tener efectos profundos sobre la vida de miles de personas y también sobre la naturaleza. Tanto sus aciertos como fallos. Esto implica una gran responsabilidad y un gran compromiso. En mi opinión, la pobreza y el medio ambiente son las prioridades del conocimiento económico debido a la situación actual del mundo. Y esta convicción, fue el germen del nacimiento de esta investigación.

El presente trabajo es una búsqueda de conocimiento personal, para conocer más sobre varias herramientas de la macroeconomía moderna, pero también es un esfuerzo de sistematización de varios aportes en el tema sostenibilidad en el sentido amplio utilizando modelos de generaciones traslapadas. El modelo propio es un intento para tratar de comprender mejor el efecto de la relajación de supuestos que en mi opinión quitan muchas dimensiones del problema ambiental. Un modelo no es una representación fiel de la realidad, sólo una forma de pensar de manera sistemática para tratar de comprender realidades e interrelaciones complejas. Este

modelo queda totalmente documentado, en su desarrollo en los anexos y está abierto a revisión y críticas. Mi intención final ha sido encontrar ciertos criterios genéricos de política ambiental y macroeconómica que tengan un enfoque dinámico del problema ambiental y que consideren un sistema medioambiental estable. Los lectores juzgarán la importancia y relevancia de los mismos.

## **CAPÍTULO I**

### **INTRODUCCIÓN**

La actual situación ambiental del mundo ha planteado cuestionamientos sobre los límites que la naturaleza impone al crecimiento económico. Así también, se considera que la contaminación y por extensión otros problemas ambientales como el agotamiento de los recursos naturales, tendrían sus raíces en el alto crecimiento económico y poblacional (Hardin, 1968). A pesar de esto, la literatura económica sobre crecimiento económico, ha ignorado frecuentemente las restricciones y variables de tipo ambiental. Es por esta razón, que esta investigación tiene como objetivo estudiar los modelos de Generaciones Traslapadas, que incluyan restricciones y variables ambientales.

Se analizará y estudiará el modelo de Generaciones Traslapadas (MGT –en inglés Overlapping Generations Model-) porque es uno de los pilares de la Nueva Macroeconomía Neoclásica, junto a los modelos de Dinastías o de Agentes de Vida Infinita a la Ramsey y los Modelos de Ciclos Reales o RBC. Además, la estructura de los modelos MGT, nos permitirán analizar criterios de eficiencia, sostenibilidad ambiental y equidad entre generaciones (Blanchard & Fischer, 1989). Cabe destacar que el análisis de la optimalidad de las asignaciones de recursos en una economía en términos de eficiencia y equidad, es sumamente interesante debido a su utilidad para determinar las características de un modelo de desarrollo que sea sostenible y de una asignación de recursos óptima entre generaciones.

En la presente investigación se establece cuáles son las relaciones, efectos y consecuencias de imponer restricciones y considerar variables ambientales en un modelo macroeconómico dinámico de Generaciones Traslapadas. Se analiza si las trayectorias temporales del modelo cambiarán con

estas modificaciones y cómo lo harán. Luego, evalúa los resultados del modelo bajo criterios de óptimo económico, en términos de eficiencia, sostenibilidad ambiental y equidad intergeneracional: óptimo paretiano, criterios de Rawls, reglas de oro, sustentabilidad, etc. Entonces, se buscará establecer las condiciones para que pueda garantizarse un modelo sostenible y equitativo en términos ambientales e intergeneracionales. Luego se derivan lecciones o criterios para los hacedores de políticas.

El modelo de Generaciones Traslapadas o solapadas, como ya se dijo es uno de los modelos básicos de la macroeconomía moderna, que se caracteriza por utilizar fundamentos microeconómicos. Fue desarrollado por Allais (1947), Paul Samuelson (1958) y Diamond (1965.). Como el nombre del modelo lo indica, este estudia el comportamiento agregado de economías formadas por dos o más generaciones de individuos, que conviven al mismo tiempo. Cada bloque de individuos intenta maximizar su utilidad, teniendo en cuenta su período de vida, produciéndose como resultado diversos efectos agregados sobre las variables macroeconómicas fundamentales –consumo, ahorro, inversión, etc.- (Blanchard & Fischer, 1989).

La delimitación de la presente investigación teórica está dada por el instrumento a utilizarse, que es el del modelo de Generaciones Traslapadas. Este es un modelo muy rico, pues es un modelo de Equilibrio General Dinámico y permite muchas modificaciones que lo hacen ideal para evaluar políticas públicas y en este caso externalidades y consideraciones sobre equidad intergeneracional. Sin embargo, por las características de modelo matemático neoclásico, es abstracto por naturaleza e impone fuertes supuestos para poder funcionar, aunque a cambio nos proporciona fuertes conclusiones. De todas maneras, se ilustrarán con ejemplos pertinentes y con hechos estilizados, los resultados teóricos.

El resultado más importante que se encuentra, es la incapacidad de la economía descentralizada para estar en una trayectoria sustentable o llegar a un

estado estacionario óptimo. La equidad intergeneracional tampoco puede ser alcanzada por el mercado, por la presencia de externalidades negativas intergeneracionales. La introducción de restricciones y variables ambientales, afecta el comportamiento dinámico y los niveles de estado estacionario de la economía. En general, la economía competitiva tiende a sobre-acumular –o subacumular- capital y sobre-degradar el medioambiente. Finalmente, se deriva una regla de oro verde, para los niveles dorados de capital y medioambiente. Esta regla garantiza eficiencia, sostenibilidad y equidad intergeneracional. Bajo criterios de Pareto (Mas-Collel, Whinston, & Green, 1995), Chichilnisky (1997) y Harsanyi (1953, 1955); respectivamente. Se recomienda, políticas coordinadas macroeconómicas y ambientales, de largo plazo para eliminar las externalidades intergeneracionales y alcanzar la sostenibilidad en sus dimensiones económica, social y ambiental.

En términos generales, la estructura de la presente disertación estará dada por el capítulo introductorio donde definiremos la problemática, los objetivos, la hipótesis y metodología. En un segundo capítulo se expondrá el Marco Teórico general que será la base de la presente investigación, este incluirá una descripción amplia del modelo de generaciones traslapadas, los criterios de óptimo económico, equidad intergeneracional, sustentabilidad, variables y restricciones ambientales. En un tercer capítulo, se expondrá el estado del arte de los tratamientos académicos similares sobre las Generaciones Traslapadas y el medio ambiente. En este apartado, se clasifican los aportes analizados por los tipos de supuestos utilizados. En un cuarto capítulo expondremos el modelo propuesto y se lo analizará y estudiará ampliamente en su dinámica, optimalidad y equidad intergeneracional. Finalmente en un quinto capítulo se presentará un sumario de los principales resultados y se concluirá.

## **2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

### **2.1. Definición**

#### **2.1.1 La crisis ambiental: límites al crecimiento y desafíos a la teoría económica**

La actual situación ambiental del mundo, y las crecientes inquietudes que se plantean sobre los límites que la naturaleza impone al crecimiento económico han llevado al cuestionamiento sobre varios de los paradigmas científicos y sociales existentes. Entre ellos están los modelos de crecimiento de posguerra con un Estado de tipo keynesiano, los modelos desarrollistas latinoamericanos y asiáticos, los modelos comunistas, etc. (Gutiérrez, 2007). A nivel teórico, los tratamientos académicos del crecimiento económico han ignorado en su gran mayoría las restricciones, variables y supuestos de tipo ambiental. Aunque la mayoría de ellos puede ser ampliado para incluirlas de una manera limitada.

Se habla de crisis ecológica, que se manifiesta en la contaminación, deforestación, desertificación, calentamiento global y perturbaciones climáticas. También el agotamiento de los recursos naturales es un problema fundamental (Euzéby, 2003). La contaminación y por extensión otros problemas ambientales, tendrían sus raíces en el alto crecimiento económico y en crecimiento exponencial de la población desde la primera revolución industrial. Se debe aclarar que el crecimiento económico no es la causa única. Más bien se plantea que es la explosión demográfica el problema más importante. Este a su vez es causado por los avances tecnológicos en la agricultura y la mejora de la medicina que tuvieron un efecto positivo sobre la esperanza de vida media de los humanos –que se ven incentivados por el crecimiento económico en un círculo de retroalimentación-(Hardin, 1968).

Además, la conformación de una sociedad consumista y una población creciente que utiliza más allá de lo socialmente deseable los servicios y bienes proporcionados por el medio ambiente –tragedia de los comunes-. Podemos ilustrar esta afirmación citando la sobreutilización de la función de sumidero de residuos de la atmósfera que configura el problema de la contaminación del aire. En la actualidad, la población humana es 6,5 mil millones y se espera que para el 2050 se llegue a 9 mil millones, la mayoría de la población está en Asia y en África. Es un mundo muy desigual donde el 2% del total controla la mitad de la riqueza. El ingreso nacional bruto per cápita promedio mundial es de USD 8760

PPC –poder de paridad de compra- 2004, mientras que en los países menos adelantados llega a sólo a USD 1330 PPC 2004. El consumo de energía per cápita mundial es 1734 kgp/per mientras que en los países menos desarrollados 306 kgp/per (UNFPA, 2006).

Las emisiones de CO<sub>2</sub> han crecido el 31% y crecieron desde 1750 que tenían 278 ppm hasta 365 ppm en 1998 (Houghton, 2001). EEUU es el país que más emite gases de invernadero. La temperatura global ha aumentado y los últimos años 2005, 2006 han sido los más calientes en toda la historia. Desde la entrada en vigencia del Protocolo de Kyoto en 2005, se ha disminuido las emisiones de gases invernadero en los países industrializados contratantes en sólo 3.3% con respecto al 2000. Las emisiones correspondientes a metano son el 9.5% del total, segundos en importancia luego del CO<sub>2</sub> con 83.1% (UNFCCC, 2006). En el Ecuador, las emisiones per cápita de CO<sub>2</sub> son de 1.8 toneladas métricas por habitante para 2003. El consumo de energía per cápita es 708 kgp/cap, el consumo de combustible tradicional para 2003 es de 22 kgp/cap (PNUD, 2006). La población actual -2007- es de 13,4 millones y para el 2050 será 19,2 millones (PNUD, 2006). El último informe de las Naciones Unidas se dice que la probabilidad de que el calentamiento global sea de origen humano es de más de 90% (GEIC, 2007)

Los paradigmas económicos actuales: capitalista, socialista y los sistemas mixtos, se basan en el supuesto implícito del crecimiento económico continuo e ilimitado (Gutiérrez, 2007). Este supuesto, hace que problemas intergeneracionales, intrageneracionales, interespecies, de equidad y sustentabilidad sean ignorados o al menos pospuestos. La solución más fácil para estos problemas parecería ser el crecimiento adicional. La teoría económica convencional se refiere a una economía como sana si mantiene tasas de crecimiento continuas y altas. Los límites energéticos y de recursos que enfrenta el crecimiento, según estos paradigmas, serán eliminados por la utilización inteligente de nuevas tecnologías (Costanza & Wainger, 1991). La ecología política reúne a todos estos paradigmas bajo el nombre de productivistas. Se

señala a éstos como los principales impulsores del crecimiento exponencial y el máximo culpable del agotamiento y degradación de los recursos naturales (Sanjuán, 1999).

Frente a esta realidad, enfrentamos la necesidad de la revisión de la teoría económica para lograr el reconocimiento del propio sistema económico como un sistema abierto a la Biósfera. Este es uno de los planteamientos fundamentales de la economía ecológica (Martínez Alier, 1999). Sin embargo, esto requeriría un salto de paradigma científico. En este sentido un enfoque ambiental podría ser más accesible ya que se busca una ampliación y reformulación de la teoría económica existente, en especial del crecimiento económico. En este sentido, se ve como fundamental, la reformulación de los principios, supuestos de los modelos básicos de la teoría económica. Además de la creación de criterios para tomar en cuenta las restricciones y variables impuestas por el medioambiente a cualquier economía.

Claramente, esta revisión no implica eliminar el hiato subyacente entre naturaleza y hombre presente en las teorías científicas, modelos sociales y éticos existentes - incluida la teoría económica (Jonas, 1995). Por el contrario, lo que se plantea es la ampliación de la teoría económica tradicional del crecimiento para incluir variables y supuestos ambientales. De todas maneras, en el ámbito teórico, este desafío es grande y requieren un gran esfuerzo metodológico y epistemológico. Así, el estudio de los modelos de crecimiento como el de Generaciones Traslapadas y su reformulación para contemplar una dimensión ambiental es de gran interés.

El modelo de Generaciones Traslapadas o MGT –en inglés *Overlapping Generations Model*- es propicio para este tipo de análisis, debido a que sus características permitirán analizar criterios de eficiencia y equidad, es decir, de optimalidad entre generaciones (Blanchard & Fischer, 1989). El análisis de la optimalidad de las asignaciones de recursos en una economía en términos de eficiencia y equidad, es sumamente importante. Este acercamiento teórico

muestra ser útil para determinar las características de un modelo de desarrollo que sea sostenible y de una asignación de recursos óptima entre generaciones.

En la presente investigación se establece cuáles son las relaciones, efectos y consecuencias de imponer restricciones y considerar variables ambientales en un modelo macroeconómico dinámico de Generaciones Traslapadas. Se busca analizar cómo cambian las trayectorias temporales del modelo, con estas modificaciones. Luego, se evalúa los resultados del modelo bajo criterios de óptimo económico adecuados, en términos de eficiencia, sostenibilidad ambiental y equidad intergeneracional. Especialmente, se establecen las condiciones para que pueda garantizarse un modelo sostenible y equitativo en términos intergeneracionales y se derivan algunas lecciones para los hacedores de políticas.

### **2.1.2 Modelos de crecimiento económico: la importancia del modelo de generaciones traslapadas**

El crecimiento económico se ha convertido en una de las áreas más activas de la macroeconomía. Las contribuciones seminales de Robert Solow en 1956 y de Trevor Swan en el mismo año, sentaron las bases de la investigación en este campo durante los 15 años siguientes. La investigación en esta línea continuó hasta inicios del 1970s, cuando los choques de la inflación y del petróleo redirigieron el interés de la macroeconomía a los problemas del corto plazo y a su estabilización. Con los modelos de crecimiento endógeno, que tienen su base en la contribución de Paul Romer en 1986, en la cual el crecimiento de largo plazo emerge como un resultado del equilibrio (Dowrick, Pitchford, & Turnovsky, 2004).

La Nueva Macroeconomía Neoclásica tiene como pilares fundamentales a los modelos de Dinastías o de Agentes de Vida Infinita a la Ramsey<sup>2</sup> y los Modelos de Generaciones Traslapadas. Además, se debe aclarar que la

---

<sup>2</sup> Los modelos en tiempo continuo que consideran un agente representativo de vida infinita. Estos modelos tienen su origen en el tratamiento de Ramsey (1928).

macroeconomía moderna está caracterizada por los siguientes elementos: los componentes principales son agregados en naturaleza; los modelos en uso son derivados de comportamientos optimizadores y en consecuencia, las propiedades dependen esencialmente de las preferencias y tecnologías; y las interacciones en el tiempo son tomadas en cuenta explícitamente, dando un lugar importante al análisis dinámico. Finalmente, el marco del equilibrio general es preferido a los equilibrios parciales (de La Croix & Michel, 2002).

Aunque hay muchas características en común entre el enfoque de agentes de vida infinita y el modelo de generaciones traslapadas. El segundo modelo tiene características específicas como la distribución intergeneracional y de ahí aspectos de seguridad social, educación, deuda pública y el medio ambiente. Este modelo en sus versiones más simples tiene al menos dos tipos de agentes que son los jóvenes y los viejos dando lugar al análisis distribucional. Adicionalmente, se ha mostrado que el modelo de dinastías o agentes de vida infinita puede ser visto como un caso especial del modelo MGT; cuándo se consideran generaciones de juventud infinita (Blanchard & Fischer, 1989; de La Croix & Michel, 2002).

Además, el modelo de Generaciones Trasladas u MGT, es importante, porque su estructura permite analizar la teoría del consumo del ciclo de vida. Se destaca también porque sus soluciones descentralizadas y competitivas pueden no coincidir con las soluciones centralizadas o con un planificador central. Sin embargo, lo más remarcable está en el hecho de que una solución competitiva puede no ser necesariamente considerada óptimo de Pareto (Blanchard & Fischer, 1989).

Este modelo es muy rico y puede ser usado para analizar criterios de eficiencia, sostenibilidad ambiental y equidad entre generaciones. El modelo de Generaciones traslapadas o solapadas, como ya se dijo, es uno de los modelos básicos de la Macroeconomía moderna, que se caracteriza por utilizar fundamentos microeconómicos. Fue desarrollado por Allais (1947), Paul

Samuelson (1958) y Diamond (1965). Como el nombre del modelo lo indica, este estudia el comportamiento agregado de economías formadas por dos o más generaciones de individuos, que conviven al mismo tiempo. Cada bloque de individuos intenta maximizar su utilidad, teniendo en cuenta su período de vida, produciéndose como resultado efectos agregados en la trayectoria temporal del consumo y del capital (Blanchard & Fischer, 1989).

Cabe aclarar que las características de un modelo de generaciones traslapadas de dos períodos de vida, no puede ser extendido a uno de  $n$ -períodos. Generalmente, al introducir tres períodos dentro de la vida de una generación hace al modelo no computable (Blanchard & Fischer, 1989). Suplementariamente, se debe mencionar algunas propiedades de este modelo como son: la posibilidad de burbujas de activos y que el equilibrio competitivo puede ser ineficiente. Adicionalmente, los efectos de la tasa de interés en el comportamiento del ahorro y el tipo de dinámicas, sean estas monótonas, oscilatorias, etc., dependen fundamentalmente en el número de períodos considerados. El modelo de generaciones traslapadas en su versión más simple trata más del largo plazo y tiene poco que decir del corto plazo (de La Croix & Michel, 2002).

La economía del desarrollo y del crecimiento también utiliza ampliamente el modelo de generaciones traslapadas, por varias razones. En primer lugar, la introducción del capital humano, pueden hacer útil la modelización del proceso intergeneracional de la educación. Otra propiedad del modelo más simple es que los términos del crecimiento a largo plazo depende de las condiciones iniciales. En otras palabras, el punto de inicio de la economía es fundamental. Por ejemplo, comenzar con demasiado poco capital puede llevar a una trampa de pobreza (de La Croix & Michel, 2002).

El resultado más fuerte del Modelo de Generaciones Traslapadas es la ineficiencia dinámica. Es decir, que un equilibrio competitivo no es necesariamente Óptimo de Pareto. Este resultado significativo condujo a una

paradoja no resuelta definitivamente hasta los setenta, puesto que a pesar de que la economía carezca de imperfecciones, el resultado agregado de una economía de competencia perfecta puede ser ineficiente en el sentido de Pareto, lo que contradecía, en un principio, los resultados del modelo de Equilibrio General desarrollado por Kenneth Arrow y Gerard Debreu (Geanakoplos, 1987).

En el modelo MGT, podría darse la sobre-acumulación del acervo o stock de capital, que podría ser consumido mejorando la utilidad de una generación sin detrimento de las otras, pues siempre se podía pedir prestado a la siguiente generación. Esto significa, que la ineficiencia procedía de la existencia de un infinito número de agentes en el modelo, unido a un infinito número de mercados, hecho que se derivaba de que las distintas generaciones (que aparecen en la economía, viven y mueren) se extendían hasta el infinito (D. Romer, 1989).

Adicionalmente, es fundamental denotar la posibilidad de agentes heterogéneos que permiten introducir criterios distribucionales y la flexibilidad del modelo para ser modificado –con variables ambientales por ejemplo-. Estas características hacen ideal a los MGT como laboratorio para encontrar y evaluar los óptimos bajo criterios de eficiencia, sostenibilidad ambiental y equidad entre generaciones. Claro está que existen varios criterios de óptimo económico para evaluar los resultados. El óptimo paretiano, criterios de Rawls, Hicks-Kaldor, reglas de oro, sustentabilidad, etc. Estos criterios además serán considerados para considerar correctamente la eficiencia, sostenibilidad ambiental y la equidad intergeneracional.

### **2.1.3 Sostenibilidad, equidad intergeneracional y análisis de óptimos económicos.**

La idea de desarrollo sustentable nació de la preocupación mundial causada por la sobreexplotación de los recursos naturales, especialmente después de los años 50s, que estuvieron caracterizados por una alta tasa de crecimiento del PIB y por una degradación ambiental importante (Gutiérrez, 2007). Los

primeros debates subrayaban los límites físicos que el ambiente imponía al crecimiento económico y promulgaban la necesidad del fin del crecimiento económico (Meadows, 1972). Para otros, los ecosistemas deben ser vistos como plataformas para que las especies animales se reproduzcan de una manera indefinida, así estableciendo la base del concepto de sostenibilidad ((IUCN), 1980).

Los teóricos económicos se fueron interesando en la sustentabilidad poco a poco. Así, una formulación importante hecha por Robert Repetto afirma que en el centro de la idea de sostenibilidad estaba la noción según la cual no se debe tomar ninguna decisión que pueda afectar las posibilidades de mejorar o mantener el nivel de vida futuro (Repetto, 1985). Es importante también, evocar el vínculo entre la visión de desarrollo sustentable y el del ingreso o del consumo: para Hicks (1946) existe una necesidad de mantener el nivel de ingreso a través del tiempo. De una manera más clara, la regla de oro del crecimiento dice: el máximo consumo el día de hoy, que no disminuye el consumo del futuro. En esta línea, Solow (1974) afirmaba que el deber impuesto por la sostenibilidad no es el de dejar como herencia una cosa en particular pero si la obligación de dejar todo lo necesario para las generaciones futuras puedan alcanzar un nivel de vida al menos tan alto como el nivel de nuestra generación. Para él, es fundamental que no consumamos el capital, en sentido amplio, de la humanidad.

El término desarrollo sustentable se volvió popular luego de su utilización en el Informe Brundtland (1987) o *Nuestro Futuro Común –Our common future–*, que dio el concepto de Desarrollo Sustentable como: “El desarrollo que responde a las necesidades de las generaciones presentes sin comprometer la capacidad de las generaciones futuras para responder a las suyas”. De una parte, resalta la noción de necesidades, que se oponen claramente a la noción de deseos, reconociendo las necesidades esenciales de los pobres del mundo que deberían tener prioridad. Por otra parte, se subraya la idea de la

existencia de límites reales impuestos por la energía, los recursos, la tecnología y las instituciones para satisfacer las necesidades futuras y presentes.

La importancia del Informe Brundtland es muy grande. No solamente porque es citado frecuentemente sino porque ha tenido una enorme influencia sobre la concepción del progreso económico y social. En efecto, nos recuerda que la sostenibilidad se trata de nuestras obligaciones con las generaciones futuras, o más exactamente con sus necesidades. En otras palabras, la sostenibilidad habla de desarrollo con equidad intergeneracional. En sí, lo que propuso el Informe Brundtland es un concepto complejo y profundo que nos invita a pensar en un nuevo desarrollo que va más allá del crecimiento del PIB, pero que permite evitar la conclusión poco atractiva de dejar el mundo como lo encontramos –o el crecimiento cero, como se podría intuir en el Informe Meadows (1972)-.

La sostenibilidad es un asunto de equidad distributiva, es decir, de cómo compartir la capacidad de bienestar entre la gente de hoy y la gente del futuro, y hacerlo de manera aceptable. Un criterio de justicia que se ha empleado con fuerza, aunque no en el contexto de la justicia intergeneracional, por Thomas Scanlon (1982) y, más recientemente, por John Rawls (1993), es: la distribución intergeneracional realizada de una manera, que ni las generaciones futuras ni las generaciones presentes tengan razones obvias de rechazar. Rawls (1971b) sugiere que una forma de derivar principios generales de justicia es ubicar, hipotéticamente, a cada individuo en un punto original, sin que sepa cuál será su posición social posterior ni sus cualidades individuales o talentos. Estando bajo este "velo de ignorancia" se les pediría a las personas que eligieran las reglas que gobernarían la sociedad en la que ellos, luego de la decisión, se verían forzados a vivir. Esta condición se puede extender a nivel inter-temporal.

Otro de los puntos cruciales es la evaluación de optimalidad de los modelos de crecimiento. El uso del criterio estándar paretiano es necesario por ser el estándar en los modelos neo-clásicos. Una situación es considerada Pareto

no óptima si es posible mejorar la situación de alguien sin empeorar la situación de nadie. Sin embargo, este criterio ha sido considerado como insuficiente ya que se enfoca sólo en la ausencia de desperdicio (Mas-Collel et al., 1995; CEPA). Es por estas razones que sería de gran interés la inclusión de criterios alternos, como son los criterios Rawlsianos.

Una economía puede encontrarse en una situación Pareto-óptima pero completamente desagradable desde el punto de vista de casi cualquier juicio ético. Es decir, este criterio nos habla de eficiencia pero no de equidad o justicia. Así, es conveniente considerar a la optimalidad en el sentido paretiano como un término descriptivo más que normativo –la ausencia de derroche-. En sí, se puede decir que el criterio plantea una disyuntiva entre eficiencia y equidad ya que si bien resuelve el óptimo individual no resuelve el problema del óptimo en un sentido social más amplio donde no sólo es relevante la asignación de los recursos, sino también la distribución de la renta (Mas-Collel et al., 1995; CEPA).

Kaldor y Hicks elaboraron otro conjunto de criterios, para evaluar las asignaciones. Kaldor (1939) argumentó que una asignación es preferida a otra asignación si moviéndose desde la segunda a la primera, el "ganador" del movimiento puede, mediante un pago global, compensar al "perdedor" por su pérdida de utilidad y aún así tener un beneficio. Un test alternativo fue propuesto por Hicks (1939) en términos de un "soborno" de los perdedores como opuesto a una "compensación" por los ganadores. Una asignación resultaría preferida a otra si, dado un movimiento propuesto desde la segunda a la primera, los perdedores no son capaces de sobornar a los ganadores para que no realicen el movimiento. Obsérvese que el criterio de Hicks invierte la noción de Kaldor (CEPA). Este criterio presenta problemas importantes al ser aplicado a un entorno intergeneracional, debido a que el potencial de compensación puede no existir, ya que ciertas generaciones podrían no encontrarse nunca en el tiempo.

Así, utilizando diversos criterios de sostenibilidad se tiene una mejor interpretación de los resultados de los modelos de crecimiento actualmente implantados y de su deseabilidad social. Es crucial entonces la reformulación e implementación de un modelo teórico, con los ajustes necesarios, para reflejar de mejor manera la realidad medioambiental. Estos ajustes, permiten una mejor comprensión de la situación actual y abrirá camino para políticas económicas – especialmente de crecimiento y desarrollo-. Finalmente, se podría establecer ciertos criterios y principios para la formulación más acertada de las mismas.

### **3. JUSTIFICACIÓN**

La destrucción medioambiental, la crisis ecológica, el calentamiento global, son todos retos formidables para la ciencia. La economía debe reconocer esta realidad y además debe reformular su comprensión del sistema económico para poder dar respuestas y soluciones a estos nuevos problemas. En este sentido, se debe reformular el modelo de Generaciones Traslapadas en términos de las restricciones ambientales y variables ambientales. Esto permitirá dilucidar los efectos reales sobre la eficiencia y equidad de la distribución intergeneracional, tomando en cuenta diversos criterios como el paretiano, rawlsiano y otros. Finalmente, se puede establecer en este modelo, criterios de sostenibilidad de manera formal como la regla de oro verde o edad dorada en tiempo discreto y en un modelo de generaciones traslapadas.

### **4. Preguntas de investigación**

¿Cuáles son las implicaciones de política económica a nivel teórico de la aplicación de restricciones y variables ambientales sobre el desempeño del modelo de *Generaciones Traslapadas*?

¿Cómo cambian el estado estacionario y la dinámica de crecimiento económico –las trayectorias del ahorro, consumo e inversión- si se reformula e incluyen variables y restricciones ambientales en el modelo de Generaciones Traslapadas?

¿De qué manera cambian los resultados de una evaluación del modelo de crecimiento económico de Generaciones Traslapadas bajo los criterios de óptimo

económico, si se evalúan la eficiencia, sostenibilidad ambiental y la equidad intergeneracional?

## **5. Delimitación**

La presente investigación teórica tiene una delimitación conceptual. Se limitará al estudio de la familia de modelos de Generaciones Traslapadas. En primer lugar a nivel general y en segundo lugar en los casos en los cuales esta familia de modelos incluye variables y restricciones ambientales. El análisis de los óptimos y la equidad intergeneracional se circunscribirá a su análisis y presentación dentro de la teoría económica y a su instrumentalización.

Este estudio se origina temporalmente, desde el año 1947, en que este modelo fue por primera vez formulado por Allais –y su posterior formalización por Diamond y Samuelson-; hasta nuestros días. El cuadro espacial, es el planeta tierra, que es el espacio dónde se desarrolla el sistema económico.

## **6. HIPÓTESIS DE TRABAJO**

Un modelo de generaciones traslapadas con variables y restricciones ambientales, presentaría estados estacionarios competitivos y trayectorias dinámicas que no son óptimas bajo criterios de eficiencia, sostenibilidad ambiental y equidad intergeneracional.

## **7. OBJETIVOS**

### **7.1. General**

Determinar en un modelo de generaciones traslapadas las relaciones, efectos y consecuencias para este modelo de crecimiento económico de la imposición de restricciones sistémicas ambientales.

### **7.2. Específicos**

Reformular el modelo de Generaciones Traslapadas -previa descripción-, considerando al medio ambiente como proveedor de insumos, de bienes y

servicios y como sumidero de residuos. Y como fuente de utilidad directa de los consumidores.

Encontrar los estados estacionarios del sistema planteado y las trayectorias dinámicas (si es que existen y es posible), explicando las consecuencias de los límites físicos ambientales sobre el crecimiento económico y el bienestar de manera cualitativa.

Analizar en base a criterios de optimalidad que incluyen eficiencia, sostenibilidad ambiental y equidad intergeneracional los resultados competitivos y centralizados del modelo de Generaciones Traslapadas, derivando reglas y criterios para la sostenibilidad.

## **8. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN**

### **8.1. Tipo de investigación: disertación teórica**

La presente investigación es teórica. Según la guía para disertaciones de la PUCE, el reglamento del Universidad permite dos modalidades: La teórica y teórica aplicada. La disertación teórica es un estudio crítico, riguroso y sistemático sobre un objeto específico y significativo de una determinada disciplina o de un campo de conocimiento (PUCE, 2007). Así, la presente disertación teórica consiste en una amplia descripción y estudio del modelo de Generaciones Traslapadas, y de sus reformulaciones para que incluya restricciones y variables ambientales, para evaluar la eficiencia, sostenibilidad ambiental y equidad intergeneracional. También se construirá un modelo propio. Luego, se derivarán criterios de política económica.

Se escoge esta modalidad de disertación porque no existe una sistematización de los resultados teóricos y las lecciones sobre eficiencia, sostenibilidad ambiental y equidad intergeneracional que han sido derivados utilizando Modelos de Generaciones Traslapadas. Es importante también, con un estudio crítico de esta literatura, y mediante la construcción de un modelo propio derivar criterios genéricos de política económica.

Finalmente, un estudio teórico tiene la ventaja de evitar los problemas de medición asociados al uso de variables ambientales, permitiendo resaltar los aspectos más importantes de las relaciones economía y medio ambiente que puede ser la base para futuros estudios aplicados.

## **8.2. Métodos de investigación**

La metodología de la parte teórica, se basa en el razonamiento de tipo deductivo. Este tipo de razonamiento parte de lo general para llegar a lo específico. En este sentido, se trabajará sobre un modelo abstracto y sobre los supuestos y variables del mismo en sentido general. Luego, de realizar un análisis del mismo se tratará de introducir nuevas restricciones y variables de tipo ambiental. Finalmente, en la parte fundamental de proceso se analizará los cambios en los resultados, trayectorias, equilibrios, dinámicas e implicaciones del modelo; y sobre todo en los análisis de eficiencia económica, equidad intergeneracional y sostenibilidad ambiental.

La metodología dialéctica de tesis, antítesis y síntesis; será usada extensivamente a través del trabajo, para la calificación y caracterización de los resultados de las diferentes modificaciones de los modelos estudiados. Además, se utilizará esta metodología para evaluar los criterios de óptimo paretiano y se los opondrá con criterios alternativos como aquellos de Rawls; para al final derivar criterios generales de sostenibilidad ambiental y equidad intergeneracional.

## **8.3. Procedimiento metodológico**

La metodología, sigue el procedimiento neoclásico estándar, ampliado para admitir una dimensión ambiental. Al ser un estudio de un modelo de equilibrio general dinámico, que es macroeconómico pero que tiene fundamentos microeconómicos, se evaluará en primer lugar la solución de mercado o descentralizada y se establecerán las condiciones mediante las cuales

se llega a un óptimo de Pareto o a una situación ideal. Posteriormente se añadirán cambios y se relajarán supuestos y se evaluará los resultados en comparación a la situación ideal.

En la construcción del modelo, la metodología usada será de tipo matemática, pues los resultados de los cambios teóricos al modelo de generaciones traslapadas estarán caracterizados por ecuaciones dinámicas, derivadas totales y resultados óptimos de los procesos de maximización restringidos para introducir la dimensión ambiental. Cabe destacar que las modificaciones propuestas para el modelo, están limitadas por el instrumento a utilizarse, que es el del modelo de Generaciones Traslapadas. Por eso se debe establecer como características básicas: El uso mayoritario de tiempo discreto. Dos períodos de vida para cada generación. Comportamientos optimizadores y tecnologías convexas.

Los Modelos de Generaciones Traslapadas, se caracterizan por su falta de tratabilidad matemática, esto significa, que sus resultados son difíciles de computar. Por este motivo, en un segundo momento se utilizará técnicas de simulación de modelos dinámicos para encontrar las dinámicas y caracterizar cualitativamente los resultados, usando valores numéricos para los parámetros del modelo teórico reformulado y posteriormente derivar sus implicaciones más importantes. También, es importante mencionar que la complejidad del mapa topológico del modelo aquí construido, no permite el uso de los diagramas de fase. En cambio, se utiliza la técnica de graficar las trayectorias de las variables más importantes del modelo que resultan de las simulaciones para diferentes parámetros; caracterizando así el tipo de convergencia –monotónica o no monotónica-.

Posteriormente, se calificará los resultados o equilibrios dinámicos en términos de los criterios de óptimo y de eficiencia derivados de la discusión teórica de la presente investigación, para poder formular conclusiones y recomendaciones para políticas macroeconómicas y ambientales. Este último

paso, es un razonamiento inductivo, del cual se parte de un caso particular, y mediante la presentación de hechos estilizados se puede comprobar o rechazar una hipótesis teórica abstracta o extraer recomendaciones generales.

## **CAPÍTULO II**

### **MARCO TEÓRICO**

El modelo de Generaciones Traslapadas es uno de los pilares de la macroeconomía moderna (Blanchard & Fischer, 1989). Este modelo es el pilar sobre el cual se construye la presente investigación. Es así, que en una primera sección, se hará un recorrido sobre las principales características de esta caja de herramientas. Luego, se presentarán los criterios de eficiencia, equidad intergeneracional y sostenibilidad que se utilizará extensivamente a través del documento. Estos criterios son: óptimo de Pareto, criterios de Kaldor-Hicks, criterio de Rawls, desarrollo sustentable, sustentabilidad débil y fuerte.

#### **1.1. Escuela Neoclásica**

La línea de pensamiento a utilizarse es la escuela neoclásica u ortodoxa. La presente investigación teórica, se circunscribe dentro de la macroeconomía moderna neoclásica. En especial, en los límites del modelo de Generaciones Traslapadas que es uno de los dos pilares fundamentales de la nueva macroeconomía -junto a los modelos de agentes de vida infinita o dinastías-.

##### **1.1.1 Modelo de Generaciones Traslapadas**

El modelo de Generaciones traslapadas o solapadas (MGT , Overlapping Generations Model, en inglés) es uno de los modelos básicos de la Macroeconomía moderna, que se caracteriza por utilizar fundamentos microeconómicos. Fue desarrollado por Allais (1947), Paul Samuelson (1958) y Diamond (1965). La estructura del modelo es remarcable, pues en un tiempo  $t$  existen individuos de diferentes generaciones que comercian entre ellos en diferentes períodos de sus vidas, pero además hay generaciones que aún no han nacido y cuyas preferencias pueden no ser registradas en las transacciones corrientes del mercado. Como el nombre del modelo lo indica, éste estudia el

comportamiento agregado de economías formadas por dos o más generaciones de individuos, que conviven al mismo tiempo. Cada bloque de individuos intenta maximizar su utilidad, teniendo en cuenta su periodo de vida, produciéndose como resultado diversos efectos agregados (Blanchard & Fischer, 1989).

Según Blanchard y Fischer (1989), este modelo es utilizado frecuentemente porque hace posible estudiar las implicaciones agregadas del ahorro de ciclo de vida de los individuos. El stock o acervo de capital es generado por los individuos que ahorran durante sus vidas laborales para financiar su consumo durante el retiro. Los determinantes del stock de capital, así como los efectos de la política gubernamental en el stock del capital y en el bienestar de las diferentes generaciones son fácilmente estudiados. Además, el modelo puede ser ampliado para permitir varias modificaciones de gran interés como las herencias; hayan sido dejadas intencionalmente o no -y regalos voluntarios entre generaciones-.

Samuelson (1958) elaboró un modelo que postulaba una estructura demográfica en la que se traslapan dos generaciones: "jóvenes" y "viejos". En este mundo, los agentes económicos –principalmente los consumidores- interactúan entre sí a lo largo de su ciclo de vida. Cuando son jóvenes comercian con agentes viejos, y cuando viejos, con agentes jóvenes. Este modelo es intertemporal pues el tiempo está dividido en periodos discretos; el intervalo básico es el que transcurre entre el nacimiento de una generación y la siguiente, y no existe un período final para la economía. Aquí se considera un modelo con una población constante y sin herencias donde cada generación está conformada por un "consumidor representativo" que vive dos periodos. Así, en un punto en el tiempo, la economía está compuesta por dos generaciones: la joven y la vieja; es decir, por un agente joven y uno viejo. Existe una mercancía perecedera única, de la que cada agente tiene una dotación exógenamente determinada. Cuando la economía se considera en su conjunto, es decir, a través del tiempo, el número de agentes y de mercancías es infinito.

Se debe recalcar que el enfoque de ciclo de vida dado por este modelo es muy atractivo. Además, los modelos MGT son un ejemplo de una economía en la cual el equilibrio competitivo no es necesariamente aquel que sería escogido por un planificador central. Hay un resultado aún más fuerte: el Equilibrio Competitivo puede no ser Óptimo en el sentido de Pareto (Blanchard & Fischer, 1989).

### **1.1.2 Generaciones Traslapadas e ineficiencia dinámica**

El resultado más fuerte del Modelo de Generaciones Traslapadas es la ineficiencia dinámica. Es decir, que un equilibrio competitivo no es necesariamente Óptimo de Pareto. Este resultado es el más significativo, y condujo a una paradoja no resuelta definitivamente hasta los setenta, puesto que a pesar de que la economía carezca de imperfecciones, el resultado agregado de una economía de competencia perfecta puede ser ineficiente en el sentido de Pareto, lo que contradecía, en un principio, los resultados del modelo de Equilibrio General desarrollado por Kenneth Arrow y Gerard Debreu (Geanakoplos, 1987).

En el modelo MGT, podría darse una sobre-acumulación del acervo o stock de capital, que podría ser consumido mejorando la utilidad de una generación sin detrimento de las otras, pues siempre se podía pedir prestado a la siguiente generación. Esto significa, que la ineficiencia procedía de la existencia de un infinito número de agentes en el modelo, unido a un infinito número de mercados, hecho que se derivaba de que las distintas generaciones (que aparecen en la economía, viven y mueren) se extendían hasta el infinito (D. Romer, 1989).

### **1.1.3 Generaciones Traslapadas centralizada y criterios de descuento temporal**

Como ya se mencionó en la sección 1 un resultado importante del modelo de generaciones traslapadas es que la solución centralizada de la economía, puede diferir de la solución descentralizada o competitiva. Esto se

opone a resultados de los modelos neoclásicos de crecimiento de dinastías o agentes de vida infinita –Ramsey- en los cuáles tanto la solución centralizada como la competitiva coinciden<sup>3</sup> (Blanchard & Fischer, 1989).

Lo primordial de una solución centralizada, es que puede plantearse la existencia de una función de bienestar social y más aún de una generación representativa tanto en términos positivos como normativos (Mas-Collel et al., 1995). Este planificador central se supone benévolo y busca maximizar la función de bienestar social sujeto a las restricciones tecnológicas y a las dotaciones de la economía.

Las utilidades de las diferentes generaciones estarán ponderadas por un factor  $R$ , que será la tasa de descuento o la ponderación que el planificador benevolente da a las diferentes generaciones. La función de bienestar social será del tipo:

$$U = (1 + \theta)^{-1} u(c_{20}) + \sum_{t=0}^{T-1} (1 + R)^{-t-1} [u(c_{1t}) + (1 + \theta)^{-1} u(c_{2t+1})]. \quad (1.1)$$

Donde tenemos las diferentes utilidades de las generaciones ponderadas por el factor de descuento del planificador  $R$ . Si al planificador le importan menos las generaciones futuras,  $R$  es positiva. Si al planificador le importan igualmente todas las generaciones,  $R$  es igual a cero, y finalmente en una manera utilitarista (o benthanmita) se pesa las utilidades por el tamaño de cada generación, si el crecimiento es positivo,  $R$  será negativa (Blanchard & Fischer, 1989).

Esta tasa  $R$ , es de vital importancia para definir las propiedades de optimalidad de una economía del tipo de generaciones traslapadas. Al solucionar el problema del MGT sujeto a las restricciones, determinamos la existencia de

---

<sup>3</sup> Es decir, hay eficiencia dinámica si el agente de vida infinita tiene previsión perfecta.

<sup>4</sup> Esto es la sumatoria de las utilidades de las generaciones desde el período 0 hasta el período  $T-1$ . Las utilidades de las generaciones del tiempo 1 se descuentan a una tasa  $(1+R)$  por el planificador central. Esta tasa podría ser cero.  $R$  no se debe confundir con  $\theta$ , que es la tasa subjetiva de descuento individual o impaciencia por consumir.

un estado estacionario del stock de capital, dónde se requiere que  $R$  sea igual a cero ( $R = 0$ ) para que el estado estacionario sea igual a la regla de oro  $f'(k) = n$ , que implica que el producto marginal es igual a la tasa de crecimiento de la población, y en este punto se maximiza el consumo, sin comprometer el nivel de capital y de consumo de las generaciones subsiguientes.

La regla de oro y la tasa de descuento  $R$  son dos elementos que deben ser definidos claramente en su naturaleza para seguir avanzando en la presente investigación, debido a que están en el núcleo de la optimalidad dinámica. Comencemos con la primera de las nociones. La regla de oro está presente en diversas culturas y religiones, por ejemplo en la Biblia toma la forma de: "Tratad a los hombres de la manera en que vosotros queréis ser de ellos tratados". Lucas 6:31. En la economía esta regla de oro implica la existencia de una condición en la economía que garantice la maximización de la utilidad sin perjudicar la situación de los demás agentes. En un contexto inter-temporal de generaciones traslapadas, se vuelve más clara al proponer la maximización de la utilidad de una generación sin perjudicar el consumo de otra. O en otros términos, como maximizar el consumo –y la utilidad- sin dejar de ser sustentable en el tiempo (Phelps, 1961).

La discusión sobre el factor de descuento inter-temporal es también muy interesante, el matemático Frank Ramsey (1928), quién fue el primero en formular un modelo macroeconómico dinámico moderno –con fundamentos microeconómicos-, consideró que el descuento intergeneracional era moralmente indefendible. En esta línea, Pigou (1932) sigue a Ramsey y para él no puede existir una justificación ética para descontar temporalmente la función de bienestar social. Aún cuándo la inclusión del factor de descuento dentro de una función de bienestar social sea analíticamente conveniente, su justificación es motivo de una discusión importante (de La Croix & Michel, 2002; M. Farmer & Randall, 1997; CEPA).

### 1.1.4 Generaciones Traslapadas e incertidumbre

El tratamiento anterior del Modelo de Generaciones Traslapadas ha sido hecho en un mundo ideal de certezas. Las personas, se supone, tienen total conocimiento sobre el futuro, lo que no es cierto. Por este motivo, la teoría de la elección bajo incertidumbre puede ser útil para volver al modelo más aplicable a la realidad.

Sobre todo, si se trata de introducir una dimensión ambiental y más aún ecológica dentro del modelo de generaciones traslapadas, la incertidumbre estará presente. El tratamiento del modelo de generaciones traslapadas puede ser extendido al caso de un modelo con incertidumbre, si utilizamos una función de utilidad para la generación representativa del tipo von Neumann-Morgenstern, una utilidad de valor esperado de tipo lineal con probabilidades objetivas (Mas-

Collel et al., 1995): 
$$U^e = \sum_{k=1}^K \alpha_k U(L_k) \quad ^5(1.2).$$

Otra manera de introducir, la incertidumbre dentro de este modelo es utilizando las expectativas (Lozano, Villa, & Monsalve, 1997). El problema radica en identificar y en justificar el uso de un tipo de expectativa sobre otra. En los últimos quince años, algunos economistas han sugerido abordar el problema, ya no con la hipótesis de expectativas racionales, sino con la noción de reglas de aprendizaje (Lucas, 1986; Marcet & Sargent, 1989). Con estas hipótesis, el modelo MGT a veces converge al estado estacionario, lo que hace de éste un posible estado económico de largo plazo. Sin embargo, otros han mostrado que esta propiedad sufre de una "falta de generalidad inherente" (Lozano et al., 1997): aunque ciertas reglas de aprendizaje en ciertos modelos producen equilibrios económicamente significativos, otras reglas en otros modelos sólo aumentan el número de trayectorias de equilibrio posibles (Grandmont & Laroque, 1991). Debido a la falta de generalidad, Lucas (1996)

---

<sup>5</sup> Dónde tenemos que la utilidad esperada –U- es la sumatoria del producto de la probabilidad objetiva – $\alpha$ - por la utilidad, que a su vez depende de la lotería –L-.

creo que es imposible entender el problema de la indeterminación de equilibrios por métodos puramente matemáticos.

El reto de Lucas para encontrar un método puramente matemático ha llevado a que se exploren métodos de dinámicas de aprendizaje que tengan un alto grado de generalidad. Actualmente se cree que el ingrediente necesario para alcanzar esa generalidad es la diversidad de expectativas: la admisión de muchas reglas de expectativas diferentes en el mismo modelo parece reducir la posibilidad de que las características cualitativas del modelo dependan de unas reglas particulares de expectativas o de unos parámetros específicos (Lozano et al., 1997).

#### **1.1.6. Criterios de óptimo económico**

##### **Teorema del bienestar y óptimo de Pareto.**

El criterio estándar para analizar el óptimo de una economía, es el establecido por el economista italiano Vilfredo Pareto. Una situación es considerada Pareto óptima si una economía utiliza sus recursos y tecnologías eficientemente, tal que no sea posible cambiar la organización de la producción y distribución de bienes para que un consumidor esté mejor, sin empeorar la situación de otro. Este concepto no garantiza la equidad o criterios de justicia. Una asignación puede ser óptima en el sentido de Pareto pero completamente desagradable desde el punto de vista de casi cualquier juicio ético. Sin embargo la optimalidad en sentido de Pareto es un test mínimo para la deseabilidad de una asignación, al menos garantiza la ausencia de derroche (Mas-Collel et al., 1995, p. 312).

Desde este criterio se establecen dos teoremas fundamentales de la Economía del Bienestar. El primer teorema fundamental establece las condiciones bajo las cuales las condiciones de mercado son: óptimo de Pareto. Es una expresión formal de la *mano invisible* de Adam Smith. Estas condiciones establecen que

haya mercados completos y que los participantes sean tomadores de precios. Se resume en que todo equilibrio competitivo es Pareto-óptimo. El segundo teorema fundamental establece las condiciones bajo las cuales un óptimo de Pareto puede ser soportado como un equilibrio de precios con transferencias. Se resume en que toda asignación que sea óptima en el sentido de Pareto puede ser alcanzada como un equilibrio competitivo luego de una adecuada redistribución de suma cero de la riqueza (Mas-Collel et al., 1995, pp. 552,551).

### **Mejoras en el sentido de Pareto con transferencias.**

El Primer Teorema no implica, que el bienestar social es mayor en una economía competitiva y descentralizada. En cuanto al Segundo Teorema, argumenta que cualquier asignación Pareto-óptima puede ser alcanzada como un equilibrio competitivo siempre que se haya hecho una apropiada redistribución de recursos (Hochman & Rodgers, 1969). Luego, el óptimo social puede lograrse como un equilibrio competitivo si es acompañado de una apropiada política social. Nótese que un óptimo social no requiere que el "planificador" maneje centralizadamente a la economía para dirigirla hacia el óptimo social, sino que arregle una distribución inicial de las dotaciones y deje luego a los mercados competitivos privados encontrar su propio camino hacia el óptimo social (Mas-Collel et al., 1995).

#### **1.1.7 Compensaciones y criterios Kaldor-Hicks.**

Kaldor y Hicks elaboraron otro conjunto de criterios para evaluar las asignaciones en una economía. Kaldor (1939) estableció un criterio para juzgar si una asignación es preferible a otra. Argumentó que una asignación es preferida a otra asignación si moviéndose desde la segunda a la primera, el ganador del movimiento puede, mediante un pago global, compensar al perdedor por su pérdida de utilidad y aún así tener un beneficio. En resumen, Kaldor propuso que una asignación sea preferida a otra si es posible redistribuir en

forma hipotética los bienes, de tal manera que se obtenga una mejora paretiana (CEPA).

Un test alternativo fue propuesto por Hicks (1939) en términos de un "soborno" de los perdedores como opuesto a una "compensación" por los ganadores. Una asignación resultaría preferida a otra si, dado un movimiento propuesto desde la segunda a la primera, los perdedores no son capaces de sobornar a los ganadores para que no realicen el movimiento. Obsérvese que el criterio de Hicks invierte la noción de Kaldor (CEPA).

En una economía de producción, una asignación será superior a otra si es posible que los ganadores compensen a los perdedores para moverse a la primera (Kaldor) o si los perdedores sobornan a los ganadores para no moverse a la primera (Hicks). Con producción, el criterio de Kaldor puede adoptar dos formas: la fuerte, que requiere que las compensaciones entre los agentes sean de suma fija y no tengan efectos sobre la producción como resultado de la compensación, es decir, confinarse a realizar transferencias; y la débil, que requiere que la producción cambie como parte de la compensación. Para este criterio no importa la maximización de la utilidad o la felicidad sino que se busca maximizar la riqueza. Se trata de tener en cuenta que el requerimiento principal para el análisis Kaldor-Hicks es la disposición a pagar (Stringham, 2001; CEPA).

### **1.1.8 Desarrollo sustentable**

El desarrollo sustentable es una perspectiva alternativa para enfrentar el desarrollo. Este nuevo enfoque tiene una perspectiva holística y multidisciplinaria distinta. El desarrollo sustentable, nace como respuesta a una profunda crítica al desarrollo económico en general y sobre todo ante los altos niveles de degradación ambiental. Es más, el modelo de desarrollo actual, basado en la noción de crecimiento económico ilimitado, ha provocado una crisis ecológica que pone en riesgo al futuro de la humanidad (Gutiérrez, 2007).

Las raíces de la noción del desarrollo sustentable, están en la preocupación mundial causada por la sobreexplotación de los recursos naturales, especialmente después de los años 50s, que estuvieron caracterizados por una alta tasa de crecimiento del PIB y por una degradación ambiental importante. Es con el Club de Roma que se cuestiona la tesis central de las teorías de desarrollo sobre las posibilidades ilimitadas de crecimiento en los países desarrollados y de la convergencia de lo menos desarrollados (Meadows, 1972; Gutiérrez, 2007). Desde otros análisis menos economicistas, se argumentaba la necesidad de la conservación y cuidado de los ecosistemas puesto que éstos deben ser vistos como plataformas para que las especies animales se reproduzcan de una manera indefinida, así estableciendo la base del concepto de sostenibilidad ((IUCN), 1980).

Evidentemente, los teóricos de la economía se interesaron en esta nueva perspectiva del desarrollo. Así, una formulación importante hecha por Robert Repetto afirma que en el centro de la idea de sostenibilidad estaba la noción según la cual no se debe tomar ninguna decisión que pueda afectar las posibilidades de mejorar o mantener el nivel de vida futuro (Repetto, 1985). En esta línea, Solow (1974) afirmaba que el deber impuesto por la sostenibilidad no es el de dejar como herencia una cosa en particular pero si la obligación de dejar todo lo necesario para las generaciones futuras puedan alcanzar un nivel de vida al menos tan alto como el nivel de nuestra generación. Para él, es fundamental que no consumamos el capital, en sentido amplio, de la humanidad. Es importante también, evocar el vínculo entre la visión de desarrollo sustentable y el del ingreso o del consumo: Para Hicks (1946) existe una necesidad de mantener el nivel de ingreso a través del tiempo. De una manera más clara, la regla de oro del crecimiento dice: el máximo consumo el día de hoy, que no disminuye el consumo del futuro (Phelps, 1961).

El término desarrollo sustentable se volvió popular luego de su utilización en el Informe Brundtland (1987) o *Nuestro Futuro Común –Our*

*common future*-, que definió al Desarrollo Sustentable como: “El desarrollo que responde a las necesidades de las generaciones presentes sin comprometer la capacidad de las generaciones futuras para responder a las suyas”. De una parte, resalta la noción de necesidades, que se oponen claramente a la noción de deseos, reconociendo las necesidades esenciales de los pobres del mundo que deberían tener prioridad. Por otra parte, se subraya la idea de la existencia de límites reales impuestos por la energía, los recursos, la tecnología y las instituciones para satisfacer las necesidades futuras y presentes.

La importancia del Informe Brundtland es muy grande. No solamente porque es citado frecuentemente sino porque ha tenido una enorme influencia sobre la concepción del progreso económico y social. En efecto, nos recuerda que la sostenibilidad se trata de nuestras obligaciones con las generaciones futuras, o más exactamente con sus necesidades. En otras palabras, la sostenibilidad habla de desarrollo con equidad intergeneracional. En sí, lo que propuso el Informe Brundtland es un concepto complejo y profundo que nos invita a pensar en un nuevo desarrollo que va más allá del crecimiento del PIB, pero que permite evitar la conclusión poco atractiva de dejar el mundo como lo encontramos –o el crecimiento cero, como se podría intuir en el Informe Meadows (1972)-.

El universalismo obliga al Estado a servir como fideicomisario de los intereses de las generaciones futuras. Las políticas gubernamentales, tales como los impuestos Pigou, los subsidios y la regulación, pueden lograr que se adapte la estructura de incentivos de manera que se proteja el medio ambiente global y la base de recursos para la gente que todavía no ha nacido. Como A. C. Pigou (1932) había señalado, existe un consenso alrededor de la idea según la cual el Estado debe, en alguna medida, proteger los intereses del futuro de los efectos de nuestros descuentos irracionales y de nuestra preferencia por nosotros mismos por encima de nuestros descendientes. Por estos motivos, se ha argumentado que la obligación de sostenibilidad no se puede dejar completamente a cargo del mercado. El futuro, o por lo menos el futuro lejano, no tiene una representación

adecuada en el mercado, y no hay razón por la que el comportamiento ordinario del mercado se ocupe de las obligaciones, sean cuales sean, que tenemos para con el futuro (Sudhir & Sen, 1994).

Los movimientos conservacionistas se basan en esta idea. Para ellos, el deber del Gobierno, quien es el fideicomisario de las generaciones futuras así como de los ciudadanos actuales, es cuidar y, si fuese necesario, defender a través de medidas legislativas, los recursos naturales agotables del país contra un despojo temerario y descuidado (Sudhir & Sen, 1994).

### **1.1.9 Las sustentabilidad: fuerte y débil.**

La sustentabilidad ambiental, o sostenibilidad, es un concepto bastante general. Los ambientalistas y teóricos han hecho dos importantes distinciones; así tenemos la sostenibilidad débil y la sostenibilidad fuerte. El requisito que establece la regla de sustentabilidad débil es que se transfiera de una generación a otra un stock de capital total no menor al que existe en el presente (Solow, 1974; Sudhir & Sen, 1994). Lo anterior significa que se puede traspasar un ambiente degradado si también se entrega más infraestructura. La sustentabilidad débil asume, por tanto, que las distintas formas de capital son completamente intercambiables (Costanza & Daly, 1992). Existe otro supuesto importante en la sustentabilidad débil: el medio ambiente, considerado como otra forma de capital, es perfectamente sustituible por otro tipo de capital o activos. Así, la desaparición progresiva de aquellos recursos naturales de los que existe una cantidad fija, los llamados recursos no renovables, debiera ir acompañada por inversión en otro tipo de capital (Hartwick, 1977; Solow, 1986).

Sin embargo, desde otro enfoque se plantea que no existe perfecta equivalencia entre el capital ecológico y el construido por el hombre. Se argumenta, que ciertos recursos naturales parecen ser esenciales para el bienestar y/o la supervivencia de la humanidad. Se designa a dicho capital como crítico.

También se argumenta el principio de precaución, que dice que si no se conoce los umbrales ecológicos, sobre los cuales los daños al sistema natural son irreversibles se debería dejar de explorar. Se puede citar como ejemplos de capital crítico la capa de ozono o ecosistemas complejos como los bosques tropicales de la Amazonía o Galápagos. Si las distintas formas de capital no son fácilmente sustituibles unas por otras, entonces la regla de sustentabilidad fuerte establece que, al menos se proteja el capital natural crítico (Costanza & Daly, 1992).

#### **1.1.10 La justicia intergeneracional.**

Para Sudhir & Sen (1994), la sostenibilidad puede ser comprendida como un problema de equidad distributiva. Es decir, de cómo compartir la capacidad de bienestar entre la gente de hoy y la gente del futuro, y cómo hacerlo de manera aceptable. En otras palabras, de una manera que ni las generaciones futuras ni las generaciones presentes tengan razones obvias de rechazar. Este es un criterio de justicia que se ha empleado con fuerza, aunque no en el contexto de la justicia intergeneracional, por Thomas Scanlon (1982) y por John Rawls (1993).

Sería poco aceptable, sin embargo, que nos preocupáramos por el bienestar de las generaciones futuras y por nacer, y que al mismo tiempo ignoráramos las necesidades de los pobres de hoy. La obligación moral que subyace la sostenibilidad, es la de preservar la capacidad para la gente futura de estar tan bien como nosotros. Esta obligación suena falsa si no se acompaña de una obligación moral a proteger y mejorar el bienestar de la gente que hoy en día vive en la pobreza. Si se piensa que la gente sufrirá de privación en el futuro si no se adoptan políticas diferentes hoy, entonces se tiene la obligación moral de preguntarse si hay gente hoy en día que sufre de privación. Sería una enorme violación del principio universalista si nos obsesionáramos por la equidad intergeneracional sin retomar al mismo tiempo el problema de la equidad

intrageneracional: la ética universalista ciertamente requiere este tipo de imparcialidad (Müller-Planterberg, 2001; Sudhir & Sen, 1994).

Una preocupación por la equidad hoy en día, y no solamente por la equidad entre períodos de tiempo, requiere una redistribución a favor de aquellos de nuestros contemporáneos que sufren la mayor privación. Pero la redistribución a favor de los pobres de hoy puede considerarse como poco favorable para la sostenibilidad. Se podría interpretar como un proceso que conduce a un incremento del consumo actual y no a un incremento de la inversión. Todo depende, sin embargo, de la forma que adopta dicha redistribución (Sudhir & Sen, 1994).

#### **1.1.11 Rawls y el velo de ignorancia.**

La pregunta fundamental de Rawls consiste en la posibilidad de determinar o encontrar principios de justicia universalmente obligatorios. Es decir, que sean aceptados por todos los miembros de una sociedad determinada. Su idea principal consiste en que tales principios sólo pueden ser objetivamente obligatorios cuando: fueran seleccionados por hombres, que puestos en una situación primitiva o estado de igualdad –punto original-. Cuando esos hombres deciden libre y racionalmente guiados por sus propios intereses (Müller-Planterberg, 2001).

Rawls propone una situación abstracta donde, en un acto conjunto, se escogen o eligen los principios sobre los cuales se asignarán los derechos y deberes básicos y de qué manera se determinará la división de los bienes sociales. Se decide de antemano los principios fundamentales de su sociedad. Esto se lo hace mediante la reflexión individual racional de lo que constituye el sistema de fines que perseguirá. De esta manera un grupo de personas –un parlamento por ejemplo- tiene que decidir lo que significará justo e injusto. La elección se la hace en la situación hipotética de igual libertad. De existir la

solución a este problema, se determinará los principios de la justicia (Rawls, 1971a).

La idea de la posibilidad de un unánime acuerdo sobre, principios que sean justos o imparciales –*justice as fairness*, justicia como imparcialidad-, tiene similitudes con la teoría del contrato social de los siglos XVII y XVIII (Müller-Planterberg, 2001). En este caso se tiene como condición previa que las personas participantes no sepan cual será su futuro lugar en la sociedad real, sino que ellas se encuentren más bien detrás de un “velo de la ignorancia”. Como Rawls lo expresa:

Entre los rasgos esenciales de esta situación está el de que nadie sabe cual es su lugar en la sociedad, su posición, clase o status social; nadie sabe tampoco cuál es su suerte en la distribución de las ventajas y capacidades naturales, su inteligencia o su fortaleza, etc. Supondré, incluso, que los propios miembros del grupo no conocen sus concepciones acerca del bien, ni sus tendencias psicológicas especiales. Los principios de la justicia se escogen bajo un velo de ignorancia. Esto asegura que los resultados del azar natural o de las contingencias de las circunstancias sociales no darán a nadie ventajas ni desventajas al escoger los principios. Dado que todos están situados de manera semejante y que ninguno es capaz de delinear principios que favorezcan su condición particular, los principios de la justicia serán el resultado de un acuerdo o de un convenio justo. (Rawls, 1971a, p. 25).

Para Müller-Planterberg (2001) los hombres en el estado original tienen que tener, pese a la ignorancia de sí mismos, un mínimo de conocimientos básicos en economía, sociología y psicología para poder establecer principios que deben valer para la sociedad real. Los hombres en estado original son representativos, ya que cada uno de ellos se encuentra en la misma situación de todos los otros. Según este autor, la tarea de los teóricos de la justicia y los filósofos sociales es determinar los pasos o procedimientos de las -necesariamente justas- negociaciones de los hombres en estado original y establecer, porqué serán elegidos determinados los principios de justicia de esa sociedad.

### **1.1.12 La justicia según Rawls.**

La concepción neo-contractualista de John Rawls tiene un alto nivel de abstracción. Su objetivo es construir un modelo que justifica, desde la filosofía moral, la “desigualdad justa”, sin sacrificar nunca los principios liberales. La justicia es imparcialidad (fairness); y se basa en dos principios básicos que son la garantía de las libertades básicas compatibles con un esquema similar a los derechos de los demás. Y sobre todo en la justificación de las inevitables desigualdades sociales. Estas deberán satisfacer dos condiciones: Deben estar asociadas a posiciones abiertas a todos en igualdad de oportunidades; y deben maximizar el beneficio para los miembros menos aventajados de la sociedad (Rawls, 1971b, 1993).

Este último principio, es sin duda muy importante, puesto que revela el principio de minimización de riesgo social, o el principio maxi-min social. Es decir, maximizar la utilidad de los menos aventajados o de los perdedores del juego social. Esto es posible, pues desde aquel punto original o punto de origen y bajo el velo de ignorancia; los hombres que están provistos de racionalidad y razonabilidad; elegirán un marco o un contrato que permita que haya ganadores (es decir, no se castigue al talentoso, al emprendedor, etc.) y al mismo tiempo garantice u optimice la situación de los perdedores. Siendo esto posible, pues nadie sabría con certeza sus talentos, debilidades y por ende, que llegarán a ser al final del juego social. Eligiendo un contrato donde se minimice el riesgo de ser un perdedor (Rawls, 1971c, 1974).

En otras palabras, el contrato que se firmará, será aquel donde se reconoce y permite que existan ricos y pobres, pues esto es propio de sistema de mercado o de cualquier arreglo social basado en la libertad; pero donde los pobres estén en la mejor situación posible. Se aceptan que existan ricos con la condición de que mejoren el bienestar de toda la sociedad. Se ve en este razonamiento un deseo de equilibrar la eficiencia con el bienestar social. Para Rawls (1971a), los contratantes se encuentra bajo el velo de ignorancia, pero cada uno es un individuo representativo que es racional, maximizador de su propio beneficio y que concibe el bien; y es razonable; que comprende los

principios de la colaboración equitativa o que busca el bien común. Esta concepción del individuo representativo debe ser subrayada pues no estamos frente al *homo economicus*, sino frente a un ser moral.

#### **1.1.14 El principio del velo de ignorancia aplicado a un contrato intergeneracional**

Un punto de partida para la equidad intergeneracional lo proveyó el filósofo John Rawls en su "Teoría de la Justicia" (1971a). Rawls sugiere que una forma de derivar principios generales de justicia es ubicar, hipotéticamente, a cada individuo en el momento histórico sin que sepa cuál es. Estando bajo este "velo de ignorancia" se le pediría a las personas que eligieran las reglas que gobernarían la sociedad en la que ellos, luego de la decisión, se verían forzados a vivir.

Dentro de la concepción del estado original no se considera género, pertenencia religiosa o ideológica. La única calidad particular de los hombres que encuentra un lugar en la teoría de la justicia, es la pertenencia a una determinada generación, porque que sin un justo principio de ahorro entre las generaciones, no podría ser conservada una justicia intergeneracional como componente necesario de la justicia social. Por eso, en una versión posterior del principio de la diferencia, Rawls ha introducido la restricción que ese justo principio de ahorro entre las generaciones debería ser observado (Rawls, 1971c; Müller-Planterberg, 2001; Solow, 1974).

Sin embargo, Rawls, considera que el principio del max-min, no es aplicable al problema intergeneracional, debido a que existe un problema de asimetría que hace que las generaciones presentes pueden afectar a la futuras pero no al revés. No obstante, este autor, no deja de atacar el enfoque utilitarista, en el cual, se podría sacrificar el bienestar de las generaciones más pobres para aumentar el beneficio de otras, si esto aumenta la suma total de los beneficios. Este criterio, se considera aún más injustificado en el problema intergeneracional

que en el caso de contemporáneos. Rawls, dice que estos problemas no evitan que se pueda derivar un principio de ahorro justo aunque sea distinto al max-min. Él argumenta, que el criterio max-min no se aplicaría por la asimetría inalterable intergeneracional y que su uso si implicase algo sería que no exista ahorro (Rawls, 1971b).

### **1.1.15 La Economía Circular y las funciones del medio ambiente**

Es importante reconocer, las relaciones de la economía y del medio ambiente. Desde una perspectiva de una matriz input-output, es decir, insumo-producto; podemos ver estas relaciones intra-económicas de una manera analítica. Por ejemplo, como la demanda de muebles afecta el consumo de madera y más aún, como afecta otros mercados indirectamente relacionados. Pero esta matriz está incompleta si no contempla las relaciones y vínculos con el medio ambiente (Martínez Alier, 1991).

Partiendo de esto, se plantea en principio, una forma de ver las relaciones economía-medio ambiente, añadiendo a esta matriz otra “columna” y otra “fila” donde se contemple al medio ambiente, que además de ser proveedor de insumos o input, sirve también como asimilador de los desechos. En una matriz input-output así; se debería considerar además de las industrias, las mercancías y las demandas finales; los bienes ambientales (agua, tierra y aire) y las Emisiones de residuos al medio Ambiente. Cabe aclarar que todos los elementos de la matriz base (industrias, mercancías y demanda final) están medidos en unidades monetarias; mientras que las casillas ambientales deberían estar medidas en términos físicos, puesto que todavía es difícil asignar un precio de mercado a los diferentes servicios del medio ambiente. También existe la posibilidad de contemplar la utilidad directa estética dentro del consumo o la función de sustento de vida aunque sea difícil de medir (Martínez Alier, 1991).

Tradicionalmente se ve a la economía como un sistema lineal o abierto, donde la Producción genera Bienes de Consumo y de Capital y éstos a su vez

tienen como meta última generar utilidad ( $K \rightarrow P \rightarrow C \rightarrow U$ )<sup>6</sup>; para simplificar eliminamos K y U, y añadimos los Recursos Naturales y tenemos algo más completo pero aún lineal  $R \rightarrow P \rightarrow C$ <sup>7</sup>; reflejando sólo la primera función de los recursos naturales, de proveedor de inputs. Para tener una imagen más completa, sin embargo, se deba añadir la función de sumidero de desechos donde tenemos por la Primera Ley de la Termodinámica (nada se crea ni se destruye sólo se transforma). Esto nos lleva a la conclusión de que la cantidad de residuos en cualquier período de tiempo es igual a la cantidad de recursos empleados.  $R=W$ <sup>8</sup> (Martínez Alier, 1991).

Todo esto nos da una idea más real del sistema económico como abierto a la naturaleza y ésta tiene fronteras intrínsecas, dando lugar a un sistema circular. Cabe notar, que aún con el reciclaje, se presenta otra frontera con la Segunda ley de la Termodinámica (en la economía los materiales se usan de forma entrópica y se disipan dentro del mismo sistema no todo se puede reciclar). Esto hace necesario, la planificación de la economía desde un punto de vista sustentable, para respetar la capacidad de asimilación de la segunda función del medio ambiente (sumidero de desechos) y su capacidad de recuperación en la regeneración de los recursos renovables (función de proveedor de insumos) (Martínez Alier, 1991).

Como ya se mencionó, el medio ambiente tiene también la función de generador de utilidad directa y de sustento de vida. Todas estas funciones tienen un valor positivo, pero no se reconoce en los precios – que son cero o muy bajos- y se da mal uso de los mismos. Es necesario un teorema de la existencia, que permita relacionar y ver el vínculo que existe entre el sistema económico que está basado en el medio ambiente. Para permitir que los equilibrios de mercado den paso a un equilibrio que permita sobrevivir al mismo sistema económico como una economía sustentable (Martínez Alier, 1991).

---

<sup>6</sup> Dónde: K, capital; P, producto; C, consumo; U, utilidad.

<sup>7</sup> Dónde: R, recursos naturales; P, Producción; C, Consumo.

<sup>8</sup> Dónde: W, es desechos o basura; R, es igual a recursos naturales.

Los resultados dependerán de qué criterio de sustentabilidad estemos utilizando. La sustentabilidad fuerte requeriría de alguna medida del stock de capital crítico a fin de analizar si éste decrece en el tiempo. La sustentabilidad débil, en cambio, requiere analizar si el stock de capital total no decrece en el tiempo. Para que se cumpla la condición de sustentabilidad débil, el capital natural que se desgasta año a año al menos debiera ser compensado con el que el hombre crea en ese mismo período (y que se refleja como ahorros realizados por la sociedad). Esta simple regla permite obtener una aproximación acerca de si un país está ahorrando lo suficiente para cubrir el desgaste no sólo del capital que él ha construido, sino también del stock natural que ha heredado (Costanza & Daly, 1992).

## **1.2. Argumento**

La escuela de pensamiento escogida, como ya se mencionó, es la escuela neoclásica. En particular, utilizaremos la macroeconomía neoclásica. Debemos aclarar, que se utilizará también la economía ambiental y de los recursos naturales, pero estas dos ramas teóricas no son otra cosa que la extensión de la teoría estándar para incluir al medio ambiente. Estas modificaciones se las realizan, sin cambiar el paradigma central -núcleo, o tradición de investigación- de la teoría económica ortodoxa (Pearce, 1985).

La teoría neoclásica u ortodoxa tiene en su centro a la Teoría del Equilibrio General Walrasiano –TEGW-. Esta teoría tiene esta posición debido a su gran importancia, reflejada en: su capacidad para responder a la pregunta de Adam Smith sobre el proceso y condiciones de la coordinación mercantil entre individuos descentralizados. La prueba matemática formal que especifica en qué condiciones se verifica esta idea, fue dada por A. Debreu y K. Arrow (1954). La TEGW, trata de presentar a las otras escuelas del pensamiento como sus casos particulares. Por ejemplo, la economía keynesiana tiene que ver con la

introducción de inflexibilidad en los precios. Tiene un alto grado de formalización y rigurosidad en su metodología y razonamiento (Cataño, 2004).

Frecuentemente, la teoría neoclásica y la teoría económica ortodoxa han sido criticadas debido a sus supuestos irreales y su alto grado de abstracción. Milton Friedman, hace la defensa más conocida de esta escuela de la teoría económica ortodoxa. Para Friedman (1953) es irrelevante criticar los supuestos, pues nunca se podría tener un modelo que pueda reflejar toda la realidad. Este autor, afirma que la meta final de una ciencia positiva –en este caso la economía positiva ortodoxa- es el desarrollo de la teoría o las hipótesis que contienen predicciones válidas y significativas de un fenómeno todavía no observado. Tal teoría, sería la mezcla de dos componentes: una parte, es el lenguaje diseñado para promover un método organizado y sistemático de razonar, como propuso Alfred Marshall. Otra parte, es un cuerpo de hipótesis sustantivas diseñadas para abstraer las características esenciales de una realidad compleja. Es esta segunda parte, la que debe ser considerada para criticar o apoyar a una teoría y esto implica que las críticas están mal dirigidas (Friedman, 1953).

Respecto a la macroeconomía, ésta parece ser un campo dividido entre escuelas: keynesianos, monetaristas, nuevos clásicos, nuevos keynesianos, neo-ricardianos y otros. Para Blanchard y Fischer (1989), esta realidad es sólo aparente pues los macroeconomistas comparten muchos de los modelos básicos y tienen muchas visiones en común. La macroeconomía existiría como ciencia joven, dubitativa y difícil. De todas maneras, los modelos de tipo de equilibrio general son cada vez más utilizados. Excepto en los casos de los mercados laborales y financieros, que se cree, difieren en varios aspectos del paradigma neoclásico.

Se ha argumentado que el futuro de la macroeconomía es convertirse en una rama de la Teoría del Equilibrio General. Entre las razones fundamentales se subraya, que la macroeconomía es mejor vista como el estudio de las condiciones del equilibrio en las cuáles se rompen los teoremas del

bienestar. Este enfoque permite que se pueda discutir del rol de la política económica en un contexto que sirva para este propósito (de La Croix & Michel, 2002; R. E. A. Farmer, 1999).

La nueva macroeconomía neoclásica tiene como sus principales instrumentos a los modelos de Dinastías o de Agentes de Vida Infinita a la Ramsey y los Modelos de Generaciones Traslapadas. Estos modelos son agregados, dinámicos, se basan en comportamientos optimizadores y racionales. Además, el marco del equilibrio general es preferido a los equilibrios parciales (de La Croix & Michel, 2002). Se destacan los modelos MGT, que tienen características específicas como la distribución intergeneracional. Esto permite estudiar problemas de seguridad social, educación, deuda pública y el medio ambiente. (Blanchard & Fischer, 1989; de La Croix & Michel, 2002).

Los modelos de generaciones traslapadas han sido usados ampliamente como una herramienta de investigación en la teoría monetaria, y sus propiedades teóricas han sido ampliamente exploradas por los académicos. Este tipo de modelos han sido poco exitosos para realizar predicciones empíricas cuantitativas, debido a razones de tratabilidad. Es decir, estos modelos pueden ser poco tratables matemáticamente. Sin embargo, el uso principal de estos modelos ha sido el proporcionar ejemplos teóricos de lo que podría ser posible en un modelo de equilibrio general, basado en ejemplos simples, en los cuáles se asume que los agentes viven por uno o dos períodos (R. E. A. Farmer, 1999).

## **2. Evaluación del marco teórico**

El modelo de generaciones traslapadas es especialmente adecuado para tratar la sustentabilidad en sus tres dimensiones: económica, social y ambiental. Permite tomar en cuenta las externalidades ambientales en un entorno dinámico, lo que se prueba es no trivial. Además la estructura básica con dos tipos de agentes que conviven en el mismo tiempo - jóvenes y viejos-, permite un análisis de equidad intergeneracional muy enriquecedor. En lo que respecta a la

dimensión ambiental, ha mostrado ser útil para incorporar restricciones y variables ambientales.

No obstante, la dimensión ambiental debe ser diferenciada de la dimensión ecológica. Es decir, se puede analizar el efecto del medioambiente en la economía pero no se puede hacer lo mismo en el otro sentido con la misma rigurosidad. Los efectos que tiene la economía sobre el sistema natural, es su punto más débil. La razón está en que para incorporar los mecanismos de valoración ambiental y el funcionamiento del sistema natural en el modelo básico se puede necesita supuestos muy restrictivos.

Otro punto fundamental, es el salto dimensional que requiere la forma en que se valora al medioambiente y la dimensión física del medioambiente mismo. Se debe recordar, que como lo mencionó el economista Georgescu-Roegen (1971), la economía trata con flujos psicológicos y no físicos. A la economía le debe interesar el valor subjetivo de un bosque no el número de árboles. Este punto es uno de los más importantes para diferenciar la economía ambiental, que se utiliza en esta investigación, de la ecológica. La ecología, admite que ciertos valores ambientales y sociales son inconmensurables y también se interesa por el funcionamiento físico de los sistemas naturales, ya que considera la irreversibilidad de los procesos ecológicos (Martínez Alier, 1991).

Se puede decir, que el modelo de generaciones traslapadas ofrece una de las mejores herramientas para tratar los problemas de sustentabilidad desde la economía neoclásica y ambiental. Lastimosamente, esto no significa que sea suficiente. Como ejemplo de este punto tenemos a la definición de lo que es equitativo a nivel intergeneracional. Este tema se escapa del campo de la ciencia económica y tiene que ver con la filosofía moral. Se debe acudir a teóricos como Rawls para instrumentalizar sus criterios, aunque se lo haga de manera imperfecta (Arrow, 1973; Solow, 1974).

Adicionalmente, si admitimos la irreversibilidad de los procesos ecológicos y si consideramos que la economía y el efecto que tiene la acción humana sobre el sistema natural, es alto, se vuelve imperativo el conocimiento profundo del funcionamiento de tal sistema. Entonces se necesitan estudios interdisciplinarios que vayan más allá de la economía. Se necesita de la historia, la biología, la ecología, la química y la física; para tratar satisfactoriamente este tema.

Se tiene otro problema importante, que consiste en determinar un mecanismo aceptable de valoración ambiental. Además, están los problemas comunes al cuerpo de la teoría ortodoxa, que consiste en determinar la verdadera forma en que las personas toman decisiones, intercambian, consumen, degradan, conservan, etc. Este punto representa un quiebre del piso epistemológico. Si se admite que ciertos valores ambientales y sociales son inconmensurables, por definición la economía tradicional no puede utilizarse para tratar esos problemas. Entonces se debe acudir a la historia, a la economía ecológica, a la economía política y al institucionalismo.

De todas maneras, supuestos irreales pueden no invalidar a una teoría (Friedman, 1953). Si esta teoría puede presentar de manera clara la interrelación entre muchas variables y si logra explicar ciertos hechos estilizados, la teoría puede ser considerada como válida. Los modelos de generaciones traslapadas, en general, pueden cumplir estos requerimientos. Se han utilizado con éxito en calibraciones para reproducir series de tiempo y proporcionan lecciones muy interesantes sobre políticas de desarrollo.

El modelo de generaciones traslapadas puede enseñar muchas cosas, manteniendo una rigurosidad y limpieza de la cual otros tratamientos pueden carecer. Adicionalmente, se presta para múltiples extensiones: capital humano, tres períodos de vida, crecimiento endógeno, crecimiento poblacional endógeno, etc. Muchas veces el costo de estas extensiones es la tratabilidad matemática. No obstante, la estructura en tiempo discreto, permite que se realicen simulaciones

numéricas usando hojas de cálculo. Si se conoce bien los parámetros o se define bien sus rangos se puede obtener resultados robustos.

En comparación a otras herramientas pertenecientes a la misma escuela o con el mismo núcleo duro. Los modelos de generaciones traslapadas, pueden ser una caja de herramientas muy interesante para evaluar los efectos del medio ambiente en la economía de una manera en la que no lo pueden hacer los modelos de dinastías o agentes de vida infinita. También supera a los modelos estáticos de equilibrio general y a los tratamientos de equilibrios parciales típicos de la economía ambiental estándar.

Respecto a la economía de los recursos, su análisis permite capturar los problemas de miopía o ineficiencia dinámica, que lleva al sobre-degradación del medioambiente o al exceso de contaminación. Es decir, permite capturar las externalidades propias de la diferencias entre los horizontes de existencia de la naturaleza y las personas. Las acciones que los individuos realicen en su tiempo de vida tienen efectos que sobreviven a ellos. Este cambio, tiene implicaciones muy importantes sobre los niveles de estado estacionario y sobre las dinámicas de la economía.

Finalmente, el modelo de generaciones traslapadas, ha sido utilizado para generar dinámicas complejas y convergencias no monotónicas. De esta manera se puede explicar fluctuaciones de la economía de manera endógena. La presencia de dinámicas complejas e inclusive caóticas se ha vuelto cada vez más común en los tratamientos dinámicos de la economía (Wiggins, 2003; Shone, 2002; Junxi, 1999). La introducción de la no linealidad es un paso importante para la economía neoclásica y tiene implicaciones importantes sobre la formulación de políticas en presencia de caos y otras topologías complejas. Este estudio es nuevo, pero prometedor.

**CAPÍTULO III**  
**ESTADO DEL ARTE**  
**GENERACIONES TRASLAPADAS CON RESTRICCIONES AMBIENTALES**

**1. Los modelos de generaciones traslapadas y el medioambiente**

La irrupción de la noción de sostenibilidad ambiental en la economía; con el informe del Club de Roma (Meadows, 1972) y sobre todo el informe “Nuestro Futuro Común” (Brundtland, 1987). Además de la necesidad de enfrentar las cuestiones ineludibles de equidad intergeneracional y asignación óptima de recursos intertemporal hacía que la caja de herramientas, del modelo de generaciones traslapadas, por sus características, sea un candidato inmediato para el estudio de estos tópicos. Es más, algunos autores entre ellos Solow (1986) admiten que un tratamiento riguroso de los problemas mencionados requeriría el uso de estos instrumentos. Además, este autor llama a que se usen un entorno de tiempo discreto –ya que se ha observado una diferencia no trivial entre los modelos continuos y discretos en los problemas de recursos ambientales-.

A pesar de estos antecedentes y de la naturalidad aparente que muestran los MGT para adaptarse al estudio de la sostenibilidad ambiental y la equidad intergeneracional, es con el artículo de Howarth & Norgaard (1990) que se comienza a utilizar los MGT con estos fines. Este artículo es considerado como seminal (Pezzey & Toman, 2002), aunque no se implementó una versión del modelo estándar –múltiples generaciones- (Allais, 1947; Diamond, 1965; Samuelson, 1958), sino que se utilizó, un modelo de tres períodos y dos generaciones.

En esta sección se presentará y analizará las reformulaciones, de los modelos de generaciones traslapadas con estos fines –estudio de sostenibilidad ambiental, eficiencia y equidad intergeneracional- y se sistematizará sus

principales resultados, respecto a: las dinámicas del modelo, los estados estacionarios y el análisis de optimalidad. Además, nos detendremos en las principales conclusiones y recomendaciones de política pública.

El Modelo de Generaciones Traslapadas MGT, es un modelo de Equilibrio General Dinámico y su estructura permite muchas modificaciones que lo hacen ideal para evaluar políticas públicas; y en este caso externalidades y consideraciones sobre equidad intergeneracional. Sin embargo, por las características de modelo matemático neoclásico, es abstracto por naturaleza e impone fuertes supuestos para poder funcionar, aunque a cambio nos proporciona fuertes conclusiones. En este sentido, es importante estudiar estos supuestos para ver cómo afectan a los resultados del modelo y para dar luces sobre las modificaciones pertinentes al modelo MGT.

La estructura de la presente sección estará dada, por la forma en que el medio ambiente ha sido considerado dentro de los Modelos de Generaciones Traslapadas o MGT. En una primera sección incluiremos, los casos en que las variables ambientales se hayan incluido desde el lado de los factores y el problema de la firma. Luego, los casos en que el medioambiente se haya incluido como fuente de utilidad. Enseguida, se incluirán los estudios de equidad intergeneracional desde enfoques alternativos al utilitario. Finalmente, se presentarán y analizarán las principales observaciones sobre las diversas reformulaciones de los MGT que sean de interés para los análisis de sostenibilidad ambiental, equidad intergeneracional y eficiencia.

## **2. Modelos de generaciones traslapadas y medioambiente**

### **2.1. MGT con medioambiente desde el problema del consumidor.**

John & Pecchenino (1994), analizan el potencial conflicto entre el crecimiento económico y el mantenimiento de la calidad medioambiental en un

modelo de generaciones traslapadas. Los individuos, de vidas cortas, toman decisiones que tienen efectos de larga duración tanto en la productividad de los factores y en el medioambiente. Este artículo sigue la línea utilitarista y en el enfoque de sustentabilidad débil, al considerar como sustituibles la calidad ambiental y el capital. El ambiente entra dentro de la función de utilidad en el problema del consumidor, como un bien público. La calidad medioambiental sin actividad humana se fija en cero (0) y se establece una tasa natural de regreso a ese nivel de  $(1 - b)$ ,  $b \in [0, 1]$ , el medioambiente se afecta negativa y proporcionalmente por el consumo y positiva y proporcionalmente por el gasto en mantenimiento:

$$E_{t+1} = (1 - b) E_t - \beta c_t + \gamma m_t; \quad \beta > 0, \gamma > 0.$$

(1.3)<sup>9</sup>

El modelo proporciona un ejemplo teórico de las relaciones empíricas observadas entre la calidad medioambiental y el ingreso. Esto es, que el crecimiento económico se asocia primero con baja calidad ambiental, hasta un punto en el que se relaciona positivamente con la calidad ambiental –La Curva de Kutznets Ambiental-. John & Pecchenino sugieren circunstancias dónde múltiples equilibrios de estados estacionarios Pareto Ranqueados pueden emerger. Además, se establece que en presencia de externalidades positivas en la producción, se puede mantener un crecimiento sostenido tanto del ambiente como del capital. El resultado más sobresaliente es que el sobre-mantenimiento del ambiente puede ocurrir. Esto es análogo a la ineficiencia dinámica de sobre-acumulación de capital. Las dinámicas son de punto de silla.

El resultado de que se podría estar sobre-manteniendo la calidad ambiental, es contra-intuitivo, si tomamos en cuenta que la calidad medioambiental es un bien público. El supuesto principal del modelo de John &

---

<sup>9</sup> Dónde: E, es el índice medioambiental; C, consumo; m, mantenimiento ambiental. Finalmente  $\beta$  y  $\psi$  son parámetros positivos. El parámetro b, es una tasa entre cero y uno a la cual el índice natural regresa a su estado original –sin acción humana-.

Pecchenino que puede ser el determinante de este resultado es la eliminación del problema del polizón intrageneracional mediante el uso del artificio de la existencia de un gobierno para cada generación, o es su defecto un planificador central que fija precios para los bienes públicos de tal manera que se logra un equilibrio de Lindhal en cada generación para la provisión de la calidad medioambiental.

Como los autores argumentan, estos supuestos se imponen para lograr aislar el efecto de las externalidades entre generaciones, pero pierden una parte muy importante del problema medioambiental, que es el problema de la tragedia de los comunes (Stiglitz, 2006; Hardin, 1968). Es claro que en este modelo existe una externalidad entre las generaciones y que el mantenimiento del medioambiente es mayor de lo necesario. Pero si consideramos la presencia del problema del polizón, podremos contemplar la posibilidad que el mantenimiento agregado será menor al óptimo –tragedia de los comunes-, y es más que este efecto tendrá una duración de largo plazo por la estructura dinámica del modelo.

Junxi (1999), estudia la posibilidad de dinámicas no lineales en una modelo simple de generaciones traslapadas con medioambiente –el modelo de John & Pecchenino (1994)-. El autor demuestra que si las preocupaciones de las personas sobre las cuestiones ambientales no son fuertes –preferencias verdes- y que si la eficiencia del mantenimiento no es suficientemente alta respecto a la degradación, pueden surgir equilibrios cíclicos o caóticamente fluctuantes. Más aun, bajo ciertas condiciones, una estructura topológica complicada puede existir. Se realiza un análisis de corto plazo que completa el análisis de largo plazo de John & Pecchenino. Los resultados sugieren que la transición asociada hacia un equilibrio sustentable no es trivial.

Para Junxi, la mayoría de los modelos con medioambiente se restringen al análisis de los estados estacionarios, ignorando por tanto las dinámicas transicionales hacia posiciones de largo plazo. Hay dos razones, según este autor, por las cuáles se puede pensar que las dinámicas transicionales en los

modelos que siguen la tradición neoclásica pueden ser muy complejas. En primer lugar, aunque los modelos con medioambiente sean similares a los modelos de crecimiento estándar donde el concepto del estado de sostenibilidad ambiental corresponde al del estado estacionario; existe una diferencia fundamental entre los dos tipos. En los modelos con medioambiente existen dos fuerzas opuestas que se balancean la una contra la otra hacia un nivel sustentable: Una fuerza negativa, mediante la cual las actividades de los agentes como el consumo lastiman al medioambiente; y una fuerza positiva, que consiste en el deseo de preservación y cómo esto afecta al ambiente. Es por este motivo, que el juego de estos dos efectos opuestos, que está generalmente ausente en los modelos de crecimiento, dé lugar a dinámicas no triviales.

La segunda observación importante, de Junxi respecto al análisis estándar de los estados estacionarios, es que se presume que el nivel sustentable es alcanzable. Por lo tanto, en esos modelos, la convergencia prevalece. Sin embargo, estudios en dinámicas no lineales sugieren que dado los dos efectos opuestos ya mencionados, esta predicción puede ser demasiado simple. Es posible, que un sistema de esas características pueda dar lugar a trayectorias de equilibrios acotados que nunca converjan a un nivel de estado estacionario. Cabe mencionar que esta posibilidad ha sido poco estudiada en los modelos de crecimiento y medioambiente.

Las dinámicas dependen del valor de dos parámetros del modelo John & Pecchenino (1994) que son: la proporción del consumo que daña el medio ambiente y la eficiencia de las tecnologías de mitigación<sup>10</sup>. Y además de un nuevo parámetro que se define como:

$$\eta_E \equiv (E/c)U_E/U_c > 0 \quad (1.4)^{11}$$

<sup>10</sup>  $\beta, \gamma$  respectivamente en la notación de John y Pecchenino (1994).

<sup>11</sup> Donde:  $\eta_E$  es la elasticidad ambiente consumo;  $C$  es el consumo,  $E$  el índice de calidad ambiental del modelo de John y Pecchenino (1994),  $U$  es la utilidad y los subíndices muestran las derivadas parciales de  $U$  respecto al consumo y al nivel de calidad medioambiental.

Esta elasticidad, se supone constante y muestra el deseo o las preferencias por la sostenibilidad de los consumidores. Mientras más alta es, más se valora la calidad medioambiental.

Si la elasticidad de calidad ambiental es suficientemente alta y si la eficiencia de la mitigación supera en cierto nivel a la proporción de daño por consumo al medioambiente, se puede encontrar un caso en que exista un equilibrio único y positivo que es asintóticamente estable. Si estas condiciones no se cumplen, entonces pueden surgir dinámicas de tipo: foco estable o espiral estable. Es más haciendo uso de la noción de bifurcación, se encuentra dinámicas no lineales que incluyen: órbitas periódicas complejas, trayectorias caóticas deterministas no explosivas y una estructura topológica complicada. La presencia de sistemas caóticos cuando tratamos con el medioambiente ha sido entendido en la economía ecológica pero no así en los modelos de crecimiento estándar.

Como supuestos importantes se debe rescatar que la tasa de preferencias por el presente es cero, ya que los agentes sólo consumen en el segundo período de vida; este supuesto es estándar en la mayoría de modelos de generaciones traslapadas con medioambiente. Además mantiene preferencias homotéticas entre el ambiente y el consumo –sin este supuesto pueden aparecer ciclos desde esta fuente-. El análisis ambiental utiliza como el modelo base de John y Pecchenino, sólo una externalidad desde el consumo –no de la producción-, no considera la presencia del problema del polizón en la función de mantenimiento ambiental, y su dinámica se limita a una dimensión.

Jouvet, Michel, & Vidal (2000), construyen un modelo de generaciones traslapadas con la contaminación como externalidad, los individuos están atados de manera altruista a sus hijos. Se demuestra que el consumo de estado estacionario es una función decreciente del grado de altruismo. A pesar del altruismo el equilibrio competitivo no es óptimo. En este modelo, considera agentes que viven dos períodos, pero que derivan utilidad sólo del segundo

período. Se considera una población positiva y estacionaria. La tecnología es estándar y sus rendimientos se suponen decrecientes. La utilidad tiene como argumentos el consumo en ese tiempo, con derivada positiva y el nivel de contaminación en ese momento, con derivada no positiva. La contaminación, es una función lineal del producto y está gobernada por la siguiente ley de movimiento.

$$P_t = aY_t + (1 - h)P_{t-1} - bZ_t. \quad (1.5)^{12}$$

En este modelo se considera la naturaleza de la contaminación como mal público y el problema análogo del nivel de abatimiento escogido. El nivel abatimiento escogido individualmente se obtiene como un equilibrio de tipo Nash-Cournot, característico de los problemas de bienes y males públicos. En este modelo, como sus autores lo resaltan, el resultado no es óptimo debido a que el altruismo es incapaz de eliminar el efecto de dos externalidades: En primer lugar el problema de la sub-provisión individual de abatimiento, propio de un equilibrio Nash-Cournot.

El segundo lugar, una externalidad que trabaja a través de la producción de la contaminación y como las decisiones privadas llevan a sobre-acumular contaminación. La conclusión más fuerte es que aún en presencia de altruismo intergeneracional hay un caso para la política pública. El óptimo social puede ser descentralizado mediante un subsidio en las contribuciones voluntarias para el abatimiento y un impuesto en el ahorro.

---

<sup>12</sup> En este caso se dice que el stock de contaminación  $P$  del tiempo  $t$ , depende de la contaminación de  $t$ , y del stock de  $t-1$  multiplicado por el factor  $(1-h)$  que determina el nivel de absorción natural de la contaminación por la naturaleza, menos una tecnología lineal de mitigación que depende del nivel de gasto en abatimiento  $Z$ . Se supone en el modelo que el abatimiento es eficiente esto es que  $b > a$

### **3.2 El Modelo de Generaciones Traslapadas, con el medio ambiente desde el problema de la firma.**

Howarth & Norgaard (1990), como ya se mencionó, son los primeros autores que comienzan a utilizar los MGT para estudiar los problemas de sostenibilidad y equidad intergeneracional. Se utiliza un modelo de tres períodos y dos generaciones. No obstante en este contexto, estructuralmente simple, se concluyó que la distribución intergeneracional de la riqueza depende de las dotaciones –como el stock de un recurso natural-, que a pesar de ser eficientes, pueden ser no óptimas. Es más, se reconoce que no hay una manera a priori de decir cuál es óptima de esta manera se llama para la implementación de un criterio formal de justicia intergeneracional. De esta manera, este análisis se aleja de la tradición del estudio de la explotación eficiente de recursos<sup>13</sup>.

Este modelo inicial, se extiende hacia un modelo estándar de generaciones traslapadas con múltiples generaciones (R. B. Howarth & Norgaard, 1992). Además se utiliza como variable ambiental el stock de contaminación que funciona como insumo de la producción y causa una externalidad negativa en la producción.

En este modelo (R. B. Howarth & Norgaard, 1992), el hallazgo más importante (Pezzey & Toman, 2002) es que la senda o trayectoria del consumo a través del tiempo y la valoración marginal de la externalidad medioambiental – medida por el impuesto de emisión eficiente-, depende en la distribución de riqueza entre las generaciones –lograda por transferencias obligatorias de ingreso desde los viejos a los jóvenes-. Así, aún en un marco plenamente teórico, no hay una noción fija o única para evaluar correctamente el costo medioambiental. El valor varía con la visión de la sociedad del futuro, sea expresado como una tasa de descuento o como un criterio de sustentabilidad.

---

<sup>13</sup> Esta línea de análisis tiene como resultado principal la regla de Hotelling que consiste en que los productores –maximizadores de beneficio- igualarán el retorno esperado de la tenencia de unidades de recursos para una futura extracción con el retorno actual de extraer el recurso e invertir el ingreso neto de la venta, en el mercado de capitales (R. Howarth & Norgaard, 1990).

Mourmouras (1991), realiza otro de los estudios pilares de las generaciones traslapadas con medioambiente. Se utiliza un entorno estándar de generaciones traslapadas y se usa como variable ambiental a un tipo de recurso renovable. Este recurso renovable entra en esta economía como insumo o factor de la producción. En este modelo el autor deriva resultados de estado estacionario sustentables ambientalmente –con estabilidad de tipo punto de silla-. Este resultado deriva de manera descentralizada, un equilibrio de estado estacionario donde existe igualdad en la distribución del capital natural y físico.

Si el capital inicial no es muy grande, el capital se acumula y los salarios y los estándares de vida mejoran en la forma sugerida por los modelos neoclásicos sin recursos naturales. El capital inicial converge al estado estacionario monotónicamente. Durante la transición al estado estacionario, los recursos de los precios de los recursos son más bajos y las tasas de interés más altas que en la situación estacionaria. Mientras el stock de recursos disponibles se mantenga constante, el precio de los recursos sube en el tiempo, pero a una tasa declinante, y las tasas de interés caen. A pesar de su similitud con el estado estacionario del modelo de Solow, este estado estacionario depende de las condiciones iniciales, tales como la dotación inicial del recurso natural. Más aún, la tasa de interés está determinada por la productividad biológica de los recursos naturales.

Este autor, demuestra además, que dos economías que tengan esta descripción y que no comercien la una con la otra, estarán en el largo plazo caracterizadas por un diferencial constante en los niveles de vida –no convergencia-. Si se permite un comercio sustentable de los recursos naturales se eliminaría este diferencial. El comercio beneficiaría a los dueños de los stocks de recursos naturales en la economía exportadora de recursos a las expensas de las futuras generaciones de ese país. Lo exactamente opuesto es verdadero para la nación pobre en recursos naturales.

Sin embargo, el propio autor, admite que bajo determinadas combinaciones de parámetros psicológicos y técnicos –como la tasa subjetiva de descuento intertemporal o las elasticidades de los factores de producción-, se puede tener resultados de sobre-explotación de los recursos naturales. Si la tasa de crecimiento –natural- de los recursos no utilizados es baja en relación con la propensión –en equilibrio- de utilizar los recursos como factores, si además ocurre que la tasa de impaciencia es demasiado alta; los stocks de capital, recursos naturales y estándares de vida declinan en el equilibrio sin importar que tan sustituibles sean los recursos naturales. Otros supuestos importantes son una población estacionaria, consumo sólo en el segundo período de vida, y una función de retorno natural lineal.

La ecuación de movimiento para el recurso natural que utiliza es lineal y es del tipo:

$$R(t+1) = \lambda[R(t) - X(t)] \quad \lambda \geq 1. \quad (1.6)^{14}$$

Esta especificación de tipo lineal, sería determinante para que un equilibrio de estado estacionario que sea sustentable ambientalmente exista. De esta premisa parte K. Farmer (2000), para reconstruir el modelo de Mourmouras. Su principal innovación es una función de crecimiento del recurso natural que es logística. Las funciones de tipo logísticas -como la conocida Lotka-Volterra que se usa ocasionalmente en el modelo-, describen el comportamiento dinámico de mucho de los recursos naturales renovables. Su hallazgo más importante, es que bajo condiciones generales, la función de capital natural no lineal evita la una distribución intergeneracional igualitaria del capital en las sendas de crecimiento hacia el estado estacionario. Sólo bajo ciertas relaciones complejas entre los parámetros de la utilidad, producción y retorno natural existe un estado estacionario no trivial que es un punto de silla.

La función de movimiento del recurso natural renovable es:

---

<sup>14</sup> Dónde, en tiempo discreto, tenemos que R es el stock del recurso natural, X es la cantidad de recurso explotado y el parámetro lambda que es positivo da el crecimiento natural del recurso.

$$R_{t+1}^d = R_t^d + g(R_t^d) - X_t^d \quad (1.7)^{15}$$

En esta especificación,  $g(\cdot)$  que es la función de regeneración natural puede tomar la conocida forma paramétrica de Lotka-Volterra:

$$g(\cdot) \equiv (a - 1)R_t^d - b(R_t^d)^2 \quad (1.8)^{16}$$

La ecuación logística general tiene como características:

$$g'' < 0, g(0) = 0 \quad (1.9)$$

$$g(\bar{R}) = 0 \quad (1.10)$$

Esta última condición establece que las dinámicas naturales sin presencia del hombre son no explosivas y que el retorno natural es cero en el estado estacionario  $R^*$  mayor que cero.

Howarth (1998), realiza una calibración de un modelo de generaciones traslapadas para todo el mundo, con el objetivo de establecer las relaciones de la economía y el clima; específicamente las emisiones de gases de invernadero. Sus resultados, muestran que en ausencia de transferencias intergeneracionales, las tasas eficientes de abatimiento de las emisiones de gases de invernadero van desde 16% en el presente a 25% en el largo plazo, mientras la temperatura crece en 7.4 grados centígrados relativo a la norma pre-industrial.

Un óptimo utilitario, en el cual se da un peso igualitario a la utilidad del ciclo de vida de cada generación necesita una tasa de abatimiento que va desde 48% hasta el 89% con un aumento en la temperatura de 3.4 grados centígrados. Una trayectoria de segundo óptimo utilitario, en el cual las transferencias intergeneracionales son institucionalmente imposibles, también necesitan de medidas de abatimiento rigurosas.

---

<sup>15</sup> Donde  $R$  es el stock de recurso natural, el superíndice indica que es oferta –s- o demanda –d-,  $g(\cdot)$  es la función de regeneración natural y  $X$  es la extracción del recurso.

<sup>16</sup> Dónde  $a$  y  $b$  son parámetros,  $a$  es el factor de crecimiento y  $b$  es el factor de retardo.

En el análisis que este autor presenta, la variable de tipo ambiental considerada en este caso es la contaminación y la temperatura climática. La contaminación es linealmente proporcional al producto mundial. Además, existe una externalidad negativa, ya que la contaminación causada hoy afecta negativamente la cantidad de producto de mañana. Su perspectiva es de la sustentabilidad débil ya que no supone umbrales ambientales, esto es un punto en el cual el clima se ve afectado irreversiblemente por la contaminación. La contaminación, no afecta directamente la función de utilidad de los consumidores, aunque lo hace indirectamente por vía del producto.

El autor soporta la idea de que al abandonar el mundo ficticio de los agentes de vida infinita –a la Ramsey-, se hacen importantes distinciones para la formulación de políticas entre la eficiencia intertemporal y la distribución del bienestar entre las generaciones. Este enfoque, es pertinente para caracterizar políticas de segundo mejor, en un mundo donde los problemas intergeneracionales pueden estar imperfectamente manejados por las instituciones existentes.

Howarth (1998), concluye de su estudio que el uso de un marco moral utilitario, sugiere que sólo políticas muy agresivas pueden detener la tasa de cambio climático –dado los otros supuestos del modelo-. Se concluye en base a los resultados obtenidos que este marco, podría no ser adecuado en un mundo donde la distribución de bienestar entre generaciones puede ser subóptimo. Se argumenta que los resultados utilitarios podrían ser moralmente inaceptables, ya que sacrificarían el bienestar de las generaciones pobres de hoy por las ricas de mañana por ejemplo. Finalmente, se evita recomendar políticas, ya que se considera que los analistas no pueden hablar de cambios en el bienestar sin antes tratar con las controversias que rodean a las funciones de bienestar social y los temas relacionados de moral y filosofía política. Este autor afirma, que en esta perspectiva, no se pueden derivar conclusiones normativas de modelos puramente descriptivos de comportamiento económico.

M. Farmer & Randall (1997), utilizan el modelo de generaciones traslapadas para tratar el problema de la sostenibilidad desde un enfoque distinto. Ellos tratan de solucionar la paradoja de la tasa de descuento intertemporal. Esta paradoja consiste en que una tasa cercana a cero o cero ayuda a la distribución intergeneracional más equitativa de los recursos –no renovables-, pero una tasa alta y positiva garantiza que menos proyectos –desperdiciadores en capital y en sentido medioambiental- sean aprobados hoy.

Mediante un modelo de generaciones traslapadas con agentes que viven tres períodos –juventud, mediana edad y retiro-; logran encontrar una tasa de interés, no trivial y positiva; que no corresponde a la miopía de los agentes frente al futuro sino a la productividad de las inversiones hechas por agentes prospectivos<sup>17</sup>, así también como el caso con precios de corto plazo. Este modelo presenta complejidades profundas en la implementación de reformas de mercado para lograr la sostenibilidad. Estos autores argumentan, que las políticas formuladas desde la perspectiva tradicional, es decir con una tasa de descuento cercana a cero o de cero, pueden ser perjudiciales para el futuro.

Este modelo, tiene una conclusión bastante fuerte, que es la defensa de una tasa de descuento positiva que surge de los mecanismos de mercado. Lo importante es conciliar la existencia de una tasa de descuento positiva con agentes que no son miopes. Es más, se tiene un mecanismo en el cuál los deseos de las generaciones que todavía no nacen se toman en cuenta por el mercado, sin necesidad de altruismo, y que se deriva de la posibilidad de verdadero intercambio intergeneracional que permite los tres períodos de vida de los agentes.

Es más, se prueba bajo este cuadro de análisis, que una política que busque favorecer una economía sustentable mediante una disminución de la tasa de interés a largo plazo, aumentando los precios relativos del consumo respecto a los legados intergeneracionales –*bequest*-, puede fallar. La razón, es que al

---

<sup>17</sup> Traducción de: *forward-looking agents*

haber incentivos de mercado para que los agentes de mediana edad ahorren para prestar en el período de retiro a las nuevas generaciones nacidas, esta baja de tasa de interés puede causar una restricción de crédito al quitar los incentivos para que lo hagan. La razón es directa, las preferencias futuras están representadas en los planes de demanda por tierra y por crédito de largo plazo. Estos intereses están atados, eventualmente a volúmenes de capital –tierra y capital físico- que se mueve a través de estos mercados.

Sin embargo, antes debemos aclarar, que la variable ambiental que se considera es la tierra, que es insumo de la función de producción y que tiene una función de regeneración positiva, es decir, es un recurso renovable. Se puede argumentar entonces que este modelo no incluye algunos problemas fundamentales del medioambiente dentro de la economía: Su naturaleza de bien público; la existencia de recursos no renovables y las externalidades intergeneracionales que surgen de los problemas de contaminación -sobre-contaminación- análoga a la sobre-acumulación de capital en los modelos de generaciones traslapadas. Es claro, que esto podría crear un caso para el descuento temporal cero.

Brechet & Lambrecht (2005), construyen un modelo de generaciones traslapadas que incluye como variable ambiental a un recurso renovable que es factor de la producción junto al capital físico y al trabajo. Además, se incluye un motivo altruista, que se basa en el “gusto de dar”<sup>18</sup>. Los agentes deciden extraer, sin costo, el recurso a un precio positivo pagado por las firmas o no hacerlo por lo cual reciben una utilidad. La función de utilidad utilizada es logarítmica y la función de producción utilizada es Cobb-Douglas. Se supone una población estacionaria.

Los resultados más importantes derivados por estos autores, en la búsqueda de la sostenibilidad en un marco de decisiones descentralizadas son: En el largo plazo, la presencia de altruismo –en el sentido imperfecto- no

---

<sup>18</sup> *Joy of giving*: en el sentido dado por Andreoni (1990).

garantiza sistemáticamente sostenibilidad. Cuándo los factores, recursos y capital, son altamente sustituibles –sostenibilidad débil- y cuándo los recursos extraídos son poco importantes cualquier nivel de altruismo será compatible con la preservación del recurso. Por ende, tanto la sostenibilidad débil –preservación del consumo-, como la sostenibilidad fuerte –preservación del recurso- son satisfechos. Por el contrario, cuando los factores son sustitutos pobres, es decir, cuándo el recurso es esencial para la producción –sostenibilidad fuerte-, es necesario preservar el recurso para preservar el consumo.

En la mayoría de los casos, estos autores encuentran, que las preferencias llevarán a la economía a converger a un equilibrio sub-óptimo de largo plazo. Se presentan dos casos interesantes: Una economía que sea conservadora en el uso de recursos, que tiene un estado estacionario con un alto stock de recursos, debe compensarlo con un nivel más bajo de capital para maximizar el mejor segundo nivel de consumo per cápita –resultado de sustitución-. Por el contrario, una economía que sea consumidora de recursos, en el sentido de la intensidad de su uso, tendrá un estado estacionario con un bajo stock de recursos, y por este motivo también debería disminuir su nivel de stock de capital para maximizar el segundo mejor nivel de consumo per cápita –resultado de complementariedad-.

Otro aporte de Brechet & Lambrecht (2005), es el análisis de las dinámicas de transición del modelo construido. Se utiliza la herramienta de la calibración para simular los resultados. Se observan transiciones fluctuantes y también un ciclo límite. Estos resultados cuestionan la sostenibilidad en el sentido de que tenemos dos opciones poco deseables desde un sentido primitivo de justicia intergeneracional: Se puede converger a un futuro sostenible pero al precio de oportunidades desiguales en ciertos puntos del tiempo. En otros términos, se sacrifican algunas generaciones –transiciones no monotónicas-. La otra opción consiste en que no exista un largo plazo con oportunidades iguales para cada generación –ciclo límite-. Para estos autores, desde el punto de vista de la sostenibilidad, estos resultados no pueden ser juzgados satisfactoriamente

con un criterio de bienestar no decreciente –como propuso Solow-, sino con un criterio maximin –similar al Rawlsiano-.

Finalmente, una modificación respecto a los demás tratamientos de modelos de generaciones traslapadas con medioambiente, está en la ecuación de movimiento que rige al recurso natural renovable. En primer lugar se trata con el recurso renovable en términos per cápita, esto es posible ya que en este modelo el recurso renovable es un insumo y no un bien público y entra en la función de utilidad debido al altruismo de dejar un poco del recurso a las siguientes generaciones –para que sean ellos quienes lo exploten-. La ecuación mencionada, en ausencia de la acción humana tiene la forma:

$$z_t = H(z_{t-1}) z_{t-1} \quad (1.11)^{19}$$

En el modelo se considera una especificación cuadrática para el retorno natural del capital:

$$z_t = z_{t-1} + N(\mu - \nu z_{t-1}) z_{t-1} \quad (1.12)^{20}$$

Esta ecuación tiene una forma de campana, y presenta las siguientes cualidades: El stock del recurso  $z_{t-1}$  debe estar entre en el intervalo  $(0, z_{max})$ , donde  $z_{max}$ , es el nivel de  $z$  tal que el retorno natural es negativo y aniquila todo el stock. El estado estacionario del recurso renovable sin extracción está dado por  $z^{ne} = \mu/\nu$ . A ese nivel el retorno natural es igual a cero. La dinámica de los recursos es no explosiva sólo cuando la pendiente del estado estacionario es menor que -1, esto ocurre con de que  $\mu > 2/\nu$ .

Esta ecuación de los recursos renovables muestra así la existencia de un estado estacionario estable, lo que es un supuesto fuerte sobre el comportamiento de los sistemas naturales. Sin embargo, presenta ventajas sobre

<sup>19</sup> Dónde  $z$  es la cantidad per cápita del recurso renovable sin explotar en un tiempo  $t$ . Su nivel está dado una función de retorno natural  $H(\cdot)$  que tiene como argumento al nivel de  $z$  en el tiempo  $t-1$ , multiplicado por  $z$  en el tiempo  $t-1$ .

<sup>20</sup> Donde,  $N$  es la población estacionaria, y tanto  $\mu, \nu$  son parámetros.

otros tratamientos de la dinámica de las variables ambientales, pues permite que aún en ausencia de extracción humana el recurso natural deje de crecer. Este hecho no sólo es aceptable desde la observación preliminar de los sistemas naturales –que tienen mecanismos de auto-regulación como el número de individuos de una especie-, sino que elimina el posible caso de un recurso de tipo maná, esto significa que puede presentar un tasa de regeneración tan alta que lógicamente los individuos sólo deberían cosechar el recurso y no realizar otra actividad productiva. Esto viola uno de los supuestos básicos de los modelos ortodoxos que es la propiedad de no almuerzo gratis<sup>21</sup>, y es poco creíble.

#### **4. Equidad intergeneracional y medioambiente**

Solow (1974), se preocupa del ataque del marco utilitarista predominante en los modelos de dinámicos –y en sí en toda la teoría económica ortodoxa-. Este ataque viene de la mano de las cuestiones de equidad y justicia que aparentemente son tratados de manera insuficiente por el utilitarismo. La crítica más importante, para Solow, viene de la Teoría de la Justicia como equidad de John Rawls (Rawls, 1971c), y de su principio de max-min. Por este motivo, Solow explora las consecuencias de la aplicación de este principio al problema intergeneracional de la acumulación óptima de capital.

El autor afirma que la solución de tipo max-min requiere que el consumo per cápita sea constante a través del tiempo. Argumenta que si el consumo per cápita fuese más alto para una generación futura que para una generación anterior, entonces la función de bienestar social sería incrementada si la generación anterior ahorrara o invirtiera menos, o simétricamente consuma capital, para aumentar su consumo a costas de la generación futura. En esta medida la solución se toma como exógena al modelo –tal vez resultado de un contrato social de tipo rawlsiano-.

---

<sup>21</sup> *No free lunch property.*

Solow considera que el problema fundamental del principio de max-min a nivel intergeneracional radica en que no funciona bien como criterio de equidad, pues el resultado es una tasa de ahorro neta de cero (0) con tecnología estacionaria y en el caso de que la tecnología avance la tasa de ahorro deberá ser negativa. Además, el resultado rawlsiano presenta una excesiva dependencia a las condiciones iniciales. Esto podría significar estancarse en un estado de pobreza.

Se debe aclarar, en este punto, que Solow reconoce que su enfoque no es estrictamente el rawlsiano. Este autor reconoce que Rawls consideraba que el principio del max-min no era aplicable al problema de equidad y justicia intergeneracional. El problema fundamental, argumenta Rawls (1971c), estaba dado por la asimetría natural entre las generaciones, que consistía en que el presente puede afectar al futuro pero no al revés. También se debe subrayar el hecho de que este problema intergeneracional supone un período de vida para cada generación, por lo que se pierde la estructura traslapada del modelo.

Sin embargo, para Solow, la aplicación directa del principio del max-min tiene desventajas y ventajas. Las primeras se refieren a los problemas de asimetría ya tratados por Rawls, pero las ventajas que justifican el estudio son que en algunos aspectos las conclusiones obtenidas de este enfoque son más sensibles en términos de equidad intergeneracional que los del enfoque utilitario estándar.

El autor extrae dos conclusiones principales, de su estudio de un modelo con recursos no renovables. La primera es que el criterio de max-min parece ser un criterio razonable para las decisiones de planificación intertemporal excepto por dos dificultades: Requiere un capital inicial suficientemente grande para soportar un estándar de vida aceptable, caso contrario puede perpetuar la pobreza –aunque no dice como tal capital puede ser acumulado-. También, le parece poco realista tener reglas tan conservadoras en el caso de un modelo con población estacionaria y progreso técnico ilimitado.

La segunda conclusión es que la introducción de recursos no renovables no cambia los principios fundamentales de este tipo de solución –aunque es necesario un supuesto sobre la elasticidad de sustitución entre trabajo, capital y bienes que sea menor a la unidad-. La cantidad finita de recursos –sin reciclaje-, debe ser usada óptimamente de acuerdo a las reglas que gobiernan el uso de los activos reproducibles. En particular, las primeras generaciones pueden extraer los recursos de manera óptima, mientras ellos sumen o inviertan –óptimamente- en capital reproducible. Esta regla tiene paralelos en los trabajos clásicos de Dasgupta & Mitra (1983) y de Stiglitz (1974), aunque Solow brinda un fundamento ético a esta solución<sup>22</sup>.

En, otro trabajo, este autor (Solow, 1986) reconoce las similitudes de este principio con la regla de Hartwick, en la cual se dice que se puede tener una sociedad que goza de un nivel de consumo constante en el tiempo, si invierte todas las rentas competitivas de la extracción de un recurso natural en capital reproducible. Además, Solow reconoce que este tipo de problemas debería ser tratado en un modelo de generaciones traslapadas en tiempo discreto.

La regla de Hartwick, se desarrolló en varios artículos de este autor (1977, 1978a, 1978b). Esta regla fue desarrollada fuera del ambiente de generaciones traslapadas y más bien parte de la idea de que el consumo debe ser constante en el tiempo, además supone una tasa de sustitución perfecta entre el capital hecho por el hombre y el recurso natural no renovable. Es así, que la economía puede seguir existiendo si los recursos no renovables llegan a cero.

El objetivo fundamental de esta regla es encontrar el mecanismo para mantener el nivel de capital total en el tiempo –la adición del capital hecho por el hombre y el natural- y con esto garantizar un nivel de consumo constante para todas las generaciones. Este resultado se supone justo en la línea de Solow (1974, 1986), más que en los principios de Rawls (1971c), ya que este último no

---

<sup>22</sup> Los trabajos de estos tres autores hacen parte de un Simposio publicado en el Journal of Economic Studies, inspirado por la publicación del informe “Límites al Crecimiento” (Meadows, 1972)

buscaba la igualdad sino la equidad intergeneracional y se puede argumentar que mantener constante el consumo para todas las generaciones castiga injustamente a los que, por haber nacido, en un período determinado tienen más riqueza total.

Además, se debe notar que se debería mantener constante la utilidad del ciclo de vida de cada generación y no el consumo, esto es aún más importante, en los casos en que el recurso entre en la función de utilidad con derivada no negativa, sea como fuente de utilidad directa o por motivos altruistas –alegría de dar-. Existe otro caso en que esta distinción no es trivial y se da cuando se presentan externalidades entre las preferencias de las generaciones, de La Croix & Michel (2002), presentan un modelo –sin ambiente- en el cuál los hábitos formados por los padres afectan las preferencias de sus hijos, haciendo que el mismo nivel de consumo les proporcione una menor utilidad. La racionalidad de este resultado, consiste en que las personas se acostumbran a un estándar de vida que luego deben sostener. Este es un caso no trivial y puede afectar a la aplicación y pertinencia de la regla de Hartwick y a la interpretación de Solow del principio max-min de Rawls.

Arrow (1973), retoma la discusión de Solow sobre la cuestión de la justicia intergeneracional en la distribución de los recursos. Este autor afirma, que en ningún punto de la historia del pensamiento económico ha habido criterio aceptado totalmente sobre esta cuestión, pero generalmente ha predominado el criterio utilitario. No obstante, el criterio planteado por Rawls (1971c) se ha planteado como una alternativa fuerte frente a este último, sobretodo porque incluye una noción de justicia que busca la equidad sin sacrificar los principios liberales. Otra ventaja que no menciona Arrow, es sin duda, la eliminación de la posibilidad de las llamadas monstruosidades morales utilitarias, en las cuáles se puede por ejemplo sacrificar el bienestar de una generación si la sumatoria total de utilidades aumenta. Este autor menciona, que la única diferencia entre la equidad en la distribución de recursos en un entorno estático y uno dinámico es que los recursos son productivos y una transferencia de hoy al futuro, hará que llegue más del producto del que se mandó.

La búsqueda del principio del ahorro justo, está basado en una interpretación alterna de Rawls (1971c) a la que hace Solow (1974). Rawls, mencionaba en su Teoría de la Justicia, que debido a que se puede asumir que cada generación le importa sus descendientes inmediatos, un principio de ahorro justo, o más acertadamente, ciertos límites sobre esos principios pueden ser establecidos. Arrow toma esta frase como la base de su análisis de justicia intertemporal. Para este autor, el supuesto del altruismo intergeneracional define un principio de ahorro justo definido y no sólo sus límites, pero que no deja de sufrir los mismos problemas que la versión del max-min de Solow. Específicamente, se obtiene el resultado de que puede existir ahorro bajo ciertas circunstancias, pero que siempre será seguido por desahorro.

Arrow no utiliza una estructura de generaciones traslapadas de manera estricta, más bien una versión de agentes de sólo un período de vida, y en un cuadro de tiempo discreto. La función de utilidad altruista del individuo representativo tiene como argumentos su consumo y el consumo de la siguiente generación, esta función se supone aditivamente separable y se descuenta subjetivamente la utilidad de la siguiente generación-:

$$\min_t W(c_t, c_{t+1}) \quad (1.13)^{23}$$

$$W(c_t, c_{t+1}) = U(c_t) + \beta U(c_{t+1}) \quad (1.14)^{24}$$

Se maximiza esta función respecto a la restricciones tecnológicas y de recursos y se prueba que la solución a este problema es el máximo nivel de consumo constante a través del tiempo sujeto a la factibilidad dado las restricciones. En el caso de que los recursos no sean productivos, se prueba que el consumo tiende a cero mientras el tiempo tiende al infinito. Cabe notar que los recursos en el modelo de Arrow no son recursos naturales sino que son tomados

---

<sup>23</sup> W, es la función de utilidad altruista que depende del consumo propio -ct- y del futuro -ct+1-

<sup>24</sup> W, es una función aditivamente separable. B es un parámetro positivo.

en el sentido amplio económico de la palabra, es capital –que puede incluir capital natural de alguna manera-. Este último resultado, contrasta con el resultado de Solow (1974) con recursos naturales no renovables. Enseguida, Arrow propone una modificación al modelo y define una economía utilidad-productiva, que consiste en que en un programa de consumo, en el cuál el consumo es el mismo en dos períodos sucesivos  $t$  y  $t+1$ , un individuo en  $t$  preferiría una variación balanceada que incrementa el consumo de  $t+1$  y decrece el consumo en  $t$ . En otras palabras, si la economía es suficientemente productiva en estos términos, el individuo preferirá cambiar consumo de la siguiente generación aún cuándo descuenta la utilidad en algún grado. Esto es un caso de altruismo extremo, en que se valora más el consumo de la siguiente generación que el propio.

En este caso surge un resultado de tipo sierra, esto es:  $c_0^*, c_1^*$ , que maximizan  $W(\cdot)$ , restringida, y en el óptimo tenemos que  $c_t = c_0^*$  para los  $t$  pares y  $c_t = c_1^*$  para los  $t$  impares. Se mantiene dentro de este resultado la siguiente propiedad:  $c_0^* < c_1^*$ . Empero, Arrow, reconoce que este patrón difícilmente responde a una idea intuitiva de justicia. Finalmente, en el aporte más interesante de su trabajo en el principio de ahorro justo, Arrow analiza un puente entre el max-min rawlsiano y el enfoque utilitario. En el marco utilizado, se obtiene como resultado que si se introduce el altruismo no sólo para las generaciones inmediatas si no hasta un horizonte mayor –en una economía utilidad-productiva- éste equivale a la suma de las utilidades descontadas desde el origen hasta ese horizonte, más allá del cual se produce repeticiones periódicas de la solución con un período igual al del horizonte. En el caso de que el horizonte sea infinito o al menos igual al horizonte de la raza humana como tal, entonces el criterio max-min se transforma en el criterio utilitario estándar:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta_t U(c_t) \quad (1.15)^{25}$$

<sup>25</sup> Donde se suma del origen al infinito las utilidades –U- descontadas a la tasa  $\beta$ , de cada generación, que dependen del consumo en el único período de vida de esa generación.

Este último resultado es bastante fuerte, pero los supuestos son demasiado fuertes, en el sentido la equivalencia del max-min y del enfoque utilitario requiere que cada generación valore más la utilidad de todas las generaciones que le siguen más que la suya propia. Es claro, que no se puede negar la existencia de tan extremo altruismo en ciertos individuos, pero suponer que un agente representativo actúe de esta manera es demasiado forzado. Arrow admite además que suponer que la productividad de la utilidad sea creciente en el tiempo es demasiado forzado, pero sin este supuesto la equivalencia demostrada no funciona. De todas maneras, la idea de utilizar el altruismo dentro del marco del max-min rawlsiano es valiosa, y sería interesante estudiar sus resultados si utiliza un marco más estricto de generaciones traslapadas y se redefine el altruismo de una manera más operativa como la de Andreoni (1990), del gusto de dar.

Lambrecht (2005), parte en la afirmación de la organización US Sky Trust, de que “el cielo nos pertenece a todos por igual”, para formular un modelo de generaciones traslapadas donde se pueda mantener la calidad ambiental. Este autor distingue dos formas mediante las cuales las generaciones traslapadas pueden consentir en el uso del medioambiente, del cual todas las generaciones son dueñas. El primero es el acuerdo alcanzado detrás del velo de ignorancia rawlsiano y el segundo es el consentimiento específico de cada generación nacida en los diferentes períodos. Se propone dos instituciones: un fondo con el mandato de implementar el consentimiento común mediante un mecanismo de subastas de permisos para las firmas y un procedimiento de votación para implementar los consentimientos específicos mediante la elección del nivel preferido de mantenimiento ambiental. Debe quedar, claro que este enfoque es ambientalista en el sentido de que supone un valor antropocéntrico de la naturaleza.

Este autor, muestra con su análisis, que el consenso puede ser, cada período, operativo o inoperativo y que puede haber como máximo dos desviaciones o cambios entre estos dos regímenes en su trayectoria de de

transición. Si comparamos los resultados de introducir estas instituciones con el resultado de un mercado competitivo, siempre e inmediatamente se incrementa la calidad medioambiental. Sin embargo, la magnitud de este aumento puede ser temporal y decrecer si la acumulación de capital es fuertemente desplazada por la política propuesta. Lambrecht demuestra que en la combinación de las dos políticas, tanto las subastas de permisos como el sistema de votación, se obtiene un caso en el cual se puede mejorar tanto a la riqueza como a la calidad ambiental.

El medio ambiente, es un bien público, y la contaminación es una externalidad producida por el hombre, que lo deteriora. El objetivo principal de Lambrecht es encontrar la cantidad óptima o tolerable de contaminación –siendo este uno de los problemas fundamentales de la economía ambiental-. La diferencia fundamental con el tratamiento estático de este problema tiene que ver con la naturaleza de la propiedad del medioambiente por la comunidad de personas que está compuesta por seres de vidas finitas que sólo tienen contacto si sus existencias se traslapan –y lo hacen parcialmente-. Además, algunos de los miembros de esta comunidad no llegarán a encontrarse en la línea temporal. Es por este motivo que se justifica el uso del modelo de generaciones traslapadas para este tipo de problemas.

En un modelo de generaciones traslapadas estándar que no tiene una política de reducción de contaminación inicial y en el cual el medio ambiente es visto como un bien público Lambrecht deriva dos resultados posibles: El primero es estacionario y se llega a la estabilización del medioambiente a un nivel que es subóptimo. En el segundo caso tenemos un resultado no estacionario, donde existen tanto la posibilidad de que converja a un estado sub-óptimo o que la economía colapse.

Se proponen dos mecanismos institucionales. El primero es una versión del principio del velo de la ignorancia rawlsiano. Se supone que todos los individuos, partiendo del equilibrio estándar desconocen en qué momento del

tiempo nacerán –es decir, si nacerán en un tiempo bueno o malo-. En ese cuadro ellos escoge una secuencia de emisiones de contaminación que sigue la regla:

$$S < \min\{E^{bau}, \bar{E}\} \quad (1.16)^{26}$$

Esta regla dice que no todas las trayectorias pueden ser admitidas. Se restringe las posibilidades a las trayectorias que mantengan emisiones constantes a través del tiempo y que mejoren el ambiente con respecto al nivel competitivo. Queda claro, que quedan muchas trayectorias posibles y el modelo no dice nada de cómo se escogería tal trayectoria por lo que se supone exógena. Este punto es fundamental pues el nivel de emisiones no queda determinado en el modelo. Para implementar este resultado, se propone la creación de un fondo que subaste permisos entre las firmas, es decir, que estos permisos no sean gratuitos y que se fije su cantidad y precio para mantener el nivel de emisiones escogido en el cuadro de decisión antes presentado.

Esta perspectiva tiene la ventaja de evitar la discusión respecto a las externalidades intergeneracionales, pues la solución derivada se supone justa. Pero mantiene la desventaja de no considerar el riesgo y la percepción del mismo por parte de los agentes. Esto significa, que no se considera el nivel de aversión o propensión al riesgo de los agentes que sería uno de los determinantes del nivel escogido de contaminación –el riesgo de nacer en un tiempo malo-.

Además de estas desventajas, el autor reconoce otras, que vienen de una mirada ex-post de la solución de su versión rawlsiana del velo de ignorancia. Entre las razones se menciona: incertidumbre, preferencias cambiantes, y los cambios del nivel de riqueza y medioambiente. Se propone una solución para los dos últimos ítems. Para Lambrecht, el problema radica en que algunas generaciones tendrán más riqueza que otras y se enfrentarán a diferentes niveles de medioambiente. Esta heterogeneidad afectará el deseo de pagar por el medioambiente. Algunas generaciones pueden expresar un deseo de destinar una

---

<sup>26</sup> La secuencia de emisiones –contaminación-  $S$ , debe ser menor al mínimo valor del conjunto de Emisiones:  $E^{bau}$ , es el equilibrio competitivo y  $\bar{E}$  es una emisión escogida exógenamente.

mayor cantidad de recursos económicos para mantener el medioambiente que otros.

Se impone un mecanismo donde se puede hacer una inversión extra que sea positiva, pues no puede romper el acuerdo inicial del velo de ignorancia. El nivel de inversión será diferente para cada generación y dependerá de los niveles de calidad ambiental y de riqueza que experimenten. Para implementar este mecanismo se propone un mecanismo de votación para determinar cooperativamente el nivel de inversión en mantenimiento de medioambiente. Este mecanismo trata de eliminar el conocido problema de la sub-provisión de los bienes públicos, mediante el mecanismo de votación cooperativo.

Lambrechth implementa la restricción del nivel máximo de resiliencia –o tolerancia- del medioambiente, a la contaminación implementando la sostenibilidad fuerte. Otro aporte importante es la derivación de un índice de calidad ambiental, que permite la existencia de niveles de calidad ambiental positivos. Este punto no es tan importante, pues como vimos otros autores (John & Pecchenino (1994), el índice ambiental puede ser fijado en cero para el caso de ausencia de acción humana, y permitir un índice de deterioro o mejoría ambiental respecto a este equilibrio natural. La ventaja que presenta la ecuación de Lambrechth es que permite tomar en cuenta el umbral natural después del cual ya no existirá economía y la capacidad de absorción natural de contaminación:

$$Q_{t+1} = (1 - \delta_M) Q_t + \delta_M \bar{Q} - \varepsilon E_t + \mu m_t \quad (1.17)^{27}$$

Un enfoque de equidad intergeneracional alternativo, fue presentado por Ball & Mankiw (2001), en el que se preguntan si una economía de mercado reparte o asigna eficientemente el riesgo. Estos autores, se desvían de la respuesta en el

---

<sup>27</sup> Donde Q es la calidad ambiental, Q constante es el nivel sobre el cual la economía desaparece, dm es la absorción natural del stock de contaminación y E es el nivel de emisiones –multiplicado por una constante positiva- y m es el nivel de inversión en mantenimiento del medio ambiente.

sentido de Arrow-Debreu de la teoría de equilibrio general, que enseña que bajo ciertas circunstancias, en este caso, si los mercados de activos contingentes están completos; la asignación de riesgo será Pareto eficiente. Ellos parten del hecho, de que no todos los agentes de la economía nacen en el inicio del tiempo. En un modelo de generaciones traslapadas, los mercados están incompletos, porque una persona no puede intercambiar o compartir riesgo con aquellos que no han nacido. Los riesgos asociados a la tenencia de activos, pueden ser compartidos solo con aquellos que estén vivos en el mismo tiempo, pero no pueden ser compartidos con las generaciones futuras. Como resultado, la asignación del riesgo puede ser no eficiente y la política del gobierno puede ser capaz de realizar mejoras en el sentido de Pareto.

Ball & Mankiw, construyen un modelo – o experimento del pensamiento como ellos lo denominan-, que consiste en asumir que todos los mercados de la teoría Arrow-Debreu existen, aunque no puedan hacerlo en un cuadro de generaciones traslapadas y lo hacen utilizando la ficción del velo de ignorancia rawlsiano o una posición original, donde todas las generaciones estén vivas al mismo tiempo. La incertidumbre es de tipo de series de tiempo y se refiere a si un individuo nace en una generación “con suerte” o “sin suerte” (Ball & Mankiw, 2001). Este experimento se justifica por motivos prácticos de las políticas públicas, ya que el gobierno puede afectar la asignación de riesgo mediante muchas vías, notablemente el sistema de seguridad social.

Se presentan dos problemas: el primero es una solución descentralizada de un modelo estándar de generaciones traslapadas, con una función de utilidad logarítmica, donde el salario es exógeno y el retorno sobre los ahorros es estocástico. Se consume sólo en el segundo período. En este problema, el equilibrio derivado se lo llama “hobbesiano”. El equilibrio es trivial de derivar ya que se ahorra todo el salario y se consume todo en el segundo período, esto significa que el consumo es igual al retorno. Por lo tanto, el consumo es estocástico y no correlacionado en el tiempo.

$$C_{t+1} = R_{t+1} (1.18)^{28}$$

Este equilibrio es ineficiente, pues es posible mejorar esta situación si los viejos en el período  $t+1$  pudieran compartir el riesgo enfrentado con las generaciones nacidas en  $t+1$  y luego. No obstante, para cuando esas generaciones nazcan, el resultado del período  $t+1$  ya será conocido, lo que hace imposible estas mejoras de la asignación del riesgo en el tiempo.

El segundo problema es de tipo rawlsiano, los autores asumen, que todas las generaciones están en una posición original, que existe antes del período uno cuando la primera generación nace. En este punto ficticio nadie sabe cuándo nacerá ni la futura evolución de la economía. En palabras de Ball & Mankiw (2001), no se sabe si se nacerá en una generación con suerte o sin suerte, respecto a la realización de los retornos del capital. En esa posición original, todos pueden compartir los riesgos que enfrentan participando en un mercado de activos contingentes. Estos autores plantean un problema en el cual existen dos historias posibles correspondientes a las dos posibles realizaciones del retorno del capital. Esto da como resultado un total de  $2^t$  mercados de consumo contingentes. Un subastador Walrasiano, debe encontrar el precio que equilibre la oferta y la demanda. Se debe encontrar el conjunto de precios de equilibrio y la asignación de riesgos en cada historia posible. Este problema, por su dificultad no es resuelto de manera general por los autores, sino que se plantean dos simplificaciones para acercarse a la intuición de este equilibrio “rawlsiano”.

En la primera versión, se asume restrictivamente, que la incertidumbre sólo está presente en el primer período –existen dos estados posibles-, para los demás no existe incertidumbre:

---

<sup>28</sup> C, Consumo esperado; R, Retorno esperado.

Estado bueno:  $R_j = \rho + x_j$ ; estado malo  $R_j = \rho - x_j$  y para los demás períodos:  $R = \rho$ . (1.19)<sup>29</sup>

Se deriva un resultado rawlsiano, en el que todas las generaciones sufren la misma pérdida proporcional de un choque negativo. En otras palabras, el riesgo del choque es repartido equitativamente entre las generaciones. Esto contrasta con el equilibrio hobbesiano, en el cual el riesgo afecta sólo a la primera generación. Esta generación mejora su bienestar, en el resultado rawlsiano, pues puede compartir su riesgo con las generaciones futuras. El segundo resultado importante es que el consumo promedio en el resultado rawlsiano es mayor que el consumo en el resultado hobbesiano, para todas las generaciones. Por lo tanto, para todas las generaciones la utilidad es más alta en el resultado rawlsiano que en el hobbesiano. El consumo promedio de la primera generación es menor al de las generaciones posteriores, puesto que ellas demandan una compensación por asumir parte del riesgo.

La segunda modificación que se realiza consiste en permitir la incertidumbre en los retornos al capital en todas las generaciones, pero en una versión con aproximaciones lineales, ésta presenta la desventaja de que sólo funciona si los choques son suficientemente pequeños. Además se supone que los choques en cada tiempo no están correlacionados entre sí. Las generaciones en este marco comparten el riesgo equitativamente en una manera justa, en la que todas las generaciones tienen el mismo consumo promedio. Esto contrasta con el resultado del resultado rawlsiano con incertidumbre en la primera generación, donde las generaciones futuras consumen en promedio más. Este resultado se da por la linealización ya que los choques son pequeños, disminuyendo la demanda por compensación para asumir el riesgo.

Por las características del modelo se pueden sumar los efectos de cada choque y si se suponen que todos son iguales se derivan los siguientes

---

<sup>29</sup> Dónde  $R$  es el retorno sobre el capital, el subíndice  $j$  indica el tiempo,  $\rho$  es el retorno determinista a la tasa de interés  $(1+r)$ ;  $x$  es el choque estocástico de ruido blanco.

resultados: los cambios en el consumo en cada período son proporcionales al choque de ese período. Además, el consumo en el equilibrio rawlsiano sigue una caminata aleatoria. La razón es que la repartición total de riesgo causa que el choque se distribuya equitativamente entre las generaciones presentes y futuras. Entonces, la repartición intergeneracional de riesgo hace que el impacto de un choque sea al mismo tiempo más pequeño y más persistente.

Este modelo sirve de base para crear un puente entre el equilibrio rawlsiano y aquel de Ramsey en presencia de incertidumbre. Los autores demuestran que estos dos resultados son equivalentes cuando se utiliza, en el problema del planificador central de Ramsey, una tasa de descuento intertemporal  $\beta = \frac{1}{r}$ . Este resultado justifica el uso de la tasa de la tasa de descuento en este tipo de modelos sin la necesidad de invocar al altruismo intergeneracional (Barro, 1974). Sin esta tasa de descuento, el planificador podría asignar más recursos a las generaciones tardías o tempranas. Pero si se mantiene la equivalencia mencionada, sólo le queda asignar el riesgo eficientemente, y esto equivale al resultado rawlsiano ya presentado.

Ball & Mankiw proponen, en base a estos resultados, dos posibles reformas al sistema de seguridad social. Si los títulos sobre el capital son mantenidos por el sector privado, la asignación intergeneracional óptima del riesgo requiere que los beneficios de la seguridad social se indexen negativamente al retorno del capital –toman la forma de un seguro-. En otras palabras, los beneficios sociales deben disminuir cuando el mercado accionario va bien. Una forma alterna, consiste en que la totalidad del fondo de seguridad social se invierta directamente en capital.

Este modelo es interesante, por la instrumentalización del criterio rawlsiano del velo de ignorancia, que se puede considerar más apegado a los principios de justicia de Rawls (1971c), que no buscaban la igualdad sino la equidad. En este caso, la se obtiene un resultado que no es el max-min, pero que cumple con las condiciones del velo de ignorancia. Tiene la ventaja de introducir

el análisis de riesgo que le falta al análisis rawlsiano. Esta versión del velo de ignorancia difiere de Lambrecht (2005) –ya presentado-, que sólo supone incertidumbre respecto al tiempo de nacimiento, pero no respecto al retorno del capital y por ende al nivel de riqueza. En este caso, la equidad intergeneracional está dada por dos factores: la repartición equitativa de riesgo, ya que un choque afecta a todas las generaciones de la misma manera; y el hecho de que el consumo promedio sea igual en todas las generaciones.

Para lograr estos resultados, este modelo impone fuertes supuestos que incluyen: homogeneidad intrageneracional e intergeneracional; los salarios y los retornos al capital son exógenos; no hay crecimiento poblacional. Además, sabemos que el medio ambiente no ha sido incluido de manera explícita, no obstante se podría pensar que el capital incluye al capital natural reproducible –renovable- y con un retorno natural análogo al de Brechet & Lambrecht (2005) -pero estocástico-. En este caso, se podría extender las intuiciones y resultados de este modelo al caso con medio ambiente, esto es que el riesgo no se distribuye eficientemente entre las distintas generaciones. Finalmente se debe aclarar que la equivalencia presentada entre la solución rawlsiana y la de Ramsey, es distinto al de Arrow (1973). Este último autor encuentra una equivalencia entre el enfoque utilitarista de tipo Ramsey y el Rawlsiano asumiendo una solución max-min con un altruismo extremo y una economía utilidad-productiva en un entorno determinista.

## CAPÍTULO IV

### UN MODELO DE GENERACIONES TRASLAPADAS CON MEDIOAMBIENTE

1. **Resolución modelo descentralizado**
2. **Planteamiento y supuestos del modelo**

Se define una economía de generaciones traslapadas con individuos que viven dos períodos. En esta economía la primera generación nace en el período  $t$  y muere al final de  $t+1$ . Al comenzar el período  $t+1$  nace la nueva generación que morirá al finalizar  $t+2$  y así consecutivamente. Se tiene consumidores y firmas optimizadoras que existen en un entorno natural al que se denominará medioambiente.

Los consumidores obtienen utilidad de su consumo y del nivel de calidad ambiental. Las firmas utilizan como insumos al trabajo y capital por los cuales pagan salarios e interés a los individuos que los poseen. Se producen un bien único que se consume y un mal público que es la contaminación. Esta contaminación afecta la calidad medioambiental. Los consumidores, a su vez, pueden afectar la calidad medioambiental mediante el mantenimiento o degradación del capital natural. La calidad ambiental depende del capital natural.

#### 2.1. Problema del consumidor

$$\begin{aligned} \text{Max } & \beta \ln c_{1t} + \gamma \ln A_t + (1 + \theta)^{-1} (\beta \ln c_{2(t+1)} + \gamma \ln A_{(t+1)}) \quad \mathbf{30} \\ \text{s.a. } & c_{1t} + s_t + m_t = w_t \\ & c_{2(t+1)} = (1 + r_{(t+1)}) s_t \quad \mathbf{31} \end{aligned}$$

---

<sup>30</sup> Donde: C, consumo; A, calidad ambiental. Se descuenta el consumo del segundo período a una tasa  $(1+\theta)^{-1}$ . B, Y, son parámetros o pesos.

$$A_{(t+1)} = (1 - b)A_t + b\bar{A} - P_t + \omega M_t$$

$$u'_A > 0; u''_A < 0$$

$$u'_c > 0; u''_c < 0; \lim_{c \rightarrow \infty} u'_c = \infty$$

Se supone que los consumidores son homogéneos. Entonces, se supone la existencia de un individuo representativo –positivo y normativo- que maximiza su utilidad. Los consumidores viven dos períodos. Obtienen utilidad del consumo y del nivel de calidad ambiental. Los individuos tienen como dotación una unidad de trabajo por la cual reciben un salario. Trabajan sólo en el primer período y su salario es ahorrado o consumido. En el segundo período, se retiran y consumen el retorno de sus ahorros juveniles. El nivel de calidad ambiental está dado por la naturaleza, por la contaminación y por una variable  $mt$ . Se define la variable  $mt$  de la siguiente manera: Si es positiva representa la inversión ambiental o mantenimiento ambiental. Esta inversión podría ser reforestación, pago para limpieza de un parque nacional, actividades de abatimiento de la contaminación atmosférica, etc. Cabe remarcar, que los individuos racionales y egoístas sólo mantienen el medio ambiente en su juventud pues al finalizar el segundo período estarán muertos.

Si  $mt$  es negativa, los consumidores están explotando o cosechando un recurso natural. Esta actividad podría ser maderera, pesquera, etc. Es decir, actividades extractivas que afecten negativamente el stock de capital natural<sup>32</sup>. Se establece que los individuos sólo extraen o cosechan en la juventud pues en segundo período estarán retirados. Se supone además que no hay costos de extracción. Los individuos pueden realizar actividades de mantenimiento del medioambiente y también actividades extractivas,  $mt$  refleja el valor neto de estas dos actividades para cada individuo representativo.

---

<sup>31</sup> La tasa de interés de este modelo considera tanto el costo del capital como la depreciación. En el caso de depreciación total del activo el rendimiento neto será:  $r_{t-1} = r_{t-1} + (1 - \delta) = 1$ . Para el caso específico de este modelo, esta diferenciación no cambia el resultado del análisis dinámico, pues el ahorro, debido a la función de utilidad escogida –logarítmica-, nos proporciona una función de ahorro no depende de la tasa de interés directamente. Para cualquier otra función de utilidad, la depreciación es relevante. Tampoco  $mt$  dependerá de la tasa de interés.

<sup>32</sup> Ver 2.3. Medioambiente e índice ambiental

## 2.2. El problema de las firmas

La economía está conformada por  $N_t$  firmas homogéneas de tipo Cobb-Douglas. Se supone además que estas tecnologías son convexas –rendimientos constantes-. Se utilizan como insumos al capital y al trabajo. Se paga por estos intereses y salarios respectivamente. La función agregada de producción de la economía tiene la forma:  $N_t F_t(L_t, K_t) = N_t L_t^{(1-a)} K_t^a$  <sup>33</sup>

El problema de la firma representativa es maximizar su beneficio:

$$\max_{K_t, L_t} L_t^{(1-a)} K_t^a - w_t L - r_t K_t; L = 1$$

$$k > 0 \Rightarrow f(k) > 0, f'(k) > 0, f''(k) < 0$$

$$\text{Inada } f(0) = 0; \lim_{(k \rightarrow 0)} f'(k) = +\infty; \lim_{(k \rightarrow +\infty)} f'(k) < 1$$

La tasa de interés o el costo de capital, puede interpretarse tanto como el costo neto del capital o bruto: Es neto, cuando incluye la depreciación, en cuyo caso tenemos  $r_{(t+1)} = r_{bruta(t+1)} - 1, \delta = 1$ . En el análisis descentralizado, esta diferenciación no es relevante, porque la función de ahorro obtenida, y la función  $mt$ , no dependen de la tasa de interés. Este tipo de función de ahorro es común a los modelos con funciones de utilidad logarítmicas (de La Croix & Michel, 2002; Geanakoplos, 1987)<sup>34</sup>.

Como  $L$  es igual a 1 por definición, dividiendo la función anterior para  $N_t$ , tenemos la función de producción en términos per-cápita:  $f(k_t) = k_t^a$ . Las firmas producen un bien que se consume y un mal público o contaminación. Esta contaminación puede ser: emisiones de gases invernadero, desechos sólidos, etc.

<sup>33</sup> Dónde:  $F(\cdot)$ , producto agregado;  $N$ , población;  $K$ , capital;  $L$ , trabajo.

<sup>34</sup> Sin embargo, en el caso centralizado la depreciación escogida lleva a resultados muy diferentes. Si se utiliza una función de utilidad diferente a la logarítmica, se deben considerar dificultades y supuestos extras que nos alejarán del objetivo del presente trabajo. La dificultad principal surge de una función de ahorro que dependa de la tasa de interés. Esto se debe a que la tasa de interés considerada es la futura o del siguiente período. Entonces se deben hacer suposiciones sobre como forman sus expectativas los agentes. Si se considera el supuesto de previsión perfecta, el análisis presente se mantiene válido. En cualquier otro caso no. Se puede pensar en extensiones al presente modelo en este sentido.

Cabe notar que la contaminación puede verse como insumo de la producción con un precio negativo, es decir, como un ahorro para la firma. En este caso nos limitamos a un precio cero o alternativamente un costo cero de contaminar, lo que determina la existencia de una externalidad negativa en el consumo. La función de contaminación queda definida de manera lineal –con un parámetro positivo e-:

$$P_t = eN_t f(k_t) = eN_t k_t^a$$

### 2.3. Medioambiente e índice ambiental

Se considera un índice de calidad ambiental –At-, que depende positivamente del capital natural. El capital natural, se define de manera general, como un stock que genera un rendimiento en forma de bienes y servicios naturales o rendimiento natural. El capital natural y el rendimiento natural son agregados de los recursos naturales en sus dimensiones separadas de stock y flujo respectivamente. Se debe notar, que para formar estos agregados, se requiere valorar los diferentes tipos de stocks y flujos ambientales (Costanza & Daly, 1992).

El capital natural puede ser de dos tipos: capital renovable o activo y capital no renovable o inactivo. El capital renovable –recursos renovables- es activo y se auto-mantiene usando energía solar. Este capital puede ser cosechado o explotado para obtener bienes económicos<sup>35</sup>. Si es cosechado dejará de producir un rendimiento natural. El capital no renovable –los recursos naturales no renovables- es análogo a un inventario que adquiere valor al ser utilizado –debe ser liquidado- (Costanza & Daly, 1992).

El índice ambiental, se establece en relación a un sistema natural –medioambiente- que está sujeto a las leyes de la termodinámica. Se supone que

---

<sup>35</sup> Un stock o una población de árboles, puede producir al final de un período t una cantidad de bienes -madera- y servicios ambientales –oxígeno, regulación del clima, control de erosión, etc.-.

es un sistema termodinámico estable<sup>36</sup>. Se puede pensar en un sistema ecológico diatérmico –que permite entrada y salida de calor-, autónomo: una biósfera. Se considera, entonces, que existe un estado estacionario natural -o un estado estable del medioambiente en ausencia de acumulación de capital y extracción-. En otras palabras, el capital natural está gobernado por un sistema dinámico no explosivo que tiene un estado estacionario único o globalmente estable -  $K_n^*$  -.

El índice ambiental, tiene como base un nivel  $\bar{A}$  que corresponde a este nivel natural estacionario. Este índice, asigna un valor numérico, en unidades de consumo, al rendimiento natural. Es creciente respecto a un aumento del capital natural.

**Definición 1:** Existe una función  $i : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$  que mapea el rendimiento natural –producido por el nivel agregado de capital natural en el tiempo  $t$ -, a un índice  $A_t$ , tal que:

$$A_t = I(K_{n(t)})$$

$$I'(\cdot) > 0; I(K_{n(t)}^*) = \bar{A}$$

$$R_n(K_{n(t+s)}) \geq R_n(K_{n(t)}) \Leftrightarrow I(K_{n(t+s)}) \geq I(K_{n(t)})$$

Este índice asigna un valor numérico al rendimiento natural agregado, que puede incluir la belleza de un paisaje o la pureza del aire. Esto significa, que este índice es una función de valoración económica total. En el presente modelo, no se define una forma específica del mismo y en este sentido la valoración del ambiente se toma como exógena. Es decir, se considera como dado, la repartición de la propiedad del capital natural entre las generaciones, y otra clase de instituciones que determina su valoración (R. Howarth & Norgaard, 1990). Por este motivo, este índice puede tomar cualquier forma mientras mantenga la

---

<sup>36</sup> Por rigurosidad metodológica, y dado que el funcionamiento de un sistema físico, como la naturaleza, está fuera del campo de conocimiento del presente estudio; se tomará al sistema natural como un sistema equilibrado exógeno al modelo. Este es el supuesto más fuerte de todo el modelo, pero permite estudiar la sostenibilidad, la eficiencia y la equidad fuera de un sistema siempre creciente, que es el caso de los modelos de recursos renovables estándar; o de un sistema natural siempre decreciente como es el caso de los modelos de recursos no renovables estándar.

relación de orden establecida, es decir, si el rendimiento natural es mayor tendremos un índice mayor<sup>37</sup>.

Por definición, se sabe que el índice  $A_t$  depende del capital natural y directamente se determina que su dinámica es estable y que converge –sin acción humana– al nivel  $\bar{A}$ . Se supone, que la velocidad a la que este sistema converge a su estado estacionario es  $b$ . Ahora tenemos:

$$A_{(t+1)} = (1 - b)A_t + b\bar{A}$$

El parámetro  $b$  es exógeno al modelo –ya que sus características están atadas al sistema termodinámico natural–. En general, se supondrá que en este mundo hipotético, no existen recursos no renovables:  $b \in ]0,1[$ <sup>38</sup>. Por lo tanto, todos los recursos comunes son renovables o reproducibles. Se justifica este supuesto ya que los recursos no renovables se pueden considerar perfectamente sustituibles entre ellos y con el capital físico. Alternativamente, se puede pensar que esta economía parte de un punto en el cual se han agotado la totalidad de los recursos no renovables<sup>39</sup>.

La ecuación de movimiento, que caracteriza a este sistema pertenece a Lambrecht (2005), que define un índice de calidad ambiental en base al trabajo de John & Pecchenino (1994; 1995). Esta ecuación, se deriva de una función de acumulación de contaminación y utiliza el concepto de umbral ecológico, sobre el cual el sistema natural deja de existir (Lambrecht, 2005). Para este autor, el nivel  $\bar{A}$ , es estrictamente positivo y es el nivel máximo de calidad ambiental en ausencia de emisiones. En el presente modelo, se considera al sistema ambiental

---

<sup>37</sup> El rendimiento natural  $R_n$  es una función creciente en el capital natural. Sin embargo, es posible pensar en un rendimiento negativo para ciertos niveles de capital natural. Es decir, una situación, en la cual la naturaleza está en una situación tan mala, que produce males en vez de bienes.

<sup>38</sup> Cuando  $b$  es igual a cero se tiene el caso de un mundo que sólo tiene recursos naturales no renovables, es decir podemos transformar nuestro modelo en uno de gestión de recursos no reproducibles. De la misma manera cuando  $b$  es negativo y  $\bar{A}$  es igual a cero tenemos el caso de un sistema natural siempre creciente. Esto es el caso de un modelo de gestión de recursos renovables estándar.

<sup>39</sup> O una economía que no ha descubierto recursos no renovables con valor económico.

como exógeno al modelo y sólo se impone el supuesto de su estabilidad y  $\bar{A}$  tomará cualquier valor, dependiendo de la función  $I(.)$ <sup>40</sup>.

La evolución del sistema dinámico natural en términos físicos no se considera en sentido estricto, lo que se define aquí es evolución dinámica de  $A_t$ , que es una noción económica. Por este motivo, no se utiliza, una función de crecimiento logístico para la ecuación de movimiento del medioambiente ya que la variable  $A_t$  no se refiere a la cantidad física de un bien común -como el número de peces o árboles- sino que depende del rendimiento natural y de su valoración económica. Además, el capital natural agrega activos ambientales como la capacidad de la atmósfera de asimilar contaminación –sumidero de residuos-, que puede no seguir una evolución logística. Finalmente, un tratamiento económico requiere que se trata con valores económicos y no físicos –como lo hace la ecología-. Esta diferenciación, es fundamental como lo notó Georgescu-Roegen (1971).

Adicionalmente, esta ecuación de movimiento puede ser vista como una aproximación lineal de la dinámica natural real. Entonces, se justifica el uso de esta ecuación de movimiento, si consideramos que la escala de la actividad económica humana, es suficientemente pequeña en relación a la escala del sistema natural –llamado planeta tierra- para no alejarse significativamente del estado estacionario natural<sup>41</sup>.

El rendimiento natural trata de reflejar todas las funciones medioambientales, y estas son: sumidero de residuos, proveedor de insumos, fuente de utilidad directa –estética y recreativa- y sustento de vida. Es decir, que el índice ambiental está determinado por la valoración de estas funciones

---

<sup>40</sup> Esta valoración no debe alcanzar casos extremos. Es decir, el caso un valor infinito de la naturaleza, si esta tiene una connotación religiosa o ligada profundamente al modo de vida. Este caso, no existe incentivos para acumular capital y la derivación de la solución es trivial. Además de esta restricción razonable, se puede pensar que debe ser no negativa. El caso de una valoración de cero es posible.

<sup>41</sup> Este último supuesto debe mantenerse para poder tomar como exógeno al sistema natural, de no ser así, la economía neoclásica y ambiental serían herramientas insuficientes para tratar este tema. Esta suposición, es un supuesto de la teoría económica en general –excepto la ecológica- y es la base para la corriente de sustentabilidad débil.

ambientales. Se debe notar, que la calidad ambiental, aquí el índice  $A_t$  es un stock y es un bien público puro. Como ejemplos podemos citar, la función de sustento de vida –oxígeno, control de erosión y clima, riqueza genética-, la función estética –paisajes- y la función recreativa –turística-. Todos éstos son bienes –servicios- públicos puros, es decir no excluibles y no rivales<sup>42</sup>.

La función de sumidero de residuos o depósito de contaminación, junto a la función de provisión de insumos o recursos, son flujos naturales que son consumidos o utilizados en la actividad económica. Estos flujos tienen la característica de ser un bien común, que es rival pero no excluible. Se destaca que el uso de estos flujos medioambientales afecta al capital natural de manera negativa y por ende afecta el stock de calidad ambiental en el siguiente período. Es decir, por esta vía, la calidad medioambiental que es un bien público puro a nivel estático se convierte en un bien común no excluible pero rival en términos dinámicos<sup>43</sup>.

En este sentido, la acción económica afectará al medioambiente por dos vías: La primera desde la producción, pues cada firma produce un bien que se consume y un mal público que es la contaminación. Las firmas utilizan la función de sumidero de residuos y afectan al capital natural y por esta vía al stock de calidad ambiental<sup>44</sup>. Se determina que la contaminación afecta la calidad ambiental así:

$$A'_{t+1} = I'(K_{n(t)}, F_t(\cdot)) = -e(\cdot) < 0 \quad 45$$

---

<sup>42</sup> En términos de valoración ambiental, se puede ver como el valor de no uso.

<sup>43</sup> El uso de los servicios y bienes ambientales como el de sumidero de residuos de la atmósfera por la contaminación de la actual generación puede afectar la calidad ambiental para las siguientes generaciones. La contaminación atmosférica es un mal público puro.

<sup>44</sup> Sea el suelo en el caso de basura, la atmósfera en el caso de las emisiones contaminantes, ríos, lagos, etc. La contaminación afecta la capacidad de los ecosistemas –capital natural- de generar servicios y bienes.

<sup>45</sup> Recordando que:  $A_{(t+1)} = (1 - b)A_t + b\bar{A}$ ; por lo que  $A_{t+1}$  depende de  $A_t$ . D  $F(\cdot)$  es la función de producción económica agregada en el tiempo  $t$  que se convierte en desechos por la entropía.

En este modelo, se supone que  $e(\cdot)$  es constante<sup>46</sup> y estará determinada por la resiliencia o capacidad de asimilación de la naturaleza respecto a los desechos de la actividad económica, por la tasa  $b$  de convergencia – en este caso es la regeneración de esta función ambiental y por el grado de limpieza de la tecnología de producción –su eficiencia termodinámica-. Este parámetro, determinará en cuánto cambia  $A_{t+1}$  por los desechos producidos en el sistema económico. Ahora la ecuación de la contaminación, queda definida como:

$$P_t = eN_t f(k_t) = eN_t k_t^a$$

Por las leyes de la termodinámica<sup>47</sup>, la contaminación o cantidad de desechos es igual a la totalidad del producto –en términos de materia y energía utilizada para su producción-. Todos los bienes se transforman en desechos y la energía utilizada en la producción genera desechos también. La porción de la producción que es ahorrada e invertida, debido a que la depreciación del capital es 1, no se considera<sup>48</sup>. Así se supone de manera implícita, que el sistema económico es un sistema termodinámico abierto al sistema natural –es decir que intercambia materia, energía y calor con este último-.

Esto ayuda a interpretar mejor el parámetro  $e$ , ya que la producción está medida en unidades económicas, pero la cantidad de materia y energía – unidades físicas- son las que afectan al ambiente, de esta manera el efecto no es directo. De esta manera, el parámetro  $e$ , es inversamente proporcional al nivel de eficiencia termodinámica de la producción –el uso energético o consumo de exergías-. El parámetro  $e$ , es siempre positivo y es más eficiente mientras más bajo sea su valor. Por la segunda ley de la termodinámica, la eficiencia termodinámica no puede ser del 100%, por ende, el parámetro  $e$  nunca será cero. Aunque exista una tecnología extremadamente limpia y políticas fuertes de reciclaje (Chóliz, 1999).

---

<sup>46</sup> Este supuesto es coherente con una función de producción natural lineal.

<sup>47</sup> La primera ley o la conservación de la materia y energía y la segunda o entropía, que imposibilita el reciclaje total de los desechos o una eficiencia termodinámica de 100%, es decir 0.

<sup>48</sup> Se considera el caso en el cual no hay depreciación del capital también, para completar la discusión.

La segunda manera, en la cual la actividad económica afectará a la calidad medioambiental, viene desde los consumidores, mediante la variable  $mt$ . Esta variable puede tomar la forma de mantenimiento ambiental –si es positiva- o de cosecha o explotación de los recursos naturales –si es negativa-<sup>49</sup>. De manera análoga a la contaminación,  $mt$  afectará al medioambiente así:

$$A'_{t+1} = I'(K_{n(t)}, M_t) = \omega(.) > 0$$

Se supone que  $\omega(.)$  es constante y está dado exógenamente al modelo por la productividad del capital natural –que determina su rendimiento natural –, la tasa de convergencia  $b$ , que en este caso es la tasa de regeneración de un recurso explotado o la depreciación del capital natural,<sup>50</sup> en el caso de que se realice mantenimiento medioambiental. También, afectan a este parámetro las tecnologías de abatimiento y que la economía posea. Entonces, el parámetro  $\omega$  determina, en cuánto se afecta o se beneficia el índice de calidad medioambiental por el cambio de una unidad de  $M_t$  –agregada-.

Para ilustrar la forma en que  $mt$  afecta al índice ambiental se utilizará el ejemplo de un bosque. Este bosque, tiene todas las funciones del medioambiente: produce oxígeno y elimina dióxido de carbono –servicio-, es fuente de utilidad directa debido a su valor estético y recreativo, es fuente de madera, frutos y otros bienes<sup>51</sup>. Si extraemos o explotamos el bosque para obtener madera, es decir, cosechamos o explotamos este capital natural –un  $mt$  negativo-; afectamos el servicio ambiental del bosque de captura de carbono y también su función estética –es decir el nivel de rendimiento natural-. De esta manera, el índice de calidad ambiental disminuye en  $\omega$  veces  $mt$ . Alternativamente, -si  $mt$  es positivo- se realizan funciones de mantenimiento

---

<sup>49</sup> En este supuesto, el presente modelo se diferencia de otros tratamiento teóricos, que restringen a  $mt$  a valores iguales o mayores que cero, lo que no permite analizar la función de proveedor de insumos y a los recursos renovables junto a la calidad ambiental.

<sup>50</sup> La depreciación del capital natural, es más bien la degradación entrópica propia de un sistema termodinámico (Costanza & Daly, 1992)

<sup>51</sup> Se puede aclarar que ciertos bienes peresibles como los frutos deben ser consumidos en el mismo período que son extraídos. El caso de la madera es el más ilustrativo pues puede ser consumido como leña o alternativamente –mediante su almacenamiento o ahorro- puede convertirse en capital y ser insumo de la función de producción del siguiente período.

ambiental, por ejemplo reforestación, que aumenta la calidad medioambiental en  $\omega$  veces el gasto  $m_t$  –inversión ambiental-. Es decir, una mayor cantidad de capital natural –más árboles-, tendrá un rendimiento natural total mayor.

Otros ejemplos pueden incluir: bancos de peces, la atmósfera, el ecosistema de un lago. Estos activos ambientales, si no son explotados, como ya se mencionó, son fuente de utilidad directa mediante los servicios ambientales que proveen –como capital natural- reflejados en el índice de calidad ambiental. Alternativamente, si son explotados o cosechados –como bienes- son consumidos en el primer período o mediante su almacenaje utilizados como insumo en el segundo –en el modelo por la vía del ahorro-. Se debe subrayar, que  $M_t$  es la versión agregada de  $m_t$  individual – $N_t \cdot m_t$ -. En términos per-cápita tenemos la siguiente ecuación de movimiento del índice ambiental:

$$a_{(t+1)} = \frac{(1 - b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a + \omega m_t}{(1 + n)}$$

$$m_t = \frac{(1 + n)a_{(t+1)} - (1 - b)a_t - \frac{b\bar{A}}{N_t} + ek_t^a}{\omega}$$

Ahora se puede definir, la ecuación de movimiento del medioambiente cuándo hay actividad económica. En este punto, se debe aclarar que se trabaja con la misma dimensión, es decir, unidades de consumo. Así, la contaminación no está medida en términos físicos, como toneladas métricas de basura o una cantidad de emisiones. Lo mismo ocurre con la variable  $m_t$ . Esto es coherente, con la formulación inicial del índice de calidad ambiental que es una noción económica y no una variable física<sup>52</sup>.

$$A_{(t+1)} = (1 - b)A_t + b\bar{A} - P_t + \omega M_t$$

$$A_{(t+1)} = (1 - b)A_t + b\bar{A} - eN_t \cdot k_t^a + \omega \cdot N_t m_t$$

---

<sup>52</sup> Las unidades con las cuáles medimos todas las variables del presente modelo pueden ser dólares u otra moneda, sin embargo, en este modelo todos los precios están normalizados a 1 y no existe dinero de manera explícita, por lo que todos los intercambios son hechos respecto al bien numerario que es el capital.

Finalmente, tenemos que establecer el problema de bien público de la calidad ambiental y de la conocida tragedia de los comunes (Hardin, 1968). El problema de los bienes públicos radica en la incapacidad de excluir de su consumo a aquellos que no lo mantienen –problema del polizón-. Mientras que la tragedia de los comunes consiste en la explotación o cosecha de un recurso natural más allá de un nivel socialmente óptimo. Este problema se define así:

$$\begin{aligned} \text{Max } & \beta \ln c_{1t} + \gamma \ln(a_t + A_t^{\text{com}}) + (1 + \theta)^{(-1)} \left( \beta \ln c_{2(t+1)} + \gamma \ln(a_{(t+1)} + A_{(t+1)}^{\text{com}}) \right) \\ A_t &= a_t + A_t^{\text{com}} \end{aligned}$$

En esta economía hipotética se puede presentar tanto el problema del bien público como el del recurso común –rival pero no excluible-, dependiendo del signo de  $mt$ . Esto significa, por ejemplo, que un individuo podría aprovechar los servicios ambientales como el aire puro sin haber invertido en capital natural –un  $mt$  positivo-. En este caso, sin haber pagado por el abatimiento de la contaminación. Alternativamente, alguien podría explotar un recurso común más allá del nivel socialmente óptimo, ya que no hay un mecanismo de exclusión pero sí rivalidad –sobre-explotación maderera o pesquera-.

De esta manera, el problema de maximización de utilidad del consumidor se convierte en un juego en dos etapas: En la primera etapa se elige un nivel de  $mt$  –per-cápita-, tomando como exógeno la elección de las demás ( $Nt - 1$ ) personas -  $A_{(t+1)}^{\text{com}}$  <sup>53</sup>-. En la segunda etapa, el nivel agregado de las elecciones individuales de  $mt$  – $Nt*mt$ -, determinan<sup>54</sup> el nivel agregado de  $A_{t+1}$ . Se debe recordar que debido a que los individuos extraen o invierten sólo en el primer período de la vida -ya que en el segundo están retirados-, afectan el nivel de calidad ambiental del segundo período. Este nivel de calidad ambiental es el mismo del cual disfrutan y obtiene utilidad los jóvenes que nacen en ese período.

<sup>53</sup> Este supuesto es básico en los modelos de tragedia de los comunes. Es una forma especial de expectativas, propia de la teoría de juegos.

<sup>54</sup> En sentido estricto, afectan el nivel de medioambiente que está afectado por la contaminación y por la dinámica inherente al sistema natural.

Si los individuos son egoístas –no altruistas-, esta estructura es fuente de otra externalidad intergeneracional, aparte del problema de contaminación.

Varios estudios estándar de generaciones traslapadas han mostrado que el altruismo no es suficiente para garantizar que la eficiencia dinámica de una economía de generaciones traslapadas, aún en el caso extremo de altruismo de tipo Barro o inclusive con un efecto de cuarto de espejos, es decir, con un altruismo perfecto en dos sentidos –padre a hijos e hijos a padres-(Blanchard & Fischer, 1989; de La Croix & Michel, 2002). En el estado del arte, se mostró varios ejemplos en los cuales el altruismo no garantiza una asignación eficiente, cuándo se incluye variables ambientales en el modelo de generaciones traslapadas. Por este motivo, no se estudia esta extensión y se procede a estudiar directamente el comando central (Jouvet, Michel, & Vidal, 2000). Claramente, una sociedad altruista puede disminuir las externalidades pero no las puede eliminar, por el problema de los comunes o del polizón.

### 3. Resultados del modelo descentralizado

#### 3.1. Consumidores:

El problema del consumidor se resuelve con la técnica del lagrangiano – se puede ver los detalles técnicos en el apéndice A.2.-. Se obtiene los siguientes resultados:

$$c_{2(t+1)} = \frac{(1 + r_{(t+1)})}{(1 + \theta)} c_{1t} \quad (2.1)$$

Esta ecuación, es la ecuación de Euler, o cómo distribuyen el consumo los agentes entre su juventud y su vejez. Esta ecuación, depende negativamente de la impaciencia por consumir hoy y positivamente de la tasa de interés futura.

---

<sup>55</sup>  $c_{2t} = \frac{(r_{neto(t+1)})}{(1 + \theta)} c_{1t}$ , en el caso de considerar una tasa de depreciación de 1.

Con la introducción de la variable  $m_t$ , el consumo presente y futuro, y el ahorro, se definen así:

$$c_{1_t} = \frac{(1 + \theta)}{(2 + \theta)}(w_t - m_t) \quad (2.2)$$

$$c_{2_{(t+1)}} = \frac{(1 + r_{(t+1)})}{(2 + \theta)}(w_t - m_t) \quad (2.3)$$

$$s_t = \frac{w_t - m_t}{(2 + \theta)} \quad (2.4)$$

En los tres casos, la derivada del consumo presente y futuro y el ahorro respecto a  $m_t$  es negativa. Si se mantiene el medioambiente –se realiza una inversión ambiental–, los niveles de estas tres variables caen. En el caso de que se extraiga recursos naturales estos niveles crecen.

Ahora, definimos la nueva variable de control,  $m_t$ :

$$m_t = \frac{\left( w_t - \frac{(2 + \theta)\beta}{\omega\gamma} \left[ (1 + n)A_{(t+1)}^{com} + (1 - b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a \right] \right)}{(2 + \theta)\frac{\beta}{\gamma} + 1} \quad (2.5)$$

La ecuación (2.5) es el nivel de  $m_t$  que un individuo escoge tomando como exógena la cantidad de  $m_t$  escogida por los demás. Por este motivo, se tiene como argumento a  $A_{(t+1)}^{com}$ , que se definió como el nivel de calidad medioambiental resultado de la elección de  $m_t$  de las demás ( $N_t - 1$ ) personas. Este nivel de ambiente, se toma como exógeno. Este  $m_t$  puede ser visto como la estrategia dominante de cada individuo. Ahora se obtiene el equilibrio Nash-Cournot para el nivel  $m_t$  reemplazando:  $A_t^{com} = A_{(t+1)} - a_{(t+1)}$  en (2.5).

$$m_t = \frac{w_t - \frac{(2 + \theta)\beta}{\omega\gamma} \left[ N_{(t+1)} \left( (1 - b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a \right) \right]}{\left( (2 + \theta)\frac{\beta}{\gamma} + 1 \right) + (2 + \theta)\frac{\beta}{\gamma} (N_{(t+1)} - 1)} \quad (2.6)$$

La ecuación (2.6) es el nivel de  $m_t$  individual, que escoge de manera no cooperativa, cada uno de los consumidores en el tiempo  $t$ . Sus características son las siguientes:

$$\frac{dm_t}{dw_t} > 0; \frac{dm_t}{dk_t^a} > 0; \frac{dm_t}{d(ek_t^a)} = \frac{dm_t}{d(p_t)} > 0; \frac{dm_t}{dA_t} < 0; \frac{dm_t}{dA^-} < 0; \frac{dm_t}{dN_t} \geq 0$$

La derivada de  $m_t$  respecto al salario es positiva, esto significa que la calidad ambiental es un bien normal. Alternativamente, tenemos que mientras menor es el salario más incentivos tengo para extraer o degradar el medioambiente. La derivada respecto a la contaminación es positiva, esto significa que mientras las firmas contaminan más los consumidores invierten más en mantenimiento ambiental –mayor abatimiento, reforestación, etc.-; o se disminuirá la explotación de recursos naturales. La derivada respecto a la calidad ambiental en  $A_t$  es negativa, pues mientras mejor sea la calidad ambiental se invertirá menos en mantenimiento. La derivada respecto al nivel  $A^-$ , o el nivel ambiental base –sin actividad humana- es negativa; la razón es análoga a la derivada de  $A_t$ . El efecto de los parámetros se verá en el estado estacionario. A este nivel, se puede ver que la impaciencia afecta negativamente la inversión ambiental y favorece la extracción de recursos. También, se puede observar que una mayor preferencia por el medio ambiente  $\gamma$ , afecta la inversión ambiental positivamente y disminuye la degradación.

Respecto a la derivada de  $m_t$  sobre la población, no podemos definir su signo. Es decir, puede ser negativa o positiva. Por un lado, un mayor nivel poblacional en  $N_{t-1}$  –y por ende en  $N_t$ -, significa un mayor nivel agregado de  $m_{t-1}$ , lo que implica un mayor nivel de  $A_t$ <sup>56</sup>. Por otro lado, el problema de la tragedia de los comunes o del bien público, se acrecenta cuándo existe un mayor número de pobladores. Es decir, disminuye  $m_t$  en caso de ser mantenimiento ambiental y lo acrecenta si es explotación de recursos. En el nivel estacionario,  $N$  afecta negativamente al ambiente y su efecto es casi nulo sobre el capital.

---

<sup>56</sup> Y por la derivada de  $m_t$  respecto a  $A_t$ , esto significa una mejoría del medioambiente disminuye los incentivos para invertir en mantenimiento ambiental.

### 3.2. Firmas:

Cada firma representativa maximiza su beneficio y obtiene las siguientes condiciones de primer orden –los detalles técnicos se puede ver en el anexo A.3.:

CPO:

$$F_L(K_t, L_t) = w_t; \quad F_K(K_t, L_t) = r_t$$

En términos per-cápita:

$$k_t^a - k_t(a)k_t^{(a-1)} = w_t; \quad (1 - a)k_t^a = w_t(2.7)$$

$$ak_t^{(a-1)} = r_t^{57}(2.8)$$

### 3.3. Equilibrio del mercado de bienes:

El equilibrio del mercado de bienes requiere que la demanda de bienes en cada período sea igual a la oferta, o alternamente, que la inversión sea igual al ahorro –Anexo A.4.-<sup>58</sup>:

$$(1 + n)k_{t+1} = \left[ \frac{w_t - m_t}{2 + \theta} \right](2.9)$$

### 3.4. Dinámicas y estado estacionario:

Como el ahorro del período t es igual a la inversión del futuro, se determina el comportamiento dinámico de la economía –detalles en el anexo A.5.-, con un sistema de dos ecuaciones en diferencias –de at y kt-:

#### Comportamiento del capital:

---

<sup>57</sup> De nuevo, si existe depreciación:  $r_t = r_{bruta(t)} - 1, \delta = 1$

<sup>58</sup> Por la forma de la función de utilidad escogida –logarítmica-, el ahorro es independiente de la tasa de interés futura lo que hace irrelevante a la tasa de interés en el análisis dinámico y a la formación de expectativas sobre el rendimiento del capital. Esto permite aislar el estudio del presente estudio a las restricciones ambientales.

La evolución dinámica del capital, queda determinada por esta ecuación en diferencias:

$$k_{t+1} = \frac{(1-a)k_t^a - \left[ \frac{(2+\theta)\beta}{\omega\gamma} \left[ N_{(t+1)} \left( (1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a \right) \right] \right]}{(1+n)(2+\theta)} \quad (2.10)$$

$$k_{t+1} = \mathcal{H}(k_t, a_t) \quad (2.11)$$

### **Evolución del medioambiente:**

La evolución dinámica del medioambiente, queda determinada por esta ecuación en diferencias:

$$a_{(t+1)} = \frac{(1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a + \omega \left[ \frac{(2+\theta)\beta}{\omega\gamma} \left[ N_{(t+1)} \left( (1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a \right) \right] \right]}{(1+n)} \quad (2.12)$$

$$a_{(t+1)} = \mathcal{U}(k_t, a_t) \quad (2.13)$$

### **Crecimiento Poblacional:**

$$N_t = (1+n)N_{(t+1)} \quad (2.14)$$

El crecimiento poblacional, para la mayor parte del análisis, se considera nulo, y la población estacionaria. Sin embargo, se realiza simulaciones numéricas para el caso de crecimiento poblacional positivo –anexo B. 2-.

### **3.4. Estado estacionario:**

Para encontrar una solución analítica, se considera una población estacionaria  $N$ , con una tasa de crecimiento cero ( $n=0$ ) –detalles técnicos en el

anexo A.6.-. En estado estacionario, se tiene:  $a_t, a_{t+1} = a^*$  y  $k_{t+1} = k_t = k^*$ . Este problema es matemáticamente complejo pero si se considera que, por definición, que  $b$  está entre 0 y 1. Entonces, con una población  $-N$  estacionaria-suficientemente grande se tiene que:

$$\frac{b\bar{A}}{N} \approx 0_{59}$$

Para un valor de  $\bar{A}$ , que sea cercano a los niveles de consumo per cápita. Se debe recordar, que por la definición del índice ambiental,  $\bar{A}$  puede tomar cualquier valor no negativo<sup>60</sup>. En el caso de fijar  $N$  en 1, eliminamos el problema de la tragedia de los comunes. Alternativamente, se puede ver como un gobierno que vive dos períodos (John & Pecchenino, 1994). En este caso, la solución puede ser encontrada sólo por métodos numéricos –anexo B-. Cuando  $N$  es suficientemente alta el estado estacionario está determinado por un sistema de dos ecuaciones no lineales, en las variables  $a^*$  y  $k^*$ :

Se tiene el sistema:

$$k^* = \frac{(1-a)k^{*a} - \left[ \frac{a^* - (1-b)a^* + ek^{*a}}{\omega} \right]}{(2+\theta)} \quad (2.15)$$

$$a^* = (1-b)a^* - ek^{*a} + \omega \left[ \frac{(1-a)k^{*a} - \frac{(2+\theta)\beta}{\omega\gamma} \left[ N((1-b)a^* - ek^{*a}) \right]}{\left( (2+\theta)\frac{\beta}{\gamma} + 1 \right) + (2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}(N-1)} \right] \quad (2.16)$$

Este sistema tiene dos soluciones, la primera es trivial:

<sup>59</sup> Esta aproximación permite tener una solución analítica, ya que en caso contrario el capital estacionario estará dado por un polinomio del tipo:  $\sigma k^{*a} + \phi k^* + \mu = 0$ ;  $0 < a < 1$ . Es decir, se requeriría establecer un valor numérico para el parámetro  $a$  y utilizar métodos numéricos. Efectivamente, se realizan simulaciones numéricas del modelo. El error de la aproximación de la solución aquí presentada es decreciente en  $N$ , creciente en  $b$  y en  $\bar{A}$ . Claramente, es una muy buena aproximación si consideramos que la población puede ser arbitrariamente grande, mientras que los otros parámetros no.

<sup>60</sup> Esta valoración puede ser de cero como en los modelos de: (John & Pecchenino, 1994; John et al., 1995)

$$k^* = 0; a^* = 0$$

Y la segunda solución es:

$$k^* = \left[ \frac{N\beta[\omega(1-\alpha) - e]}{[N(2+\theta)\beta + \gamma b]\omega} \right]^{\frac{1}{(1-\alpha)}}$$

$$a^* = \left[ \frac{N\beta[\omega(1-\alpha) - e]}{[N(2+\theta)\beta + b\gamma]\omega} \right]^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}} \left[ \frac{[\omega(1-\alpha) - e]}{\left[ N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b \right]} \right]$$

Estos resultados dicen que el efecto de la población sobre el nivel de  $k$  estacionario es casi nulo, en cambio sobre el nivel de  $a$  –calidad ambiental per-cápita- es negativo. Se puede decir, que el control de la población es positivo para el medioambiente pero tiene pocos efectos sobre el nivel de capital físico. Se debe reconocer, que el crecimiento poblacional no se considera aquí, y tampoco se endogeniza la población. Por este motivo, no se tiene un caso fuerte para políticas de control poblacional. De las simulaciones numéricas, -realizadas en el apéndice B-. Se puede ver que aún con altos niveles de crecimiento poblacional –geométrico-, se puede tener una economía que persiste en el tiempo aunque no tiene un estado estacionario, si las tecnologías de abatimiento son suficientemente altas –anexo B.2-. En casos extremos, se puede llegar al colapso de la economía. A pesar de esto, un nivel poblacional alto empeora el problema de los comunes y aumenta el efecto de las externalidades intergeneracionales<sup>61</sup>.

El efecto del parámetro  $w$  es positivo sobre la calidad ambiental y ambiguo sobre el nivel de capital. Es decir, una economía con una mejor tecnología de abatimiento, o un rendimiento natural alto, tiene un mayor nivel de

<sup>61</sup> Se pueden pensar en extensiones al modelo, dónde la fertilidad se afecte negativamente por una disminución de la calidad ambiental y por un nivel del ingreso per-cápita. Esto, puede ser un mecanismo de estabilización natural.

calidad ambiental, como era de esperarse. El parámetro  $e$ , que demuestra el nivel de limpieza de la producción o su eficiencia termodinámica –en uso de materia y energía-. Aunque, está limitado por la resiliencia del medioambiente-, tiene un efecto negativo sobre el nivel de capital y sobre la calidad ambiental. En otros términos una economía con tecnologías limpias es más rica y tiene mayor bienestar.

Estos dos parámetros – $w$  y  $e$ - son muy importantes en el modelo ya que si tienen cierta relación pueden causar el colapso de la economía. Para que un estado estacionario de  $k$  diferente de cero exista, se requiere que  $\omega(1 - \alpha) > e$ . Es claro, que si  $k^*$  existe –es positivo-,  $a^*$  será positivo, ya que se cumple  $\omega(1 - \alpha) > e$ . Estos dos parámetros pueden ser afectados por políticas que busquen mejorar las tecnologías para hacerlas más limpias y con menos impacto ambiental. También, se puede pensar en políticas de desmaterialización de la economía (Bartelmus, 2003).

El parámetro  $\alpha$ , que es la participación del capital en el producto, tiene un efecto negativo sobre el nivel de capital estacionario y sobre el nivel de calidad ambiental. Este resultado, se explica debido a que la producción industrial es contaminante –por la especificación de la función de contaminación-. Es decir, mientras mayor sea la participación del capital mayor será la contaminación, lo que implica gastos en mantenimiento ambiental. Entonces, existe un caso para incentivar las actividades de servicios, como el turismo. Se debe aclarar, que un tratamiento más profundo de este punto, requeriría incluir capital humano y varios sectores. Este es el caso, del sector agrícola tradicional, que puede ser intensivo en trabajo pero que tiene efectos negativos fuertes sobre el medio ambiente.

Sin embargo, se debe aclarar que estos parámetros – $w$  y  $e$ - están limitados por factores naturales que están fuera del alcance de estas políticas, como el rendimiento natural y la resiliencia. Además, por las leyes de la

termodinámica el parámetro  $e$  nunca puede ser cero<sup>62</sup> (Georgescu-Roegen, 1971; Chóliz, 1999). Cómo se estableció en los supuestos del modelo,  $w$  y  $e$  en un caso más general pueden ser vistos como funciones. No obstante, un análisis riguroso requerirá un conocimiento del sistema natural, lo que correspondería a la economía ecológica.

Las preferencias también juegan un rol importante, si son más verdes, es decir,  $\gamma$  es alto, tenemos un menor nivel de  $k$  estacionario. Sin embargo, el efecto sobre el nivel ambiental per-cápita es indeterminado pues, preferencias más verdes incentivan a mantener el medio ambiente pero una economía pobre tendrá menos recursos para hacerlo. Alternativamente, bajos ingresos incentivan la explotación del medio ambiente. La pobreza ha sido mencionada como una fuente de degradación ambiental (Duraiappah, 1998). Sin embargo, la relación es compleja y depende de los demás parámetros. Una economía consumista, con un alto nivel de  $\beta$ , tiene un menor nivel de calidad ambiental –y tiene un efecto casi nulo sobre el capital-.

La impaciencia también tiene un papel importante en la determinación del estado estacionario y afecta negativamente a los niveles de capital y también de medioambiente. La tasa de impaciencia determina la intensidad de las externalidades intergeneracionales. Este resultado, es de interés ya que los tratamientos similares de generaciones traslapadas consideran economías que no consumen ni ambiente ni bienes en el primer período –sólo trabajan-. Estos agentes sólo consumen en la vejez (John & Pecchenino, 1994; Jouvét et al., 2000). Esto en realidad implica un caso extremo, en el cual se otorga un peso de cero al consumo del presente. Se puede ver que la relajación de este supuesto no es trivial.

Estos dos últimos resultados, tienen implicaciones sobre las políticas de concienciación sobre el medio ambiente. Se puede ver, que aunque los

---

<sup>62</sup> Si se supone un  $e$  de cero se puede tener el caso estándar del modelo de generaciones traslapadas sin contaminación.

individuos valoren más el medio ambiente no pueden lograr un nivel mayor de calidad ambiental. El problema de los comunes, evita que lo logren. Este resultado es un caso de la llamada paradoja del aislamiento. En la cual, aunque todos los individuos deseen lograr una mejor calidad ambiental no pueden hacerlo. Es decir, se produce la tragedia de los comunes (Hardin, 1968). Este resultado contradice los hallazgos de John & Pecchenino (1994), que no considera el problema de la tragedia de los comunes.

Por otro lado, concuerda con los hallazgos de Jouvét, Michel, & Vidal (2000), que si lo hace. Así, las preferencias intertemporales, representadas por la impaciencia de los consumidores, tiene un efecto negativo sobre los niveles de estado estacionario. Se puede sugerir entonces, campañas enfocadas en el cuidado del futuro de la humanidad, el altruismo intergeneracional y otras que tengan el objetivo de disminuir la impaciencia por el consumo en la juventud. Esto permite aumentar los niveles de mantenimiento ambiental y ahorro y lograr un estado estacionario con mejores niveles de  $k$  y  $a$  –aunque no se logre la eficiencia o la optimalidad en el sentido de Pareto–.

Esta solución puede ser directamente extendida al caso, en que exista un factor tecnológico  $\tau$  que multiplica a la función de producción:

$$k^* = \left[ \frac{\tau N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} [\omega(1-\alpha) - e]}{\left[ N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b \right] (2+\theta)\omega} \right]^{\frac{1}{(1-\alpha)}}$$

$$a^* = \left[ \frac{\tau N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} [\omega(1-\alpha) - e]}{\left[ N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b \right] (2+\theta)\omega} \right]^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}} \left[ \frac{\tau [\omega(1-\alpha) - e]}{\left[ N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b \right]} \right]$$

El factor tecnológico, es tomado como exógeno en el presente problema. La economía en estado estacionario crece o decrece respecto a variaciones de este parámetro. También se pueden introducir choques externos por este factor. Sin embargo, el tratamiento exógeno ha sido uno de los puntos más criticados

de los modelos de crecimiento estándar (P. M. Romer, 1990). Se realizará una extensión del presente modelo para el caso de externalidades positivas en la producción. Este modelo, no se soluciona analíticamente pero se presentan simulaciones numéricas –Anexo B.-. El hallazgo más importante, es que bajo ciertos parámetros, aún con crecimiento endógeno, no se puede garantizar crecimiento indefido y en casos más extremos no se puede evitar el colapso de la economía. También existen escenarios en los cuáles el crecimiento del capital –y del producto- es positivo, mientras el medioambiente es estable. Esto se explica, porque la economía produce suficiente para cubrir el daño ambiental causado por la contaminación de su producto creciente.

### 3.5. Dinámica local

El modelo se puede caracterizar por dos ecuaciones en diferencias de primer grado en dos variables. Este sistema es no lineal. El procedimiento estándar requiere que se realiza una aproximación lineal –se lo realiza en el anexo A.6-. Sin embargo, se prueba que el tipo de dinámicas no se puede determinar en base al análisis local –linealización- ya que no se tiene un difeomorfismo. Es decir, el campo topológico linealizado no es equivalente al del modelo no lineal (Shone, 2002)<sup>63</sup>. Se tiene un  $Det J = 0$  - determinante del jacobiano linealizado cero-. Es decir, es un mapa no invertible localmente. Si esto no se cumple, se requiere que la órbita de un punto  $y_0$  del mapa esté dado por una secuencia infinita  $\{y_0, Ay_0, \dots, A^n y_0, \dots\}$  -y el mapa sea del tipo  $C^r, r \geq 1$ <sup>64</sup>-(Wiggins, 2003).

No se profundizará en el análisis dinámico debido a la no linealidad y complejidad del sistema. Un análisis completo de las dinámicas requiere un estudio del mapa topológico y de las bifurcaciones. Esto no se realiza de manera formal. No obstante, se puede establecer de manera general, que debido a que J

<sup>63</sup> Se impone dos restricciones para que el campo topológico lineal se comporte igual al no lineal:  $Det J \neq 0, Tr J \neq 0$ .

<sup>64</sup> Conjunto de Cantor.

no es localmente invertible, aunque el mapa que determina el modelo –el sistema de ecuaciones en diferencia- es continuamente diferenciable; el modelo puede presentar una topología compleja, más aún caótica (Bischi, Gardini, & Kopel, 2000). Para saber el tipo de dinámica real, se realiza un análisis directo para el presente modelo. En varias simulaciones numéricas –anexo B.-. Se muestran la presencia de dinámicas no monotónicas para los niveles de capital y medioambiente.

Este tipo de dinámicas, son cada vez más comunes en la literatura económica (Bischi et al., 2000; Junxi, 1999; Yokoo, 2000). Junxi (1999), demuestra la posibilidad de dinámicas caóticas deterministas y de topologías complejas en el modelo de generaciones traslapadas y medioambiente similar al aquí presentado, de John & Pecchenino (1994). Además, se puede mencionar que las dinámicas complejas son comunes a modelos de oligopolios en tiempo discreto (Puu & Sushko, 2002). Cabe recordar que en el presente modelo, se presenta un problema de tipo Nash-Cournot con una variable adelantada – $A_{t+1}$ -.

Por formalidad se presenta el problema de linealización, a continuación –anexo A.7-:

$$\begin{bmatrix} k_t - k^* \\ a_t - a^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{(t-1)} - k^* \\ a_{(t-1)} - a^* \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$a_{11} = \frac{\partial \mathcal{H}(k^*, a^*)}{\partial k_t}; \quad a_{12} = \frac{\partial \mathcal{H}(k^*, a^*)}{\partial a_t}$$

$$a_{21} = \frac{\partial \mathcal{U}(k^*, a^*)}{\partial k_t}; \quad a_{22} = \frac{\partial \mathcal{U}(k^*, a^*)}{\partial a_t}$$

$$J = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Las dinámicas del modelo cerca del estado estacionario (k,a), queda determinado por la siguiente matriz –detalles técnicos en el anexo A.7-:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\alpha k^{(\alpha-1)} \beta N ((\omega(1-\alpha) - e))}{\omega \gamma \left( (2+\theta) \frac{\beta}{\gamma} N + 1 \right)} & \frac{N \beta (1-b)}{\omega \gamma \left( (2+\theta) \frac{\beta}{\gamma} N + 1 \right)} \\ \frac{(\alpha k^{(\alpha-1)} (\omega(1-\alpha) - e))}{\left( (2+\theta) \frac{\beta}{\gamma} N + 1 \right)} & \frac{(1-b)}{\left( (2+\theta) \frac{\beta}{\gamma} N + 1 \right)} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Ahora se caracteriza la matriz:

$$TrJ = \frac{\alpha k^{(\alpha-1)} \beta N ((\omega(1-\alpha) - e))}{\omega \gamma \left( (2+\theta) \frac{\beta}{\gamma} N + 1 \right)} + \frac{(1-b)}{\left( (2+\theta) \frac{\beta}{\gamma} N + 1 \right)} \quad (2.19)$$

$$DetJ = \frac{\alpha k^{(\alpha-1)} \beta N ((\omega(1-\alpha) - e))}{\omega \gamma \left( (2+\theta) \frac{\beta}{\gamma} N + 1 \right)} \cdot \frac{(1-b)}{\left( (2+\theta) \frac{\beta}{\gamma} N + 1 \right)} - \dots$$

$$\left[ \frac{N \beta (1-b)}{\omega \gamma \left( (2+\theta) \frac{\beta}{\gamma} N + 1 \right)} \cdot \frac{(\alpha k^{(\alpha-1)} (\omega(1-\alpha) - e))}{\left( (2+\theta) \frac{\beta}{\gamma} N + 1 \right)} \right]$$

Se tiene:

$$DetJ = 0 \quad (2.20)$$

El polinomio característico tiene dos autovalores o eigenvalores:

$$P(\mu) = \mu^2 - T\mu + D$$

$$\mu_1 = TrJ$$

$$\mu_2 = 0$$

El caso no-hiperbólico requiere que el valor absoluto de cualquier de los autovalores sea igual a 1 (de La Croix & Michel, 2002). En primer lugar, reemplazamos k estacionario en la traza (2.19) y se iguala a 1:

$$\alpha = \frac{(N\beta(2 + \theta) + b\gamma)}{((2 + \theta)\beta N + b\gamma)} = 1$$

Por la forma de la función de producción escogida, este caso está excluido del dominio del parámetro  $\alpha : 0 < \alpha < 1$ . Alternativamente, igualamos la traza y se iguala a -1:

$$\alpha = \frac{-N\beta(2 + \theta) + (2 - b)\gamma}{(N\beta(2 + \theta) + b\gamma)} < 0$$

Este caso también queda descartado. Ahora, debido a  $\mu_1 = TrJ$  es menor a 1 en valor absoluto y  $\mu_2 = 0$  también, el modelo es localmente estable. Alternativamente, se puede analizar las dinámicas en base a la traza y determinante de J (de La Croix & Michel, 2002). Una condición necesaria y suficiente es:

$$|1 + D| > |T|, |D| < 1$$

La matriz J cumple con esta especificación. Ahora, si las dinámicas están determinadas por una secuencia infinita –aún con un mapa no invertible– podemos determinar que el modelo es localmente estable. La prueba formal no está completa. Sin embargo, en las simulaciones numéricas el modelo ha mostrado ser localmente estable –anexo B–, para varias combinaciones de parámetros. Las simulaciones numéricas y los gráficos de las diferentes dinámicas se utilizan en vez del análisis estándar de diagramas de fase –apropiado para casos hiperbólicos y sin presencia de topologías complicadas–.

Para Junxi (1999), a pesar que la mayoría de los modelos con medioambiente se restringen al análisis de los estados estacionarios, ignorando por tanto las dinámicas transicionales hacia posiciones de largo plazo. Su análisis es no trivial. Hay dos razones, según este autor, por las cuales se puede pensar que las dinámicas transicionales en los modelos que siguen la tradición neoclásica pueden ser muy complejas. En primer lugar, aunque los modelos con

medioambiente sean similares a los modelos de crecimiento estándar, dónde el concepto del estado de sostenibilidad ambiental corresponde al del estado estacionario; existe una diferencia fundamental entre los dos tipos.

En los modelos con medioambiente existen dos fuerzas opuestas que se balancean la una contra la otra hacia un nivel sustentable: Una fuerza negativa, mediante la cual las actividades de los agentes como el consumo lastiman al medioambiente; y una fuerza positiva, que consiste en el deseo de preservación y cómo esto afecta al ambiente. Es por este motivo, que el juego de estos dos efectos opuestos, que está generalmente ausente en los modelos de crecimiento, dé lugar a dinámicas no triviales –y además complejas-. Es más, se puede pensar en una estructura de tipo impulso y respuesta que pueden llevar a dinámicas oscilatorias –como se observa de las simulaciones numéricas apéndice B-.

## 4. Comando central

### 4.1 Planteamiento y solución del modelo centralizado

Luego de haber establecido las condiciones de unicidad, existencia y estabilidad, para el estado estacionario descentralizado, debemos calificarlo. El siguiente paso, es el desarrollo del comando central. Se supone la existencia de un planificador benevolente que debe maximizar la función de bienestar social intertemporal:

$$\text{Max} \sum_{t=0}^{\infty} (1+R)^{-t-1} \left[ u(c_{1t}, A_t) + (1+\theta)^{-1} u(c_{2t+1}, A_{t+1}) \right] \quad (2.21)$$

Sujeto a<sup>65</sup>:

$$\text{s.a.} \quad K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} = K_{t+1} + Nc_{1t} + Nc_{2t} + M_t$$

$$A_{(t+1)} = (1-b)A_t + b\bar{A} - P_t + \omega M_t$$

---

<sup>65</sup> Para el análisis del comando central se considera el caso de  $n = 0, N_t = N_{t+1} = N$ .

Las restricciones, incluyen la ecuación de movimiento estándar del capital, añadiendo el mantenimiento ambiental. La segunda restricción es la ecuación de movimiento del medioambiente<sup>66</sup>. Esta función de bienestar es utilitarista y fija un peso para cada generación de  $(1+R)^{-t-1}$ . Este factor es muy importante para el análisis equidad y sostenibilidad como se verá más adelante. Se demuestra que sólo un peso unitario o una R de cero puede cumplir simultáneamente con criterios de eficiencia, equidad y sostenibilidad.

Esta función de bienestar utilitarista, fija un peso para cada generación de  $(1+R)^{-t-1}$ . El parámetro R, puede tomar los valores de cero -0- en el caso de que al planificador le importe por igual todas las generaciones. Si R es positivo, entonces el planificador central da más peso a las generaciones presentes que a las futuras. Finalmente, si R es negativo, el planificador dará más peso a las generaciones futuras que a las presentes.

El caso de R=0, es de especial interés, ya que permite obtener tanto la regla de oro, o el nivel máximo de consumo y calidad ambiental que no afecte la capacidad de consumo y calidad ambiental de las demás generaciones (Blanchard & Fischer, 1989; de La Croix & Michel, 2002; Phelps, 1961). Esto es la sustentabilidad débil. Además, se puede probar, utilizando una función de bienestar social de tipo CES –Elasticidad Constante de Sustitución- en el caso en el cual existe aversión cero a la desigualdad, que su solución es equivalente a la solución centralizada cuando R es cero.

Utilizando, la ecuación paramétrica de la utilidad y expresando en términos per-cápita la restricción del capital, se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} (1+R)^{-t-1} \left[ \beta \ln c_{1t} + \gamma \ln A_t + (1+\theta)^{(-1)} \left( \beta \ln c_{2(t+1)} + \gamma \ln A_{(t+1)} \right) \right] \\ \text{s.a.} \quad & k_t^\alpha = k_{t+1} + c_{1t} + c_{2t} + m_t \quad (2.22) \\ & A_{(t+1)} = (1-b)A_t + b\bar{A} - P_t + \omega M_t \end{aligned}$$

---

<sup>66</sup> Se realiza el análisis de la economía con depreciación igual a 1.

$$A_{(t+1)} = (1 - b)A_t + b\bar{A} - eN \cdot k_t^a + \omega \cdot Nm_t \quad (2.23)$$

Los detalles técnicos de la solución están en el anexo C. Las condiciones de primer dan los siguientes resultados:

La ecuación centralizada para  $m_t$  –anexo C.1.-:

$$M_t = \left[ (b - 1)A_t \frac{2 + R}{(1 + R)} A_t - b\bar{A} + P_t \right] / \omega$$

En términos per-cápita:

$$m_t = \left[ (b - 1)A_t \frac{2 + R}{(1 + R)} - b\bar{A} + eNk_t^a \right] / \omega N \quad (2.24)$$

$$\frac{dm_t}{d(P_t)} > 0; \frac{dm_t}{dA_t} < 0; \frac{dm_t}{dA} < 0; \frac{dm_t}{dN} \geq 0$$

El planificador central no respeta la elección de  $m_t$  individual. Esto, no sorprende, ya que por las características del modelo descentralizado, se presenta el problema de la tragedia de los comunes o del polizón. Esta elección del planificador central puede ser vista como una solución cooperativa a nivel dinámico. El signo de las derivadas no cambia y las razones son análogas a las presentadas en el caso descentralizado. Esta regla dice que se debe invertir en el medioambiente si la calidad ambiental es baja. Luego,  $m_t$  individual –centralizado- debe compensar la cuota total de contaminaciones sobre el parámetro de eficiencia del mantenimiento ambiental<sup>67</sup>. Si la contaminación es alta se debe aumentar la inversión ambiental, pero si la eficiencia de abatimiento mejora se disminuye la inversión ambiental. Ocurre lo inverso en el caso de la explotación ambiental<sup>68</sup>.

<sup>67</sup> Esta regla recuerda a las recomendaciones sobre la neutralización de las emisiones de CO<sub>2</sub>, de Gore.

<sup>68</sup> Es claro que los supuestos del modelo, implican ausencia de incertidumbre, y de la irreversibilidad en los sistemas naturales. Lo que permite tener esta función de mantenimiento y de explotación. En este sentido este modelo tiene una línea ambiental de sustentabilidad débil.

Si  $b$ , que es la velocidad de estabilización del sistema natural, es alto,  $mt$  se incrementa<sup>69</sup>. Esto significa que, si la regeneración de los recursos es alta entonces se puede explotar más los recursos naturales. Esta regla es similar a las recomendaciones estándar de la economía de recursos. En el caso de  $mt$  negativo tenemos una relación más compleja. Si la depreciación entrópica es muy alta, entonces la inversión medioambiental debe ser menor. Este caso puede ilustrarse, con el riego de zonas desérticas para lograr cubrirlas de vegetación o alternativamente con el enriquecimiento de suelos. Si la erosión es demasiado alta, la inversión ambiental debe ser baja.

En el caso centralizado,  $mt$  no depende de los parámetros que corresponden a las preferencias individuales sobre el medioambiente y el consumo, tampoco está presente la tasa de impaciencia individual. La población  $N$  tampoco tiene un efecto real sobre la elección de  $mt$ . Estos parámetros, son los que determinan la intensidad de las externalidades intergeneracionales, como ya se estableció del análisis descentralizado. En cambio, tenemos el parámetro  $R$ , que representa el descuento intertemporal del planificador. Cuando  $R$  es cero, se tiene la regla óptima de  $mt$ . Se debe subrayar, que este planificador tiene un horizonte infinito. Si se tiene un planificador con horizonte de un ciclo de vida, se lograría eliminar el problema de los comunes a nivel estático pero no a nivel dinámico<sup>70</sup>. Este punto es fundamental para generar políticas ambientales y demuestra la relevancia del análisis dinámico.

La condición –anexo C.1.-:

$$c_{1t} = \frac{(1 + \theta)}{(1 + R)} c_{2t} \quad (2.25)$$

Esta ecuación, muestra cómo el planificador asigna el consumo entre las generaciones que están viviendo en el mismo tiempo  $t$ . Es decir, entre jóvenes y viejos. Esta condición, no cambia respecto a la solución estándar del comando

<sup>69</sup> Ya que la división de  $bA^-/wN$ , tiende a cero.

<sup>70</sup> Este punto está completamente desarrollado en (John et al., 1995).

central del modelo de generaciones traslapadas sin medio ambiente. El planificador considera en este caso la impaciencia de los habitantes por el consumo en su juventud. Si  $R$  es alto cae el consumo de los jóvenes, es decir, se afecta el consumo de las generaciones futuras.

La condición:

$$A_{t+1} = c_{1t} \left[ \frac{\omega N \gamma}{\beta} \frac{(2 + R + \theta)}{(1 + \theta)(1 + R)} \right] \quad (2.26)$$

Esta ecuación muestra el trade-off que existe entre medioambiente en el tiempo  $t+1$  y el consumo de los jóvenes. El planificador central debe tomar en cuenta las preferencias de los consumidores por medioambiente, y por el tiempo –impaciencia-. Si se tiene preferencias más verdes se debe tener un nivel mayor de calidad ambiental. El efecto de  $R$  es ambiguo.

Ahora se obtiene la ecuación que caracteriza la asignación de consumo entre los dos períodos de vida de la misma generación:

$$c_{2t} = c_{1t-1} \frac{\left( \alpha k_t^{\alpha-1} \frac{(\omega - e)}{\omega(1+R)} \right)}{(1 + \theta)} \quad (2.27)$$

En el caso de depreciación total del capital, tenemos la ecuación (2.27). Esta condición, cambian en el comando central, respecto a la solución estándar del modelo de generaciones traslapadas sin medioambiente, ya que la asignación del consumo entre la juventud y la vejez no es equivalente a la solución descentralizada -(2.1)<sup>71</sup>. De nuevo, las razones de este cambio muestran que el planificador internaliza las externalidades entre las generaciones y elimina el problema de no cooperación del equilibrio Nash-Cournot presente en el modelo descentralizado. Se puede observar, que si el parámetro  $e$  disminuye aumenta el

---

<sup>71</sup> Cuando se iguala la tasa de interés con el producto marginal del capital en  $t$ , la condición de primer orden del problema de la firma, en el modelo estándar de generaciones traslapadas se respeta la decisión descentralizada.

consumo en la vejez. Este hecho se da porque una economía menos contaminante, puede invertir menos en abatimiento y puede así mismo acumular más capital, teniendo un mayor consumo<sup>72</sup>.

#### 4.2. Estado estacionario y regla de oro

Se realiza el análisis de estado estacionario, -Anexo C.1.2- considerando:

$$c_1^*; c_2^*; k^* = c_1; c_2; k$$

Obtenemos la siguiente condición, que establece que el rendimiento marginal del capital –tasa de interés-, en estado estacionario. Esta es la regla de oro modificada, para el capital<sup>73</sup>:

$$\frac{\omega(1+R)}{(\omega-e)} = \alpha k^{\alpha-1} \quad (2.28)$$

Cabe notar que la edad de oro<sup>74</sup> no está totalmente determinada, pues falta la condición de la calidad medioambiental. Ahora se obtiene el capital estacionario que cumple con la regla de oro modificada:

$$\left[ \frac{\alpha(\omega-e)}{\omega(1+R)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} = k \quad (2.29)$$

<sup>72</sup> El caso en que  $e$  sea cero, es equivalente al problema estándar de generaciones traslapadas sin medioambiente. Es claro que el supuesto de no generación de contaminación, omnipresente en los tratamientos de generaciones traslapadas es irreal pues viola las leyes de la termodinámica. Este punto fue una de las críticas fundamentales de (Georgescu-Roegen, 1971) al modelo de Solow y a la teoría de la producción neoclásica.

<sup>73</sup> Con un poco de algebra se demuestra que si  $e$  es igual a cero, o no hay contaminación, entonces tenemos la regla de oro es  $f'(k^*) = R$ , que es idéntica a la regla de oro en el modelo de generaciones traslapadas sin medioambiente. Este resultado se debe a que la versión del modelo de generaciones traslapadas sin medioambiente es un caso especial en el cuál no existe contaminación –lo que es imposible–.

<sup>74</sup> Se utiliza el término edad de oro o era dorada, para referirse al estado estacionario en el cuál se cumple la regla de oro verde aquí derivada.

$$\omega = e, k = 0^{75}$$

La existencia de este estado estacionario se garantiza si  $\omega > e$ ; esta condición es similar a la de la existencia de un estado estacionario no trivial, en el caso descentralizado -  $\omega(1 - \alpha) > e$  -. Esta relación, es una muestra de los límites que impone la introducción de variables ambientales al modelo de generaciones traslapadas. Nisiquiera un planificador central que elimina el problema de la tragedia de los comunes y el del polizón, además de las externalidades intergeneracionales, puede garantizar que la economía no colapse si no se cumple la condición establecida.

Esta condición, implica que si la eficiencia termodinámica de la producción, es demasiado baja, o alternamente, la tecnología es sucia o intensiva en uso de recursos y energía –un parámetro  $e$  alto-; y el rendimiento natural y las tecnologías de mitigación son muy bajas –un  $w$  bajo-; no existe un estado estacionario y la economía colapsa. Este resultado, hace relevante el estudio empírico y la medición de estos parámetros.<sup>76</sup> Se tiene un caso especial, cuándo tenemos  $\omega = e$ , tenemos un capital estacionario de cero -  $k = 0$ -, y la economía vive sólo de la cosecha del capital natural. El interés en este caso es limitado, ya que con esta condición sobre los parámetros el estado estacionario descentralizado no existe.

Ahora se analizará el efecto del descuento intergeneracional en el nivel de capital estacionario:

$$\frac{dk}{dR} = \frac{1}{1 - \alpha} \left[ \frac{\alpha(\omega - e)}{\omega(1 + R)} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{\alpha(e - \omega)}{\omega(1 + R)^2} \quad (2.30)$$

<sup>75</sup> Si  $w$  es igual a  $e$  el capital estacionario es cero. Es decir, la economía no existe.

<sup>76</sup> Para el caso ecuatoriano se ha medido la eficiencia energética – $e$ - y se ha encontrado un valor de 0.69 promedio para las últimas décadas (Falconí, 2002). La medición del parámetro  $w$  es mucho más compleja y requiere establecer un proceso de valoración ambiental que agregue los diferentes tipos de capital natural y establezca una tasa de rendimiento agregada, lo que es un problema complejo.

$$\frac{dk}{dR} < 0; w > e$$

Mientras más alto sea el descuento intertemporal más bajo será el nivel de capital estacionario. Si  $R$  es negativo, el nivel de capital de estado estacionario aumentará. El caso de  $R$  cero o perfecta equidad intergeneracional, nos da el capital dorado, que garantiza la sostenibilidad débil del modelo. En el caso de que todas las generaciones sean consideradas como iguales por el planificador central  $-R$  igual a cero-, tenemos el capital dorado de equidad intergeneracional  $-k_{oro}$ <sup>77</sup>:

$$\left[ \frac{\alpha(\omega - e)}{\omega} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} = k_{oro}; R = 0 \quad (2.31)$$

Para caracterizar la era de dorada  $-$ modificada $-$  de la economía se escriben los niveles de consumo en la juventud y la vejez:

$$c_1 = \frac{\left[ k^\alpha \left( \frac{w-e}{\omega} \right) - k + \frac{b\bar{A}}{\omega N} \right]}{\left( 1 + \frac{(1+R)}{(1+\theta)} + S \frac{(2+R)}{(1+R)} \right)} \quad (2.32)$$

$$c_2 = \frac{(1+R)}{(1+\theta)} \frac{\left[ k^\alpha \left( \frac{w-e}{\omega} \right) - k + \frac{b\bar{A}}{\omega N} \right]}{\left( 1 + \frac{(1+R)}{(1+\theta)} + S \frac{(2+R)}{(1+R)} \right)} \quad (2.33)$$

$$S \equiv \frac{\gamma(2+R+\theta)}{\beta(1+\theta)}$$

<sup>77</sup> En el caso que se considera una depreciación de cero, se encuentra un capital dorado cero que solución no es trivial, ya que la economía se convierte en una economía de cosecha. El consumo y la calidad medioambiental son positivos  $-$ Anexo C2 $-$ .

El nivel de consumo, de los jóvenes en estado estacionario es menor, si R es alto. En el caso de los viejos el efecto de R es ambiguo. Si el capital es mayor también lo será el consumo. También podemos observar que si las preferencias son más verdes el consumo baja en los dos períodos de vida.

La calidad ambiental en estado estacionario que satisface la regla de oro modificada es:

$$a = \frac{\left[ k^\alpha \left( \frac{w-e}{\omega} \right) - k + \frac{b\bar{A}}{\omega N} \right]}{\left( 1 + \frac{(1+R)}{(1+\theta)} + \left[ \frac{\gamma(2+R+\theta)}{\beta(1+\theta)} \right] \frac{(2+R)}{(1+R)} \right)} \left[ \frac{\omega\gamma}{\beta} \frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)(1+R)} \right] \quad (2.34)$$

La identidad (2.34) determina el nivel estacionario del comando central, para la calidad medioambiental per-cápita. La condición de existencia es la misma del capital estacionario. Este nivel de calidad ambiental satisface la regla de oro modificada. Es difícil determinar el efecto de R sobre el nivel de calidad ambiental per-cápita<sup>78</sup>. Sin embargo, ya que la calidad ambiental depende positivamente del capital estacionario, se determina que un R o descuento más alto, determina un menor nivel de calidad ambiental en nivel estacionario. El caso de más interés se da cuando R es cero. Así, se puede tener directamente la segunda condición, para caracterizar totalmente la era dorada de la economía donde se tiene el mayor nivel de consumo y calidad ambiental que no afectan el consumo de las demás generaciones –cuando R es cero-:

$$\left[ k^\alpha \left( \frac{w-e}{\omega} \right) - k + \frac{b\bar{A}}{\omega N} \right] \left[ \frac{\omega\gamma}{\beta + 2\gamma} \right] = a_{oro} \quad (2.35)$$

La era dorada de la economía, con equidad intergeneracional perfecta, queda determinada por el nivel de capital dorado y calidad ambiental dorada, así:

---

<sup>78</sup> Se realizan simulaciones numéricas para diferentes combinaciones de parámetros.

$$\left[ \frac{\alpha(\omega - e)}{\omega} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} = k_{oro}$$

$$\left[ k^\alpha \left( \frac{w - e}{\omega} \right) - k + \frac{b\bar{A}}{\omega N} \right] \left[ \frac{\omega\gamma}{\beta + 2\gamma} \right] = a_{oro}$$

Este resultado establece el nivel que un planificador central, que da igual peso a cada generación, dadas las tecnologías, restricciones y preferencias – con total depreciación del capital físico<sup>79</sup>-, escoge de capital y calidad ambiental per cápita, en estado estacionario. El parámetro alfa, que representa la participación del capital en la producción, tiene un rol positivo sobre el nivel de estado estacionario de capital y medioambiente. Esto contrasta fuertemente con el efecto que tiene en la economía descentralizada. El planificador central de horizonte infinito es capaz de internalizar todas las externalidades y por este motivo, puede neutralizar los efectos de la contaminación de la producción industrial e invertir lo suficiente para lograr un mayor nivel de capital en estado estacionario.

La eficiencia de abatimiento –y rendimiento natural-, representados por el parámetro  $w$ , tiene un efecto positivo débil sobre el nivel de capital y la calidad ambiental que depende de su relación con el parámetro  $e$  –el grado de limpieza de la producción-. Si el radio  $e/w$  es menor a uno se garantiza la existencia de la economía, y mientras este radio tienda a cero,  $k$  y  $a$  estacionarios se incrementan. En el caso centralizado, el efecto de cambios en  $w$  y  $e$ , es más grande que en el caso descentralizado. Cabe notar que  $N$ , o la población

<sup>79</sup> En el caso que no se considera depreciación del capital, se establece una economía de cosecha en estado estacionario. Anexo C.2. Es decir, hay lugar para políticas extremas de decrecimiento o simplemente no se debe acumular capital. Es claro que poblaciones de la Amazonía o de África, viven en economías de cosecha. Estas economías son claramente más igualitarias y son sostenibles. Pero son también más pobres y vulnerables al ataque de otras poblaciones.

estacionaria no es un argumento del capital estacionario centralizado –lo que muestra la eliminación de la externalidad propia de la tragedia de los comunes-.

Por otro lado,  $N$  está presente en el nivel de estado estacionario per cápita de calidad ambiental. Sin embargo, dado que  $N$  puede tomar valores arbitrariamente grandes en comparación a los demás parámetros, no tiene un efecto real sobre este nivel –ya que entra en el denominador de un término puramente aditivo que es cercano a cero-. Las preferencias tampoco son argumento del estado estacionario del capital. En el caso del medio ambiente, preferencias más verdes implican un mayor nivel de calidad ambiental. Unas preferencias con más peso en el consumo, implican un menor nivel de calidad ambiental.

Estos resultados, dicen que las políticas ambientales y macroeconómicas deben ser consideradas en conjunto. La era dorada o regla de oro verde, aquí derivada, tiene dos condiciones que incluyen la calidad ambiental y el nivel de capital físico. Luego, se establece que la prioridad debe ser evitar el colapso de la economía, mejorando las tecnologías de abatimiento y disminuyendo el impacto ambiental de las actividades humanas sobre la naturaleza –parámetros  $w$  y  $e$ -. En este caso  $w$  y  $e$  son parámetros, pero como se explicó son en realidad funciones, que pueden tener como argumentos a la inversión en investigación y desarrollo ambiental.

En segundo lugar, las políticas de internalización de externalidades ambientales deben ser vistas en un marco dinámico y de largo plazo. La naturaleza tiene tiempos distintos a los tiempos de vida humana. La internalización a nivel estático es insuficiente –en nuestro modelo basta con fijar  $N$  en 1, para eliminar el problema de los comunes a nivel estático-. Cuando se tiene gobiernos miopes, las externalidades intergeneracionales siguen presentes. Este resultado es similar al de (John et al., 1995). El modelo de generaciones traslapadas permite capturar esta diferencia en los horizontes temporales y

demostrar la expansión de las ineficiencias estáticas –externalidades ambientales y tragedia de los comunes- a nivel dinámico.

### 4.3 Regla de oro verde o edad de oro

La definición de regla de oro, dicta que el capital dorado es aquel que maximiza el consumo; sin afectar el consumo –o la capacidad de consumir- de las demás generaciones. Así, una economía que cumple la regla de oro, cumple también el criterio de sostenibilidad débil (Phelps, 1961; Sudhir & Sen, 1994). En la presente investigación, se extiende esta noción a una era dorada que considera conjuntamente la regla del oro del capital y a la calidad medioambiental. Esta era dorada, se llama también regla de oro verde y ya ha sido determinada en un análisis de tiempo continuo por otros autores (Beltratti, Chichilnisky, & Heal, 1993). Se debe encontrar, los niveles mantenibles de manera indefinida para los cuales se maximiza la utilidad –en estado estacionario-. -El problema se desarrolla en el anexo D y se lo hace de manera general para cualquier función de utilidad y función de producción-. Se prueba formalmente, que la solución centralizada del modelo satisface las condiciones de la edad de oro para un descuento unitario –R es cero-.

Se derivan las siguientes condiciones:

$$u_1(c_1, A) = (1 + \theta)^{-1} u_1(c_2, A) \quad (2.36)$$

En la condición (2.36) se observa la asignación óptima entre el consumo de los jóvenes y los viejos. En este caso, los viejos consumen menos en relación a su impaciencia por consumir en su juventud. Esta condición es idéntica a (2.25) del modelo centralizado cuando R es cero.

Se tiene la condición sobre el capital, considerando dos casos para la depreciación del capital físico:

$$f'(k) = \frac{\omega\delta}{(\omega - e)}; \delta = 0,1 \quad (2.37)$$

La condición (2.37), para los dos casos considerados se transforma en:

$$f'(k) = 0; \delta = 0 \quad (2.38)$$

$$f'(k) = \frac{\omega}{(\omega - e)}; \delta = 1 \quad (2.39)$$

La condición (2.39) es equivalente a la obtenida del caso centralizado, lo que muestra que el uso de formas específicas de utilidad y de producción no cambian sustancialmente las conclusiones. El caso especial de (2.38), es una curiosidad teórica que ocurre cuándo el capital físico no se deprecia – desarrollado en el anexo C.2.-. La regla de oro en ese caso dice que la tasa de interés de la economía de largo plazo debe ser cero –con población estacionaria-. En el caso de una función de producción Cobb-Douglas, se requiere que el capital estacionario sea cero, otras tipo de formas funcionales pueden ser menos restrictivas y evitar la conclusión de una economía de cosecha<sup>80</sup>.

Respecto al medioambiente se deriva la condición:

$$u_2(c_1, A) + (1 + \theta)^{-1}u_2(c_2, A) - \frac{u_1(c_1, A)}{\omega N} b = 0 \quad (2.40)$$

Se establece que cualquier economía –modelo- que en estado estacionario, cumpla simultáneamente con (2.36), (2.37) y (2.40), satisface la condición de la regla de oro verde o edad de oro. Cuándo el horizonte de planificación es infinito, o el número de generaciones se extiende al infinito, esta

---

<sup>80</sup> Este caso especial de economía de cosecha o de bajo capital, se presenta como curiosidad teórica, ya que el supuesto de no depreciación muestra tener efectos fuertes sobre las conclusiones. Es decir, sirve como el caso límite para considerar el efecto de la depreciación sobre la calidad ambiental. Un análisis completo de este punto requiere implementar el concepto de balance de materiales que va más allá del campo de estudio de la presente investigación.

condición –edad dorada- determina el nivel máximo de utilidad que puede tenerse con un nivel infinitamente mantenible de calidad ambiental y capital. Cualquier  $a$  y  $k$  que cumplan estas tres condiciones serán denominadas como los niveles dorados de calidad ambiental y capital en términos per-cápita.

Si el capital o la calidad ambiental es diferente de los niveles dorados, será dinámicamente ineficiente y no cumplirán con el criterio de óptimo de Pareto –eficiencia-. En el presente modelo, además, se prueba que si  $a$  o  $k$  son diferentes de los niveles dorados, la economía no es equitativa y tampoco es sustentable. Entonces, se establece, que en el presente modelo la condición necesaria y suficiente para que una economía sea dinámicamente eficiente, equitativa y sostenible –bajo ciertos criterios-, es que satisfaga la edad de oro en estado estacionario.

Las condiciones (2.36) y (2.37) son cumplidas por el comando central y son directamente observables en las condiciones de primer orden, cuando  $R$  es cero o no hay descuento intergeneracional. La condición (2.40) requiere utilizar una función de utilidad específica, para poder observarla de mejor manera. Utilizando la función logarítmica utilizada a través del presente trabajo se tiene:

$$c_1 \frac{\gamma \omega b (2 + \theta)}{\beta (1 + \theta)} = a \quad (2.41)$$

La condición (2.41), es cumplida por el comando central en sus condiciones de primer orden –mt-, cuando  $R$  es cero – y para cualquier valor de la tasa de depreciación-. Es equivalente a la ecuación (2.26) Ahora, queda demostrado que la única solución que cumple la regla de oro verde o edad de oro es el comando central sin descuento intertemporal – $R$  es cero-.

La solución de la regla de oro -sin descuento intertemporal-, cuando el capital no se deprecia, plantea una economía de cosecha –anexo C.2.-. Este resultado limitante, se prueba, depende del supuesto de no depreciación del

capital físico. En un modelo estándar, este supuesto no tiene mayores implicaciones, sin embargo, en el presente modelo es relevante. Se debe recordar, que cada período  $t$ , es aproximadamente 30 años –la mitad del ciclo de vida-, lo que permite establecer el supuesto alternativo de depreciación total del capital o una tasa de depreciación de 1.

Este supuesto – $d$  es cero- es estándar en los modelos de generaciones traslapadas actuales (de La Croix & Michel, 2002). Se debe aclarar, que el capital depreciado no tiene valor económico pero físicamente no desaparece, se convierte en desechos, que afectan al sistema ambiental. En este caso, se considerará que una parte del producto es ahorrada y no se convierte en desecho. Entonces, la función de contaminación puede mantener la misma especificación<sup>81</sup>. Este supuesto, posibilita la existencia de un capital dorado positivo, menos limitante que la economía de cosecha.

#### 4.4 Dinámicas del comando central

La estabilidad del estado estacionario del comando central –regla de oro modificada-, así como la caracterización de las dinámicas no se estudia en el presente trabajo. Suponemos que es estable, ya que el interés está en el análisis de optimalidad, equidad intergeneracional y sostenibilidad del modelo descentralizado. Una aproximación intuitiva de la estabilidad local se describe desde la ecuación (2.24):

$$m_t = \left[ (b - 1)A_t \frac{2 + R}{(1 + R)} - b\bar{A} + eNk_t^\alpha \right] / \omega N$$

Esta ecuación, junto a las restricciones del modelo, determina el mecanismo de convergencia de economía. Así, se puede ver que una desviación

---

<sup>81</sup> Si este supuesto no se mantiene, la función de contaminación tiene que aumentar un factor aditivo finito. Una modificación de este tipo, llama a un estudio más profundo del balance de materiales, propio de la economía ecológica.

positiva del nivel estacionario de  $A_t$  causará una disminución de  $m_t$  lo que dejará más recursos para invertir y consumir en ese período. Ahora, un mayor nivel de capital  $k_{t+1}$  –vía contaminación  $P_{t+1}$ - y un menor nivel de  $m_t$ , causan una disminución de  $A_{t+1}$ . Esta disminución de  $A_{t+1}$ , a su vez aumenta el nivel de  $m_{t+1}$ , lo que disminuye los recursos para consumir e invertir, reduciendo el nivel de  $k_{t+2}$ . Lo que ocurre es una convergencia al estado estacionario, aunque pueda presentar oscilaciones<sup>82</sup>. Esto no es una prueba formal. Sólo se establece un mecanismo económico por el cual la economía centralizada es dinámicamente estable. El análisis completo del comando central se deja para futuros trabajos.

El caso de una convergencia oscilatoria en un comando central ha sido encontrado en modelos de generaciones traslapadas con externalidades entre generaciones –hábitos en el consumo-, por de La Croix & Michel (2002). Este caso es interesante, ya que implica la llamada monstruosidad utilitaria, o el sacrificio del bienestar de algunas generaciones para aumentar la sumatoria total de las utilidades. En el artículo de La Croix & Michel (2002) en particular, se encuentra la posibilidad de convergencia oscilatoria hacia el estado estacionario aún en el caso de un  $R$  cero, o igual peso intergeneracional. Este punto, es relevante ya que un planificador central utilitario, aunque le importen por igual todas las generaciones, a nivel dinámico, causa trayectorias que podrían ser consideradas poco equitativas o justas (Brechet & Lambrecht, 2005; Rawls, 1971c).

#### **4.5 Análisis de óptimo paretiano:**

Una asignación es posible o alcanzable si –y sólo si- está dentro de la frontera de pareto, esto es respecto a una función social objetivo que es la suma

---

<sup>82</sup> El caso de una convergencia oscilatoria en un comando central ha sido encontrado en modelos de generaciones traslapadas con externalidades entre generaciones –hábitos en el consumo-, por de La Croix & Michel (2002). Este caso es interesante, ya que implica la llamada monstruosidad utilitaria, o el sacrificio del bienestar de algunas generaciones para aumentar la sumatoria total de las utilidades. En el artículo de Croix & Michel (2002) en particular, se encuentra la posibilidad de convergencia oscilatoria hacia el estado estacionario aún en el caso de un  $R$  cero, o igual peso intergeneracional.

ponderada de las utilidades de los consumidores, en el cuál los pesos son números no negativos, y que no todos sean cero (Bewley, 2007). Esta función ranquea las posibles asignaciones y define toda la frontera de posibilidades de utilidades de pareto. Es una condición necesaria de óptimo pareto –posibilidad de existencia-, que implica comparaciones intergeneracionales de utilidad (Mas-Collel et al., 1995; Bewley, 2007). La función social, de comando central desarrollada, cumple con estas características, para todos los valores positivos de  $R$  y para  $R$  cero<sup>83</sup>. En este caso, se puede encontrar un  $R$  tal que la solución descentralizada es posible –está dentro de la frontera de pareto-.

Se recuerda, la definición estándar de óptimo de pareto, en la cuál una asignación es pareto óptima si no es pareto dominada por ninguna otra asignación –posible- (Mas-Collel et al., 1995). En este caso, es suficiente con demostrar la existencia de una asignación que domine en el sentido de pareto a la asignación descentralizada para establecer que no es óptima. La asignación descentralizada, será pareto óptima si no existe otra asignación en la cual se pueda mejorar el bienestar de alguna generación sin perjudicar el bienestar de las demás (Mas-Collel et al., 1995).

Así, el problema de la optimalidad en el sentido de pareto se reduce a demostrar la inexistencia de una asignación que domine en el sentido de pareto a la solución descentralizada. Equivalentemente, se establece que la asignación descentralizada estacionaria no es pareto óptima si no coincide con la solución de la edad o era dorada, que maximiza la utilidad de las generaciones en estado estacionario – que se demostró es equivalente a la solución centralizada cuando  $R$  es cero- (Blanchard & Fischer, 1989; de La Croix & Michel, 2002). Ahora, el ejemplo evidente es la asignación centralizada cuando  $R$  es cero.

Formalmente, se prueba –anexo E- que la asignación de estado estacionario descentralizada no es solución del comando central –cuando  $R$  es cero- y por ende es pareto dominada por esta última. Se plantea una

---

<sup>83</sup> Cumple también para valores negativos de  $R$  menores a la unidad en valor absoluto.

demostración de reducción al absurdo en el anexo E. La economía descentralizada puede alcanzar –bajo ciertos valores de los parámetros- el nivel de capital dorado. No obstante, falla al cumplir la segunda condición de la regla de oro verde o era dorada, que corresponde al medioambiente. Queda demostrado, que la asignación descentralizada de estado estacionario no es óptimo de pareto, pues se sobredegrada el medioambiente o se submantiene el medioambiente. Esto ocurre por las externalidades e imperfecciones de mercado.

$$k_{des}^* = k_{oro}$$

$$a_{oro} > a_{des}$$

Se prueba –anexo E- que cuando la población tiende al infinito, ninguna asignación descentralizada es pareto óptima en el sentido débil. Así, el problema de los comunes –bien público-, se empeora con una población mayor, alejando a la asignación descentralizada de la frontera paretiana. La impaciencia por consumir también tiene el mismo efecto, debido a que aumenta las externalidades intrageneracionales:

$$a_{des} = 0, N \rightarrow \infty$$

$$a_{oro} = k_{oro}^\alpha \left[ \left( \frac{(1-\alpha)(w-e)}{\omega} \right) \right] \left[ \frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma} \right], N \rightarrow \infty$$

Estos casos extremos, sirven para ilustrar que una población grande y una impaciencia alta afectan negativamente a la eficiencia de la economía y reducen el nivel de calidad ambiental hasta su nivel de cero.

También se presenta el caso en el cuál no existe el problema de los comunes, es decir existe un gobierno de vida corta –del mismo tiempo de una generación- o un mecanismo de cooperación intrageneracional que elimine la tragedia de los comunes. También se supone que la impaciencia por consumir hoy sea cero. Se demuestra que esa economía puede no alcanzar el óptimo de pareto –Anexo E-:

$$a_{cen} > a_{des}, N \rightarrow 1, \theta \rightarrow 0$$

Este resultado es análogo a la ineficiencia dinámica estándar, presente en los modelos de generaciones traslapadas estándar. El hecho de que la asignación pueda fallar en ser óptimo en el sentido de Pareto, aún cuando no existan imperfecciones de mercado, se deriva del hecho del número infinito de generaciones (Blanchard & Fischer, 1989; de La Croix & Michel, 2002; D. Romer, 1989).

Queda demostrado que la asignación en estado estacionario del modelo descentralizado, no es óptima en el sentido débil de Pareto. Intuitivamente, el modelo descentralizado presenta fallos de mercado: el problema de la tragedia de los comunes, la del polizón; la presencia de externalidades intergeneracionales y finalmente el horizonte miope de los agentes, que impone la estructura del modelo de generaciones traslapadas. Ahora, se establece que aunque el capital descentralizado alcance su nivel dorado, el medioambiente es sobredegradado o submantenido. No se puede excluir los casos, en los cuales el capital se sobreacumula y el medioambiente se subacumula. Tampoco el caso de que se subacumule tanto capital como medioambiente.

Extendiendo, este razonamiento, de optimalidad estacionaria, se puede decir que las trayectorias dinámicas del modelo descentralizado no son óptimas en el sentido de Pareto. Se ha probado (de La Croix & Michel, 2002), que si hay subacumulación las trayectorias dinámicas son óptimas en el sentido de Pareto, si hay sobreacumulación no lo son. La razón es simple, ya que si hay subacumulación no hay forma en que se pueda mejorar la trayectoria dinámica por definición, en cambio si hay sobreacumulación si existe esa posibilidad.

Se analiza el caso en que se alcanza el nivel dorado de capital en la economía descentralizada, igual para los dos casos, entonces la calidad medioambiental puede ser sólo subacumulada. En este caso, las trayectorias son

eficientes en el sentido de pareto, por las razones expuestas. Este resultado recuerda el equilibrio de Nash en el cual los agentes racionales, en este caso generaciones, son incapaces de alcanzar el óptimo de pareto aunque actúen de manera racional –y óptima-. Este caso demuestra que una economía puede cumplir la regla de oro simple –nivel de capital dorado- y además tener trayectorias dinámicas eficientes y a pesar de eso subacumular calidad ambiental. Así se observa la naturaleza de la regla de oro verde o edad dorada.

De la discusión anterior, se determina que existe un caso para la intervención del Estado para mejorar la eficiencia tanto en las trayectorias como en el estado estacionario. En la presente investigación, no se recomienda políticas específica, que pueden ser: impuestos, subsidios, permisos, controles, etc; que permitan descentralizar el óptimo de pareto y eliminar las imperfecciones de mercado. Simplemente se dice, que cualquiera sea la política implementada debe diseñarse e implementarse para considerar un horizonte infinito –acorde al tiempo de vida de la naturaleza y de la humanidad como un todo-. Se probó que aunque se internalicen las externalidades a nivel estático, se puede seguir siendo ineficiente. En resumen, se dice que cualquier política ambiental debe ser de largo plazo, para tener efectos reales sobre la eficiencia de la economía.

Además cabe mencionar, que el óptimo paretiano no tiene consideraciones de equidad o justicia. Es sólo una condición de eficiencia. Se debe subrayar también, que establecer comparaciones entre las utilidades intergeneracionales, puede ser éticamente indefendible (Rawls, 1971c; Ramsey, 1928). Para responder a estas inquietudes se discute la equidad y la sustentabilidad de los resultados obtenidos.

#### **4.6 Análisis de equidad intergeneracional**

El criterio de pareto, implica sólo eficiencia y no tiene consideraciones de equidad (Mas-Collel et al., 1995). Así, una economía eficiente, puede no ser

equitativa, y una economía equitativa puede no ser eficiente. Entonces, se desarrolla un criterio alternativo para determinar la equidad de la solución descentralizada y del comando central. La discusión de lo que es justo y equitativo en sentido intergeneracional es una discusión profunda que rebasa a la economía y la delimitación de la presente investigación<sup>84</sup>. En este trabajo, se intentará instrumentalizar algunas nociones de equidad comúnmente aceptadas. En especial una interpretación de igualdad fuerte –maxmin intertemporal–.

Una función de bienestar especial, permite ver las actitudes sobre la equidad, ajustando un solo parámetro es la función de elasticidad constante de sustitución –CES–; o también conocida como de aversión relativa al riesgo, en este caso aversión a la desigualdad –CARA–. Es fácil mostrar –anexo F–, que la solución del planificador central desarrollada aquí, cuando  $R$  es cero, es equivalente al caso de una función de bienestar social CES o CRRA, cuando la elasticidad o alternativamente la aversión a la desigualdad tiende a cero. Si la aversión a la desigualdad es infinita este tipo de función se transforma en la función de bienestar de Leontief. Este tipo de funciones de bienestar social –Leontief, ha sido utilizada como una interpretación del principio de equidad rawlsiana.

Se parte de una función de tipo CES. Ahora el problema queda definido así<sup>85</sup>:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \left[ u(c_{1t}, A_t) + (1 + \theta)^{-1} u(c_{2t+1}, A_{t+1}) \right]^{(1-\rho)} \quad 86 \\ \text{s.a.} \quad & k_t + k_t^\alpha = k_{t+1} + c_{1t} + c_{2t} + m_t \\ & A_{(t+1)} = (1 - b)A_t + b\bar{A} - eN \cdot k_t^\alpha + \omega \cdot Nm_t \end{aligned}$$

En el caso en que el parámetro  $\rho$  sea cero, tenemos que las condiciones de primer orden de este problema; son idénticas a las condiciones de primer

<sup>84</sup> En los anteriores capítulos se presentó varias consideraciones teóricas sobre equidad intergeneracional.

<sup>85</sup> El desarrollo completo de este problema está en el anexo F.

<sup>86</sup> Es una función de bienestar social tipo CES, que maximiza la suma infinita ponderada exponencial de la utilidad de un individuo, o en este caso, generación representativa.

orden del comando central utilitario cuando  $R$  es igual a cero  $-R=0-$  -Ver anexo F. para detalles técnicos-. Esta afirmación se puede observar de manera directa al reemplazar en las condiciones de primer orden de este problema. Este resultado, implica que una en estado estacionario, la economía que garantiza la equidad –en un sentido de utilitarista- entre generaciones, es decir, que resulta de la solución del problema cuándo la aversión a la desigualdad es cero, es precisamente la regla de oro y además soluciona el comando central cuando  $R$  es cero –es eficiente-<sup>87</sup>.

Se establece, entonces que la economía descentralizada es incapaz de garantizar la equidad intergeneracional aún cuando la aversión a la desigualdad es cero. Esto se da, ya que esta condición de equidad requiere que se alcance el óptimo de Pareto. Se probó que la economía descentralizada no es eficiente. Esta solución se puede interpretar como una implementación del velo de ignorancia de Harsanyi (1953, 1955)<sup>88</sup>, que implica el tomar en cuenta la actitud frente al riesgo de los contratantes en el velo de ignorancia. En este caso, se podría interpretar como la solución de una sociedad neutral al riesgo de nacer en una generación con niveles arbitrariamente bajos de capital y medio ambiente.

En el caso de que la aversión a la desigualdad sea infinita, los resultados cambian fuertemente. En este caso, se puede considerar que niveles bajos de estos dos acervos –capital físico y natural- pueden implicar una amenaza para la existencia de los individuos. La función de bienestar de Leontief, ha sido utilizada para implementar el principio de la equidad Rawlsiana a nivel intergeneracional (Mas-Collel et al., 1995; Arrow, 1973; Pezzey & Toman, 2002; Solow, 1974).

La función de Leontief es un caso límite (Mas-Collel et al., 1995):

---

<sup>87</sup> Estos resultados son ciertos en el caso de una población estacionaria  $N$ .

<sup>88</sup> La sumatoria de todas las funciones de utilidad esperada de cada generación al ser sumada sólo admite un coeficiente unitario, por definición de probabilidad.  $\sum p = 1$ . Con  $p$  como la probabilidad de nacer en un tiempo  $t$ . Un tratamiento formal de un velo de ignorancia con incertidumbre y riesgo puede ser encontrado en (Lambert, 2001).

$$W = \sum_{t=0}^{\infty} U_t^{1-\rho} \equiv \min(U_t) \Leftrightarrow \rho \rightarrow \infty \quad (2.42)$$

Aplicando el caso límite a las condiciones de primer orden –Anexo F-, se tiene:

$$U_{t-1} = U_t, \rho \rightarrow \infty \quad (2.43)$$

La condición (2.43), implica que el nivel de utilidad debe ser el mismo para todas las generaciones. Es decir, se tiene perfecta igualdad intergeneracional. Las demás condiciones de primer orden quedan indefinidas pues implican operaciones con cero e infinito. La maximización de una función social de tipo Leontief, que es equivalente a una preferencia extrema del planificador por la equidad intergeneracional, requiere que la utilidad intergeneracional se mantenga constante. Una solución directa implica aplicar el caso límite para la solución general de la CES<sup>89</sup>.

Se debe diferenciar dos partes del análisis de perfecta equidad o igualdad entre generaciones: el análisis dinámico y el análisis de estacionario. Intuitivamente, sólo en estado estacionario se cumple la igualdad, si: no existen cambios tecnológicos exógenos, ni descubrimiento de nuevos recursos, ni crecimiento poblacional, que alteren la asignación estacionaria. De este razonamiento se deriva que ninguna trayectoria descentralizada cumple el criterio max-min, pues no se puede garantizar que el bienestar se mantenga igual en cada tiempo. Existe el caso especial de una economía cuyas condiciones iniciales sean las de estado estacionario. Esta economía será por definición igualitaria –aunque su existencia es improbable<sup>90</sup>.

---

<sup>89</sup> Este es un problema complejo que no se intentará solucionar, por la presencia del infinito tanto en la sumatoria como en los términos de la sumatoria. Además, se puede realizar un razonamiento lógico que nos permite calificar la equidad y porque algunos de sus términos quedan indefinidos.

<sup>90</sup> La solución centralizada dorada cuando no hay depreciación implica el caso de una economía de cosecha en estado estacionario. Se puede ilustrar este caso extremo con una economía de cosecha como la de las tribus amazónicas. Estas sociedades son más igualitarias en términos económicos que las modernas.

Otro acercamiento hacia este problema, siguiendo la línea de Solow, consiste en suponer la existencia de un planificador central. Este planificador, en un tiempo  $t$  cualquiera, puede implementar el maxmin fijando la utilidad –el nivel de consumo y el nivel medioambiental- (John et al., 1995; Pezzey & Toman, 2002; Solow, 1974). Es decir, fija arbitrariamente un nivel de consumo –control- y se determina un  $m_t$  y una inversión en capital tal, que se mantenga fijo también un nivel medioambiental. De esta manera, la economía es completamente igualitaria en sentido intergeneracional. Pues se mantiene constante la utilidad individual –indirecta- de cada generación. Claramente, la elección de los niveles de consumo, inversión y  $m_t$ , deben respetar las restricciones o ser alcanzables, entonces queda determinada por las condiciones del tiempo  $t$  –sus condiciones iniciales- (Solow, 1974).

Una economía con una alta dotación de capital y recursos naturales puede ser igualitaria y tener altos niveles de consumo. Claramente, este enfoque no nos dice nada sobre como se acumuló el capital en primer lugar. Si la economía tiene un nivel bajo de capital y recursos naturales estará atrapada en bajos niveles de consumo y calidad ambiental<sup>91</sup>. En el presente modelo, un mayor nivel de capital produce más contaminación, por este motivo el planificador tiene que ajustar la inversión y  $m_t$  hasta alcanzar un estado estacionario y mantener a la economía permanentemente en ese nivel.

$$\text{Max } \min(U_t) \quad (2.44)$$

$$\text{s.a. } k_t + k_t^\alpha = k_{t+1} + c_{1t} + c_{2t} + m_t$$

$$W = \sum_{t=0}^{\infty} U_t^{1-\rho} \equiv \min(U_t) \Leftrightarrow \rho \rightarrow \infty$$

El problema del planificador central consiste en fijar la utilidad en un nivel arbitrario –pero posible-, sujeto a las restricciones:

---

<sup>91</sup>Como posibles ejemplos, podemos a los países europeos que han combinado sistemas de mercado con alta acumulación de capital en una parte de su historia, para luego implantar sistemas de seguridad social que tienen como objetivo mejorar la equidad.

$$U_{\text{equidad}} = \left[ \beta \ln c_{1t} + \gamma \ln A_t + (1 + \theta)^{(-1)} \left( \beta \ln c_{2(t+1)} + \gamma \ln A_{(t+1)} \right) \right]$$

Se puede fijar exógenamente los niveles de consumo y de medio ambiente para fijar la utilidad indirecta:

$$c_{it} = c_i, \quad i = 1, 2$$

$$A_t = A_{t+1} = A_e$$

Si se quiere obtener perfecta igualdad entre las generaciones de manera automática. Estos niveles deben ser fijados en el nivel máximo alcanzable de un tiempo  $t$ . En ese caso, se tiene directamente que el capital queda determinado por:

$$\delta k_t + k_t^\alpha \left( 1 - \frac{e}{\omega} \right) - k_{t+1} = c_1 + c_2 + \frac{bA_e - b\bar{A}}{\omega \cdot N} \quad (2.45)$$

Esta ecuación, es la ecuación de movimiento del capital que mantiene fijos los niveles de consumo y de medioambiente.

$$\delta k + k^\alpha \left( 1 - \frac{e}{\omega} \right) - k = c_1 + c_2 + \frac{bA_e - b\bar{A}}{\omega \cdot N} \quad (2.46)$$

Este polinomio no lineal no tiene solución analítica directa, para el caso de que el capital se deprecie totalmente,<sup>92</sup> se pueden realizar simulaciones numéricas. Pero en el caso de que el capital no se deprecie, se tiene:

---

<sup>92</sup> En este caso,  $d$  es la depreciación neta, que es distinta a la  $d$  de la regla de oro:  $d_{\text{neta}} = (1 - d_{\text{bruta}})$

$$k = \left[ \frac{\omega(c_1 + c_2) + \frac{bA_e - b\bar{A}}{N}}{(w - e)} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (2.47)$$

El nivel de capital estacionario en este caso está dado por (2.47). Este es el nivel de capital que toma como exógeno al nivel de consumo y al nivel de medio ambiente. Para lograrlo se debe invertir de acuerdo a (2.45) y con un nivel de  $m_t$  dado por –ver anexo F.-:

$$\frac{bA_e - b\bar{A} + eN \cdot k_t^\alpha}{\omega \cdot N} = m_t \quad (2.48)$$

Ahora se muestra que esta solución es posible o alcanzable y que puede no ser eficiente –anexo F.-:

$$\frac{k_{oro}}{\alpha} = \left[ c_1 + c_2 + \frac{bA_e - b\bar{A}}{\omega \cdot N} \right] \quad (2.49)$$

$$k^\alpha = \left[ c_1 + c_2 + \frac{bA_e - b\bar{A}}{\omega \cdot N} \right] \cdot \alpha k_{oro}^{\alpha-1} \quad (2.50)$$

De la condición (2.49), se demuestra que la asignación igualitaria es alcanzable o posible. De (2.50), se infiere que aunque  $A_e$  sea fijada en el nivel dorado de la economía, la asignación igualitaria puede no ser eficiente. Si se permite, una convergencia gradual al estado de igualdad perfecta intergeneracional para alcanzar, por ejemplo mayores niveles de consumo o de calidad ambiental y por ende de bienestar. Es decir, se quiere crecer un poco más antes de buscar la igualdad. Se vuelve a la solución centralizada de edad de oro, que garantiza igualdad y eficiencia, sólo a nivel estacionario.

No obstante, como ya se mencionó en la presente investigación, el problema de justicia intergeneracional en el sentido rawlsiano intergeneracional, estrictamente no es equivalente a maximizar una función social de tipo Leontief (Rawls, 1971c; Solow, 1974). La razón es que Rawls considera que la equidad no implica igualdad sino imparcialidad<sup>93</sup> y sobretodo el problema de la asimetría del problema intergeneracional. Este mismo problema, evita que se pueda buscar un análisis de tipo Kaldor-Hicks, ya que la compensación potencial o real no puede darse si existe la posibilidad de que dos generaciones no se encuentren en el tiempo.

Los casos extremos de aversión nula o cero a la desigualdad y de aversión infinita analizados, dicen que la economía descentralizada falla en garantizar aún la versión más débil de equidad –cuando la aversión es nula-. Así, se justifica la intervención estatal por razones de equidad. Lo más probable es que la sociedad presente niveles intermedios –entre cero e infinito- de aversión a la desigualdad. Se puede afirmar que la economía descentralizada falla en cumplir estos criterios de equidad.

La dimensión intergeneracional, presenta desafíos distintos al análisis de equidad en términos estáticos. En primer lugar, se debe considerar que una economía equitativa en estado estacionario, puede no serlo en las trayectorias dinámicas. En segundo lugar, una aversión extrema por la desigualdad –caso Leontief-, presenta un mundo limitado que se mantiene atado –excesivamente- a las condiciones iniciales de la economía. Es decir, una economía pobre en capital que quiera ser igualitaria, quedará atrapada en bajos niveles de consumo –y los niveles de ambiente correspondientes-.

---

<sup>93</sup> En este sentido la aplicación de un velo de ignorancia, o punto inicial, dónde todas las generaciones elijan cooperativamente los niveles de consumo, mantenimiento o extracción ambiental, inversión, previo al inicio de la economía. Los agentes tendrían que maximizar su utilidad bajo incertidumbre y con el objetivo de disminuir el riesgo de nacer en una generación con niveles arbitrariamente pequeños de capital físico y calidad medioambiental. Así, sería necesario un acercamiento teórico, que se aleje de un planificador central y utilice a un árbitro. El problema tendría que utilizar las herramientas de negociación o juegos cooperativos, con incertidumbre.

Tercero, se presenta un trade-off entre equidad y eficiencia; pero la dimensión intergeneracional presenta desafíos éticos importantes, para justificar una preferencia por la eficiencia sobre la equidad (Rawls, 1971c; Mourmouras, 1991; Solow, 1974). Es decir, se puede producir, el caso extremo de una generación que consume y degrade el ambiente de manera ineficiente, llevando su consumo a niveles altos y afectando a las generaciones venideras, que no pueden hacer nada para evitarlo –ejemplo con simulaciones numéricas anexo B-. En este caso, el Estado debe actuar como subsidiario de las generaciones futuras (Pigou, 1932; Sudhir & Sen, 1994). Cuando la aversión a la desigualdad es nula, es decir, con un criterio débil de equidad, se requiere que las utilidades a nivel intergeneracional no se descuenten. Es decir, existe una justificación social – además de la eficiencia-, para usar una tasa de descuento cero<sup>94</sup>.

A nivel dinámico, la inequidad puede presentarse en convergencias no monotónicas hacia el estado estacionario (Brechet & Lambrecht, 2005; Junxi, 1999). Desde un enfoque rawlsiano, se puede argumentar que la justicia intergeneracional queda anulada, cuando las generaciones son incapaces de decidir su patrón de convergencia –ahorro, inversión, consumo y mt.-, ya que al verse afectados por las externalidades de las generaciones anteriores se ven obligados a fijar sus trayectorias para subsanar este legado pernicioso – simulaciones Anexo B.-. En este caso, cuando se producen fluctuaciones endógenas, existe un caso para fuertes políticas de estabilización –al contrario de lo que ocurre cuando las fluctuaciones son causados por choques exógenos- (Blanchard & Fischer, 1989; Shone, 2002).

#### **4.6 Análisis de sostenibilidad ambiental**

La sostenibilidad es un término complejo y tiene varias concepciones, la definición utilizada, en la presente investigación es aquella de la Comisión Brundtland (1987). Como ya se había expuesto, el desarrollo es sustentable

---

<sup>94</sup> Esta tasa cero debería ser considerada en proyectos sociales y ambientales, como una condición mínima para tener eficiencia y equidad.

cuando satisface las necesidades de la presente generación sin comprometer la capacidad de las futuras generaciones para que satisfagan sus propias necesidades. La definición de sostenibilidad implica tener en cuenta tres dimensiones definidas: la económica, la social y la ambiental.

Se ha utilizado el análisis paretiano para determinar la eficiencia económica, también se ha discutido la equidad como parte de la dimensión social –a nivel intergeneracional-. La dimensión ambiental, se introduce en la estructura misma del modelo y mediante el umbral de contaminación sobre el cual el medioambiente comienza a producir males –en vez de servicios-. Sin embargo, el tratamiento de la sostenibilidad no alcanza una dimensión ecológica<sup>95</sup>. En este sentido, tratamos aquí con la sostenibilidad débil.

Para completar, la discusión desde la sostenibilidad débil, se utiliza el tratamiento de Chichilnisky (1997). Este tipo de tratamiento, permite conciliar el análisis de equidad intergeneracional y la eficiencia económica con las restricciones ambientales. Además, este enfoque tiene la ventaja metodológica de definir el problema de la sostenibilidad de manera axiomática (Chichilnisky, 1997; Pezzey & Toman, 2002). En la contribución de Chichilnisky (1997) se deriva una función social de preferencias sustentables que cumple con los siguientes axiomas:

Primero, la función de bienestar social  $W(\cdot)$  debe ser completa. Esto significa, que pueda ranquear dos flujos de utilidad posibles. Segundo, esta función de bienestar social debe ser sensible. Esto significa, que de un mayor rango al flujo de utilidades que domina en el sentido de Pareto a otro flujo. Tercero, no debe haber dictadura del presente, esto es, que los flujos de utilidad no pueden ser ranqueados sólo en base de un número finito de generaciones iniciales. Y cuarto, no debe haber dictadura del futuro, los flujos de utilidad no pueden ser ranqueados, si un número positivo de generaciones iniciales son ignoradas por  $W(\cdot)$  (Beltratti et al., 1993; Chichilnisky, 1997; Pezzey & Toman,

---

<sup>95</sup> Este tratamiento impone necesidades instrumentales y metodológicas que van más allá de las herramientas de economía neoclásica y ambiental, base del estudio.

2002). Chichilnisky (1997), prueba que una función de utilidad que cumple con estas características, tiene la siguiente especificación :

$$W(\{u_t\}) = \sum_{t=1}^{\infty} \lambda_t u_t + \lim_{t \rightarrow \infty} u_t \quad (2.51).$$

Esta función de bienestar social, requiere que se solucione como dos problemas separados. La primera parte es idéntica al problema centralizado, que ya se resolvió. La segunda parte, requiere que se maximice el  $\lim_{t \rightarrow \infty} u_t$ , sujeto a las trayectorias posibles –dadas por el primer problema-. Esto implica, que se encuentre los niveles mantenibles de manera indefinida de los argumentos de  $U(c,A)$  (Beltratti et al., 1993). Esto es análogo a encontrar la regla de oro de capital y del medio ambiente:

$$\begin{aligned} & \text{Max} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} U_t \\ & \text{Max} \quad U \\ & \text{Max}[u(c_1, A) + (1 + \theta)^{-1}u(c_2, A)] \\ & f(k) = \delta k + c_1 + c_2 + m \\ & bA = b\bar{A} - eN \cdot k^a + \omega \cdot Nm \end{aligned}$$

Entonces, la única asignación que satisface estos dos problemas simultáneamente, es la suma no descontada de las utilidades intergeneracionales. Es decir, la asignación del comando central cuando  $R$  es cero. Ahora queda demostrado que la economía descentralizada no es sostenible, pues no puede alcanzar la asignación del comando central no descontada. También, se demuestra que la solución descentralizada sin descuento intertemporal es sustentable y es equitativa. Esta conclusión, sobre la equivalencia de sostenibilidad, equidad y eficiencia, no puede generalizarse para cualquier especificación funcional de la utilidad y de la producción. Es decir, pueden o no pueden coincidir (Beltratti et al., 1993; Chichilnisky, 1997).

Bajo los axiomas presentados de sustentabilidad débil, desde las preferencias, varias funciones utilizadas de manera estándar fallan en ser sustentables: Las funciones de bienestar social utilitaria descontada, la de leontief-rawlsiana, la de Ramsey, las de necesidades básicas. Esto ocurre, debido a que son o incompletas o insensibles, en el sentido ya definido (Chichilnisky, 1997; Pezzey & Toman, 2002).

Otros criterios de sustentabilidad, como el de sustentabilidad fuerte, requieren que se mantenga un nivel de capital natural crítico o alternativamente el nivel actual de capital natural. Para justificar esta regla, se invoca el principio de precaución (Costanza & Daly, 1992). Es claro, que este principio no es cumplido por la economía descentralizada, cuando el parámetro  $e$ , asociado a la limpieza de la producción –o su nivel de contaminación- es alto, y el parámetro  $w$  de tecnología de abatimiento –o rendimiento natural- es bajo. Es más, la economía colapsa en el modelo descentralizado bajo ciertos valores de estos parámetros –si no se cumple  $\omega(1 - \alpha) > e$  -.

Como recomendaciones de política, para poder lograr la sostenibilidad en sus tres dimensiones, tenemos los siguientes lineamientos genéricos: Las políticas macroeconómicas deben realizarse simultáneamente con políticas ambientales. Se debe buscar la internalización de las externalidades, considerando un horizonte de largo plazo –dinámico- y no sólo intrageneracional. Para que tengan efectos las políticas implementadas, deben ser de Estado y no de gobierno. En caso de tener gobiernos miopes, aunque se logre eliminar externalidades a nivel intrageneracional, no se hace lo mismo a nivel intergeneracional.

El futuro no debe ser descontado, existe una justificación para una tasa de descuento de cero, para garantizar equidad intergeneracional –con aversión cero a la desigualdad- y para lograr eficiencia. La presencia de convergencias no monotónicas, sugieren un caso para políticas de estabilización fuertes a nivel económico y ambiental. Esto podría ser vedas de pesca o forestales, al alcanzar

niveles críticos de los recursos y un control estricto de la contaminación<sup>96</sup>, con el objetivo de garantizar una calidad ambiental sustentable a las generaciones futuras. También, se puede ligar de manera endógena al medioambiente y a los ciclos económicos. En economías dependientes de la explotación de sus recursos naturales estos efectos podrían ser más importantes.

Las plagas, pérdidas de cosechas, sequías y otros desastres de este tipo han sido consideradas como choques exógenos y su efecto en la economía también. Sin embargo, estos eventos, están ligados a la sobreexplotación y degradación ambiental propios de una actividad económica no sustentable. Es el caso de los monocultivos de bananos y otros que destruyen la calidad del suelo y son altamente vulnerables a plagas. En otros términos, se destruye el capital ambiental, que implica un menor nivel de bienes y servicios ambientales. Esto reduce el bienestar y requiere un aumento del consumo –alimentos más caros y uso de medicinas-, además gastos asociados a recuperar los suelos y eliminar plagas. En el presente modelo, un aumento de mt. Entonces, se puede observar que el problema de los comunes, puede generar dinámicas no monotónicas – como se puede observar de las simulaciones numéricas anexo B.-. Entonces, se tiene una explicación alterna y endógena de la volatilidad de las economías primarias y de los booms de recursos naturales seguidos de contracciones de la economía y degradación ambiental. Ahora, las políticas ambientales de sustentabilidad pueden tener un efecto estabilizador sobre la economía.

Finalmente, se debe decir, que para introducir efectivamente la dimensión ecológica dentro del análisis de sostenibilidad se requiere herramientas que están fuera de la economía neoclásica y ambiental. Esto, significa que se debe conocer de mejor manera como funciona el sistema natural y que se pueda introducir la irreversibilidad de ciertos procesos naturales. Desde, la parte epistemológica, la valoración del medioambiente es un problema muy

---

<sup>96</sup> Esta recomendación se deriva de un sistema medioambiental dónde es posible la reversibilidad, de no ser el caso, se requiere la sustentabilidad fuerte. Es decir, mantener fijo la calidad ambiental, esto podría ser visto de la misma manera que el caso de Leontief.

complejo<sup>97</sup>. A pesar de todas estas limitaciones, el presente modelo ayuda a delinear ciertos criterios genéricos para la implementación de políticas económicas y ambientales, que busquen la eficiencia, la equidad y la sostenibilidad ambiental. O en otros términos, que busquen la sostenibilidad en su sentido amplio. Además ayuda a entender de mejor manera las relaciones complejas del medioambiente y la economía.

#### 4.7 Una extensión al modelo descentralizado: crecimiento endógeno

El modelo con crecimiento endógeno, debe ser visto como una versión dinámica del modelo AK. En este caso, la tecnología dependerá del capital del período anterior. Esto puede ser interpretado, como buenas prácticas industriales, difusión de conocimiento y otro tipo de externalidades positivas a la producción. El cambio fundamental, en el modelo descentralizado está en el problema de la firma:

$$F_t(\tau, L_t, K_t) = \tau L_t^{(1-a)} K_t^a = \tau L f(K_t/L_t) = L f(k_t) = \tau k_t^a$$

$$\tau = \tau^{-1} k_{t-1}^{1-\alpha}$$

$$f_t(\tau, k_t) = \tau k_t^a = \tau^{-1} k_{t-1}^{1-\alpha} k_t^a$$

$$k_{t-1} = k_t = k$$

$$f_t(\tau, k) = \tau^{-1} k$$

Las condiciones de primer orden del problema de maximización del beneficio sujeto a los costos y la función de producción son:

$$cpo \quad F_L(\tau, K_t, L_t) = w_t; \quad F_K(\tau, K_t, L_t) = r_t$$

$$(1-a)(\tau^{-1} k_{t-1}^{1-\alpha}) k_t^a = w_t$$

$$a(\tau^{-1} k_{t-1}^{1-\alpha}) k_t^{(a-1)} = r_t$$

---

<sup>97</sup> Sin embargo, con una población suficientemente alta la valoración escogida se vuelve irrelevante. Esta característica del modelo permite que se tome como exógeno a la valoración ambiental.

Ahora, las ecuaciones que determinan el equilibrio dinámico, se modifican así<sup>98</sup>:

$$k_{t+1} = \frac{(1-a)(\tau^- k_{t-1}^{1-\alpha})k_t^\alpha - \frac{(2+\theta)\beta}{\omega\gamma} \left[ N_{(t+1)} \left( (1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^\alpha \right) \right]}{(1+n)(2+\theta)}$$

$$a_{(t+1)} = \frac{(1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - e\tau^- k_{t-1}^{1-\alpha} k_t^\alpha + \omega \left[ \frac{(1-a)\tau^- k_{t-1}^{1-\alpha} k_t^\alpha - \frac{(2+\theta)\beta}{\omega\gamma} \left[ N_{(t+1)} \left( (1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - e\tau^- k_{t-1}^{1-\alpha} k_t^\alpha \right) \right] \right]}{(1+n)}$$

El factor  $\tau^-$ , sirve para poder escalar al modelo. Se puede fijar en  $\tau^- = 1$ , sin pérdida de generalidad. La tecnología se ha endogenizado. Este problema es matemáticamente complejo –ecuaciones en diferencias de segundo grado, no lineal-. Para ver los resultados numéricos, referirse al apéndice B de simulaciones numéricas.

Este modelo, nos sugiere que el panorama sobre el desarrollo económico, en presencia de restricciones ambientales, puede ser menos oscuro de lo presentado en las secciones anteriores. Sobretudo, se presenta el caso de un capital físico siempre creciente, con calidad ambiental baja, pero estable. Sin embargo, también existe un caso en el cual existen ciclos convergentes –una espiral-, hacia un estado estacionario. Es decir, aún en presencia de externalidades positivas en la producción, la economía eventualmente deja de crecer –anexo B.

Los resultados de la economía con crecimiento endógeno dependen de cuál externalidad es más fuerte, si las negativas ambientales o las positivas de la producción. El radio  $e/w$  sigue siendo relevante, es decir, aún con crecimiento endógeno si la tecnología es sucia –cuando  $e/w$  es uno- se tiene ciclos que

<sup>98</sup> Estas ecuaciones son las que se utilizan en las simulaciones de la hoja de cálculo electrónica de Excel.

convergen a un estado estacionario –anexo B-. Así, aún con crecimiento exógeno el crecimiento no es ilimitado. Un estudio de generaciones traslapadas que considere capital humano y población endógena puede ser una extensión interesante del modelo –que requerirá simulaciones numéricas por su complejidad-.

## CAPÍTULO V

### LECCIONES DE POLÍTICA, RESULTADOS, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

#### 1. Lecciones de política, conclusiones y recomendaciones

Los modelos de generaciones traslapadas han mostrado ser muy útiles para el análisis la sostenibilidad ambiental, la equidad intergeneracional y la eficiencia económica. Se pueden extraer varias lecciones sobre la implementación de políticas y sobre todo para definir criterios amplios que deben ser considerados en las políticas macroeconómicas y ambientales.

En este apartado, se presenta en primer lugar los resultados principales y las implicaciones para la política económica observadas en los diferentes tratamientos de los modelos de generaciones traslapadas, presentados en el estado del arte. En segundo lugar, se presenta los principales resultados del modelo construido y sus implicaciones de política. En tercer lugar, se concluye y se recomienda.

#### 2. Sumario de resultados observados de los modelos presentados de las generaciones traslapadas, medioambiente, sostenibilidad y equidad intergeneracional.

En esta investigación se ha estudiado varias modificaciones a la familia de modelos de Generaciones Traslapadas –ver estado del arte-. Se ha encontrado que, con excepción del modelo de John y Pecchenino (1994), el modelo de M. Farmer & Randall (1997) y el de Mourmouras (1991) –aunque con menos fuerza-, todos los demás tratamientos concluyen que el mercado, por sí solo, no puede garantizar eficiencia, sostenibilidad ambiental y equidad intergeneracional.

Cabe notar que estas conclusiones se basan en distintos supuestos e incluyen distintos mecanismos para incluir al medioambiente: El medioambiente está considerado como fuente directa de utilidad, como insumo –renovable y no renovable- o como sumidero de residuos –contaminación-. Adicionalmente, se utilizan distintos supuestos sobre el comportamiento y la naturaleza de las variables medioambientales.

Otra observación importante es que todos los modelos tiene como supuesto una población estacionaria, esto es una grave falencia ya que el problema demográfico está en los cimientos del problema ambiental (Hardin, 1968). Es importante destacar también, que la inclusión de varios mecanismos de altruismo, han fallado para garantizar la eficiencia en términos de Pareto y la equidad en términos de Rawls. Estos mecanismos son el –perfecto- de Barro (1974) y –alegría de dar- Adreoni (1990). Sólo se tiene éxito, en un caso de altruismo extremo con Arrow (1973). Finalmente, en la mayoría de modelos se utiliza el supuesto de que los individuos sólo consumen en su segundo período de vida, esto implica que dan un peso de cero al consumo en su juventud. Este supuesto, sin embargo, puede eliminar el hecho de que un individuo tiene impaciencia por consumir en su juventud, por lo que podría invertir menos en mantenimiento ambiental.

También se debe notar, que se supone en la mayoría de los casos un medioambiente regenerativo –excepto en el estudio de recursos no renovables de Howarth & Norgaard (1990)-. Este supuesto, aleja a estos estudios de los modelos de extracción óptima de recursos o modelos de “comerse el pastel” (M. Farmer & Randall, 1997), que estaban inspirados en el informe del Club de Roma (Meadows, 1972). Así, los modelos presentados, están en la línea del Informe de “Nuestro Futuro Común” (Brundtland, 1987) y tienen la ventaja de estudiar la sostenibilidad ambiental y la equidad intergeneracional fuera de un marco excesivamente restrictivo que llega a la conclusión poco atractiva y sobre todo poco realista de dejar todo como encontramos.

Respecto a los casos excepcionales mencionados, que encuentran resultados sostenibles en un mecanismo descentralizado de mercado tenemos que hacer algunas aclaraciones. En el caso de M. Farmer & Randall (1997), no se incluyen los problemas de bien público ni de externalidades entre generaciones; siendo estos aspectos fundamentales en el tratamiento del medioambiente. En el caso de Mourmouras (1991), como el propio autor lo indica, existe una excesiva dependencia de los resultados con equidad intergeneracional y eficiencia Pareto, de las condiciones iniciales, principalmente de las dotaciones de recursos naturales renovables. También, como bien lo señala K. Farmer (2000), el resultado de optimalidad en la solución descentralizada puede estar determinada por el uso de una función de retorno natural de tipo lineal. Este último autor demuestra, que con una función logística de retorno natural, en general, se evita que exista un resultado óptimo de Pareto y equitativo en términos intergeneracionales. Esta crítica, debe resaltarse, puede aplicarse a la mayoría de modelos presentados con funciones de retorno natural lineales; sin embargo no hay razones para considerar que todo el sistema ambiental se mueva con de manera logística.

El caso del modelo de John y Pecchenino (1994) que trata de incluir tanto el problema de bienes públicos como las externalidades intergeneracionales. Se debe notar que a pesar de demostrar la posibilidad de un estado estacionario descentralizado sustentable en términos ambientales, esto no garantiza la equidad intergeneracional. El análisis teórico de las dinámicas de este modelo realizado por Junxi (1999), demuestra que aún cuando exista un equilibrio con un estado estacionario, las dinámicas de transición pueden ser no lineales y muy complejas –incluyendo dinámicas caóticas deterministas-. Esto ocurrirá si la eficiencia de la mitigación es menor a la proporción de consumo contaminante y si la elasticidad del consumo respecto al medioambiente es suficientemente baja.

Entre las posibilidades que presenta Junxi (1999), se destaca la de una espiral convergente en la cual se llega a un estado estacionario sustentable pero

sacrificando el bienestar de ciertas generaciones. Este resultado puede ser visto como un ejemplo de las llamadas monstruosidades morales del enfoque utilitarista predominante en el enfoque de John y Pecchenino. Este escenario puede ser rechazado desde la mayoría de nociones intuitivas de justicia, sin embargo, de manera formal no es compatible con los principios Rawlsianos de equidad. De esta manera, se podría tener un caso para la intervención pública. Los casos de dinámicas caóticas, no han sido suficientemente estudiados para poder concluir algo más sobre ellos. Sin embargo, son posibilidades teóricas importantes y no triviales pues muestran la complejidad dinámica de este tipo de sistemas.

Otro resultado interesante que debe ser analizado, es el del sobre-mantenimiento del medioambiente, como un resultado descentralizado. En estos casos, el resultado falla en ser óptimo de Pareto, ya que se puede mejorar el bienestar de todas las generaciones manteniendo en menor grado el medioambiente y consumiendo más. Este resultado es encontrado como posibilidad teórica tanto por (John & Pecchenino (1994), como por Brechet & Lambrecht (2005). Este resultado puede llamar a la intervención pública para disminuir los gastos privados en mantenimiento ambiental. El problema radica, en que es un resultado contra factual o al menos contra intuitivo ya que el problema fundamental que impulsa estos estudios es el de la degradación ambiental (Euzéby, 2003; Meadows, 1972; Stiglitz, 2006; Brundtland, 1987; Hardin, 1968).

Es importante destacar que la posibilidad teórica de sobre-mantenimiento de capital presentadas en el modelo de John & Pecchenino (1994), puede deberse a que se elimina el problema fundamental del polizón o de la tragedia de los comunes (Stiglitz, 2006; Hardin, 1968). Los autores John y Pecchenino, eliminan la calidad de bien público que tiene el medioambiente, utilizando el artificio de generaciones representadas por un gobierno benevolente o el sistema de precios de Lindhal. Ellos argumentan que este supuesto permite enfocarse en las externalidades intergeneracionales –e implícitamente que este cambio no es

determinante de los resultados-. El mecanismo de precios de Lindhal es demasiado restrictivo e impone supuesto muy fuertes para poder funcionar y es visto más como una curiosidad teórica (Mas-Collel et al., 1995). Brechet & Lambrecht (2005), enfocan el problema desde el uso del capital natural como insumo de la producción y añaden un motivo de altruismo. En este caso, el resultado depende más de una función de retorno natural –o de reproducción del capital natural- que es cuadrática, aunque no es explosiva. Esto podría generar, junto al altruismo, un resultado aparentemente sobre-optimista.

Estos resultados son importantes. No obstante, en un enfoque alterno presentado por Jouvét et al. (2000), en el que se incluye el problema de los bienes públicos, en un marco general de generaciones traslapadas, similar al de John & Pecchenino (1994), se deriva un equilibrio Nash-Cournot –estándar en los problemas de bienes públicos- que demuestra ser ineficiente en términos de Pareto y que afecta de manera no trivial el resultado. Adicionalmente, la subprovisión de mantenimiento ambiental, por el problema de bienes públicos, se suma al efecto de externalidad intergeneracional negativa para causar la suboptimalidad del modelo en términos de Pareto.

Cabe notar que en este último modelo, se asume altruismo perfecto entre generaciones siguiendo a Barro (1974) –más fuerte que el altruismo utilizado por Brechet & Lambrecht (2005) que se basa en el altruismo imperfecto del gusto de dar de Andreoni (1990). Adicionalmente, se debe recalcar, que este modelo también supone una población estática. Es razonable pensar, que una población creciente puede tener efectos no triviales sobre el resultado Nash-Cournot -que depende el número de personas-. Este punto es tratado por el modelo aquí construido.

En la mayoría de modelos presentados se utilizan tecnologías no convexas, excepto en una extensión de John & Pecchenino (1994) en la cual se presenta un caso de rendimientos crecientes. En un marco de sostenibilidad débil, este supuesto puede garantizar la existencia de estados estacionarios

óptimos en el sentido de Pareto. Sin embargo, las dinámicas de transición no quedan plenamente determinadas y no se puede excluir las posibilidades presentadas por Junxi (1999). En la extensión al modelo construido en la presente investigación, para considerar crecimiento endógeno, se muestra mediante simulaciones numéricas, la presencia de dinámicas no monotónicas – anexo B.-.

Este punto es muy importante, ya que se puede argumentar que si existen rendimientos crecientes y externalidades positivas intergeneracionales en la producción, por ejemplo en la educación y el capital humano, esto puede equilibrar las externalidades intergeneracionales negativas de la contaminación. No obstante, aún en este escenario no podemos excluir la posibilidad de resultados ineficientes en el sentido de Pareto debido a que las externalidades positivas tienden a ser sub-producidas por el mercado. También, en el caso de que se deriven resultados óptimos en el sentido de Pareto, pueden ser no equitativos en el sentido de Rawls; o como se mencionó ya, pueden presentar dinámicas transicionales que presenten evoluciones complejas, dinámicas no lineales e inclusive caóticas.

Respecto a la tasa de descuento intertemporal, en los modelos de Planificador Central tipo Ramsey, que es un problema fundamental en la economía ambiental. En la mayoría de los casos no existe consenso. Se puede resaltar una defensa interesante de una tasa distinta a cero. La tasa cero como proponían Ramsey (1928) y Pigou (1932) y muchos conservacionistas, ha sido vista como una forma de garantizar equidad intergeneracional, sin embargo, esto puede no ser así. La defensa de su uso aquí presentada, va más allá de su uso como medida del altruismo entre generaciones (Barro, 1974), que se ha vuelto estándar o de una preferencia por la elegancia matemática:

El uso de la tasa de descuento intergeneracional se justifica desde dos enfoques distintos y propios de la estructura de los modelos –ex post- y no como supuestos: En primer lugar, M. Farmer & Randall (1997) justifican una tasa de

descuento intergeneracional positiva en base a un modelo de generaciones traslapadas con agentes de tres períodos de vida. En este marco, se justifica el descuento como reflejo de los rendimientos del capital y de las transacciones crediticias entre las generaciones que debido a los tres períodos de vida refleja de manera más precisa la teoría de ciclo de vida –esta tasa tiene que estar en relación con la tasa de interés de largo plazo-.

En segundo lugar Ball & Mankiw (2001), justifican la tasa de descuento intertemporal en un marco estocástico de generaciones traslapadas en el cual se garantiza una equivalencia de una solución Rawlsiana -equitativa en este sentido- y un comando central de tipo Ramsey con incertidumbre. Esta equivalencia sólo ocurrirá en el caso de que se utilice una tasa de descuento intertemporal:  $\beta = \frac{1}{\rho}$ , donde este parámetro tienen que ser igual al inverso del retorno sobre el capital – es decir 1 más la tasa de interés-. Con esta tasa de descuento, el planificador se dedica a asignar eficientemente los recursos entre generaciones y obtiene un consumo igual promedio de todas ellas. Es importante, notar que en los dos casos expuestos, el medioambiente no entra al sistema de manera fuerte y tampoco se presenta el problema de los comunes.

En la mayoría de modelos presentados se compara los resultados descentralizados con los resultados de un planificador central benevolente – problema de Ramsey-, para encontrar la eficiencia en términos de Pareto. Este tratamiento es estándar, sin embargo, un resultado óptimo de Pareto no implica equidad. La solución centralizada, en estos casos, corresponde al enfoque utilitario -que a veces puede tomar la forma de segundo óptimo –Kaldor Hicks- como es el caso de Howarth (1998)-.

Sin embargo, en la búsqueda de un criterio de equidad intergeneracional se presentó estudios, que se basan en un enfoque alternativo al utilitario. Estos tratamientos teóricos tienen en común la búsqueda de la equidad intergeneracional en los términos de Rawls (1971c), como es el caso de: Solow

(1974)<sup>99</sup>, Lambrecht (2005), Ball & Mankiw (2001) y Arrow (1973). Para Solow y Arrow, la intervención estatal no es necesaria de manera evidente aunque, se puede observar, que no se puede prescindir de ella sin imponer supuestos demasiado fuertes –como el supuesto de altruismo extremo de Arrow-. Pero para Lambrecht y Ball & Mankiw la política pública y el diseño institucional son fundamentales.

Cada uno de los autores citados ha interpretado a Rawls en sus propios términos, ya que el propio Rawls ha sido ambiguo en su estudio de la justicia y equidad intergeneracional (Rawls, 1971c; Arrow, 1973; Solow, 1974). Los tratamientos de Solow y Arrow utilizan el max-min aplicado a un problema intergeneracional, en el que se considera una versión limitada del modelo de generaciones traslapadas, con agentes que viven un solo período –perdiendo las características de ciclo de vida-. Se puede observar que en los dos casos, se deriva un resultado, en el cual el consumo es constante en el tiempo y no hay ahorro ni inversión. En el caso de Solow se trabaja con una tecnología que tiene como insumos al capital, trabajo y un recurso no renovable. Arrow trabaja con un capital reproducible en el tiempo.

Solow (1974) extiende el modelo y deriva una regla de recursos naturales que exige que para mantener el nivel de consumo constante en el tiempo – requerimiento de equidad intergeneracional- una sociedad puede explotar – óptimamente- un recurso mientras invierta en capital reproducible. Esta regla fue profundizada por Hartwick (1977, 1978a, 1978b) y reza que para garantizar un nivel de consumo en el tiempo –y un nivel de capital total constante- se debe invertir todas las rentas competitivas de la extracción de un recurso en capital reproducible.

Arrow (1973), por su lado, introduce el altruismo intergeneracional en el problema rawlsiano y deriva un caso de ahorro positivo seguido de desahorro y otro en el cuál la solución rawlsiana es igual a la utilitaria. Este último resultado

---

<sup>99</sup> Y en la línea de su versión del la justicia intergeneracional rawlsiana: Hartwick (1977, 1978a, 1978b)

tiene como base una forma de altruismo extrema, en la cual se valora más el consumo de las otras generaciones –futuras- que el propio, se define este mundo como economía utilidad-productiva.

Tanto Lambrecht (2005) como Ball & Mankiw (2001) prefieren utilizar una versión del principio del velo de ignorancia o estado inicial rawlsiano, en el cual se desconoce el tiempo de nacimiento. Lambrecht, aplica este principio sólo para derivar una secuencia –justa- de emisiones contaminantes. Esta secuencia es exógena al modelo, constante y menor al resultado de mercado -con esto evita el problema del ahorro cero y la economía estancada-. Luego complementa este sistema con un mecanismo de votación –o acción cooperativa- que permite invertir a las generaciones para mantener el medio ambiente de acuerdo a sus preferencias de mercado. El autor evita el dilema de los comunes estableciendo un mecanismo cooperativo. En suma utiliza el criterio rawlsiano para acotar los resultados de mercado sobre un nivel mínimo de calidad ambiental, que es justo en términos intergeneracionales; sobre el cual pueden funcionar los mecanismos cooperativos privados. Claramente, se requiere intervención estatal.

En el caso de Ball & Mankiw (Ball & Mankiw, 2001), se utiliza un velo de ignorancia en un ambiente estocástico de generaciones traslapadas. En este los decisores enfrentan incertidumbre tanto en el tiempo en el que nacerán y el desempeño de la economía. En este marco se muestra que el equilibrio de mercado, descentralizado –hobbesiano en sus términos- es ineficiente, pues la utilidad de todas las generaciones es mayor en el resultado rawlsiano. En este estudio la equidad intergeneracional está dada por la repartición equitativa –en este caso igualitaria- de riesgo entre las generaciones y un consumo promedio igual para todas las generaciones –en el caso de incertidumbre en cada tiempo-. El consumo es una caminata aleatoria.

Finalmente, como ya se mencionó se demuestra en que la solución rawlsiana derivada en este modelo es equivalente a la de un planificador central estilo Ramsey, si existe una tasa de descuento intertemporal de:  $\beta = \frac{1}{\rho}$ . Este

resultado es distinto al de Arrow (1973), pero muestra que existe la posibilidad teórica bajo supuestos mucho menos restrictivos que una solución rawlsiana sea óptimo de Pareto. Es claro, que el inverso también no es cierto, pero sabemos por el segundo teorema del bienestar que es posible mediante una serie de transferencias de suma cero, lograr que un óptimo paretiano corresponda a la solución rawlsiana. Aunque en casos extremos, que requieran un alto nivel de igualdad, se puede perder eficiencia (Mas-Collel et al., 1995). De esta manera, se justificaría la intervención pública.

## **2. Implicaciones de política observadas y resumen de las propuestas e instrumentos presentados.**

Las lecciones enseñadas por los modelos de generaciones traslapadas presentados en el estado del arte, cambian en relación a los tipos de supuestos utilizados. En la mayoría de los casos, los autores mantienen mucha precaución al momento de recomendar políticas, ya que se admite que el conocimiento de los economistas referente a la sostenibilidad ambiental y la equidad intergeneracional, en un entorno de generaciones traslapadas, todavía es incompleto. Como es usual, la intervención pública sólo se justifica cuando el mercado no puede lograr un resultado eficiente, sostenible ambientalmente y equitativo en términos intergeneracionales. No obstante, en los modelos presentados, se observa en la mayoría de los casos, que la intervención pública es necesaria.

Los instrumentos de política ambiental propuestos y analizados por los diferentes autores, no se alejan de los mecanismos estándar en la economía ambiental. Se propone el uso de subsidios, impuestos y permisos de contaminación. También, se propone la creación de fondos y mecanismos de votación –para lograr resultados cooperativos-. No obstante, en la mayoría de los casos presentados, lo relevante es la implementación y la estructura de las políticas para alcanzar los objetivos propuestos a nivel intergeneracional.

Los problemas que estas políticas tratan de solucionar son: Externalidades inter-temporales o intergeneracionales-. Está presente el problema de los bienes públicos –o tragedia de los comunes-. Se debe notar, que en el contexto de generaciones traslapadas, esta falla de mercado presenta complejidades adicionales, pues podría magnificarse a través de las externalidades intergeneracionales. Finalmente, se busca alcanzar resultados equitativos en términos intergeneracionales -de diversas maneras y desde distintas interpretaciones de la equidad-.

En suma, estas políticas buscan lograr resultados eficientes y sostenibles ambientalmente, dónde mejore el bienestar de todas las generaciones. Y en algunos casos, tienen como objetivo fundamental lograr un resultado equitativo en términos intergeneracionales. Es importante mencionar, que estos objetivos son equivalentes, si se define sostenibilidad ambiental como equidad intergeneracional en la distribución, uso, propiedad o consumo de un recurso o bien natural. Alcanzar la sostenibilidad generalmente implica también conseguir la eficiencia de la economía.

La primera política propuesta, pertenece a los modelos con el medioambiente como fuente de utilidad. El medio ambiente tiene características de bien público y está gobernado por una ecuación de movimiento que presenta un variable ambiental regenerativa y que permite el mantenimiento ambiental privado. En estos modelos, el resultado descentralizado, generalmente falla en ser sostenible y eficiente. La política genérica es la estatización del mantenimiento ambiental que debe ser financiado por impuestos.

El gobierno debe tener un horizonte equivalente al medioambiental o el de la raza humana para poder lograrlo. Esta política sirve tanto en el caso del sub-mantenimiento como sobre-mantenimiento del ambiente. Este impuesto, es esencialmente pigouviano, ya que se fijará en el nivel en el cual se elimine la externalidad intergeneracional y que permita financiar el mantenimiento ambiental óptimo. Se debe notar, que esta política puede lograr eficiencia en

términos de Pareto pero no logrará equidad intergeneracional en un sentido rawlsiano fuerte.

En los casos que el medioambiente entra como factor en la economía, aunque sea de una manera negativa, es decir, la contaminación como externalidad en la producción. Es decir, la contaminación como el daño de la función de sumidero de residuos del medio ambiente. Existe espacio para la intervención pública. Una política de impuestos análoga a la anteriormente presentada es defendible. Su objetivo es eliminar la externalidad en la producción. También, es posible un mecanismo de segundo mejor utilitario al estilo Kaldor-Hicks para que se pueda compensar a las generaciones futuras afectadas –aunque la compensación hacia atrás sea imposible–.

En los casos en los cuáles se considera el problema de la tragedia de los comunes, es decir, de la naturaleza de bien público del medioambiente, especialmente cuándo hay un motivo altruista perfecto; existe espacio para un subsidio a los legados que puede permitir alcanzar una situación que se óptimo de Pareto. En los demás casos, es necesaria una provisión estatal del bien público, o en su defecto de la inversión para su mantenimiento. Análogamente, en el caso del un mal público, como la contaminación, el estado debe encargarse de las medidas de abatimiento y de control mediante impuestos, subsidios o permisos. Lo único nuevo en estos casos son los mecanismos de implementación que deben considerar ahora un contexto dinámico.

Para alcanzar equidad intergeneracional se proponen diversas políticas que se basan en la estructura del modelo y en la interpretación de equidad de los autores. Para Solow, la equidad intergeneracional en el uso y distribución de un recurso natural se puede garantizar si se mantiene un consumo constante en el tiempo, con un ahorro/inversión neto cero. Se deriva una regla de uso de recursos que dice que se debe reinvertir las rentas del recurso en capital reproducible y mantener constante el capital total en el tiempo, esta es la regla de Hartwick.

Lambrecht, que implementa la equidad intergeneracional mediante la ficción de un velo de ignorancia rawlsiano –desconocimiento del tiempo de nacimiento, propone dos mecanismos institucionales: Un fondo con el mandato de implementar el consentimiento común mediante un mecanismo de subastas de permisos de emisiones contaminantes para las firmas y un procedimiento de votación para implementar los consentimientos o inversión en mantenimiento ambiental específicos de cada generación mediante la elección del nivel preferido de mantenimiento ambiental. El mecanismo de votación busca completar el resultado equitativo del fondo, que termina siendo igualitario, para permitir que el efecto ingreso y el efecto sustitución sobre la demanda de calidad medioambiental, sean considerados en un ambiente cooperativo.

Finalmente se presenta la propuesta de Ball & Mankiw. Ellos proponen, en base a los resultados de ineficiencia en la asignación intergeneracional de riesgos -en un modelo sin medio ambiente de manera explícita-; dos posibles reformas al sistema de seguridad social. Si los títulos sobre el capital son mantenidos por el sector privado, la asignación intergeneracional óptima del riesgo requiere que los beneficios de la seguridad social se indexen negativamente al retorno del capital –toman la forma de un seguro-. En otras palabras, los beneficios sociales deben disminuir cuando el mercado accionario va bien. Una forma alterna consiste en que la totalidad del fondo de seguridad social se invierta directamente en capital.

Respecto a la tasa de descuento intertemporal, se puede defender el uso de una tasa de descuento intertemporal positiva en los proyectos del Estado y también privados, de manera débil. Para M. Farmer & Randal, una disminución o el uso de una tasa cero causan restricción crediticia en el mercado intergeneracional afectando el bienestar de todas las generaciones. Para Ball & Mankiw, la tasa de descuento utilizada en debe ser igual al inverso del retorno del capital. Sólo en este caso se garantiza una solución que es tanto óptimo de Pareto como equitativa en un sentido rawlsiano. Queda claro que el uso de una

tasa de descuento cero para lograr equidad intergeneracional es superado por el enfoque del velo de la ignorancia rawlsiano.

### **3. Resultados e implicaciones de política del modelo construido**

La introducción del medioambiente dentro de un modelo descentralizado de generaciones traslapadas, para incluir sus funciones ambientales, como sumidero de residuos, proveedor de recursos y bienes económicos y también por su valor estético y recreativo –amenidad-; ha tenido los siguientes resultados:

#### **Cambios en el estado estacionario**

Los resultados dicen que el efecto del tamaño de la población sobre el nivel del capital estacionario es casi nulo, en cambio, sobre el nivel de la calidad ambiental per-cápita- es negativo. Se puede decir, que el control de la población es positivo para el medioambiente pero tiene pocos efectos sobre el nivel de capital físico –estacionarios-. Un nivel poblacional alto empeora el problema de los comunes y aumenta el efecto de las externalidades intergeneracionales.

El efecto del parámetro que representa la tecnología de abatimiento ambiental o alternativamente el rendimiento natural – $w$ - es positivo sobre la calidad ambiental y ambiguo sobre el nivel de capital. Es decir, una economía con una mejor tecnología de abatimiento, o un rendimiento natural alto, tiene un mayor nivel de calidad ambiental, como era de esperarse. El parámetro  $e$ , que representa el nivel de limpieza de la producción o la resiliencia ambiental, tiene un efecto negativo sobre el nivel de capital y sobre la calidad ambiental. En otros términos, una economía con tecnologías limpias es más rica y tiene mayor bienestar.

Para que un estado estacionario de capital diferente de cero exista, se requiere que  $\omega(1 - \alpha) > e$ . Es claro, que si  $k^*$  existe –es positivo-,  $a^*$  será

positivo, ya que se cumple:  $\omega(1 - \alpha) > e$ . Estos dos parámetros pueden ser afectados por políticas que busquen mejorar las tecnologías para hacerlas más limpias y con menos impacto ambiental. También, se puede pensar en políticas de desmaterialización de la economía (Bartelmus, 2003).

El parámetro  $\alpha$ , que es la participación del capital en el producto, tiene un efecto negativo sobre el nivel de capital estacionario y sobre el nivel de calidad ambiental. Este resultado, se explica debido a que la producción industrial es contaminante. Entonces, existe un caso para incentivar las actividades de servicios –trabajo intensivas-, como el turismo. En este punto, se deja abierta la posibilidad de incluir de manera formal el capital humano. También se puede pensar en varios sectores. Este es el caso, del sector agrícola tradicional, que puede ser intensivo en trabajo pero que tiene efectos negativos fuertes sobre el medioambiente.

Las preferencias también juegan un rol importante en el estado estacionario. Si son más verdes, es decir se prefiere más medioambiente -  $\gamma$  es alto, tenemos un menor nivel de capital estacionario. Sin embargo, el efecto sobre el nivel ambiental per-cápita es indeterminado pues, preferencias más verdes incentivan a mantener el medioambiente pero una economía pobre – menos capital- tendrá menos recursos para hacerlo. Alternativamente, bajos ingresos incentivan la explotación del medioambiente. La pobreza ha sido mencionada como una fuente de degradación ambiental (Duraiappah, 1998).

Por un lado, una economía consumista -alto  $\beta$ -, tiene un menor nivel de calidad ambiental y tiene un efecto casi nulo sobre el capital. Por otro lado, la impaciencia también tiene un papel importante en la determinación del estado estacionario y afecta negativamente a los niveles de capital y también de medioambiente. La tasa de impaciencia determina la intensidad de las externalidades intergeneracionales. Este resultado, es de interés ya que los tratamientos similares de generaciones traslapadas consideran economías que no consumen ni ambiente ni bienes en el primer período –sólo trabajan-. Estos

agentes sólo consumen en la vejez (John & Pecchenino, 1994; Jouvét et al., 2000). Este supuesto, en realidad implica un caso extremo, en el cuál se otorga un peso de cero al consumo del presente. Se puede ver que la relajación de este supuesto no es trivial.

Los resultados presentados, tienen implicaciones sobre las políticas de concienciación sobre el medioambiente. Se puede ver, que aunque los individuos valoren más el medioambiente no pueden lograr un nivel mayor de calidad ambiental. El problema de los comunes, evita que lo logren. Este resultado es un caso de la llamada paradoja del aislamiento. En la cuál, aunque todos los individuos deseen lograr una mejor calidad ambiental no pueden hacerlo. Es decir, se produce la tragedia de los comunes (Hardin, 1968). Este resultado contradice los hallazgos de John & Pecchenino (1994), que no considera el problema de la tragedia de los comunes.

No obstante, los resultados concuerdan con los hallazgos de Jouvét, Michel, & Vidal (2000), que incluyen la tragedia de los comunes. Así, las preferencias intertemporales, representadas por la impaciencia de los consumidores, tiene un efecto negativo sobre los niveles de estado estacionario. Entonces, se puede sugerir, campañas enfocadas en el cuidado del futuro de la humanidad, el altruismo intergeneracional y otras que tengan el objetivo de disminuir la impaciencia por el consumo en la juventud. Esta campaña, permite aumentar los niveles de mantenimiento ambiental y ahorro. Y se logra reducir la intensidad de las externalidades intergeneracionales. Entonces se logra un estado estacionario con mejores niveles de  $k$  y  $a$ .

### **Cambios en las trayectorias de consumo, ahorro e inversión**

Respecto a los cambios en las trayectorias temporales del consumo y del ahorro y de la inversión; podemos decir que estos se ven alterados también por la introducción de variables y restricciones ambientales. El consumo en la juventud y en la vejez, mantienen la misma relación, es decir, tienen la misma

ecuación de Euler. Se consume más en la vejez si la tasa de interés es mayor y se consumirá menos si la impaciencia es más alta. Sin embargo, el consumo tanto de la juventud como de la vejez, tienen un nuevo término que es la variable  $mt$ . Esta variable, como se explicó, representa la acción de los agentes sobre el medioambiente. La variable  $mt$ , puede ser negativa, cuando los individuos están explotando el medioambiente para obtener recursos y bienes económicos. Al contrario, cuando es positiva, representa la inversión ambiental o gastos en mantenimiento, reforestación, etc. El ahorro depende del salario y de la variable  $mt$ . En los tres casos, la derivada del consumo presente y futuro y el ahorro respecto a  $mt$  es negativa. Si se mantiene el medioambiente –se realiza una inversión ambiental-, los niveles de estas tres variables caen. En el caso, de que se extraiga recursos naturales estos niveles crecen.

La dinámica del consumo, ahorro e inversión se ven afectadas por la variable  $mt$ . Esta variable, que captura la forma en que los consumidores afectan el medioambiente, captura el problema de la tragedia de los comunes. Los individuos escogen  $mt$ , mediante expectativas futuras sobre el nivel de medioambiente. Estas expectativas, toman la forma de un problema de teoría de juegos, en la cual se toma como exógeno el nivel de ambiente esperado por los demás agentes –problema del polizón y de los comunes-. Esta característica, hace que la elección individual de  $mt$  no sea óptima<sup>100</sup> y sea una solución de tipo Nash-Cournot. Esta característica, puede generar dinámicas complejas, como se estableció en el análisis del mapa topológico de dos dimensiones generado por este modelo y en las simulaciones numéricas –anexo B-.

Los individuos actúan racionalmente, manteniendo el ambiente si sube la contaminación y disminuyendo este gasto o explotando si la regeneración es rápida o la calidad ambiental es alta. No obstante, el problema de los comunes – o del polizón dependiendo del signo-, hace que los agentes sub-mantengan o sobre-degraden el medioambiente. Este problema, no sólo presenta una externalidad intrageneracional, sino que se traslada a un nivel intergeneracional.

---

<sup>100</sup> Esto se comprueba, al derivar el modelo centralizado –sin descuento- y observar que la regla de  $mt$  cambia. Del análisis de las derivadas, el ambiente, resulta ser un bien normal.

Se observa, que este resultado se empeora con una población mayor, con una mayor impaciencia y cuándo las preferencias son consumistas –mayor peso relativo en la utilidad, del consumo que del ambiente-. Esto ocurre debido a la estructura demográfica del modelo. Más interesante, es el hecho de que preferencias verdes, no pueden garantizar una senda sustentable. De nuevo, esto ocurre por la tragedia de los comunes y el problema polizón. De nuevo, estos resultados muestran la necesidad de políticas directas para solucionar los problemas ambientales y sugieren que el efecto de campañas de concienciación sobre el medioambiente es limitado.

Esta característica del modelo nos dice que un país -como el Ecuador-, que tiene una alta dotación de recursos naturales, puede presentar externalidades intergeneracionales importantes. Esto significa, que las primeras generaciones están viviendo a costas de las generaciones futuras. En las simulaciones numéricas –anexo B.-, se observan trayectorias dinámicas donde las trayectorias dinámicas hacia el estado estacionario muestran un crecimiento acelerado de la economía en las primeras generaciones –poseedoras de los recursos naturales-.

Si se parten de bajos niveles de capital y altos niveles de medioambiente, sin crecimiento endógeno. Este crecimiento, se logra mediante la explotación ambiental. A largo plazo, el resultado es que el capital disminuye, luego de alcanzar un pico, proporcional a la dotación de recursos; la economía tiene a un estado estacionario con niveles bajos de ambiente y capital. Es decir, con un bajo nivel de bienestar. La razón está en que se deben incurrir en gastos para cubrir los daños ambientales de la explotación exagerada –sub-óptima-, de las primeras generaciones y el capital acumulado en exceso –sobre el nivel estacionario- produce altos niveles de contaminación –además del supuesto de rendimientos decrecientes y la depreciación total del capital en  $t$ -.

Este crecimiento económico, basado en la explotación natural no es sostenible y genera un comportamiento expansivo corto –un período discreto 30 años-, seguido de una contracción importante. Esta descripción, se asemeja al

comportamiento de los booms de recursos naturales, que han sido consideradas exógenas en la literatura tradicional sobre el tema (Acosta, 2004; Larrea, 2006). La historia económica del Ecuador, está llena de ejemplos de la sobreexplotación de recursos naturales, seguido de crisis económicas –y ambientales también- (Larrea, 2006).

El rol de los choques exógenos, ha sido señalado como la razón principal de este comportamiento errático de la economía. Se han citado como fuentes de las crisis: variaciones de precios, cambios de preferencias, guerras, etc. (Acosta, 2004; Larrea, 2006). Sin lugar a duda, estos son fuentes importantes de fluctuaciones económicas. No obstante, el modelo, aquí construido, presenta una explicación endógena, para el mismo fenómeno. En la realidad, lo más probable es que la volatilidad de las economías pobres en capital pero ricas en recursos naturales, estén determinada por una combinación de factores exógenos y endógenos.

El mecanismo endógeno de un boom de recursos naturales y la posterior contracción puede interpretarse en términos del modelo así: Las primeras generaciones que tienen poco capital y una dotación alta de ambiente, explotan el medioambiente de manera excesiva. Esto les permite aumentar sus ingresos y aumentar su capital, sin embargo, esto disminuye permanentemente el nivel de calidad ambiental e inclusive el capital de las siguientes generaciones -el largo plazo-. La razón es que al tener muchos recursos naturales y poco capital, se obtienen ingresos de la explotación de los recursos, pero la explotación no es sostenible. La economía descentralizada es incapaz de utilizar óptimamente la alta dotación de ambiente para convertirla en consumo o capital, debido a la impaciencia por consumir y a su horizonte corto de vida. El problema radica, en que el ahorro es insuficiente; y en el período de 30 años –un  $t$  discreto del modelo-, el capital está totalmente depreciado. El capital es igual al ahorro.

Entonces, un ahorro bajo, por una economía que ha consumido los ingresos de la explotación natural. Este resultado teórica recuerda las realidades

de economías latinoamericanas y africanas, ricas en recursos naturales. Si sumamos  $mt(.)$  y  $st(.)$  tendremos el ahorro real, que en el caso descrito será negativo. Así, una economía con más recursos naturales será más inequitativa a nivel intergeneracional que otra con pocos recursos naturales. Pues las primeras generaciones consumen a expensas de las siguientes.

Las plagas, pérdidas de cosechas, sequías y otros desastres de este tipo han sido consideradas como choques exógenos y su efecto en la economía también (Acosta, 2004). Sin embargo, estos eventos, están ligados a la sobreexplotación y degradación ambiental propios de una actividad económica no sustentable. Es el caso de los monocultivos de bananos y otros que destruyen la calidad del suelo y son altamente vulnerables a plagas (Larrea, 2006). En otras palabras, se destruye el capital ambiental, que implica un menor nivel de bienes y servicios ambientales. Esto reduce el bienestar y requiere un aumento del consumo para mantener el nivel de bienestar –alimentos más caros y uso de medicinas-. Además, se incurre en gastos asociados a recuperar los suelos y eliminar plagas. En el presente modelo, un aumento de  $mt$ . Entonces, se puede observar que el problema de los comunes, puede generar dinámicas no monótonas de transición –como se puede observar de las simulaciones numéricas anexo B.-. Ahora, las políticas ambientales de sustentabilidad pueden tener un efecto estabilizador sobre la economía.

Una curva de Kutznets ambiental no puede ser derivada directamente, debido a la naturaleza discreta, con tiempos de 30 años. Sin embargo, la variable  $mt$  sigue un patrón contrario al ingreso. Mientras, mayor ingreso menor explotación ambiental, debido a que aumenta la contaminación y baja la calidad ambiental. Sin embargo, menores salarios restringen la inversión ambiental. Se debe tomar en cuenta que  $mt$ , debe ser interpretada como la acción neta de los agentes sobre el medio ambiente.

Este patrón coincide con el hecho de que ciertas variables como la deforestación, disminuyan al aumentar la riqueza de la economía. A largo plazo,

se mantiene la tendencia de una menor degradación que inclusive se convierte en mantenimiento ambiental. No obstante, el nivel total de calidad ambiental baja permanentemente, debido a que la producción de desechos y contaminación, es directamente proporcional a la producción –por supuesto del modelo-<sup>101</sup>. Estos patrones pueden encajar con nuevos estudios sobre la curva de Kuznets ambiental, que detectan el patrón de U invertida en la deforestación, calidad del agua, pero no en un conjunto de variables ambientales (Stern, Common, & Barbier, 1996).

Es importante recalcar, que se observó en el modelo, que cualquier dotación de recursos naturales no afecta el nivel de estado estacionario de una economía. Sea esta dotación alta o baja. Evidentemente, las dotaciones iniciales tienen efectos no triviales sobre las dinámicas de transición, como ya se expuso. Se puede decir, que la tragedia de los comunes inherente a los recursos naturales imposibilita el uso sustentable de estos recursos.

### **Análisis de eficiencia, equidad y sostenibilidad**

La economía descentralizada falla en ser eficiente, pues se demuestra no es óptimo de Pareto en estado estacionario. En sus trayectorias, puede o no puede ser eficiente, dependiendo de los parámetros. En estado estacionario, la economía descentralizada puede sobre-acumular capital y sobre-degradar el medioambiente. Se puede sub-acumular capital y medioambiente también.

Se deriva una regla de oro verde o edad dorada que garantiza el máximo bienestar para una generación sin afectar el bienestar de las demás generaciones. Esta regla de oro coincide con la definición de sustentabilidad débil (Brundtland, 1987; Chichilnisky, 1997). La regla de oro verde o edad dorada difiere de la regla de oro de los modelos estándar. En el modelo construido, la economía descentralizada puede alcanzar el nivel dorado de capital pero no el nivel dorado

---

<sup>101</sup> Una extensión al modelo es la eficiencia termodinámica de la producción como función de la investigación y desarrollo, que tiene relación con los ingresos de un país.

de ambiente –que es sobre-degradado-. En edad de oro, el planificador central da igual peso a todas las generaciones.

El parámetro alfa, que representa la participación del capital en la producción, tiene un rol positivo sobre el nivel de estado estacionario de capital y medioambiente. Esto contrasta fuertemente con el efecto que tiene en la economía descentralizada. El planificador central de horizonte infinito es capaz de internalizar todas las externalidades y por este motivo, puede neutralizar los efectos de la contaminación de la producción industrial e invertir lo suficiente para lograr un mayor nivel de capital en estado estacionario.

La eficiencia de abatimiento –y rendimiento natural-, representados por el parámetro  $w$ , tiene un efecto positivo débil sobre el nivel de capital y la calidad ambiental que depende de su relación con el parámetro  $e$  –el grado de limpieza de la producción-. Si el radio  $e/w$  es menor a uno se garantiza la existencia de la economía, y mientras este radio tienda a cero,  $k$  y  $a$  estacionarios se incrementan. En el caso centralizado, el efecto de cambios en  $w$  y  $e$ , es más grande que en el caso descentralizado. Cabe notar que  $N$ , o la población estacionaria no es un argumento del capital estacionario centralizado y poco efecto sobre el nivel de calidad ambiental. Lo que muestra la eliminación de la externalidad propia de la tragedia de los comunes. Las preferencias tampoco son argumento del estado estacionario del capital. En el caso del medioambiente, preferencias más verdes implican un mayor nivel de calidad ambiental. Unas preferencias con más peso en el consumo, implican un menor nivel de calidad ambiental.

La regla de oro verde o edad dorada, nos brinda lecciones sobre política económica: En primer lugar, se infiere que las políticas ambientales y macroeconómicas deben ser consideradas en conjunto. La era dorada o regla de oro verde, aquí derivada, tiene dos condiciones que incluyen la calidad ambiental y el nivel de capital físico. Estas dos condiciones deben ser cumplidas simultáneamente por la economía para alcanzar el nivel de bienestar dorado. En

segundo lugar, se establece, que la prioridad de las autoridades debe ser evitar el colapso de la economía. Es decir, se debe mejorar las tecnologías de abatimiento y disminuir el impacto ambiental de las actividades humanas sobre la naturaleza –parámetros  $w$  y  $e$ -. Se tiene un caso para priorizar políticas con este objetivo. Es decir, se debe aumentar la inversión en investigación y desarrollo de tecnologías limpias y mitigación ambiental.

En tercer lugar, las políticas de internalización de externalidades ambientales deben ser vistas en un marco dinámico y de largo plazo. La naturaleza tiene tiempos distintos a los tiempos de vida humana. La internalización a nivel estático es insuficiente. Cuando se tiene gobiernos míopes, las externalidades intergeneracionales siguen presentes. Este resultado es similar al de (John et al., 1995). El modelo de generaciones traslapadas permite capturar esta diferencia en los horizontes temporales y demostrar la expansión de las ineficiencias estáticas –externalidades ambientales y tragedia de los comunes- a nivel dinámico.

En general, se puede ver que sólo la intervención inteligente del Estado en la economía o la creación –evolución- de instituciones fuertes para manejar los recursos naturales de manera óptima, puede evitar las ineficiencias de la economía descentralizada. El objetivo de las políticas deben ser el eliminar las externalidades a nivel intra e intergeneracional. Así, se puede lograr eficiencia – mayores niveles de  $k$  y  $a$ - y dinámicas menos volátiles –este último punto está abierto a un estudio más profundo de la topología del modelo-. Se puede mejorar la equidad intergeneracional, al eliminar las externalidades intergeneracionales y un manejo óptimo de recursos naturales ayuda a la sostenibilidad ambiental.

En el caso de economías con altas dotaciones iniciales de recursos naturales. Se pudo observar, que las primeras generaciones tienen un mayor bienestar aprovechándose de las demás generaciones, debido a su posición privilegiada. Este resultado, puede ser visto como una solución del tipo Kalai-Smorodinsky. Debido a la estructura de juego, que tiene el modelo construido en

la elección de  $m_t$ . Debido a la posición privilegiada de las primeras generaciones –jugadores-, pueden tener un comportamiento del tipo tómallo o déjalo, respecto a las demás generaciones. (Mas-Collel et al., 1995). En este punto, sería interesante una extensión para considerar el efecto del altruismo intergeneracional. Sin embargo, desde el estado del arte, se pudo observar que el altruismo disminuye las externalidades intergeneracionales pero no las elimina. En especial en el modelo de Jouvét et al. (2000).

El análisis formal de la equidad se realiza utilizando una función CES. Se mostró que una sociedad neutral hacia la desigualdad –con aversión cero- es equivalente a la solución de regla de oro verde. Este tipo de sociedad puede ser compatible con la implementación de un velo de ignorancia de Harsanyi. Si se tiene una sociedad con una aversión infinita a la desigualdad –función de bienestar de Leontief-, se requiere que se mantenga fijo el nivel de bienestar a través de las generaciones. Se escogen niveles de consumo y medio ambiente –posibles- y se mantiene a la economía indefinidamente en ese nivel. En otras palabras, la economía depende en gran medida de las condiciones iniciales. Una economía, con altas dotaciones de capital y medioambiente puede tener mayores niveles de consumo y bienestar. Otra que comience con bajas dotaciones de los dos acervos, será igualitaria pero pobre.

La función de bienestar social de Leontief ha sido utilizada para implementar el principio maxmin de Rawls. Sin embargo, el problema de justicia intergeneracional en el sentido rawlsiano intergeneracional, estrictamente no es equivalente a maximizar una función social de tipo Leontief (Rawls, 1971c; Arrow, 1973; Solow, 1974). La razón es que Rawls considera que la equidad no implica igualdad sino imparcialidad<sup>102</sup>. Adicionalmente, se presenta el problema de la asimetría del problema intergeneracional (Rawls,

---

<sup>102</sup> En este sentido la aplicación de un velo de ignorancia, o punto inicial, dónde todas las generaciones elijan cooperativamente los niveles de consumo, mantenimiento o extracción ambiental, inversión, previo al inicio de la economía. Los agentes tendrían que maximizar su utilidad bajo incertidumbre y con el objetivo de disminuir el riesgo de nacer en una generación con niveles arbitrariamente pequeños de capital físico y calidad medioambiental. Así, sería necesario un acercamiento teórico, que se aleje de un planificador central y utilice a un árbitro. El problema tendría que utilizar las herramientas de negociación o juegos cooperativos, con incertidumbre.

1971c). Este mismo problema, evita que se pueda buscar un análisis de tipo Kaldor-Hicks, ya que la compensación potencial o real no puede darse si existe la posibilidad de que dos generaciones no se encuentren en el tiempo.

Los casos extremos de aversión nula o cero a la desigualdad y de aversión infinita analizados, dicen que la economía descentralizada falla en garantizar aún la versión más débil de equidad –cuando la aversión es nula-. Así, se justifica la intervención estatal por razones de equidad. Lo más probable es que la sociedad presente niveles intermedios –entre cero e infinito- de aversión a la desigualdad. Se puede afirmar, por inferencia, que la economía descentralizada falla en cumplir estos criterios de equidad.

La dimensión intergeneracional, presenta desafíos distintos al análisis de equidad en términos estáticos. En primer lugar, se debe considerar que una economía equitativa en estado estacionario, puede no serlo en las trayectorias dinámicas. En segundo lugar, una aversión extrema por la desigualdad –caso leontief-, presenta un mundo limitado que se mantiene atado –excesivamente- a las condiciones iniciales de la economía. Es decir, una economía pobre en capital que quiera ser igualitaria, quedará atrapada en bajos niveles de consumo –y los niveles de ambiente correspondientes-.

Tercero, se presenta un trade-off entre equidad y eficiencia; pero la dimensión intergeneracional presenta desafíos éticos importantes, para justificar una preferencia por la eficiencia sobre la equidad (Rawls, 1971c; Mourmouras, 1991; Solow, 1974). Es decir, se puede producir, el caso extremo de una generación que consuma y degrade el ambiente de manera ineficiente, llevando su consumo a niveles altos y afectando a las generaciones venideras, que no pueden hacer nada para evitarlo. En este caso, el Estado debe actuar como subsidiario de las generaciones futuras (Pigou, 1932; Sudhir & Sen, 1994). Cuando la aversión a la desigualdad es nula, es decir, con un criterio débil de equidad, se requiere que las utilidades a nivel intergeneracional no se

descuenten. Es decir, existe una justificación social –además de la eficiencia-, para usar una tasa de descuento cero<sup>103</sup>.

A nivel dinámico, la inequidad puede presentarse en convergencias no monotónicas hacia el estado estacionario (Brechet & Lambrecht, 2005; Junxi, 1999). Desde un enfoque rawlsiano, se puede argumentar que la justicia intergeneracional queda anulada, cuándo las generaciones son incapaces de decidir su patrón de convergencia –ahorro, inversión, consumo y mt.-, ya que al verse afectados por las externalidades de las generaciones anteriores se ven obligados a fijar sus trayectorias para subsanar este legado pernicioso. En este caso, cuándo se producen fluctuaciones endógenas, existe un caso para fuertes políticas de estabilización –al contrario de lo que ocurre cuándo las fluctuaciones son causados por choques exógenos- (Blanchard & Fischer, 1989; Shone, 2002).

Queda por determinar la sostenibilidad. Este es un término complejo y tiene varias concepciones, la definición utilizada, en la presente investigación es aquella de la Comisión Brundtland (1987). Como ya se había expuesto, el desarrollo es sustentable cuando satisface las necesidades de la presente generación sin comprometer la capacidad de las futuras generaciones para que satisfagan sus propias necesidades. La definición de sostenibilidad implica tener en cuenta tres dimensiones definidas: la económica, la social y la ambiental.

Se ha utilizado el análisis paretiano para determinar la eficiencia económica, también se ha discutido la equidad como parte de la dimensión social –a nivel intergeneracional-. La dimensión ambiental, se introduce en la estructura misma del modelo y mediante el umbral de contaminación sobre el cuál el medio ambiente comienza a producir males –en vez de servicios-. Sin embargo, el tratamiento de la sostenibilidad no alcanza una dimensión ecológica. En este sentido, tratamos aquí con la sostenibilidad débil.

---

<sup>103</sup> Esta tasa cero debería ser considerada en proyectos sociales y ambientales, como una condición mínima para tener eficiencia y equidad.

Para completar, la discusión desde la sostenibilidad débil, se utiliza el tratamiento de Chichilnisky (1997). Este tipo de tratamiento, permite conciliar el análisis de equidad intergeneracional y la eficiencia económica con las restricciones ambientales. Además, este enfoque tiene la ventaja metodológica de definir el problema de la sostenibilidad de manera axiomática (Chichilnisky, 1997; Pezzey & Toman, 2002). En la contribución de Chichilnisky (1997) se deriva una función social de preferencias sustentables. En el presente modelo, la solución de regla de oro verde coincide con la solución de Chichilnisky.

Ahora queda demostrado que la economía descentralizada no es sostenible, pues no puede alcanzar la asignación del comando central no descontada. También, se demuestra que la solución descentralizada sin descuento intertemporal es sustentable y es equitativa. Esta conclusión, sobre la equivalencia de sostenibilidad, equidad y eficiencia, no puede generalizarse para cualquier especificación funcional de la utilidad y de la producción. Es decir, pueden o no pueden coincidir (Beltratti et al., 1993; Chichilnisky, 1997).

Otros criterios de sustentabilidad, como el de sustentabilidad fuerte, requieren que se mantenga un nivel de capital natural crítico o alternativamente el nivel actual de capital natural. Para justificar esta regla, se invoca el principio de precaución (Costanza & Daly, 1992). Es claro, que este principio no es cumplido por la economía descentralizada, cuando el parámetro  $e$ , asociado a la limpieza de la producción –o su nivel de contaminación- es alto, y el parámetro  $w$  de tecnología de abatimiento -o rendimiento natural- es bajo. Es más, la economía colapsa en el modelo descentralizado bajo ciertos valores de estos parámetros –si no se cumple  $\omega(1 - \alpha) > e$ -. Se puede pensar en una solución, similar al caso de una función de bienestar social de Leontief, fijando el nivel de calidad ambiental.

## Lecciones de política, extensiones y evaluación de resultados

Como recomendaciones de política, para poder lograr la sostenibilidad en sus tres dimensiones, tenemos los siguientes lineamientos genéricos: Las políticas macroeconómicas deben realizarse simultáneamente con políticas ambientales. Se debe buscar la internalización de las externalidades, considerando un horizonte de largo plazo –dinámico- y no sólo intrageneracional. Para que tengan efectos las políticas implementadas, deben ser de Estado y no de gobierno. En caso de tener gobiernos miopes, aunque se logre eliminar externalidades a nivel intrageneracional, no se hace lo mismo a nivel intergeneracional.

El futuro no debe ser descontado, existe una justificación para una tasa de descuento de cero, para garantizar equidad intergeneracional –con aversión cero a la desigualdad- y para lograr eficiencia. La presencia de convergencias no monótonas, sugieren un caso para políticas de estabilización fuertes a nivel económico y ambiental. Esto podría ser vedas de pesca o forestales, al alcanzar niveles críticos de los recursos y un control estricto de la contaminación<sup>104</sup>, con el objetivo de garantizar una calidad ambiental sustentable a las generaciones futuras. También, se ha podido vincular de manera endógena al medio ambiente y a los ciclos económicos. En economías dependientes de la explotación de sus recursos naturales estos efectos podrían ser más importantes. Ahora, la intervención estatal eficiente es más necesaria en estos últimos.

Las plagas, pérdidas de cosechas, sequías y otros desastres de este tipo han sido consideradas como choques exógenos y su efecto en la economía también. Sin embargo, estos eventos, están ligados a la sobreexplotación y degradación ambiental propios de una actividad económica no sustentable. Es el caso de los monocultivos de bananos y otros que destruyen la calidad del suelo y son altamente vulnerables a plagas. En otros términos, se destruye el capital

---

<sup>104</sup> Esta recomendación se deriva de un sistema medioambiental donde es posible la reversibilidad, de no ser el caso, se requiere la sustentabilidad fuerte. Es decir, mantener fijo la calidad ambiental, esto podría ser visto de la misma manera que el caso de Leontief.

ambiental, que implica un menor nivel de bienes y servicios ambientales. Esto reduce el bienestar y requiere un aumento del consumo –alimentos más caros y uso de medicinas-, además gastos asociados a recuperar los suelos y eliminar plagas. En el presente modelo, un aumento de  $m_t$ . Entonces, se puede observar que el problema de los comunes, puede generar dinámicas no monotónicas – como se puede observar de las simulaciones numéricas anexo B.-. Entonces, se tiene una explicación alterna y endógena de la volatilidad de las economías primarias y de los booms de recursos naturales seguidos de contracciones de la economía y degradación ambiental. Ahora, las políticas ambientales de sustentabilidad pueden tener un efecto estabilizador sobre la economía.

Finalmente, se debe decir, que para introducir efectivamente la dimensión ecológica dentro del análisis de sostenibilidad se requiere herramientas que están fuera de la economía neoclásica y ambiental. Esto, significa que se debe conocer de mejor manera como funciona el sistema natural y que se pueda introducir la irreversibilidad de ciertos procesos naturales. Desde, la parte epistemológica, la valoración del medioambiente es un problema muy complejo<sup>105</sup>. A pesar de todas estas limitaciones, el presente modelo ayuda a delinear ciertos criterios genéricos para la implementación de políticas económicas y ambientales, que busquen la eficiencia, la equidad y la sostenibilidad ambiental. O en otros términos, que busquen la sostenibilidad en su sentido amplio. Además ayuda a entender de mejor manera las relaciones complejas del medio ambiente y la economía.

El modelo básico descentralizado, no intenta ser una explicación completa, ni una teoría del crecimiento económico de un país. Para hacerlo se debe incluir el crecimiento endógeno con capital humano y otras modificaciones. La enseñanza principal del modelo construido, es que el crecimiento se ve afectado por el medioambiente –de manera endógena-, y se han establecido las fuentes de ineficiencia y de inequidad intergeneracional. Estas son la tragedia de

---

<sup>105</sup> Sin embargo, con una población suficientemente alta la valoración escogida se vuelve irrelevante. Esta característica del modelo permite que se tome como exógeno a la valoración ambiental.

los comunes, el horizonte de vida de las generaciones –miopía-, la impaciencia por consumir y sobre todo las fuerzas contrapuestas de la producción y el medioambiente. Este último punto, es de especial importancia en el análisis de las dinámicas de transición.

Las dinámicas complejas de transición que presenta el modelo construido, es otra de las características remarcables. Se debe recordar a Junxi (1999), quién en un modelo similar al presentado aquí, determina que el análisis de las dinámicas transicionales es no trivial. Hay dos razones, para él, por las cuáles las dinámicas transicionales en los modelos que siguen la tradición neoclásica pueden ser muy complejas: En primer lugar, aunque los modelos con medioambiente sean similares a los modelos de crecimiento estándar, dónde el concepto del estado de sostenibilidad ambiental corresponde al del estado estacionario; existe una diferencia fundamental entre los dos tipos.

En los modelos con medioambiente existen dos fuerzas opuestas que se balancean la una contra la otra hacia un nivel sustentable: Una fuerza negativa, mediante la cual las actividades de los agentes como el consumo lastiman al medioambiente; y una fuerza positiva, que consiste en el deseo de preservación y cómo esto afecta al ambiente. Es por este motivo, que el juego de estos dos efectos opuestos, que está generalmente ausente en los modelos de crecimiento, dé lugar a dinámicas no triviales –y además complejas-.

En este sentido el modelo construido, tiene también un interés puramente teórico, que se deriva de su capacidad de generar dinámicas y topologías complejas en un modelo de generaciones traslapadas de dos dimensiones. Este tipo de dinámicas, son cada vez más comunes en la literatura económica de la ortodoxia (Bischi et al., 2000; Junxi, 1999; Yokoo, 2000). Junxi (1999). Sin embargo, son comunes a la literatura ecológica y a la línea neo-keynesiana. Se puede citar el modelo de ciclos de Kaldor que ha sido fuente de múltiples extensiones y estudios dinámicos (Bischi, Dieci, Rodano, & Saltari, 2001). El estudio de las complejidades de la política económica en presencia de dinámicas

no lineales e inclusive caos, está fuera de los límites de la presente investigación, pero quedan abiertas las puertas para hacerlo. De manera general, se recomienda fuertes políticas de estabilización.

Al incluir, el medio ambiente se puede observar también que el bienestar no sólo consiste en la riqueza económica sino que también incluye un medioambiente sano. El modelo construido captura parcialmente el ahorro real, ya que considera los cambios en dos tipos de activos: capital y ambiente. El ahorro real estaría determinado de por la suma del ahorro  $-st(\cdot)$  y  $mt$ . De incluirse, el capital humano, se tendría un modelo completo de ahorro verdadero. En la extensión, para incluir crecimiento endógeno se lo hace de una manera poco formal.

La extensión, para incluir externalidades positivas en la producción, nos sugiere que el panorama sobre el desarrollo económico, en presencia de restricciones ambientales, puede ser menos oscuro de lo presentado por el modelo básico. Sobre todo, se presenta el caso de un capital físico siempre creciente, con calidad ambiental baja, pero estable a largo plazo. Sin embargo, también existe un caso en el cual existen ciclos convergentes –una espiral-, hacia un estado estacionario. Es decir, aún en presencia de externalidades positivas en la producción, la economía eventualmente deja de crecer.

Los resultados de la economía con crecimiento endógeno dependen de cuál externalidad es más fuerte, si las negativas ambientales o las positivas de la producción. El ratio  $e/w$  sigue siendo relevante, es decir, aún con crecimiento endógeno si la tecnología es sucia –cuando  $e/w$  es uno- se tiene ciclos que convergen a un estado estacionario –anexo B-. Así, aún con crecimiento exógeno el crecimiento no es ilimitado. Un estudio de generaciones traslapadas que considere capital humano y población endógena puede ser una extensión interesante del modelo –que requerirá simulaciones numéricas por su complejidad-.

Es difícil decidir que tipos de políticas debemos implementar si no sabemos la fuerza relativa de las externalidades positivas del crecimiento endógeno y las negativas medioambientales. Tomando en cuenta que el rendimiento natural y la eficiencia termodinámica de la producción, son difíciles de conocer o medir. Costanza nos da una regla útil para escoger entre interpretaciones de la realidad –supuestos- o modelos para generar políticas. Se demuestra que se debe considerar siempre el peor escenario. Ya que en esta elección podría estar involucrada la existencia física de los individuos. Los optimistas dicen que actuar de manera optimista, es decir, esperando que la tecnología se volverá más limpia y que la naturaleza será suficientemente resistente llevará a que cosechemos muchos más beneficios, que si se actuamos de manera pesimista. Sin embargo, no se puede asegurar que el escenario optimista ocurra.

Entonces para Costanza, la decisión debe tomarse como en un juego de maximin, de suma cero. En este juego, se debe escoger el peor escenario y escoger la mejor situación. El razonamiento, es que si somos optimistas sobre la resistencia de la naturaleza y sobre la capacidad de la tecnología para volverse más limpia en el tiempo y la realidad es el peor escenario, entonces se tendrá el desastre. Al contrario, en el caso en el cual hemos sido pesimistas o hemos considerado el peor escenario, de darse la peor situación, esta será tolerable. Entonces se debe escoger el escenario pesimista de manera racional (Costanza, 1989).

Del presente estudio, se puede argumentar que existe una razón adicional por la cuál se debe considerar el peor escenario para la formulación de políticas ambientales. La razón está en la asimetría del problema intergeneracional. Esto significa, que existen incentivos para que los agentes de las generaciones presente tomen decisiones sobreoptimistas que permitan a una economía crecer a corto plazo, pero a cambio se puede comprometer seriamente el bienestar de las generaciones futuras. Así mismo, un gobierno, miope que toma decisiones basadas en el horizonte de vida de los votantes actuales, puede eliminar las

externalidades a nivel intrageneracional pero mantener las externalidades intergeneracionales. La razón, es que los efectos pueden venir luego de la muerte de quienes tomaron las decisiones. Es decir, que los costos del daño ambiental sobreviven a los perpetradores<sup>106</sup>.

Es importante, reconocer que las políticas macroeconómicas y ambientales deben ser formuladas, evaluadas e implementadas en conjunto. Un gobierno que no considere las restricciones medioambientales, puede generar alto crecimiento y aumento del consumo pero disminución del bienestar y destrucción medioambiental. Esto significaría además, efectos permanentes sobre el nivel de capital, ambiente y bienestar de largo plazo. Del modelo construido, se puede observar, que políticas que busquen la sostenibilidad ambiental pueden estabilizar la economía también.

#### **4. Conclusiones**

En conclusión, no se puede rechazar la hipótesis de la presente investigación. Esto es, que un modelo de generaciones traslapadas con variables y restricciones ambientales, presenta estados estacionarios descentralizados – competitivos- y trayectorias dinámicas que no són eficientes, equitativas y sustentables. Bajo criterios de Pareto, Rawls y Chichilnisky respectivamente.<sup>107</sup>.

Del estado del arte y del modelo construido se puede afirmar, que se requieren supuestos demasiado restrictivos para garantizar la eficiencia de los modelos descentralizados. Especialmente, la eliminación del problema de los comunes –bien público-, crecimiento poblacional cero y consumo sólo en la vejez de los individuos. Estos supuestos fueron relajados en el modelo construido y se mostró que tienen efectos no triviales sobre los estados estacionarios y las dinámicas de transición.

---

<sup>106</sup> Los modelos con alta intervención del estado para incentivar el crecimiento, fueron gobiernos miopes,

<sup>107</sup> Bajo criterios de Pareto, Rawls, Harsanyi, Chichilnisky.

Para futuras investigaciones se puede pensar en extensiones al modelo presentado para incluir capital humano de manera formal. De esta manera se podrá incluir la noción de ahorro real. La población debería ser endogenizada para depender de la calidad ambiental –fertilidad- y de la riqueza –decisión sobre número de hijos-. Finalmente, se deja abierto estudios futuros para analizar los hechos estilizados que caracterizan la relación medioambiente, desarrollo y crecimiento para el Ecuador. Esto, permitirá profundizar el conocimiento de las relaciones complejas entre estas variables con lo cuál se logrará tomar mejores decisiones de política económica.

## **5. Recomendaciones**

Se recomienda políticas económicas que coordinen la dimensión macroeconómica y ambiental. Que tengan un horizonte de largo plazo –infinito-. Ya que sólo así podrán ser efectivas.

El gobierno debe proteger el bienestar de las generaciones futuras y eliminar las externalidades negativas intra e intergeneracionales.

Se deben tener como prioridades la desmaterialización de la economía para mejorar la eficiencia termodinámica de la producción. De esta manera, se mejora la riqueza y el bienestar de las economías y se reduce el riesgo de colapso.

Se necesita priorizar la investigación y desarrollo para obtener tecnologías más limpias. Finalmente, el rol del capital humano y del crecimiento endógeno es fundamental para garantizar –condición necesaria- crecimiento económico sustentable. El Estado debe tener como objetivo final, buscar la sostenibilidad en sus tres dimensiones: económica, social y ambiental.

## BIBLIOGRAFÍA:

### Libros:

- (IUCN). (1980). *World Conservation Strategy: Living Resource Conservation for Sustainable Development* (International Union for the Conservation of Nature and Natural Resources ed.). Gland, Switzerland: IUCN-UNEP-WWF.
- Acosta, A. (2004). *Breve Historia Económica del Ecuador*. Quito: Corporación Editora Nacional.
- Allais, M. (1947). *Economie et Intérêt*. Paris: Nationale, Imperie.
- Blanchard, O., & Fischer, S. (1989). *Lectures on Macroeconomics*. Cambridge/MA: MIT Press.
- Brechet, T., & Lambrecht, S. (2005). *Puzzling over Sustainability: An Equilibrium Analysis*: SSRN.
- Costanza, R., & Wainger, L. (1991). *Ecological economics*: Columbia University Press New York.
- de La Croix, D., & Michel, P. (2002). *A Theory of Economic Growth: Dynamics and Policy in Overlapping Generations*: Cambridge University Press.
- Euzéby, C. (2003). *Mondialisation et Régulation Sociale*. Grenoble: L'Harmattan.
- Farmer, R. E. A. (1999). *The Macroeconomics of Self-fulfilling Prophecies*: MIT Press.
- Friedman, M. (1953). *Essays in Positive Economics*: University Of Chicago Press.
- Geanakoplos, J. (1987). *"Overlapping Generations Model of General Equilibrium"*: The Macmillan Press Limited.
- Georgescu-Roegen, N. (1971). *The Entropy Law and the Economic Process*: Harvard University Press.
- Hicks, J. (1946). *Value and Capital*. England: Oxford: Clarendon Press.
- Jonas, H. (1995). *El principio de la responsabilidad: ensayo de una ética para la civilización tecnológica*. Barcelona: Herder.
- Lambert, P. J. (2001). *The Distribution and Redistribution of Income*: Manchester University Press.
- Larrea, C. (2006). *Hacia una historia ecológica del Ecuador: Propuestas para el debate*: Corporación Editora Nacional: Universidad Andina Simón Bolívar: Ecociencia.
- Martínez Alier, J. (1991). *La Ecología y la Economía*. México D.F.: Fondo de Cultura Económica.
- Martínez Alier, J. (1999). *Introducción a la economía ecológica*. Barcelona: Editorial Rubes.
- Mas-Collel, A., Whinston, M. D., & Green, J. (1995). *Microeconomic Theory*: Oxford University Press.
- Meadows. (1972). *The Limits of Growth: A report for The Club of Rome's Project on the Predicament of Mankind* (Vol. 5). New York: Universe Books.
- Pearce, D. W. (1985). *Economía ambiental*. México D.F.: Fondo de Cultura Económica.
- Rawls, J. (1971a). *Teoría de la justicia*: México, Fondo de Cultura Económica.
- Rawls, J. (1971b). *A Theory of Justice*. Cambridge, MA: Harvard University.
- Rawls, J. (1993). *Political Liberalism*: Columbia University Press.

- Repetto, R. (1985). *The Global Possible: Resources, Development and the New Century*. New Haven USA: Yale University Press.
- Romer, D. (1989). *Advanced Macroeconomics*. New York: McGraw-Hill.
- Sanjuán, V. C. (1999). *Producción y crisis ecológica: Los agentes sociales ante la problemática medioambiental*: Edicions Universitat de Barcelona.
- Scanlon, T. (1982). *Utilitarianism and Contractarianism*.
- Stiglitz. (2006). *Making Globalization Work*. Colombia: Nomos S.A.
- Wiggins, S. (2003). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*: Springer.

### Libros electrónicos:

- Bewley, T. (2007). General Equilibrium, Overlapping Generations Models, and Optimal Growth Theory, Available from [http://books.google.com.ec/books?id=KdmvIvC8r-UC&pg=PA42&lpg=PA42&dq=pareto+optimality+overlapping+generations&source=web&ots=87KngzdnEe&sig=5ijkjHt9ijjIR-0pxWztse8TptU&hl=en&sa=X&oi=book\\_result&resnum=8&ct=result#PPA43,M1](http://books.google.com.ec/books?id=KdmvIvC8r-UC&pg=PA42&lpg=PA42&dq=pareto+optimality+overlapping+generations&source=web&ots=87KngzdnEe&sig=5ijkjHt9ijjIR-0pxWztse8TptU&hl=en&sa=X&oi=book_result&resnum=8&ct=result#PPA43,M1)
- Dowrick, S., Pitchford, R., & Turnovsky, S. J. (2004). Economic Growth and Macroeconomic Dynamics: Recent Developments in Economic Theory. In C. U. Press (Eds.),
- Houghton (2001). Climate Change 2001: The Scientific Basis, Intergovernmental panel on Climate Change pp. Cp. 6 Radiative Forcing of Climate Change). Available from [www.grida.no/climate/ipcc\\_tar/pdf/WG1\\_TAR-FRONT-PDF](http://www.grida.no/climate/ipcc_tar/pdf/WG1_TAR-FRONT-PDF)
- Pigou, A. (1932). The Economics of Welfare, Available from <http://books.google.com.ec/books?hl=en&lr=&id=i5VrbGqUV6EC&oi=fnd&pg=PA167&ots=zgInEfn2CX&sig=nxo9PTHNJeseyyMwzzlExpTMRXI#PPP1,M1>
- Puu, T., & Sushko, I. (2002). Oligopoly Dynamics: Models and Tools, Available from <http://books.google.com.ec/books?hl=es&lr=&id=nJCYv4JZebwC&oi=fnd&pg=PA3&dq=oligopolies+and+cover+chaos&ots=5vipKKMham&sig=AjCAeQZ7AQvtXJ2E5TgxwZiRQ0c>
- Rawls, J. (1971c). A Theory of Justice, Available from <http://books.google.com>
- Shone, R. (2002). Economic Dynamics; E-book, Cambridge Press.

### Artículos:

- Andreoni, J. (1990). Impure Altruism and Donations to Public Goods: A Theory of Warm-Glow Giving. *Economic Journal*, 100(401), 464-477.
- Arrow, K. J., & Debreu, G. (1954). Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy. *Econometrica*, 22(3), 265-290.
- Arrow, K. J. (1973). Rawls's principle of just saving. *Swedish Journal of Economics*, 75(4), 323-335.
- Ball, L., & Mankiw, N. G. (2001). Intergenerational Risk Sharing in the Spirit of Arrow, Debreu, and Rawls, with Applications to Social Security Design. *NBER Working Paper*, 8270.

- Barro, R. J. (1974). Are Government Bonds Net Wealth? *Journal of Political Economy*, 82(6), 1095.
- Bartelmus, P. (2003). Dematerialization and capital maintenance: two sides of the sustainability coin. *Ecological Economics*, 46(1), 61-81.
- Beltratti, A., Chichilnisky, G., & Heal, G. (1993). Sustainable Growth and the Green Golden Rule. *NBER Working Paper No. 4430*.
- Bischi, G. I., Gardini, L., & Kopel, M. (2000). Analysis of global bifurcations in a market share attraction model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 24(5-7), 855-879.
- Bischi, G. I., Dieci, R., Rodano, G., & Saltari, E. (2001). Multiple attractors and global bifurcations in a Kaldor-type business cycle model. *Journal of Evolutionary Economics*, 11(5), 527.
- Brundtland, G. H. (1987). Our Common Future: The World Commission on Environment and Development. *Brundtland Commission. United Nations. World Commission on Environment and Development*.
- Cataño, J. (2004). La teoría neoclásica del equilibrio general: apuntes críticos. *Cuadernos de Economía*, 40, 175-204.
- Costanza, R. (1989). WHAT IS ECOLOGICAL ECONOMICS?
- Costanza, R., & Daly, H. E. (1992). Natural Capital and Sustainable Development. *Conservation Biology*, 6(1), 37-46.
- Chichilnisky, G. (1997). What is sustainable development? *Land Economics*, 73(4), 467.
- Chóliz, J. S. (1999). *Eficiencia termodinámica y el valor económico*. Paper presentado en VII Jornadas de Economía Crítica Albacete. de <http://www.ucm.es/info/ec/jec7/pdf/com1-13.pdf>
- Dasgupta, S., & Mitra, T. (1983). Intergenerational Equity and Efficient Allocation of Exhaustible Resources. *International Economic Review*, 24(1), 133-153.
- Diamond, P. (1965). National Debt in a Neoclassical Growth Model. *American Economic Review* 55, 1126-1150;.
- Diamond, P. (1965). National Debt in a Neoclassical Growth Model. *American Economic Review* 55, 1126-1150;.
- Duraiappah, A. K. (1998). Poverty and environmental degradation: A review and analysis of the nexus. *World Development*, 26(12), 2169-2179.
- Falconí, F. (2002). La desmaterialización de la economía. *Ecuador Debate*, 121-133.
- Farmer, K. (2000). Intergenerational natural-capital equality in an overlapping-generations model with logistic regeneration. *Journal of Economics*, 72(2), 129-152.
- Farmer, M., & Randall, A. (1997). Policies for sustainability: lessons from an overlapping generations model. *Land Economics*, 73(4), 608-622.
- Grandmont, J. M., & Laroque, G. (1991). Economic Dynamics with Learning: Some Instability Examples. *Equilibrium Theory and Applications. Proceedings of the Sixth International Symposium in Economic Theory and Econometrics*, 247-273.
- Gutiérrez, E. (2007). De las teorías del desarrollo al desarrollo sustentable. *Trayectorias, año IX(25)*, 45-60.
- Hardin, G. (1968). The Tragedy of Commons. *Science v. 162 . Version en español Gaceta Ecológica, num37, México*, 1243-1248.

- Harsanyi, J. C. (1953). Cardinal Utility in Welfare Economics and in the Theory of Risk-taking. *The Journal of Political Economy*, 61(5), 434.
- Harsanyi, J. C. (1955). Cardinal Welfare, Individualistic Ethics, and Interpersonal Comparisons of Utility. *The Journal of Political Economy*, 63(4), 309.
- Hartwick, J. M. (1977). Intergenerational equity and the investing of rents from exhaustible resources. *American Economic Review*, 67(5), 972-974.
- Hartwick, J. M. (1978a). Investing returns from depleting renewable resource stocks and intergenerational equity. *Economic Letters*, 1(1), 85-88.
- Hartwick, J. M. (1978b). Substitution among exhaustible resources and intergenerational equity. *Review of Economic Studies*, 45(2), 347-354.
- Hicks, J. R. (1939). The Foundations of Welfare Economics. *Economic Journal*, 49(196), 696-712.
- Hochman, H. M., & Rodgers, J. D. (1969). Pareto Optimal Redistribution. *American Economic Review*, 59(4), 542-557.
- Howarth, R., & Norgaard, R. (1990). Intergenerational Resource Rights, Efficiency, and Social Optimality. *Land Economics*, 66(1), 1.
- Howarth, R. (1998). An Overlapping Generations Model of Climate-Economy Interactions. *The Scandinavian Journal of Economics*, 100(3), 575-591.
- Howarth, R. B., & Norgaard, R. B. (1992). Environmental valuation under sustainable development. *American Economic Review*, 82(2), 473-477.
- John, A., & Pecchenino, R. (1994). An Overlapping Generations Model of Growth and the Environment. *Economic Journal*, 104(427), 1393-1410.
- John, A., Pecchenino, R., Schimmelpfennig, D., & Schreft, S. (1995). Short-lived agents and the long-lived environment. *Journal of Public Economics*, 58(1), 127-141.
- Jouvet, P. A., Michel, P., & Vidal, J. P. (2000). Intergenerational Altruism and the Environment. *Scandinavian Journal of Economics*, 102(1), 135-150.
- Junxi, Z. (1999). Environmental sustainability, nonlinear dynamics and chaos. *Economic Theory*, 14(2), 489-500.
- Kaldor, N. (1939). Welfare Propositions of Economics and Interpersonal Comparisons of Utility. *Economic Journal*, 49(195), 549-552.
- Lambrecht, S. (2005). Maintaining Environmental Quality for Overlapping Generations: Some Reflections on the US Sky Trust Initiative. *Center for Operations Research and Econometrics (CORE)*.
- Lozano, F., Villa, E., & Monsalve, S. (1997). El modelo de generaciones traslapadas como modelo monetario. *Cuadernos de Economía*, 27, 91-111.
- Lucas Jr, R. E. (1996). Nobel Lecture: Monetary Neutrality. *Journal of Political Economy*, 104(4), 661.
- Lucas, J. R. E. (1986). Adaptive Behavior and Economic Theory. *Journal of Business*, 59(S4), 401.
- Marcet, A., & Sargent, T. J. (1989). Convergence of Least-Squares Learning in Environments with Hidden State Variables and Private Information. *The Journal of Political Economy*, 97(6), 1306.
- Mourmouras, A. (1991). Competitive Equilibria and Sustainable Growth in a Life-Cycle Model with Natural Resources. *Scandinavian Journal of Economics*, 93(4), 585.
- Müller-Planterberg, U. (2001). Rawls global. *Revista de la Universidad Bolivariana Volumen*, 1(2).
- Pezzey, J. C. V., & Toman, M. A. (2002). The Economics of Sustainability: A Review of Journal Articles. *Resources for the Future Discussion Paper*, 02-03.

- Phelps, E. (1961). The Golden Rule of Accumulation: A Fable of Growthmen. *The American Economic Review*, 638-643.
- Ramsey, F. (1928). A Mathematical Theory of Saving. *Economic Journal*, 38, 543-559.
- Rawls, J. (1974). Some Reasons for the Maximin Criterion. *American Economic Review*, 64(2), 141-146.
- Romer, P. M. (1990). Endogenous Technological Change. *Journal of Political Economy*, 98(S5), 71.
- Samuelson, P. (1958). An exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money. *Journal of Political Economy* 66, 467-482.
- Solow, R. (1974). Intergenerational Equity and Exhaustible Resources. *Review of Economics Studies*, Symposium on the Economics of Exhaustible Resources.
- Solow, R. (1986). On the intergenerational allocation of natural resources. *Scandinavian Journal of Economics*, 88(1), 141-149.
- Stern, D. I., Common, M. S., & Barbier, E. B. (1996). Economic growth and environmental degradation: The environmental Kuznets curve and sustainable development. *World Development*, 24(7), 1151-1160.
- Stiglitz, J. (1974). Growth with Exhaustible Natural Resources: Efficient and Optimal Growth Paths. *The Review of Economic Studies*, 41, 123-137.
- Stringham, E. (2001). Kaldor-Hicks Efficiency and the Problem of Central Planning. *Quarterly Journal of Austrian Economics*, 4(2), 43-52.
- Sudhir, A., & Sen, A. K. (1994). Desarrollo Humano Sostenible: Conceptos y Prioridades. *Documento no periódico*(N° 8 de la ODH. PNUD. ).
- Yokoo, M. (2000). Chaotic dynamics in a two-dimensional overlapping generations model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 24(5-7), 909-934.

#### **Informes:**

- GEIC. (2007). *CLIMATE CHANGE REPORT 2007*.
- PNUD. (2006). *Informe Sobre el Desarrollo Humano*. New York: PROGRAMA DE LAS NACIONES UNIDAS PARA EL DESARROLLO.
- UNFPA. (2006). *Estado de la Población Mundial 2006: Las mujeres y la migración internacional*. ONU: Sitio internet UNFPA [www.unfpa.org](http://www.unfpa.org).

#### **Web:**

- CEPA. The Paretian System. *CEPA New School of Economics* Retrieved 11/07, 2008, from <http://cepa.newschool.edu/het/essays/paretian/paretosocial.htm#kaldor>; [www.ebour.com.ar/pdfs/Eficiencia%20y%20Bienestar.pdf](http://www.ebour.com.ar/pdfs/Eficiencia%20y%20Bienestar.pdf)
- UNFCCC. (2006). Highlights from Greenhouse Gas (GHG) Emissions Data for 1990-2004. submitted by the United Nations; Annex; . Retrieved (18:00 25/05/2006). , 2006, from [http://unfccc.int/files/essential\\_background/background\\_publications\\_htmlpdf/application/pdf/ghg\\_booklet\\_06.pdf](http://unfccc.int/files/essential_background/background_publications_htmlpdf/application/pdf/ghg_booklet_06.pdf)
- PUCE, D. (2007). Las Disertaciones en la PUCE: Guía e Instructivo. *Journal*, <http://www.puce.edu.ec>

## **ANEXO**

---

### **RESOLUCIÓN MODELO DESCENTRALIZADO**

## Contenido

A1.	Resolución Modelo Descentralizado .....	3
A.2	Consumidores: .....	3
A.3.	Firmas:.....	5
A.4.	Equilibrio del mercado de bienes:.....	6
A.5.	Dinámicas y estado estacionario: .....	6
A.6.	Estado estacionario: .....	7
A.7	Dinámica local .....	12
B.	Simulaciones numéricas .....	15
B.1	Modelo descentralizado básico .....	15
B.2	Modelo con crecimiento poblacional.....	26
B.3.	Crecimiento endógeno: .....	28
C.	Comando Central.....	31
C.1	Comando Central –considerando depreciación- $d$ es 1:.....	31
C.1.2	Estado estacionario y regla de oro –considerando depreciación- $d$ es 1:.....	35
C.2	Comando central sin depreciación .....	39
C.2.1	Estado estacionario y regla de oro .....	44
D.	Regla de oro verde o edad de oro.....	49
E.	Análisis de óptimo paretiano: .....	51
E.1	Demostración para el caso de total depreciación:.....	52
E.2	Demostración para el caso sin depreciación:.....	55
F.	Análisis de equidad intergeneracional .....	56
G.	Análisis de sostenibilidad ambiental.....	63
F.	Extensión del modelo descentralizado con crecimiento endógeno: .....	64
9.	BIBLIOGRAFÍA:.....	66

## A1. Resolución Modelo Descentralizado

### A.2 Consumidores:

$$\begin{aligned}
 \text{Max} \quad & \beta \ln c_{1t} + \gamma \ln(a_t + A_t^{\text{com}}) + (1 + \theta)^{(-1)} \left( \beta \ln c_{2(t+1)} + \gamma \ln(a_{(t+1)} + A_{(t+1)}^{\text{com}}) \right) \\
 \text{s.a} \quad & c_{1t} + s_t + m_t = w_t \\
 & c_{2(t+1)} = (1 + r_{(t+1)}) s_t \\
 & A_{(t+1)} = (1 - b)A_t + b\bar{A} - P_t + \omega M_t \\
 & A_t = a_t + A_t^{\text{com}} \\
 & u'_A > 0; u''_A < 0 \\
 & u'_c > 0; u''_c < 0; \lim_{c \rightarrow \infty} u'_c = \infty
 \end{aligned}$$

El problema del consumidor queda totalmente definido con el siguiente lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \left[ \beta \ln c_{1t} + \gamma \ln(a_t + A_t^{\text{com}}) + (1 + \theta)^{(-1)} \left( \beta \ln c_{2(t+1)} + \gamma \ln(a_{(t+1)} + A_{(t+1)}^{\text{com}}) \right) \right] + \lambda_t \left[ c_{1t} + \frac{c_{2(t+1)}}{1 + r_{(t+1)}} + m_t - w_t \right]$$

CPO:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_{1t}} = \frac{\beta}{c_{1t}} + \lambda_t = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_{2(t+1)}} = \frac{\beta}{(1 + \theta)c_{2(t+1)}} + \frac{\lambda_t}{1 + r_{(t+1)}} = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m_t} = \frac{(1 + \theta)^{-1} \gamma \frac{\omega}{(1 + n)}}{\left( A_{(t+1)}^- + a_{(t+1)} \right)} + \lambda_t = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} = c_{1t} + \frac{c_{2(t+1)}}{1 + r_{(t+1)}} + m_t - w_t = 0 \quad (1.4)$$

(1.1) y (1.2)

$$c_{2(t+1)} = \frac{(1 + r_{(t+1)})}{(1 + \theta)} c_{1t} \quad (1.5)$$

(1.5) en (1.4)

$$c_{1t} = \frac{(1 + \theta)}{(2 + \theta)} (w_t - m_t) \quad (1.6)$$

$$c_{2(t+1)} = \frac{(1 + r_{(t+1)})}{(2 + \theta)} (w_t - m_t) \quad (1.7)$$

$$s_t = \frac{w_t - m_t}{(2 + \theta)} \quad (1.8)$$

(1.1) y (1.3)

$$\frac{\omega\gamma}{(1 + \theta)(1 + n)(A_{(t+1)}^- + a_{(t+1)})} = \frac{\beta}{c_{1t}}$$

Recordando que:

$$a_{(t+1)} = \frac{(1 - b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a + \omega m_t}{(1 + n)}$$

Tenemos:

$$\frac{\omega\gamma}{\beta} c_{1t} = (1 + \theta) \left[ (1 + n)A_{(t+1)}^{com} + (1 - b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a + \omega m_t \right] \quad (1.9)$$

(1.6) en (1.9)

$$\begin{aligned} \frac{\omega\gamma}{\beta} \left[ \frac{(1 + \theta)}{(2 + \theta)} (w_t - m_t) \right] &= (1 + \theta) \left[ (1 + n)A_{(t+1)}^{com} + (1 - b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a + \omega m_t \right] \\ m_t &= \frac{\left( w_t - \frac{(2 + \theta)\beta}{\omega\gamma} \left[ (1 + n)A_{(t+1)}^{com} + (1 - b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a \right] \right)}{(2 + \theta) \frac{\beta}{\gamma} + 1} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Ahora obtendremos el equilibrio Nash-Cournot para el nivel  $m_t$  reemplazando:  $A_t^{com} = A_{(t+1)} - a_{(t+1)}$  en (1.10).

---

<sup>1</sup>  $c_{2t} = \frac{(r_{neta(t+1)})}{(1 + \theta)} c_{1t}$ , en el caso de considerar una tasa de depreciación de 1.

$$\left( (2 + \theta) \frac{\beta}{\gamma} + 1 \right) m_t = w_t - \frac{(2 + \theta)\beta}{\omega\gamma} \left[ (1 + n)(A_{(t+1)} - a_{(t+1)}) + (1 - b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a \right] \quad (1.11)$$

De nuevo se recuerda que:

$$a_{(t+1)} = \frac{(1 - b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a + \omega m_t}{(1 + n)}$$

Tengo:

$$\begin{aligned} \left( (2 + \theta) \frac{\beta}{\gamma} + 1 \right) m_t &= w_t - \frac{(2 + \theta)\beta}{\omega\gamma} \left[ N_{(t+1)} \left( (1 - b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a + \omega m_t \right) - \omega m_t \right] \\ m_t &= \frac{w_t - \frac{(2 + \theta)\beta}{\omega\gamma} \left[ N_{(t+1)} \left( (1 - b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a \right) \right]}{\left( (2 + \theta) \frac{\beta}{\gamma} + 1 \right) + (2 + \theta) \frac{\beta}{\gamma} (N_{(t+1)} - 1)} \quad (1.12) \end{aligned}$$

La ecuación (1.12) es el nivel de  $m_t$  individual, que escoge de manera no cooperativa, cada uno de los consumidores en el tiempo  $t$ . Sus características son las siguientes:

$$\frac{dm_t}{dw_t} > 0; \frac{dm_t}{dk_t^a} > 0; \frac{dm_t}{d(ek_t^a)} = \frac{dm_t}{d(p_t)} > 0; \frac{dm_t}{dA_t} < 0; \frac{dm_t}{d\bar{A}} < 0; \frac{dm_t}{dN_t} \geq 0$$

### A.3. Firmas:

Cada firma representativa maximiza su beneficio, que está dado por:

$$\max_{K_t, L_t} L_t^{(1-a)} K_t^a - w_t L_t - r_t K_t; \quad L = 1 \quad (1.13)$$

$$F_t(L_t, K_t) = L_t^{(1-a)} K_t^a = L f(K_t/L_t) = L f(k_t) = k_t^a \quad (1.14)$$

$$k > 0 \Rightarrow f(k) > 0, f'(k) > 0, f''(k) < 0$$

$$\text{Inada} \quad f(0) = 0; \lim_{(k \rightarrow 0)} f'(k) = +\infty; \lim_{(k \rightarrow +\infty)} f'(k) < 1$$

CPO:

$$F_L(K_t, L_t) = w_t; \quad F_K(K_t, L_t) = r_t$$

En términos per-cápita:

$$k_t^a - k_t(a)k_t^{(a-1)} = w_t; (1-a)k_t^a = w_t(1.15)$$

$$ak_t^{(a-1)} = r_t(1.16)$$

#### A.4. Equilibrio del mercado de bienes:

El equilibrio del mercado de bienes requiere que la demanda de bienes en cada período sea igual a la oferta, o alternativamente, que la inversión sea igual al ahorro:

$$K_{(t+1)} - K_t = N_t s_t(\cdot) - K_t$$

En términos per-cápita:

$$(1+n)k_{t+1} = s_t(\cdot)(1.17)$$

Reemplazando (1.8) en (1.17) tenemos:

$$(1+n)k_{t+1} = \left[ \frac{w_t - m_t}{2 + \theta} \right](1.18)$$

#### A.5. Dinámicas y estado estacionario:

##### Comportamiento del capital:

Reemplazo (1.12) en (1.18)

$$k_{t+1} = \frac{w_t - \left[ \frac{(2+\theta)\beta}{\omega\gamma} \left[ N_{(t+1)} \left( (1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a \right) \right] \right]}{\left( (2+\theta)\frac{\beta}{\gamma} + 1 \right) + (2+\theta)\frac{\beta}{\gamma} (N_{(t+1)} - 1)} (1.19)$$

Ahora, reemplazo (1.15) en (1.19):

$$k_{t+1} = \frac{(1-a)k_t^a - \left[ \frac{(2+\theta)\beta}{\omega\gamma} \left[ N_{(t+1)} \left( (1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a \right) \right] \right]}{\left( (2+\theta)\frac{\beta}{\gamma} + 1 \right) + (2+\theta)\frac{\beta}{\gamma} (N_{(t+1)} - 1)} (1.20)$$

$$k_{t+1} = \frac{(1-a)k_t^a \left( (2+\theta)\frac{\beta}{\gamma} + 1 \right) + (2+\theta)\frac{\beta}{\gamma} (N_{(t+1)} - 1) - \left[ \frac{(2+\theta)\beta}{\omega\gamma} \left[ N_{(t+1)} \left( (1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a \right) \right] \right]}{\left( (2+\theta)\frac{\beta}{\gamma} + 1 \right) + (2+\theta)\frac{\beta}{\gamma} (N_{(t+1)} - 1)} (1.21)$$

$$\Delta k_{t+1} = k_{t+1} - k_t = \frac{(1-a)k_t^a \left( (2+\theta)\frac{\beta}{\gamma} + 1 \right) + (2+\theta)(N_{t+1}-1) - \left[ (1-a)k_t^a - \frac{(2+\theta)\beta}{\omega\gamma} \left[ N_{t+1} \left( (1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a \right) \right] \right]}{(1+n)(2+\theta) \left( (2+\theta)\frac{\beta}{\gamma} + 1 \right) + (2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}(N_{t+1}-1)} - k_t$$

$$k_{t+1} = \mathcal{H}(k_t, a_t) \quad (1.22)$$

**Evolución del medioambiente:**

$$a_{(t+1)} = \frac{(1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a + \omega m_t}{(1+n)} \quad (1.23)$$

Reemplazo (1.12) en (1.23)

$$a_{(t+1)} = \frac{(1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a + \omega \left[ \frac{(1-a)k_t^a - \frac{(2+\theta)\beta}{\omega\gamma} \left[ N_{t+1} \left( (1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a \right) \right] \right]}{(1+n)} \quad (1.24)$$

$$\Delta a_{(t+1)} = a_{(t+1)} - a_t = \frac{(1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a + \omega \left[ \frac{(1-a)k_t^a - \frac{(2+\theta)\beta}{\omega\gamma} \left[ N_{t+1} \left( (1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a \right) \right] \right]}{(1+n)} - a_t$$

$$a_{(t+1)} = \frac{\left( (2+\theta)\frac{\beta}{\gamma} + 1 \right) + (2+\theta)(N_{t+1}-1) \left( (1-b)a_t N_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a N_t \right) + \left[ \omega N_t (1-a)k_t^a - \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} N_t \left[ N_{t+1} \left( (1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^a \right) \right] \right]}{\left( (2+\theta)\frac{\beta}{\gamma} + 1 \right) + (2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}(N_{t+1}-1)(1+n)N_t} - a_t$$

$$a_{(t+1)} = \mathcal{U}(k_t, a_t) \quad (1.25)$$

**Crecimiento Poblacional:**

$$N_t = (1+n)N_{(t+1)} \quad (1.26)$$

#### A.6. Estado estacionario:

Se considera una población estacionaria N, con una tasa de crecimiento cero (n=0). En estado estacionario, se tiene:  $a_t, a_{t+1} = a^*$  y  $k_{t+1} = k_t = k^*$ .

Ahora, se recuerda la ecuación y se reformula en términos del estado estacionario:

$$m_t = \frac{(1+n)a_{(t+1)} - (1-b)a_t - \frac{b\bar{A}}{N_t} + ek_t^a}{\omega} \quad (1.27)$$

$$m_t = \frac{a^* - (1-b)a^* - \frac{b\bar{A}}{N} + ek^{*a}}{\omega} \quad (1.28)$$

Se sabe, por definición, que  $b$  está entre 0 y 1. Entonces, si se considera una población  $-N$  estacionaria- suficientemente grande se tiene que:

$$\frac{b\bar{A}}{N} \approx 0_3.$$

Para un valor de  $\bar{A}$ , que sea cercano a los niveles de consumo per-cápita. Se debe recordar, que por la definición del índice ambiental,  $\bar{A}$  puede tomar cualquier valor no negativo.

El modelo está caracterizado por un sistema de dos ecuaciones en diferencia de primer grado, no lineales.

Para encontrar su estado estacionario tendremos un sistema de dos ecuaciones no lineales, en las variables  $a^*$  y  $k^*$ .

En estado estacionario, reemplazamos (1.15) y (1.28) en la ecuación (1.18), que caracteriza al capital y se tiene:

$$k^* = \frac{(1-a)k^{*a} - \left[ \frac{a^* - (1-b)a^* + ek^{*a}}{\omega} \right]}{(2+\theta)}. \quad (1.29)$$

Se reordenan los términos:

$$k^* = \frac{\omega(1-a)k^{*a} - ba^* - ek^{*a}}{(2+\theta)\omega}$$

$$(2+\theta)\omega k^* = \omega(1-a)k^{*a} - ba^* - ek^{*a}.$$

Tenemos:

---

<sup>2</sup> No se debe confundir la variable  $a^*$ , que es la calidad ambiental en términos per-cápita con el parámetro  $a$  que es la participación del capital dentro del producto.

<sup>3</sup> Esta aproximación permite tener una solución analítica, ya que en caso contrario el capital estacionario estará dado por un polinomio del tipo:  $\sigma k^{*a} + \phi k^* + \mu = 0$ ;  $0 < a < 1$ . Es decir, se requeriría establecer un valor numérico para el parámetro  $a$  y utilizar métodos numéricos. Efectivamente, se realizan simulaciones numéricas del modelo. El error de la aproximación de la solución aquí presentada es decreciente en  $N$ , creciente en  $b$  y en  $\bar{A}$ . Claramente, es una muy buena aproximación si consideramos que la población puede ser arbitrariamente grande, mientras que los otros parámetros no.

$$(2 + \theta)\omega k^* = k^{*a}[\omega(1 - a) - e] - ba^* \quad (1.30)$$

Ahora, se toma la ecuación que caracteriza al medioambiente (1.23) y junto a las ecuaciones (1.15) y (1.12), se obtiene:

$$a^* = (1 - b)a^* - ek^{*a} + \omega \left[ \frac{(1 - a)k^{*a} - \frac{(2 + \theta)\beta}{\omega\gamma} [N((1 - b)a^* - ek^{*a})]}{\left( (2 + \theta)\frac{\beta}{\gamma} + 1 \right) + (2 + \theta)\frac{\beta}{\gamma}(N - 1)} \right] \quad (1.31)$$

Se reordena los términos:

$$b \left[ \left( (2 + \theta)\frac{\beta}{\gamma} + 1 \right) + (2 + \theta)\frac{\beta}{\gamma}(N - 1) \right] a^* = -ek^{*a} \left[ \left( (2 + \theta)\frac{\beta}{\gamma} + 1 \right) + (2 + \theta)\frac{\beta}{\gamma}(N - 1) \right] + \omega \left[ (1 - a)k^{*a} - \frac{(2 + \theta)\beta}{\omega\gamma} [N((1 - b)a^* - ek^{*a})] \right]$$

Se prosigue:

$$b \left[ \left( (2 + \theta)\frac{\beta}{\gamma} + 1 \right) + (2 + \theta)\frac{\beta}{\gamma}(N - 1) \right] a^* = -\frac{(2 + \theta)\beta N(1 - b)a^*}{\omega\gamma} - ek^{*a} \left[ \left( (2 + \theta)\frac{\beta}{\gamma} + 1 \right) + (2 + \theta)\frac{\beta}{\gamma}(N - 1) \right] + \left[ \omega(1 - a) + \frac{e(2 + \theta)\beta N}{\gamma} \right] k^{*a}$$

Ahora se tiene:

$$b \left[ \left( (2 + \theta)\frac{\beta}{\gamma} + 1 \right) + (2 + \theta)\frac{\beta}{\gamma}(N - 1) \right] a^* = \dots \dots = -\frac{(2 + \theta)\beta N(1 - b)a^*}{\omega\gamma} + \left[ \omega(1 - a) + \frac{e(2 + \theta)\beta N}{\gamma} - e \left[ \left( (2 + \theta)\frac{\beta}{\gamma} + 1 \right) + (2 + \theta)\frac{\beta}{\gamma}(N - 1) \right] \right] k^{*a}$$

$$b \left[ \left( (2 + \theta)\frac{\beta}{\gamma} + 1 \right) + (2 + \theta)\frac{\beta}{\gamma}(N - 1) + \frac{(2 + \theta)\beta N(1 - b)}{\omega\gamma} \right] a^* = \dots \dots = \left[ \omega(1 - a) + \frac{e(2 + \theta)\beta N}{\gamma} - e \left[ \left( (2 + \theta)\frac{\beta}{\gamma} + 1 \right) + (2 + \theta)\frac{\beta}{\gamma}(N - 1) \right] \right] k^{*a}$$

$$\left[ \frac{(2 + \theta)\beta}{\gamma}(N - b) + b \left[ \frac{(2 + \theta)\beta}{\gamma} + 1 \right] \right] a^* = \dots \dots = \left[ \omega(1 - a) + \frac{e(2 + \theta)\beta N}{\gamma} - e \left[ \left( (2 + \theta)\frac{\beta}{\gamma} + 1 \right) + (2 + \theta)\frac{\beta}{\gamma}(N - 1) \right] \right] k^{*a}$$

$$\left[ N \frac{(2 + \theta)\beta}{\gamma} + b \right] a^* = \dots$$

$$\dots = \left[ \omega(1-a) + e \left[ \frac{(2+\theta)\beta N}{\gamma} - \left( (2+\theta)\frac{\beta}{\gamma} + 1 \right) + (2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}(N-1) \right] \right] k^{*a}$$

Se obtiene así:

$$\left[ N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b \right] a^* = \left[ \omega(1-a) - e \right] k^{*a}$$

$$a^* = k^{*a} \left[ \frac{\omega(1-a) - e}{N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b} \right] \quad (1.32)$$

Se reemplaza (1.32) en (1.30):

$$(2+\theta)\omega k^* = k^{*a} \left[ \omega(1-a) - e \right] - k^{*a} b \left[ \frac{\omega(1-a) - e}{N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b} \right]$$

Se ordena los términos:

$$(2+\theta)\omega k^* = k^{*a} \left[ \omega(1-a) - e - b \left[ \frac{\omega(1-a) - e}{N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b} \right] \right]$$

Se obtiene el polinomio:

$$k^{*a} \left[ \omega(1-a) - e - b \left[ \frac{\omega(1-a) - e}{N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b} \right] \right] - (2+\theta)\omega k^* = 0 \quad (1.33)$$

Se extrae factor común:

$$k^{*a} \left[ \omega(1-a) - e - b \left[ \frac{\omega(1-a) - e}{N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b} \right] - (2+\theta)\omega k^{*(1-a)} \right] = 0$$

Directamente, se obtiene un estado estacionario:

$$k^* = 0; a^* = 0.$$

Se trabaja con los corchetes y con un poco de manipulación algebraica se tiene el segundo estado estacionario:

$$\left[ \omega(1-a) - e - b \left[ \frac{\omega(1-a) - e}{N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b} \right] - (2+\theta)\omega k^{*(1-a)} \right] = 0$$

$$\left[ \omega(1-a) - e - b \left[ \frac{[\omega(1-a) - e]}{N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b} \right] \right] = (2+\theta)\omega k^{*(1-a)}$$

$$\left[ \frac{\left[ \omega(1-a) - e - b \left[ \frac{[\omega(1-a) - e]}{N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b} \right] \right]^{\frac{1}{(1-a)}}}{(2+\theta)\omega} \right] = k^*$$

$$k^* = \left[ \frac{N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} [\omega(1-a) - e]^{\frac{1}{(1-a)}}}{\left[ N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b \right] (2+\theta)\omega} \right] \quad (1.34)$$

Para que este estado estacionario exista y sea diferente de cero, se requiere que  $\omega(1-\alpha) > e$ .

Ahora, reemplazo (1.34) en (1.32):

$$a^* = \left[ \frac{N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} [\omega(1-a) - e]^{\frac{\alpha}{(1-a)}}}{\left[ N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b \right] (2+\theta)\omega} \right] \left[ \frac{[\omega(1-a) - e]}{\left[ N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b \right]} \right] \quad (1.35)$$

Es claro que si  $k^*$  existe –es positivo-,  $a^*$  será positivo, ya que se cumple  $\omega(1-\alpha) > e$ .

Reordenando los términos tenemos:

$$k^* = \left[ \frac{N\beta[\omega(1-\alpha) - e]^{\frac{1}{(1-\alpha)}}}{[N(2+\theta)\beta + \gamma b]\omega} \right]$$

$$a^* = \left[ \frac{N\beta[\omega(1-\alpha) - e]^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}}}{[N(2+\theta)\beta + b\gamma]\omega} \right] \left[ \frac{[\omega(1-\alpha) - e]}{\left[ N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b \right]} \right]$$

Esta solución puede ser directamente extendida al caso en que la existe un factor tecnológico  $\tau$  que multiplica a la función de producción:

$$k^* = \left[ \frac{\tau N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} [\omega(1-\alpha) - e]}{\left[ N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b \right] (2+\theta)\omega} \right]^{\frac{1}{(1-\alpha)}}$$

$$a^* = \left[ \frac{\tau N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} [\omega(1-\alpha) - e]}{\left[ N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b \right] (2+\theta)\omega} \right]^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}} \left[ \frac{\tau [\omega(1-\alpha) - e]}{\left[ N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b \right]} \right]$$

### A.7 Dinámica local

El modelo se puede caracterizar por dos ecuaciones en diferencias de primer grado en dos variables. Este sistema es no lineal, pero sus dinámicas pueden analizarse localmente con una aproximación lineal:

$$k_{t+1} = \mathcal{H}(k_t, a_t) \quad (1.36)$$

$$a_{(t+1)} = \mathcal{U}(k_t, a_t) \quad (1.37)$$

$$\begin{bmatrix} k_t - k^* \\ a_t - a^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{(t-1)} - k^* \\ a_{(t-1)} - a^* \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

$$a_{11} = \frac{\partial \mathcal{H}(k^*, a^*)}{\partial k_t}; \quad a_{12} = \frac{\partial \mathcal{H}(k^*, a^*)}{\partial a_t}$$

$$a_{21} = \frac{\partial \mathcal{U}(k^*, a^*)}{\partial k_t}; \quad a_{22} = \frac{\partial \mathcal{U}(k^*, a^*)}{\partial a_t}$$

$$J = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Ahora se procede a obtener las derivadas parciales y se obtiene:

$$a_{11} = \frac{\partial \mathcal{H}(k^*, a^*)}{\partial k_t} = \frac{(1-\alpha)\alpha k^{*(\alpha-1)}}{(2+\theta)} - \frac{(1-\alpha)\alpha k^{*(\alpha-1)}}{(2+\theta)\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)} - \frac{\frac{(2+\theta)\beta}{\omega\gamma}Ne\alpha k^{*(\alpha-1)}}{(2+\theta)\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)}$$

$$a_{11} = \frac{\partial \mathcal{H}(k^*, a^*)}{\partial k_t} = \alpha k^{*(\alpha-1)} \frac{(2+\theta)\beta N((\omega(1-\alpha)-e))}{\omega\gamma\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)} \quad (1.39)$$

$$a_{12} = \frac{\partial \mathcal{H}(k^*, a^*)}{\partial a_t} = \frac{N\beta(2+\theta)(1-b)}{(2+\theta)\omega\gamma\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)}$$

$$a_{12} = \frac{\partial \mathcal{H}(k^*, a^*)}{\partial a_t} = \frac{N\beta(1-b)}{\omega\gamma\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)} \quad (1.40)$$

$$a_{21} = \frac{\partial \mathcal{U}(k^*, a^*)}{\partial k_t} = \frac{\alpha k^{*(\alpha-1)}(-e)\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)}{\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)} + \frac{w\alpha(1-a)k^{*(\alpha-1)}}{\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)} + \frac{(2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}Ne\alpha k^{*(\alpha-1)}}{\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)}$$

$$a_{21} = \frac{\partial \mathcal{U}(k^*, a^*)}{\partial k_t} = \alpha k^{*(\alpha-1)} \frac{[(\omega(1-\alpha)-e)]}{\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)} \quad (1.41)$$

$$a_{22} = \frac{\partial \mathcal{U}(k^*, a^*)}{\partial a_t} = (1-b) - \frac{(1-b)(2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N}{\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)}$$

$$a_{22} = \frac{\partial \mathcal{U}(k^*, a^*)}{\partial a_t} = \frac{(1-b)}{\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)} \quad (1.42)$$

Las dinámicas del modelo cerca del estado estacionario (k,a), queda determinado por la siguiente matriz:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\alpha k^{*(\alpha-1)}\beta N[(\omega(1-\alpha)-e)]}{\omega\gamma\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)} & \frac{N\beta(1-b)}{\omega\gamma\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)} \\ \frac{(\alpha k^{*(\alpha-1)}(\omega(1-\alpha)-e))}{\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)} & \frac{(1-b)}{\left((2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}N+1\right)} \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

Ahora caracterizamos la matriz:

$$TrJ = a_{11} + a_{22}$$

$$TrJ = \frac{\alpha k^{(\alpha-1)} \beta N ((\omega(1-\alpha) - e))}{\omega \gamma \left( (2+\theta) \frac{\beta}{\gamma} N + 1 \right)} + \frac{(1-b)}{\left( (2+\theta) \frac{\beta}{\gamma} N + 1 \right)} \quad (1.44)$$

$$DetJ = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$DetJ = \frac{\alpha k^{(\alpha-1)} \beta N ((\omega(1-\alpha) - e))}{\omega \gamma \left( (2+\theta) \frac{\beta}{\gamma} N + 1 \right)} \cdot \frac{(1-b)}{\left( (2+\theta) \frac{\beta}{\gamma} N + 1 \right)} - \dots$$

$$- \left[ \frac{N \beta (1-b)}{\omega \gamma \left( (2+\theta) \frac{\beta}{\gamma} N + 1 \right)} \cdot \frac{(\alpha k^{(\alpha-1)} (\omega(1-\alpha) - e))}{\left( (2+\theta) \frac{\beta}{\gamma} N + 1 \right)} \right]$$

$$DetJ = 0 \quad (1.45)$$

El polinomio característico tiene dos autovalores o eigenvalores:

$$P(\mu) = \mu^2 - T\mu + D$$

$$\mu_1 = TrJ$$

$$\mu_2 = 0$$

El caso no-hiperbólico requiere que el valor absoluto de cualquier de los autovalores sea igual a 1 (de La Croix & Michel, 2002). En primer lugar, reemplazamos  $k$  estacionario en la traza (1.44) y se iguala a 1:

$$\frac{\alpha(N\beta(2+\theta) + b\gamma) + (1-b)\gamma}{((2+\theta)\beta N + \gamma)} = 1$$

$$\alpha = \frac{(N\beta(2+\theta) + b\gamma)}{((2+\theta)\beta N + b\gamma)} = 1$$

Por la forma de la función de producción escogida, este caso está excluido del dominio del parámetro  $\alpha : 0 < \alpha < 1$ . Alternativamente, igualamos la traza y se iguala a -1:

$$\frac{\alpha(N\beta(2+\theta) + b\gamma) + (1-b)\gamma}{((2+\theta)\beta N + \gamma)} = -1$$

$$\alpha = \frac{-N\beta(2 + \theta) + (2 - b)\gamma}{(N\beta(2 + \theta) + b\gamma)} < 0$$

Este caso también queda descartado. Ahora, debido a  $\mu_1 = TrJ$  es menor a 1 en valor absoluto y  $\mu_2 = 0$  también, el modelo es localmente estable. Alternativamente, se puede analizar las dinámicas en base a la traza y determinante de J (de La Croix & Michel, 2002). Una condición necesaria y suficiente es:

$$|1 + D| > |T|, \quad |D| < 1$$

La matriz J cumple con esta especificación. Ahora podemos determinar que el modelo es localmente estable.

## **B. Simulaciones numéricas**

### **B.1 Modelo descentralizado básico**

Las simulaciones numéricas muestran diferentes tipos de convergencias, para ciertas combinaciones de parámetros. Se adjunta la hoja electrónica en Excel, para reproducción de las simulaciones. Se presentan algunos resultados:

Los parámetros que se van a utilizar tienen la siguiente nomenclatura:

T	factor tecnológico
Be	Preferencia por consumo
Y	Preferencia por ambiente
b	Velocidad de estabilización natural
e	grado de contaminación del producto
p	impaciencia por consumir
a	participación del capital en el producto
n	crecimiento poblacional
w	eficiencia de abatimiento ambiental
k*	capital estacionario
a*	ambiente estacionario
a(0)	ambiente per-cápita inicial
N(0)	Población inicial
k(0)	capital inicial
Ae	Índice de valoración ambiental natural

Varios de los parámetros utilizados no se han fijado para reproducir las características de una economía real. Esto se deja para trabajos futuros. Se recuerda sin embargo, los rangos determinados para cada uno de ellos en el capítulo IV. Para los parámetros microeconómicos estándar se han fijado de acuerdo a parámetros estándar de la literatura de generaciones traslapadas (Blanchard & Fischer, 1989; de La Croix & Michel, 2002). Para el parámetro de grado de contaminación de la economía se utiliza como proxy la eficiencia energética del Ecuador en algunos casos (Falconí, 2002). La población se fija en un nivel estacionario, debido a que el problema poblacional es complejo y requiere ser endogenizado. El objetivo de este ejercicio es mostrar la complejidad de las dinámicas del modelo y caracterizar el tipo de convergencias.

### **Caso 1:**

T	1
Be	0.5
Y	0.1
b	0.9
e	0.59
p	0
a	0.33
n	0
w	1
k*	0.007505246
a*	1.50019E-14
a(0)	50
N(0)	1E+11
k(0)	0
Ae	100

Además, se demuestra que para un valor arbitrariamente alto de población estacionaria, el estado estacionario analítico -derivado en el capítulo IV- tiene un error cercano a cero. Como se puede ver en la siguiente tabla:

a*	1.50105E-14	-0.05734%
k*	0.007505245	0.00001%

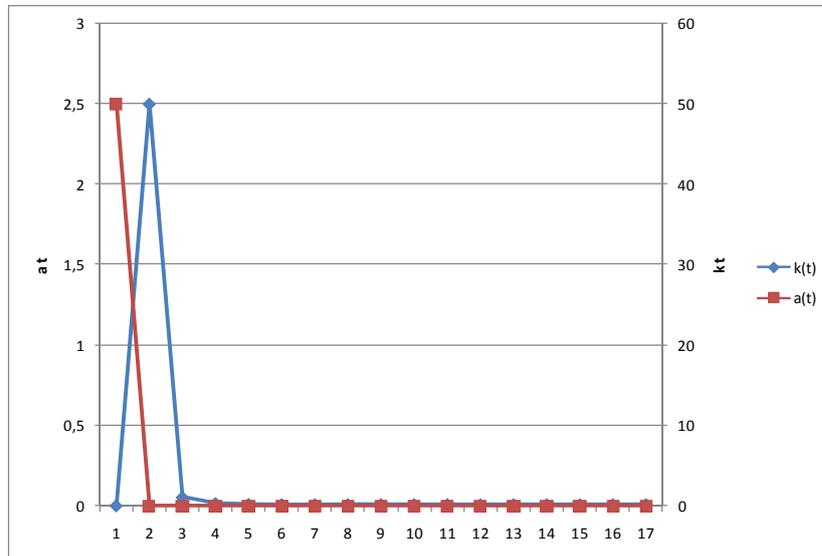
Dónde se presenta el estado estacionario calculado desde la especificación derivada en el capítulo IV y además el error relativo, que es cercano a cero.

Ahora se presenta, los resultados de la solución centralizada para los mismos valores de los parámetros, y con un R de cero, o de regla de oro:

R	0.0000000000
k*	0.0505235552
a*	0.0144353016 ..

Esta economía sobre-acumula capital físico y sobre-degrada el medioambiente. No es eficiente en términos de Pareto.

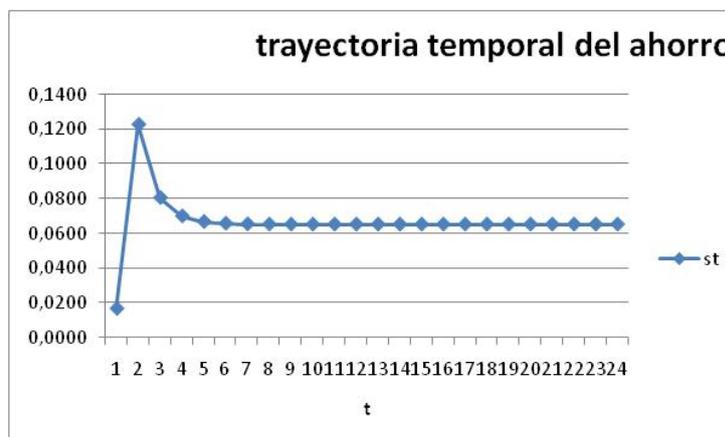
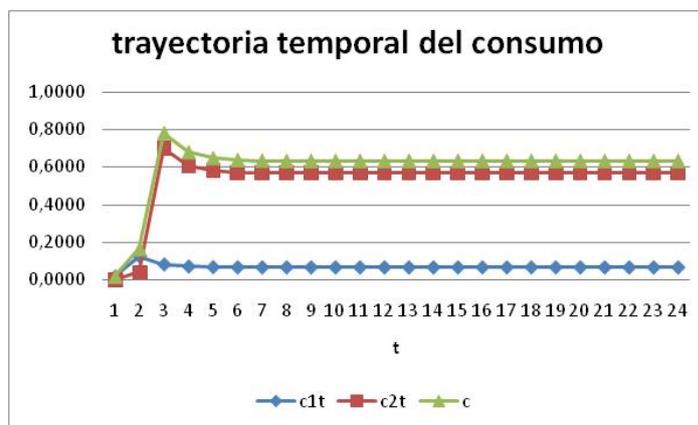
La convergencia de las trayectorias para  $k_t$  y  $a_t$  se observa en el siguiente gráfico:



La convergencia de  $k_t$  es no monotónica y muestra un pico que corresponde a una generación que aprovecha de su posición inicial para tener un alto nivel de consumo a costa del bienestar de las demás. Se debe recordar que cada  $t$ , representa 20 o 30 años. En este caso se puede observar que las primeras generaciones que tienen poco capital y una dotación alta de ambiente, explotan el medioambiente de manera excesiva. Esto les permite aumentar sus ingresos y aumentar su capital, sin embargo, esto disminuye permanentemente el nivel de calidad ambiental e inclusive el capital de las siguientes generaciones. Este, podría ser el caso de un boom de recursos naturales. Al tener muchos recursos naturales y poco capital, se obtienen ingresos de la explotación de los recursos pero esto no es sostenible en el largo plazo. La economía descentralizada es incapaz de utilizar la alta dotación de ambiente para convertirla en capital físico. Así, una economía con más recursos naturales será más inequitativa a nivel intergeneracional que otra con pocos recursos naturales.

Una curva de Kutznets ambiental no puede ser derivada directamente, debido a la naturaleza discreta, con tiempos de 30 años. Sin embargo, la variable

mt sigue este patrón. Cuándo la economía tiene bajo capital es negativa, al aumentar el capital disminuye. Esto coincide con el hecho de que ciertas variables como la deforestación, disminuyan al aumentar la riqueza de la economía. A largo plazo, se mantiene la tendencia de una menor degradación que inclusive se convierte en mantenimiento ambiental. No obstante, el nivel total de calidad ambiental baja permanentemente, debido a la contaminación que es directamente proporcional a la producción. Posible extensiones, pueden incluir un parámetro e endógeno, que sea función del progreso tecnológico. Esto se observa directamente en la simulación en la hoja electrónica.



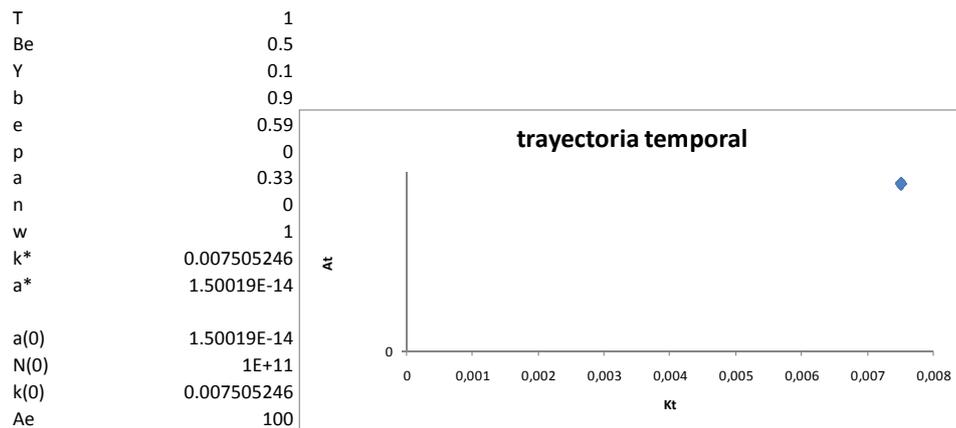
Las trayectorias temporales o dinámicas del consumo y del ahorro siguen el mismo patrón que el capital físico de la economía. Esto significa que las primeras generaciones consumen mucho más que las últimas –y a expensas de estas-. El ahorro también sube pero este ahorro es insuficiente para mantener el nivel de capital alcanzado por las generaciones que explotan el medioambiente. Esta afirmación puede ser observada en la trayectoria dinámica del capital que

alcanza un nivel estacionario con un nivel menor a aquel de las primeras generaciones.

### Análisis de convergencia local:

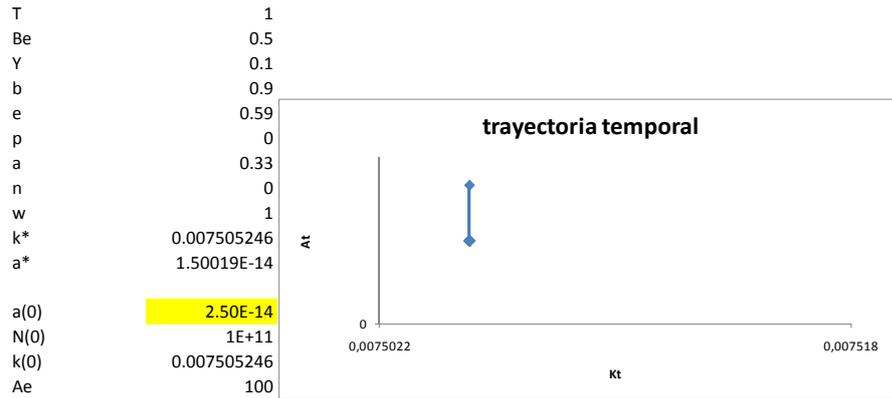
Como sustituto del análisis de digrama de fase, que no es posible debido a la complejidad de las dinámicas del presente modelo se utiliza una simulación con una hoja electrónica. Debido a la naturaleza discreta del modelo de generaciones traslapadas, este procedimiento nos proporciona una imagen muy buena del funcionamiento del modelo (Shone, 2002).

Se parte del estado estacionario, es decir, fijando como condiciones iniciales, los valores de estado estacionario:



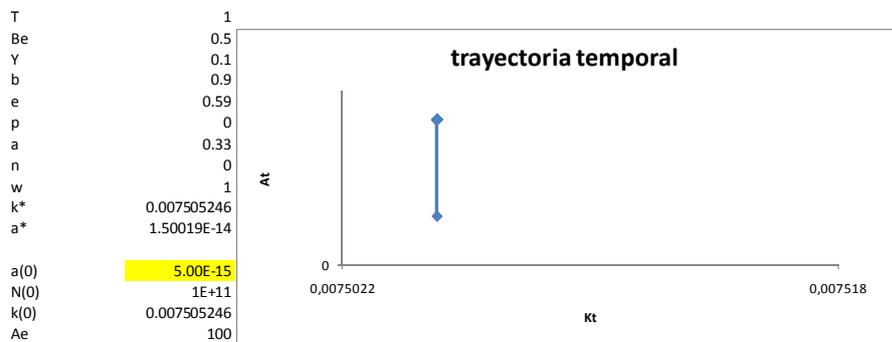
Ahora se realizan pequeñas perturbaciones cercanas al estado estacionario:

1. Una perturbación positiva del nivel de  $a(0)$



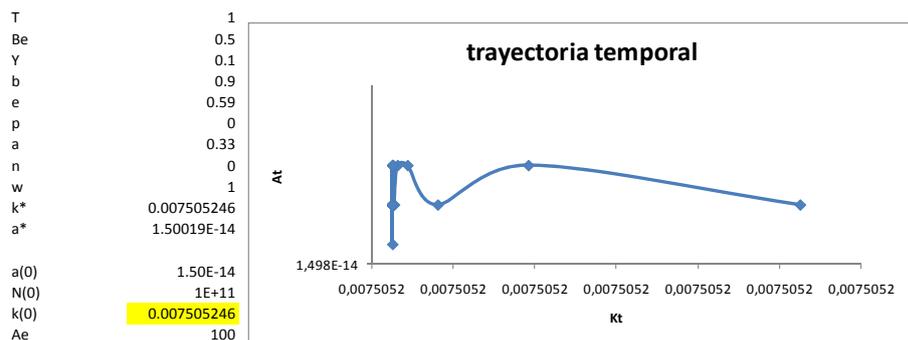
Converge de manera lineal.

### 2. Una perturbación negativa del nivel de a(0)

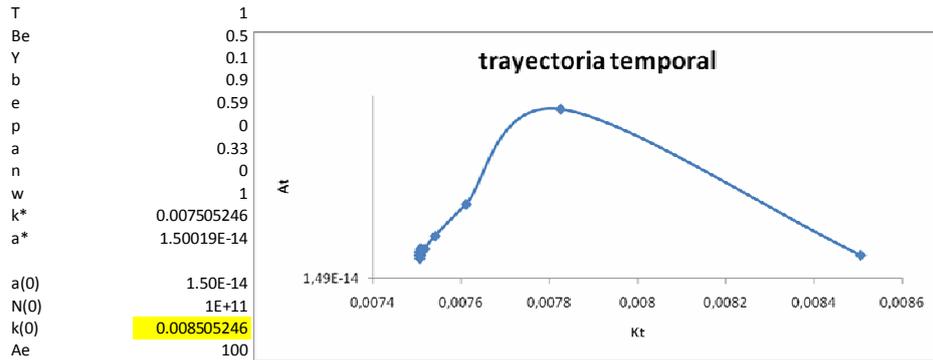


Converge de manera lineal.

### 3. Una perturbación positiva del nivel de k(0)

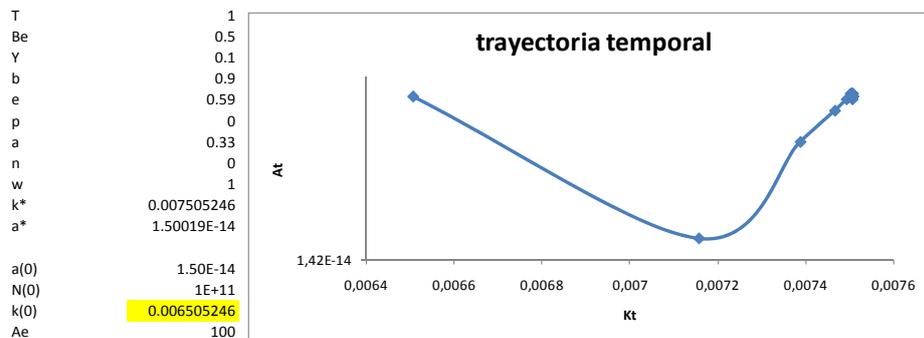


La convergencia es no monótona, aún para un cambio de 1 en sexto decimal. Para evitar, que la trayectoria sea generada por la naturaleza aproximada de los cálculos de la hoja electrónica, debido a los niveles cercanos a cero del nivel estacionario, se realiz un perturbación mayor en el tercer decimal:



Es convergente, pero lo hace no monotónicamente. Es una dinámica no lineal.

#### 4. Una perturbación negativa del nivel de $k(0)$



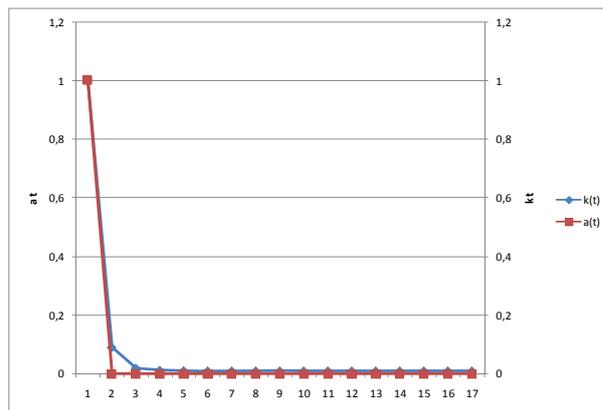
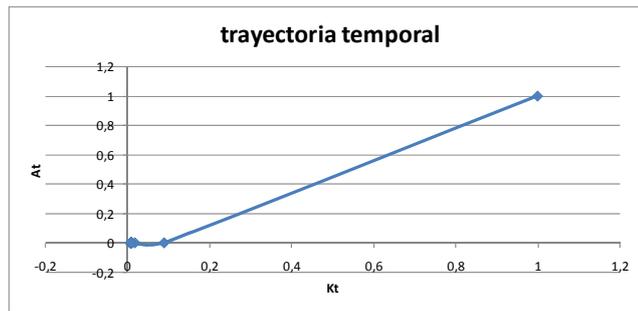
Es convergente, pero lo hace no monotónicamente. Es una dinámica no lineal.

#### Estabilidad global:

Bajo estos parámetros la economía muestra gran estabilidad. Es interesante notar que debido a las fuerzas contrarias que existen, un nivel arbitrariamente alto de capital o medioambiente convergen al mismo estado estacionario que uno bajo. Se debe notar que con especificaciones diferentes de la función de utilidad y la de ahorro, se podría obtener varios estados estacionarios, en cuyo caso, estas condiciones iniciales juegan un papel muy importante (John & Pecchenino, 1994). Esta característica se explica, debido a que un alto nivel de capital produce un alto nivel de contaminación. Es decir,

degrada el medioambiente, esto exige gastos en mantenimiento ambiental, lo que disminuye los recursos para ahorrar y que a su vez disminuye el nivel de capital en el siguiente período, y así consecutivamente, hasta alcanzar el nivel estacionario. Esto se aprecia en los siguientes gráficos:

T	1
Be	0.5
Y	0.1
b	0.9
e	0.59
p	0
a	0.33
n	0
w	1
$k^*$	0.007505246
$a^*$	1.50019E-14
$a(0)$	1
$N(0)$	1E+11
$k(0)$	1
Ae	100

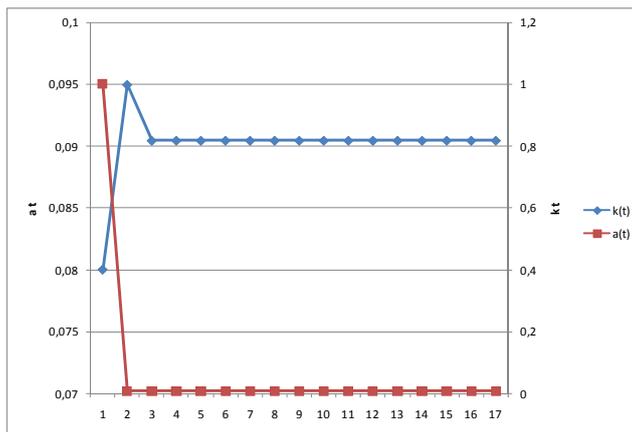


Debido a la escala, se pierden las características no monotónicas cercanas al estado estacionario.

**Caso 2:**

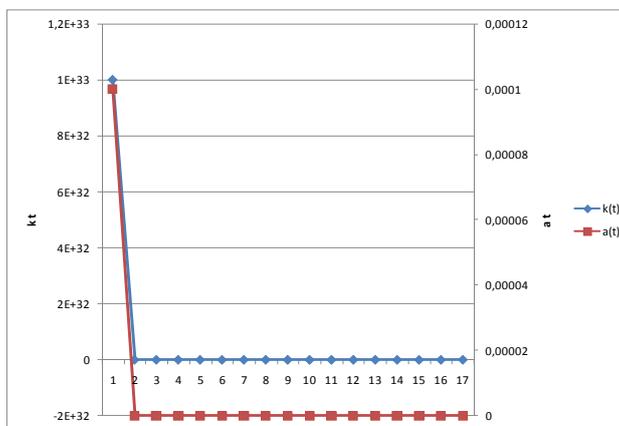
El presente modelo presenta bifurcaciones o cambios en la dinámica estructural bajo ciertas combinaciones de parámetros. Se presentan algunos casos:

T 1  
 Be 0.1  
 Y 0.9  
 b 0.99  
 e 0.10  
 p 0.1  
 a 0.9  
 n 0  
 w 1  
 k\* 0.090448129  
 a\* 0.008140332  
 a(0) 1  
 N(0) 100  
 k(0) 0.08  
 Ae 20



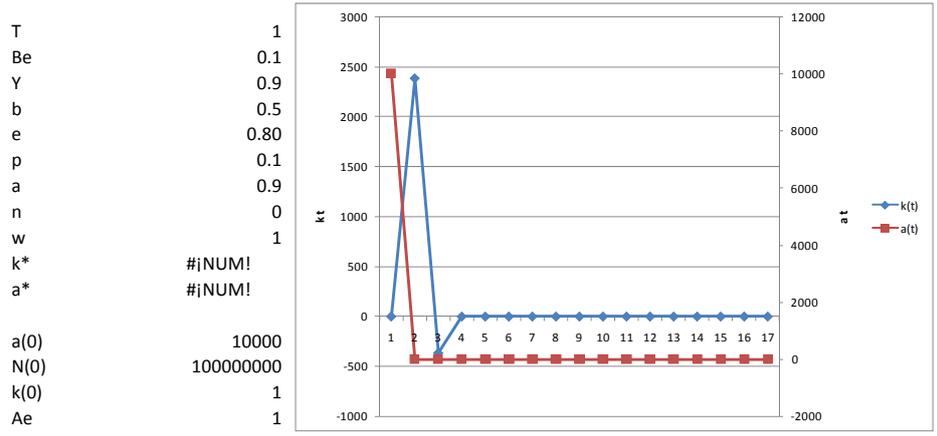
Si se tiene una participación del capital muy alta, en este caso del 0.9, la economía colapsa bajo ciertos niveles muy altos de capital y niveles bajos de medioambiente. Esto significa, que en ese caso el daño ambiental producido no puede ser revertido por inversión ambiental. Es una curiosidad teórica que ilustra, como cambia la estructura dinámica del modelo si cambian los parámetros:

T 1  
 Be 0.1  
 Y 0.9  
 b 0.99  
 e 0.10  
 p 0.1  
 a 0.9  
 n 0  
 w 1  
 k\* #iNUM!  
 a\* #iNUM!  
 a(0) 0.0001  
 N(0) 100  
 k(0) 1E+33  
 Ae 1



### Caso 3:

Como se determinó en el Capítulo IV, si el grado de contaminación del producción es demasiado alto y la eficiencia del abatimiento ambiental es muy baja –su radio  $e/w$  es igual a  $(1-a)$  o mayor, entonces la economía colapsa, después de pocos períodos:

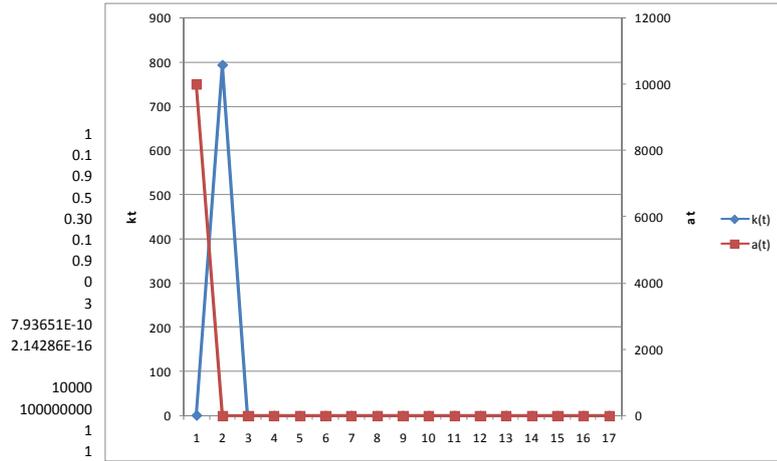


En este caso, los agentes actúan de manera similar al CASO 1, explotando su alta dotación de recursos naturales para aumentar su producto y su consumo, pero debido a que la producción es sucia –e es alto-, entonces la economía colapsa. Esto se debe ver como una catástrofe ambiental que conlleva a una catástrofe económica. Se puede ilustrar esto con ejemplos de sequías provocadas por excesiva deforestación o por la destrucción de un ecosistema, que afectan directamente la economía. Cabe mencionar, que el planificador central puede evitar en este caso el colapso de la economía, aunque se tenga niveles muy bajos de capital y calidad ambiental:

R	0.0000000000
$k^*$	0.0098493029
$a^*$	0.0005183867

El mismo e, puede generar un estado estacionario positivo si w es suficientemente alto; es decir, la tecnología de abatimiento –y el rendimiento natural-:

T  
Be  
Y  
b  
e  
p  
a  
n  
w  
k\*  
a\*  
a(0)  
N(0)  
k(0)  
Ae



De nuevo la convergencia es no monotónica y tampoco es sustentable, ni eficiente:

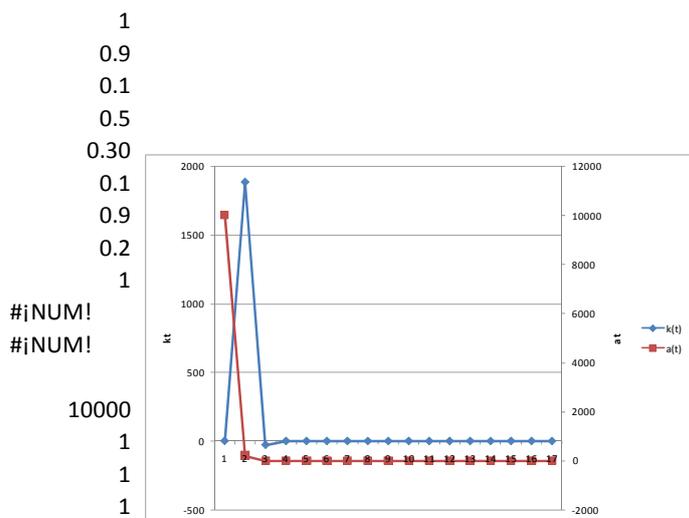
R 0.0000000000  
k\* 0.1215766546  
a\* 0.0191963163

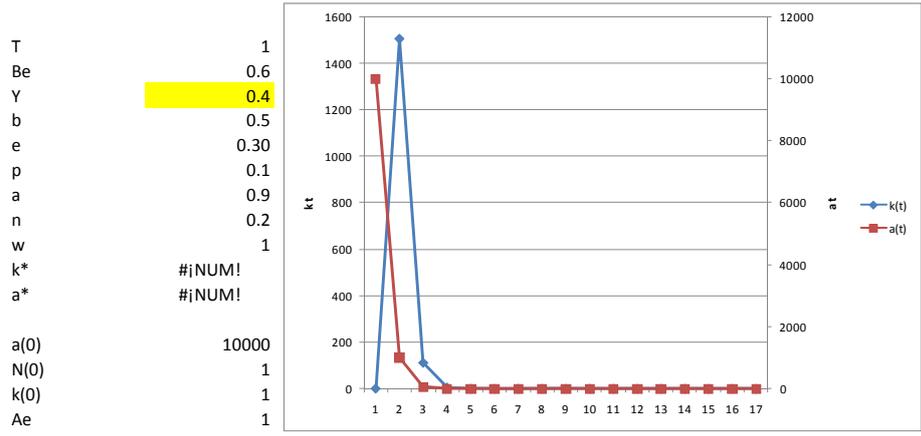
En este caso se sub-acumula capital y se sobre-degrada el medioambiente.

## B.2 Modelo con crecimiento poblacional

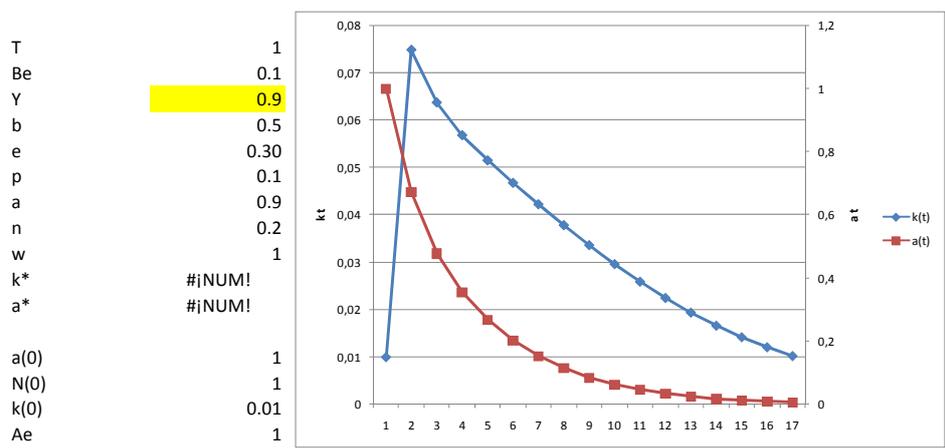
Cuándo se considera un crecimiento poblacional positivo, las dinámicas son similares pero la economía tiende al colapso:

T  
Be  
Y  
b  
e  
p  
a  
n  
w  
k\*  
a\*  
a(0)  
N(0)  
k(0)  
Ae

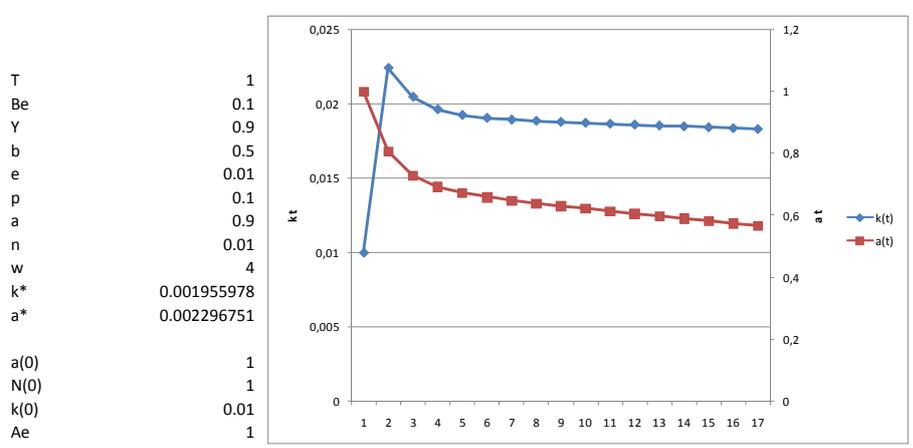




Esto nos dice, que si las preferencias son más verdes con los mismos parámetros, en presencia de crecimiento poblacional, se puede lograr que la economía exista por más tiempo. Aún así, colapsa.



En el caso optimista de gran limpieza de tecnologías y alta eficiencia de abatimiento ambiental se tiene:

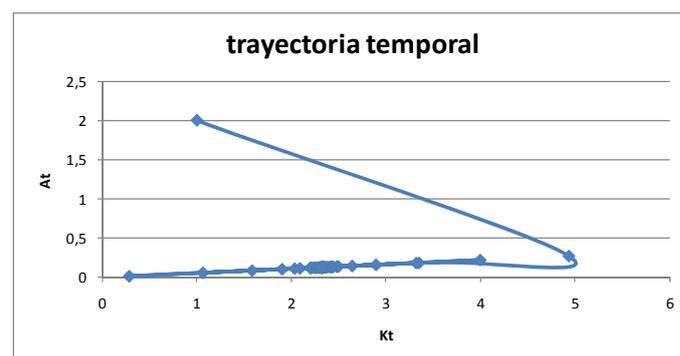
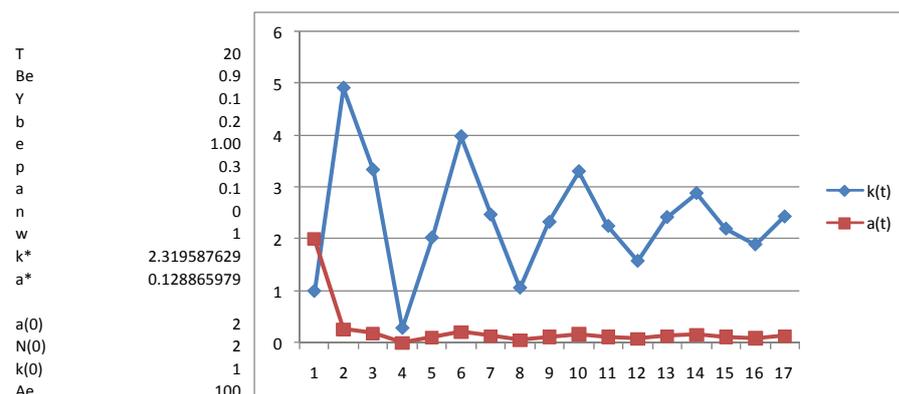


En este caso con niveles extremadamente altos no se tiene un estado estacionario como se observa del gráfico, sino que el colapso puede demorarse un período muy largo.

### B.3. Crecimiento endógeno:

El panorama presentado es poco optimista para mantener un crecimiento sostenido en el tiempo, de manera descentralizada, sin embargo, una extensión para incluir externalidades positivas en la producción o crecimiento endógeno, mejora las perspectivas:

#### CASO 4:

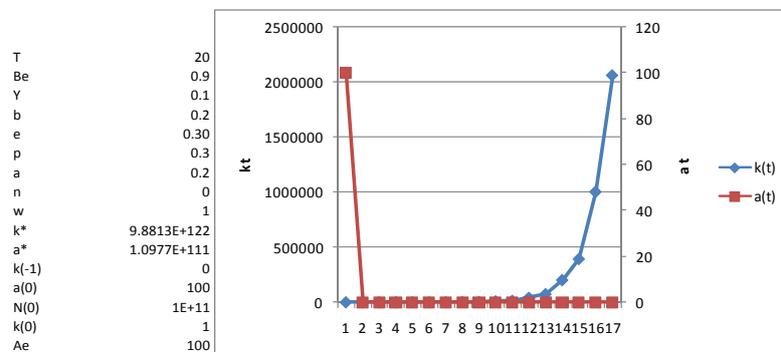


En este caso, con un radio de 1 de  $e/w$ , la economía tiende a un estado estacionario positivo. Sin embargo, las externalidades negativas generan los ciclos –aún cuándo  $N$  es bajo para disminuir las externalidades de la tragedia

de los comunes-.Este resultado muestra que en los casos en los cuáles una economía con crecimiento endógeno es sucia –w bajo y e alto-, no se puede tener un crecimiento positivo ilimitado –como es el caso de los modelos estándar de crecimiento endógeno-.

### CASO 5:

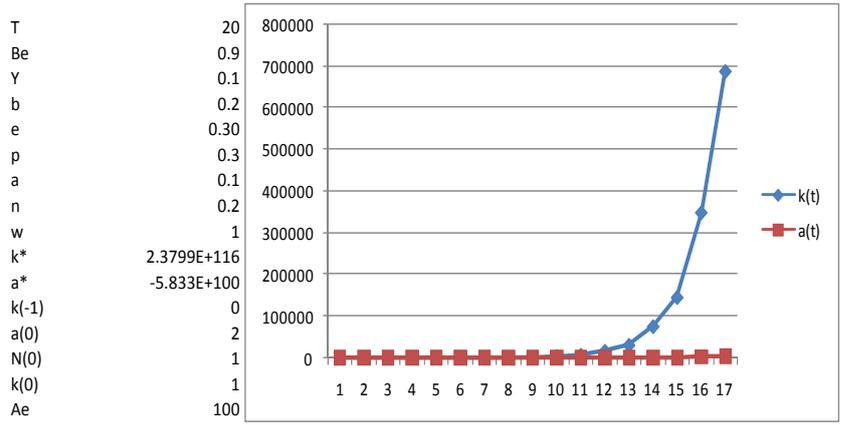
En caso de que el radio  $e/w$  sea menor a 1 se puede tener el caso de un nivel creciente de capital con un nivel positivo de medioambiente:



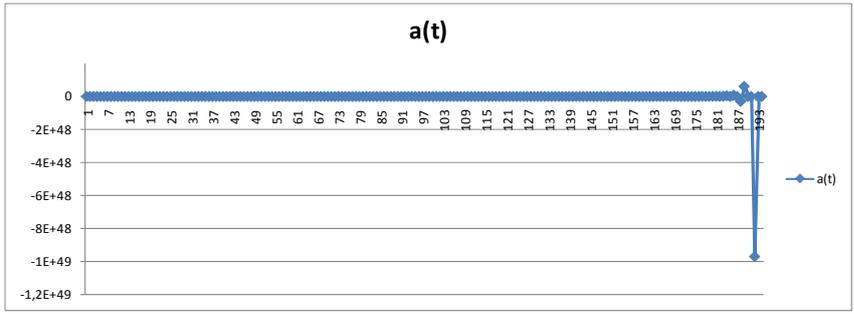
Se puede observar que la externalidad positiva de la producción más que compensa a las externalidades negativas de la contaminación. Sin embargo, esto no excluye que se haya lugar para mejorar la eficiencia de las trayectorias, mediante políticas para incentivar las externalidades positivas y controlar las externalidades negativas.

### CASO 6:

Si se considera crecimiento poblacional y también crecimiento endógeno tenemos:



En esta economía se tiene niveles crecientes de capital y niveles estables de medioambiente, aunque bajos. Sin embargo, a largo plazo la economía colapsa. No obstante, a largo plazo no los parámetros pueden cambiar y se puede por ejemplo mejorar la limpieza de las tecnologías. Así, se puede tener un crecimiento siempre positivo, aún en presencia de externalidades negativas y de crecimiento poblacional geométrico. De nuevo, este resultado no significa que se pueda realizar mejoras de eficiencia mediante la intervención estatal, que es la principal intuición del modelo básico.



El modelo básico, no intenta explicar el crecimiento económico de un país. Para hacerlo se debe incluir el crecimiento endógeno con capital humano y otras modificaciones. El objetivo principal es establecer que el crecimiento se ve afectado por el medioambiente, y buscar las fuentes de ineficiencia y de inequidad. Al incluir, el medioambiente se puede observar también que el bienestar no sólo consiste en la riqueza económica sino en un medioambiente sano. Además, se observó que una alta dotación de recursos naturales no afecta

el nivel de estado estacionario de una economía. Las primeras generaciones tienen un mayor bienestar aprovechándose de las demás generaciones, debido a su posición privilegiada. Esto puede explicar de manera endógena los llamados booms de recursos naturales que causan un auge económico seguido de contracción de la economía.

## C. Comando Central

### C.1 Comando Central –considerando depreciación- d es 1:

$$Max \sum_{t=0}^{\infty} (1+R)^{-t-1} \left[ u(c_{1t}, A_t) + (1+\theta)^{-1} u(c_{2t+1}, A_{t+1}) \right] \quad (1.46)$$

Sujeto a<sup>4</sup>:

$$s.a. \quad K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} = K_{t+1} + Nc_{1t} + Nc_{2t} + M_t$$

$$A_{(t+1)} = (1-b)A_t + b\bar{A} - P_t + \omega M_t$$

Utilizando, la ecuación paramétrica de la utilidad:

$$Max \sum_{t=0}^{\infty} (1+R)^{-t-1} \left[ \beta \ln c_{1t} + \gamma \ln A_t + (1+\theta)^{(-1)} (\beta \ln c_{2(t+1)} + \gamma \ln A_{(t+1)}) \right]$$

$$s.a. \quad k_t^\alpha = k_{t+1} + c_{1t} + c_{2t} + m_t \quad (1.47)$$

$$A_{(t+1)} = (1-b)A_t + b\bar{A} - P_t + \omega M_t$$

$$A_{(t+1)} = (1-b)A_t + b\bar{A} - eN \cdot k_t^\alpha + \omega \cdot Nm_t \quad (1.48)$$

Para solucionar el modelo, se reemplaza las restricciones en la función objetivo. El método utilizado aquí es similar al de Blanchard & Fischer (1989). Por facilidad notacional, se expresará las condiciones de primer orden –CPO-, en términos de la ecuación general de la utilidad. Ahora:

$$\dots + [u(c_{1t-1}, A_{t-1}) + (1+\theta)^{-1} u(c_{2t}, A_t)] + (1+R)^{-1} [u(c_{1t}, A_t) + (1+\theta)^{-1} u(c_{2t+1}, A_{t+1})] + \dots$$

---

<sup>4</sup> Para el análisis del comando central se considera el caso de  $n = 0, N_t = N_{t+1} = N$ .

$$\begin{aligned}
&= \dots + u[k_{t-1}^\alpha - k_t - c_{2t-1} - m_{t-1}, A_{t-1}] + \dots \\
&\dots + (1 + \theta)^{-1}u(c_{2t}, A_t) + (1 + R)^{-1}u[k_t^\alpha - k_{t+1} - c_{2t} - m_t, A_t] + \dots \\
&\dots + (1 + R)^{-1}(1 + \theta)^{-1}u(c_{2t+1}, [(1 - b)A_t + b\bar{A} - eN \cdot k_t^\alpha + \omega \cdot Nm_t]) + \dots
\end{aligned}$$

Se deriva la función objetivo, para las variables de estado,  $k_t$  y  $a_t$  y para las variables de control  $c_t$  y  $m_t$ . Tenemos cuatro CPO:

$$\begin{aligned}
A_t : & (1 + \theta)^{-1}u_2(c_{2t}, A_t) + (1 + R)^{-1}u_2(c_{1t}, A_t) + \dots \\
& \dots + (1 + R)^{-1}(1 + \theta)^{-1}u_2(c_{2t+1}, A_{t+1})(1 - b) + (1 + R)^{-2}u_2(c_{1t+1}, A_{t+1})(1 - b) = 0 \quad (1.49)
\end{aligned}$$

$$c_{2t} : (1 + \theta)^{-1}u_1(c_{2t}, A_t) - (1 + R)^{-1}u_1(c_{1t}, A_t) = 0 \quad (1.50)$$

$$\begin{aligned}
k_t : & -u_1(c_{1t-1}, A_{t-1}) + (1 + R)^{-1}(\alpha k_t^{\alpha-1})u_1(c_{1t}, A_t) + \dots \\
& \dots + (1 + R)^{-1}(1 + \theta)^{-1}u_2(c_{2t+1}, A_{t+1})(-eN\alpha k_t^{\alpha-1}) + \dots \\
& \dots + (1 + R)^{-2}u_2(c_{1t+1}, A_{t+1})](-eN\alpha k_t^{\alpha-1}) = 0 \quad (1.51)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_t : & -(1 + R)^{-1}u_1(c_{1t}, A_t) + (1 + R)^{-1}(1 + \theta)^{-1}u_2(c_{2t+1}, A_{t+1})(\omega N) + \dots \\
& \dots + (1 + R)^{-2}u_2(c_{1t+1}, A_{t+1})(\omega N) = 0 \quad (1.52)
\end{aligned}$$

Ahora el sistema queda completamente determinado, para encontrar una solución, se utiliza la ecuación logarítmica paramétrica, y las CPO quedan determinadas así:

La condición (1.77):

$$\begin{aligned}
A_t : & (1 + \theta)^{-1}\frac{Y}{A_t} + (1 + R)^{-1}\frac{Y}{A_t} + \dots \\
& \dots + (1 + R)^{-1}(1 + \theta)^{-1}\frac{Y}{A_{t+1}}(1 - b) + (1 + R)^{-2}\frac{Y}{A_{t+1}}(1 - b) = 0
\end{aligned}$$

Un poco de manipulación:

$$\frac{1}{A_t} \left( \frac{\gamma}{(1+\theta)} + \frac{\gamma}{(1+R)} \right) = - \frac{1}{A_{t+1}} \left( \frac{\gamma(1-b)}{(1+R)(1+\theta)} + \frac{\gamma(1-b)}{(1+R)^2} \right)$$

$$\frac{A_{t+1}}{A_t} = \frac{(b-1)}{(1+R)} \quad (1.53)$$

Reemplazando (1.81) en la restricción medioambiental:

$$\frac{(b-1)}{(1+R)} A_t = (1-b)A_t + b\bar{A} - P_t + \omega M_t$$

Ahora se tiene, la ecuación centralizada para  $m_t$ :

$$M_t = \left[ (b-1)A_t \frac{2+R}{(1+R)} A_t - b\bar{A} + P_t \right] / \omega$$

En términos per-cápita:

$$m_t = \left[ (b-1)A_t \frac{2+R}{(1+R)} A_t - b\bar{A} + P_t \right] / \omega N$$

$$m_t = \left[ (b-1)A_t \frac{2+R}{(1+R)} - b\bar{A} + eNk_t^\alpha \right] / \omega N \quad (1.54)$$

$$\frac{dm_t}{d(P_t)} > 0; \quad \frac{dm_t}{dA_t} < 0; \quad \frac{dm_t}{d\bar{A}} < 0; \quad \frac{dm_t}{dN} \geq 0$$

El planificador central no respeta la elección de  $m_t$  individual.

La condición (1.78):

$$c_{2t} : (1+\theta)^{-1} \frac{\beta}{c_{2t}} - (1+R)^{-1} \frac{\beta}{c_{1t}} = 0$$

$$c_{1t} = \frac{(1+\theta)}{(1+R)} c_{2t} \quad (1.55)$$

La condición (1.79):

$$k_t : - \frac{\beta}{c_{1t-1}} + (1+R)^{-1} (\alpha k_t^{\alpha-1}) \frac{\beta}{c_{1t}} + \dots$$

$$\begin{aligned} & \dots + (1+R)^{-1}(1+\theta)^{-1} \frac{Y}{A_{t+1}} (-eN\alpha k_t^{\alpha-1}) + \dots \\ & \dots + (1+R)^{-2} \frac{Y}{A_{t+1}} (-eN\alpha k_t^{\alpha-1}) = 0 \end{aligned} \quad (1.56)$$

La condición (1.80):

$$\begin{aligned} m_t : & - (1+R)^{-1} \frac{\beta}{c_{1t}} + (1+R)^{-1}(1+\theta)^{-1} \frac{Y}{A_{t+1}} (\omega N) + \dots \\ & \dots + (1+R)^{-2} \frac{Y}{A_{t+1}} (\omega N) = 0 \\ & \frac{\beta}{(1+R)} \frac{1}{c_{1t}} = \frac{1}{A_{t+1}} \gamma \omega N \frac{(2+R+\theta)}{(1+R)^2(1+\theta)} \\ & A_{t+1} = c_{1t} \left[ \frac{\omega N \gamma}{\beta} \frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)(1+R)} \right] \end{aligned} \quad (1.57)$$

Usando (1.81) y (1.85):

$$A_t = c_{1t} \left[ \frac{\omega N \gamma (2+R+\theta)}{\beta (1+\theta)(b-1)} \right] \quad (1.58)$$

Retomando (1.84):

$$k_t : - \frac{\beta}{c_{1t-1}} + \frac{(\alpha k_t^{\alpha-1})\beta}{c_{1t}(1+R)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{A_{t+1}(1+R)(1+\theta)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{A_{t+1}(1+R)^2} = 0$$

Ahora sustituyo (1.85) en (1.84):

$$\begin{aligned} & - \frac{\beta}{c_{1t-1}} + \frac{(\alpha k_t^{\alpha-1})\beta}{c_{1t}(1+R)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{c_{1t} \left[ \frac{\omega N \gamma}{\beta} \frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)(1+R)} \right] (1+R)(1+\theta)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{c_{1t} \left[ \frac{\omega N \gamma}{\beta} \frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)(1+R)} \right] (1+R)^2} = 0 \\ & - \frac{\beta}{c_{1t-1}} + \frac{(\alpha k_t^{\alpha-1})\beta}{c_{1t}(1+R)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{c_{1t} \left[ \frac{\omega N \gamma}{\beta} \frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)(1+R)} \right] (1+R)(1+\theta)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{c_{1t} \left[ \frac{\omega N \gamma}{\beta} \frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)(1+R)} \right] (1+R)^2} = 0 \\ & - \frac{\beta}{c_{1t-1}} + \frac{(\alpha k_t^{\alpha-1})\beta}{c_{1t}(1+R)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{c_{1t} \left[ \frac{\omega N \gamma}{\beta} (2+R+\theta) \right]} + \frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{c_{1t} \left[ \frac{\omega N \gamma}{\beta} \frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)} \right] (1+R)} = 0 \\ & \frac{\beta}{c_{1t-1}} = \frac{1}{c_{1t}} \left[ \frac{(\alpha k_t^{\alpha-1})\beta}{(1+R)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{\left[ \frac{\omega N \gamma}{\beta} (2+R+\theta) \right]} + \frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{\left[ \frac{\omega N \gamma}{\beta} \frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)} \right] (1+R)} \right] \end{aligned} \quad (1.59)$$

Ahora tomo la ecuación (1.59):

$$\begin{aligned}
-\frac{\beta}{c_{1t-1}} &= \frac{\beta}{c_{1t-1}} \left( \alpha k_t^{\alpha-1} \frac{(\omega - e)}{\omega(1+R)} \right) \\
-\frac{1}{c_{1t-1}} &= \frac{1}{c_{1t}} \left( \alpha k_t^{\alpha-1} \frac{(\omega - e)}{\omega(1+R)} \right) \quad (1.60)
\end{aligned}$$

Reemplazando (1.60) en (1.55), se tiene:

$$c_{2_t} = c_{1t-1} \frac{\left( \alpha k_t^{\alpha-1} \frac{(\omega - e)}{\omega(1+R)} \right)}{(1 + \theta)} \quad (1.61)$$

### C.1.2 Estado estacionario y regla de oro –considerando depreciación- d es 1:

Se realiza el análisis de estado estacionario en (1.87):

$$c_1^*; c_2^*; k^* = c_1; c_2; k$$

$$\begin{aligned}
\frac{\beta}{c_1} &= \frac{1}{c_1} \left[ \frac{(\alpha k^{\alpha-1})\beta}{(1+R)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k^{\alpha-1})}{\left[ \frac{\omega N\gamma}{\beta} (2+R+\theta) \right]} + \frac{\gamma(-eN\alpha k^{\alpha-1})}{\left[ \frac{\omega N\gamma}{\beta} \frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)} \right] (1+R)} \right] \\
-\beta + \left[ \frac{(\alpha k^{\alpha-1})\beta}{(1+R)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k^{\alpha-1})}{\left[ \frac{\omega N\gamma}{\beta} (2+R+\theta) \right]} + \frac{\gamma(-eN\alpha k^{\alpha-1})}{\left[ \frac{\omega N\gamma}{\beta} \frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)} \right] (1+R)} \right] &= 0 \\
-\beta + \frac{\beta\alpha k^{\alpha-1}}{(1+R)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k^{\alpha-1})}{\left[ \frac{\omega N\gamma}{\beta} (2+R+\theta) \right]} + \frac{\gamma(-eN\alpha k^{\alpha-1})}{\left[ \frac{\omega N\gamma}{\beta} \frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)} \right] (1+R)} &= 0 \\
-\beta + \frac{\beta\alpha k^{\alpha-1}}{(1+R)} + \frac{(-e\beta\alpha k^{\alpha-1})}{\omega(1+R)} &= 0 \\
-\beta + \alpha k^{\alpha-1} \frac{\beta(\omega - e)}{\omega(1+R)} &= 0 \\
-\beta(1+R) + \alpha k^{\alpha-1} \frac{\beta(\omega - e)}{\omega} &= 0 \\
\frac{\omega(1+R)}{(\omega - e)} &= \alpha k^{\alpha-1}
\end{aligned}$$

Obtenemos la siguiente condición, que establece que el rendimiento marginal del capital –tasa de interés-, en estado estacionario. Esta es la regla de oro modificada. Cabe notar que si  $R$  es igual a cero, es la regla de oro del capital:

$$\frac{\omega(1+R)}{(\omega-e)} = \alpha k^{\alpha-1} = f'(k_{oro}) \quad (1.62)$$

Cabe notar que la regla de oro no está totalmente determinada pues falta la condición de la calidad medioambiental. Ahora se prosigue obteniendo el capital estacionario que cumple con la regla de oro modificada:

$$\left[ \frac{\omega(1+R)}{\alpha(\omega-e)} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} = k$$

$$\left[ \frac{\alpha(\omega-e)}{\omega(1+R)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} = k \quad (1.63)$$

La existencia de este estado estacionario se garantiza si  $\omega > e$ ; esta condición es similar a la condición de existencia en el caso descentralizado y muestra los límites que impone la introducción de variables ambientales al modelo de generaciones traslapadas. En el caso de que  $\omega = e$ , tenemos un capital estacionario de cero -  $k = 0$ -, una solución trivial.

Ahora se analizará el efecto del descuento intergeneracional en el nivel de capital estacionario:

$$\frac{dk}{dR} = \frac{1}{1-\alpha} \left[ \frac{\alpha(\omega-e)}{\omega(1+R)} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{\alpha(e-\omega)}{\omega(1+R)^2} \quad (1.64)$$

$$\frac{dk}{dR} < 0; \omega > e$$

El caso de  $R$  cero o equidad intergeneracional, nos da el capital dorado, que garantiza la sostenibilidad débil del modelo. En el caso de que todas las generaciones sean consideradas como iguales por el planificador central – $R$  igual a cero–, tenemos el capital dorado  $-k_{oro}$ :

$$\left[ \frac{\alpha(\omega - e)}{\omega} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} = k_{oro}; R = 0 \quad (1.65)$$

Para caracterizar la era de dorada de la economía se debe establecer el nivel dorado del medioambiente. Ahora se recuerda (1.82):

$$m_t = \left[ (b-1)A_t \frac{2+R}{(1+R)} - b\bar{A} + eNk_t^\alpha \right] / \omega N$$

Se reemplaza (1.86) en (1.82):

$$\begin{aligned} m_t &= \left[ (b-1)c_{1t} \left[ \frac{\omega N \gamma (2+R+\theta)}{\beta(1+\theta)(b-1)} \right] \frac{2+R}{(1+R)} - b\bar{A} + eNk_t^\alpha \right] / \omega N \\ m &= \left[ c_1 \left[ \frac{\omega N \gamma (2+R+\theta)}{\beta(1+\theta)} \right] \frac{2+R}{(1+R)} - b\bar{A} + eNk^\alpha \right] / \omega N \end{aligned} \quad (1.66)$$

En estado estacionario (1.83):

$$c_2 = \frac{(1+R)}{(1+\theta)} c_1$$

Además en la restricción:

$$k^\alpha = k + c_1 + c_2 + m$$

Ahora reemplazo (1.95), (1.83) en la restricción, en estado estacionario:

$$\begin{aligned} -k^\alpha + k + c_1 + \frac{(1+R)}{(1+\theta)} c_1 + \frac{\left[ \left[ c_1 \frac{\omega N \gamma (2+R+\theta)}{\beta(1+\theta)} \right] \frac{2+R}{(1+R)} - b\bar{A} + eNk^\alpha \right]}{\omega N} &= 0 \\ s \equiv \frac{\gamma(2+R+\theta)}{\beta(1+\theta)} \end{aligned}$$

$$c_1 \left( 1 + \frac{(1+R)}{(1+\theta)} + S \frac{(2+R)}{(1+R)} \right) = k^\alpha \left( 1 - \frac{e}{\omega} \right) - k + \frac{b\bar{A}}{\omega N}$$

$$c_1 = \frac{\left[ k^\alpha \left( \frac{w-e}{\omega} \right) - k + \frac{b\bar{A}}{\omega N} \right]}{\left( 1 + \frac{(1+R)}{(1+\theta)} + S \frac{(2+R)}{(1+R)} \right)} \quad (1.67)$$

La ecuación (1.96) caracteriza el consumo de los jóvenes en estado estacionario, en el comando central. Es directo derivar el consumo de los viejos:

$$c_2 = \frac{(1+R)}{(1+\theta)} \frac{\left[ k^\alpha \left( \frac{w-e}{\omega} \right) - k + \frac{b\bar{A}}{\omega N} \right]}{\left( 1 + \frac{(1+R)}{(1+\theta)} + S \frac{(2+R)}{(1+R)} \right)} \quad (1.68)$$

La calidad ambiental estacionaria se obtiene reemplazando (1.67) en (1.57):

$$A = c_1 \left[ \frac{\omega N \gamma}{\beta} \frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)(1+R)} \right] \quad (1.69)$$

En términos per-cápita en el estado estacionario<sup>5</sup>:

$$A = \frac{\left[ k^\alpha \left( \frac{w-e}{\omega} \right) - k + \frac{b\bar{A}}{\omega N} \right]}{\left( 1 + \frac{(1+R)}{(1+\theta)} + S \frac{(2+R)}{(1+R)} \right)} \left[ \frac{\omega N \gamma}{\beta} \frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)(1+R)} \right]$$

$$a = \frac{\left[ k^\alpha \left( \frac{w-e}{\omega} \right) - k + \frac{b\bar{A}}{\omega N} \right]}{\left( 1 + \frac{(1+R)}{(1+\theta)} + \left[ \frac{\gamma(2+R+\theta)}{\beta(1+\theta)} \right] \frac{(2+R)}{(1+R)} \right)} \left[ \frac{\omega \gamma}{\beta} \frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)(1+R)} \right] \quad (1.70)$$

Esta ecuación determina el nivel estacionario del comando central, para la calidad medioambiental per-cápita.

<sup>5</sup> No se debe confundir el superíndice a  $\alpha$  que es la contribución del capital al producto de la variable  $a$ , que es el estado estacionario per-cápita del nivel de calidad ambiental. Se debe tener cuidado, por la similitud de los caracteres utilizados.

$$a = \frac{\left[ k^\alpha \left( \frac{w-e}{\omega} \right) - k + \frac{b\bar{A}}{\omega N} \right]}{\left( 1 + \frac{1}{(1+\theta)} + \left[ \frac{\gamma(2+\theta)}{\beta(1+\theta)} \right] 2 \right)} \left[ \frac{\omega\gamma(2+\theta)}{\beta(1+\theta)} \right] \quad (1.71)$$

La era dorada de la economía, queda determinada por el nivel de capital dorado y calidad ambiental dorada, así:

$$\left[ \frac{\alpha(\omega - e)}{\omega} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} = k_{oro}$$

$$\left[ k^\alpha \left( \frac{w-e}{\omega} \right) - k + \frac{b\bar{A}}{\omega N} \right] \left[ \frac{\omega\gamma}{\beta + 2\gamma} \right] = a_{oro}$$

## C.2 Comando central sin depreciación

$$Max \quad \sum_{t=0}^{\infty} (1+R)^{-t-1} \left[ u(c_{1t}, A_t) + (1+\theta)^{-1} u(c_{2t+1}, A_{t+1}) \right] \quad (1.72)$$

Sujeto a<sup>6</sup>:

$$s.a. \quad K_t + K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} = K_{t+1} + Nc_{1t} + Nc_{2t} + M_t \quad (1.73)$$

$$A_{(t+1)} = (1-b)A_t + b\bar{A} - P_t + \omega M_t \quad (1.74)$$

Utilizando, la ecuación paramétrica de la utilidad:

$$Max \quad \sum_{t=0}^{\infty} (1+R)^{-t-1} \left[ \beta \ln c_{1t} + \gamma \ln A_t + (1+\theta)^{-1} (\beta \ln c_{2(t+1)} + \gamma \ln A_{(t+1)}) \right]$$

$$s.a. \quad k_t + k_t^\alpha = k_{t+1} + c_{1t} + c_{2t} + m_t \quad (1.75)$$

$$A_{(t+1)} = (1-b)A_t + b\bar{A} - P_t + \omega M_t$$

$$A_{(t+1)} = (1-b)A_t + b\bar{A} - eN \cdot k_t^\alpha + \omega \cdot Nm_t \quad (1.76)$$

<sup>6</sup> Para el análisis del comando central se considera el caso de  $n = 0, N_t = N_{t+1} = N$ .

Para solucionar el modelo, se reemplaza las restricciones en la función objetivo. El método utilizado aquí es similar al de Blanchard & Fischer (1989). Por facilidad notacional, se expresará las condiciones de primer orden –CPO-, en términos de la ecuación(1.72). Ahora:

$$\begin{aligned}
& \dots + [u(c_{1t-1}, A_{t-1}) + (1 + \theta)^{-1}u(c_{2t}, A_t)] + (1 + R)^{-1}[u(c_{1t}, A_t) + (1 + \theta)^{-1}u(c_{2t+1}, A_{t+1})] + \dots \\
& = \dots + u[k_{t-1} + k_{t-1}^\alpha - k_t - c_{2t-1} - m_{t-1}, A_{t-1}] + \dots \\
& \dots + (1 + \theta)^{-1}u(c_{2t}, A_t) + (1 + R)^{-1}u[k_t + k_t^\alpha - k_{t+1} - c_{2t} - m_t, A_t] + \dots \\
& \dots + (1 + R)^{-1}(1 + \theta)^{-1}u(c_{2t+1}, [(1 - b)A_t + b\bar{A} - eN \cdot k_t^\alpha + \omega \cdot Nm_t]) + \dots
\end{aligned}$$

Se deriva la función objetivo, para las variables de estado,  $k_t$  y  $a_t$  y para las variables de control  $c_t$  y  $m_t$ . Tenemos cuatro CPO:

$$\begin{aligned}
A_t : & (1 + \theta)^{-1}u_2(c_{2t}, A_t) + (1 + R)^{-1}u_2(c_{1t}, A_t) + \dots \\
& \dots + (1 + R)^{-1}(1 + \theta)^{-1}u_2(c_{2t+1}, A_{t+1})(1 - b) + (1 + R)^{-2}u_2(c_{1t+1}, A_{t+1})(1 - b) = 0 \quad (1.77)
\end{aligned}$$

$$c_{2t} : (1 + \theta)^{-1}u_1(c_{2t}, A_t) - (1 + R)^{-1}u_1(c_{1t}, A_t) = 0 \quad (1.78)$$

$$\begin{aligned}
k_t : & -u_1(c_{1t-1}, A_{t-1}) + (1 + R)^{-1}(1 + \alpha k_t^{\alpha-1})u_1(c_{1t}, A_t) + \dots \\
& \dots + (1 + R)^{-1}(1 + \theta)^{-1}u_2(c_{2t+1}, A_{t+1})(-eN\alpha k_t^{\alpha-1}) + \dots \\
& \dots + (1 + R)^{-2}u_2(c_{1t+1}, A_{t+1})](-eN\alpha k_t^{\alpha-1}) = 0 \quad (1.79)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_t : & -(1 + R)^{-1}u_1(c_{1t}, A_t) + (1 + R)^{-1}(1 + \theta)^{-1}u_2(c_{2t+1}, A_{t+1})(\omega N) + \dots \\
& \dots + (1 + R)^{-2}u_2(c_{1t+1}, A_{t+1})(\omega N) = 0 \quad (1.80)
\end{aligned}$$

Ahora el sistema queda completamente determinado, para encontrar una solución, se utiliza la ecuación logarítmica paramétrica, y las CPO quedan determinadas así:

La condición (1.77):

$$A_t : (1 + \theta)^{-1} \frac{\gamma}{A_t} + (1 + R)^{-1} \frac{\gamma}{A_t} + \dots$$

$$\dots + (1 + R)^{-1} (1 + \theta)^{-1} \frac{\gamma}{A_{t+1}} (1 - b) + (1 + R)^{-2} \frac{\gamma}{A_{t+1}} (1 - b) = 0$$

Un poco de manipulación:

$$\frac{1}{A_t} \left( \frac{\gamma}{(1 + \theta)} + \frac{\gamma}{(1 + R)} \right) = - \frac{1}{A_{t+1}} \left( \frac{\gamma(1 - b)}{(1 + R)(1 + \theta)} + \frac{\gamma(1 - b)}{(1 + R)^2} \right)$$

$$\frac{A_{t+1}}{A_t} = \frac{(b - 1)}{(1 + R)} \quad (1.81)$$

Reemplazando (1.81) en la restricción:

$$\frac{(b - 1)}{(1 + R)} A_t = (1 - b) A_t + b \bar{A} - P_t + \omega M_t$$

Ahora se tiene, la ecuación centralizada para  $m_t$ :

$$M_t = \left[ (b - 1) A_t \frac{2 + R}{(1 + R)} A_t - b \bar{A} + P_t \right] / \omega$$

En términos per-cápita:

$$m_t = \left[ (b - 1) A_t \frac{2 + R}{(1 + R)} A_t - b \bar{A} + P_t \right] / \omega N$$

$$m_t = \left[ (b - 1) A_t \frac{2 + R}{(1 + R)} - b \bar{A} + e N k_t^\alpha \right] / \omega N \quad (1.82)$$

$$\frac{dm_t}{d(P_t)} > 0; \frac{dm_t}{dA_t} < 0; \frac{dm_t}{d\bar{A}} < 0; \frac{dm_t}{dN} \geq 0$$

El planificador central no respeta la elección de  $m_t$  individual.

La condición (1.78):

$$c_{2t} : (1 + \theta)^{-1} \frac{\beta}{c_{2t}} - (1 + R)^{-1} \frac{\beta}{c_{1t}} = 0$$

$$c_{1t} = \frac{(1 + \theta)}{(1 + R)} c_{2t} \quad (1.83)$$

Esta ecuación, muestra como el planificador asigna el consumo entre las generaciones que están viviendo en el mismo tiempo t.

La condición (1.79):

$$\begin{aligned} k_t : & -\frac{\beta}{c_{1t-1}} + (1 + R)^{-1}(1 + \alpha k_t^{\alpha-1}) \frac{\beta}{c_{1t}} + \dots \\ & \dots + (1 + R)^{-1}(1 + \theta)^{-1} \frac{Y}{A_{t+1}} (-eN\alpha k_t^{\alpha-1}) + \dots \\ & \dots + (1 + R)^{-2} \frac{Y}{A_{t+1}} (-eN\alpha k_t^{\alpha-1}) = 0 \end{aligned} \quad (1.84)$$

La condición (1.80):

$$\begin{aligned} m_t : & -(1 + R)^{-1} \frac{\beta}{c_{1t}} + (1 + R)^{-1}(1 + \theta)^{-1} \frac{Y}{A_{t+1}} (\omega N) + \dots \\ & \dots + (1 + R)^{-2} \frac{Y}{A_{t+1}} (\omega N) = 0 \\ \frac{\beta}{(1 + R) c_{1t}} & = \frac{1}{A_{t+1}} \gamma \omega N \frac{(2 + R + \theta)}{(1 + R)^2 (1 + \theta)} \\ A_{t+1} & = c_{1t} \left[ \frac{\omega N \gamma}{\beta} \frac{(2 + R + \theta)}{(1 + \theta)(1 + R)} \right] \end{aligned} \quad (1.85)$$

Usando (1.81) y (1.85):

$$A_t = c_{1t} \left[ \frac{\omega N \gamma (2 + R + \theta)}{\beta (1 + \theta) (b - 1)} \right] \quad (1.86)$$

Retomando (1.84):

$$k_t : -\frac{\beta}{c_{1t-1}} + \frac{(1 + \alpha k_t^{\alpha-1})\beta}{c_{1t}(1 + R)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{A_{t+1}(1 + R)(1 + \theta)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{A_{t+1}(1 + R)^2} = 0$$

Ahora sustituyo (1.85) en (1.84):

$$\begin{aligned}
& -\frac{\beta}{c_{1t-1}} + \frac{(1 + \alpha k_t^{\alpha-1})\beta}{c_{1t}(1+R)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{c_{1t} \left[ \frac{\omega N\gamma}{\beta} \frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)(1+R)} \right] (1+R)(1+\theta)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{c_{1t} \left[ \frac{\omega N\gamma}{\beta} \frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)(1+R)} \right] (1+R)^2} = 0 \\
& -\frac{\beta}{c_{1t-1}} + \frac{(1 + \alpha k_t^{\alpha-1})\beta}{c_{1t}(1+R)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{c_{1t} \left[ \frac{\omega N\gamma}{\beta} \frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)(1+R)} \right] (1+R)(1+\theta)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{c_{1t} \left[ \frac{\omega N\gamma}{\beta} \frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)(1+R)} \right] (1+R)^2} = 0 \\
& -\frac{\beta}{c_{1t-1}} + \frac{(1 + \alpha k_t^{\alpha-1})\beta}{c_{1t}(1+R)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{c_{1t} \left[ \frac{\omega N\gamma}{\beta} (2+R+\theta) \right]} + \frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{c_{1t} \left[ \frac{\omega N\gamma}{\beta} \frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)} \right] (1+R)} = 0 \\
& \frac{\beta}{c_{1t-1}} = \frac{1}{c_{1t}} \left[ \frac{(1 + \alpha k_t^{\alpha-1})\beta}{(1+R)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{\left[ \frac{\omega N\gamma}{\beta} (2+R+\theta) \right]} + \frac{\gamma(-eN\alpha k_t^{\alpha-1})}{\left[ \frac{\omega N\gamma}{\beta} \frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)} \right] (1+R)} \right] \quad (1.87)
\end{aligned}$$

Factorando y reordenando los términos:

$$\begin{aligned}
\frac{\beta}{c_{1t-1}} &= \frac{1}{c_{1t}} \left[ \frac{\beta}{(1+R)} + \alpha k_t^{\alpha-1} \frac{\beta(\omega - e)}{\omega(1+R)} \right] \quad (1.88) \\
\beta \frac{c_{1t}}{c_{1t-1}} &= \left[ \frac{\beta(\omega + \alpha k_t^{\alpha-1}(\omega - e))}{\omega(1+R)} \right] \\
c_{1t} &= \left[ \frac{(\omega + \alpha k_t^{\alpha-1}(\omega - e))}{\omega(1+R)} \right] c_{1t-1} \quad (1.89)
\end{aligned}$$

Reemplazo (1.89) en la condición (1.83):

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{(\omega + \alpha k_t^{\alpha-1}(\omega - e))}{\omega(1+R)} \right] c_{1t-1} &= \frac{(1+\theta)}{(1+R)} c_{2t} \\
\left[ \frac{(\omega + \alpha k_t^{\alpha-1}(\omega - e))}{\omega} \right] c_{1t-1} &= (1+\theta) c_{2t} \\
\left[ \frac{(\omega + \alpha k_t^{\alpha-1}(\omega - e))}{(1+\theta)\omega} \right] c_{1t-1} &= c_{2t}
\end{aligned}$$

Ahora obtenemos la ecuación que caracteriza la asignación de consumo entre los dos períodos de vida de la misma generación:

$$\left[ \frac{\left( 1 + \alpha k_t^{\alpha-1} \frac{(\omega - e)}{\omega} \right)}{(1 + \theta)} \right] c_{1t-1} = c_{2t} \quad (1.90)$$

Esta condición, cambia en el comando central, respecto a la solución estándar del modelo de generaciones traslapadas sin medioambiente, ya que la asignación del consumo entre la juventud y la vejez no es equivalente a la solución descentralizada -(1.5)<sup>-7</sup>.

### C.2.1 Estado estacionario y regla de oro

Se realiza el análisis de estado estacionario en (1.87):

$$c_1^*; c_2^*; k^* = c_1; c_2; k$$

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{c_1} &= \frac{1}{c_1} \left[ \frac{(1 + \alpha k^{\alpha-1})\beta}{(1 + R)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k^{\alpha-1})}{\left[ \frac{\omega N\gamma}{\beta} (2 + R + \theta) \right]} + \frac{\gamma(-eN\alpha k^{\alpha-1})}{\left[ \frac{\omega N\gamma}{\beta} \frac{(2 + R + \theta)}{(1 + \theta)} \right] (1 + R)} \right] \\ -\beta &+ \left[ \frac{(1 + \alpha k^{\alpha-1})\beta}{(1 + R)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k^{\alpha-1})}{\left[ \frac{\omega N\gamma}{\beta} (2 + R + \theta) \right]} + \frac{\gamma(-eN\alpha k^{\alpha-1})}{\left[ \frac{\omega N\gamma}{\beta} \frac{(2 + R + \theta)}{(1 + \theta)} \right] (1 + R)} \right] = 0 \\ -\beta &+ \frac{\beta}{(1 + R)} + \frac{\beta \alpha k^{\alpha-1}}{(1 + R)} + \frac{\gamma(-eN\alpha k^{\alpha-1})}{\left[ \frac{\omega N\gamma}{\beta} (2 + R + \theta) \right]} + \frac{\gamma(-eN\alpha k^{\alpha-1})}{\left[ \frac{\omega N\gamma}{\beta} \frac{(2 + R + \theta)}{(1 + \theta)} \right] (1 + R)} = 0 \\ -\beta &+ \frac{\beta}{(1 + R)} + \alpha k^{\alpha-1} \frac{\beta(\omega - e)}{\omega(1 + R)} = 0 \\ -\beta(1 + R) &+ \beta + \alpha k^{\alpha-1} \frac{\beta(\omega - e)}{\omega} = 0 \\ -\beta R &+ \alpha k^{\alpha-1} \frac{\beta(\omega - e)}{\omega} = 0 \\ \frac{\omega R}{(\omega - e)} &= \alpha k^{\alpha-1} \end{aligned}$$

<sup>7</sup> Cuando se iguala la tasa de interés con el producto marginal del capital en t, la condición de primer orden del problema de la firma, en el modelo estándar de generaciones traslapadas se respeta la decisión descentralizada.

Obtenemos la siguiente condición, que establece que el rendimiento marginal del capital –tasa de interés-, en estado estacionario. Esta es la regla de oro modificada<sup>8</sup>:

$$\frac{\omega R}{(\omega - e)} = \alpha k^{\alpha-1} = f'(k_{oro}) \quad (1.91)$$

Cabe notar que la edad de oro no está totalmente determinada pues falta la condición de la calidad medioambiental. Ahora se prosige obteniendo el capital estacionario que cumple con la regla de oro modificada:

$$\left[ \frac{\omega R}{\alpha(\omega - e)} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} = k$$

$$\left[ \frac{\alpha(\omega - e)}{\omega R} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} = k \quad (1.92)$$

$$\omega > e, R > 0, k > 0$$

$$\omega = e, k = 0$$

La existencia de este estado estacionario se garantiza si  $\omega > e$ ; esta condición es similar a la condición de existencia de un estado estacionario no trivial, en el caso descentralizado -  $\omega(1 - \alpha) > e$  -.

Ahora se analizará el efecto del descuento intergeneracional en el nivel de capital estacionario:

$$\frac{dk}{dR} = \frac{1}{1 - \alpha} \left[ \frac{\alpha(\omega - e)}{\omega R} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{\alpha(e - \omega)}{\omega R^2} \quad (1.93)$$

---

<sup>8</sup> Con un poco de algebra se demuestra que si  $e$  es igual a cero, o no hay contaminación, entonces tenemos la regla de oro es  $f'(k^*) = R$ , que es idéntica a la regla de oro en el modelo de generaciones traslapadas sin medioambiente. Este resultado se debe a que la versión del modelo de generaciones traslapadas sin medioambiente es un caso especial en el cuál no existe contaminación –lo que es imposible-.

$$\frac{dk}{dR} < 0; w > e$$

En el caso de que todas las generaciones sean consideradas como iguales por el planificador central –R igual a cero-, tenemos el capital dorado de equidad intergeneracional - $k_{oro}$ -:

$$k_{oro} = 0, R = 0 \quad (1.94)$$

Esta solución no es trivial, ya que la economía se convierte en una economía de cosecha. El consumo y la calidad medioambiental son positivos.

Para caracterizar la era de dorada de la economía se debe establecer el nivel dorado del medioambiente. Ahora se recuerda (1.82):

$$m_t = \left[ (b-1)A_t \frac{2+R}{(1+R)} - b\bar{A} + eNk_t^\alpha \right] / \omega N$$

Se reemplaza (1.86) en (1.82):

$$m_t = \left[ (b-1)c_{1t} \left[ \frac{\omega N \gamma (2+R+\theta)}{\beta(1+\theta)(b-1)} \right] \frac{2+R}{(1+R)} - b\bar{A} + eNk_t^\alpha \right] / \omega N$$

$$m = \left[ c_1 \left[ \frac{\omega N \gamma (2+R+\theta)}{\beta(1+\theta)} \right] \frac{2+R}{(1+R)} - b\bar{A} + eNk^\alpha \right] / \omega N \quad (1.95)$$

En estado estacionario (1.83):

$$c_2 = \frac{(1+R)}{(1+\theta)} c_1$$

Además, en la restricción:

$$k + k^\alpha = k + c_1 + c_2 + m$$

Ahora reemplazo (1.95), (1.83) en la restricción, en estado estacionario:

$$\begin{aligned}
& -k^\alpha + c_1 + \frac{(1+R)}{(1+\theta)} c_1 + \frac{\left[ \left[ c_1 \frac{\omega N \gamma (2+R+\theta)}{\beta (1+\theta)} \right] \frac{2+R}{(1+R)} - b\bar{A} + eNk^\alpha \right]}{\omega N} = 0 \\
& S \equiv \frac{\gamma(2+R+\theta)}{\beta(1+\theta)} \\
& c_1 \left( 1 + \frac{(1+R)}{(1+\theta)} + S \frac{(2+R)}{(1+R)} \right) = k^\alpha \left( 1 - \frac{e}{\omega} \right) + \frac{b\bar{A}}{\omega N} \\
& c_1 = \frac{\left[ k^\alpha \left( \frac{w-e}{\omega} \right) + \frac{b\bar{A}}{\omega N} \right]}{\left( 1 + \frac{(1+R)}{(1+\theta)} + S \frac{(2+R)}{(1+R)} \right)} \quad (1.96)
\end{aligned}$$

La ecuación (1.96) caracteriza el consumo de los jóvenes en estado estacionario, en el comando central. Es fácil derivar el consumo de los viejos:

$$c_2 = \frac{(1+R)}{(1+\theta)} \frac{\left[ k^\alpha \left( \frac{w-e}{\omega} \right) + \frac{b\bar{A}}{\omega N} \right]}{\left( 1 + \frac{(1+R)}{(1+\theta)} + S \frac{(2+R)}{(1+R)} \right)} \quad (1.97)$$

La calidad ambiental se obtiene de la ecuación (1.85):

$$A_{t+1} = c_{1t} \left[ \frac{\omega N \gamma}{\beta} \frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)(1+R)} \right]$$

$$A = c_1 \left[ \frac{\omega N \gamma}{\beta} \frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)(1+R)} \right] \quad (1.98)$$

$$\alpha = \frac{\left[ k^\alpha \left( \frac{w-e}{\omega} \right) + \frac{b\bar{A}}{\omega N} \right]}{\left( 1 + \frac{(1+R)}{(1+\theta)} + \left[ \frac{\gamma(2+R+\theta)}{\beta(1+\theta)} \right] \frac{(2+R)}{(1+R)} \right)} \left[ \frac{\omega \gamma}{\beta} \frac{(2+R+\theta)}{(1+\theta)(1+R)} \right] \quad (1.99)$$

La identidad (1.99) determina el nivel estacionario del comando central, para la calidad medioambiental per-cápita. La condición de existencia es la misma del capital estacionario. Se tiene, el nivel de calidad ambiental que satisface la regla de oro modificada. Es difícil determinar el efecto de R sobre el

nivel de calidad ambiental per-cápita<sup>9</sup>. Sin embargo, la ecuación (1.98) es idéntica a la solución de la era dorada. Entonces se puede tener directamente la segunda condición, para caracterizar totalmente la era dorada de la economía dónde se tiene el mayor nivel de consumo y calidad ambiental que no afectan el consumo de las demás generaciones –cuándo R es cero-:

$$a_{oro} = \frac{\left[ k^\alpha \left( \frac{w-e}{\omega} \right) + \frac{b\bar{A}}{\omega N} \right]}{\left( 1 + \frac{1}{(1+\theta)} + \left[ \frac{\gamma(2+\theta)}{\beta(1+\theta)} \right] 2 \right)} \left[ \frac{\omega\gamma (2+\theta)}{\beta (1+\theta)} \right]$$

$$a_{oro} = \frac{\left[ k^\alpha \left( \frac{w-e}{\omega} \right) + \frac{b\bar{A}}{\omega N} \right] \omega\gamma}{\beta + 2\gamma} \quad (1.100)$$

La era dorada de la economía, con equidad intergeneracional perfecta, queda determinada por el nivel de capital dorado y calidad ambiental dorada, así:

$$k_{oro} = 0, R = 0$$

$$a_{oro} = \frac{\left[ k^\alpha \left( \frac{w-e}{\omega} \right) + \frac{b\bar{A}}{\omega N} \right] \omega\gamma}{\beta + 2\gamma}$$

$$A_{oro}^- < A^-$$

$$m = \frac{2(b-1)A - bA^-}{w} N < 0$$

$$c_1 + c_2 = -m$$

$$c_1 = \frac{(1+\theta)}{(2+\theta)} (-m)$$

$$c_2 = \frac{1}{(2+\theta)} (-m)$$

Este resultado dice, que un planificador central que da igual peso a cada generación, dadas las tecnologías, restricciones y preferencias –y sin depreciación-, en un modelo de generaciones traslapadas, establece una

<sup>9</sup> Se realizan simulaciones numéricas para diferentes combinaciones de parámetros.

economía de cosecha en estado estacionario. Es decir, hay lugar para políticas extremas de decrecimiento o simplemente no se debe acumular capital<sup>10</sup>.

#### D. Regla de oro verde o edad de oro

Se debe encontrar los niveles mantenibles de manera indefinida para los cuales se maximiza la utilidad –en estado estacionario-. Ahora, el problema se establece así:

$$\text{Max } U$$

$$\text{Max}[u(c_1, A) + (1 + \theta)^{-1}u(c_2, A)]$$

Sujeto a:

$$(1 - \delta)k + f(k) = k + c_1 + c_2 + m$$

$$f(k) = \delta k + c_1 + c_2 + m$$

$$bA = b\bar{A} - eN \cdot k^a + \omega \cdot Nm$$

Se utiliza la técnica del Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = [u(c_1, A) + (1 + \theta)^{-1}u(c_2, A)] + \lambda(bA - b\bar{A} + eNf(k) - \omega N(f(k) - \delta k - c_1 - c_2)) \quad (1.101)$$

CPO:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = 0, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} = 0, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} = 0, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = u_1(c_1, A) + \omega N\lambda = 0 \quad (1.102)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} = (1 + \theta)^{-1}u_1(c_2, A) + \omega N\lambda = 0 \quad (1.103)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} = \lambda eNf'(k) - \lambda \omega Nf'(k) + \lambda \omega N\delta = 0; \delta = 0,1 \quad (1.104)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} = u_2(c_1, A) + (1 + \theta)^{-1}u_2(c_2, A) + \lambda b = 0 \quad (1.105)$$

<sup>10</sup> Es claro que poblaciones de la Amazonía o de África, viven en economías de cosecha. Estas economías son claramente más igualitarias y son sostenibles. Pero son también más pobres y vulnerables al ataque de otras poblaciones.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = (bA - bA' + eNf(k) - \omega N(f(k) - \delta k - c_1 - c_2)) = 0 \quad (1.106)$$

Utilizando las condiciones (1.102) y (1.103):

$$u_1(c_1, A) = (1 + \theta)^{-1} u_1(c_2, A) \quad (1.107)$$

De (1.104) tengo la condición:

$$\lambda N(ef'(k) - \omega f'(k) + \omega \delta) = 0; \delta = 0,1$$

Los dos casos considerados en esta investigación son la ausencia de depreciación y la depreciación total del capital. Ahora manipulando los términos:

$$\begin{aligned} (ef'(k) - \omega f'(k) + \omega \delta) &= 0 \\ (\omega - e)f'(k) &= \omega \delta; \delta = 0,1 \\ f'(k) &= \frac{\omega \delta}{(\omega - e)}; \delta = 0,1 \end{aligned} \quad (1.108)$$

La condición (1.108), para los dos casos considerados se transforma en:

$$f'(k) = 0; \delta = 0 \quad (1.109)$$

$$f'(k) = \frac{\omega}{(\omega - e)}; \delta = 1 \quad (1.110)$$

Ahora tomamos la condición (1.102) y la sustituimos en (1.105):

$$u_2(c_1, A) + (1 + \theta)^{-1} u_2(c_2, A) - \frac{u_1(c_1, A)}{\omega N} b = 0 \quad (1.111)$$

Se establece que cualquier economía –modelo- que en estado estacionario, cumpla simultáneamente con (1.107), (1.108) y (1.111), satisface la condición de la regla de oro verde o edad de oro.

Las condiciones (1.107) y (1.108) son cumplidas por el comando central y son directamente observables en las condiciones de primer orden, cuando R es cero o no hay descuento intergeneracional. La condición (1.111) requiere utilizar una función de utilidad específica, para poder observarla. Utilizando la función logarítmica utilizada a través del presente trabajo se tiene:

$$\frac{Y}{A} (1 + (1 + \theta)^{-1}) = \frac{\beta}{\omega N b c_1} \quad (1.112)$$

Reordenando los términos se obtiene:

$$c_1 \frac{\gamma \omega b (2 + \theta)}{\beta (1 + \theta)} = a \quad (1.113)$$

La condición (1.113), es cumplida por el comando central en sus condiciones de primer orden –mt-, cuándo R es cero – y para cualquier valor de la tasa de depreciación-. Ahora, queda demostrado que la única solución que cumple la regla de oro verde o edad de oro es el comando central sin descuento intertemporal –R es cero-.

#### **E. Análisis de óptimo paretiano:**

Por la anterior discusión, y suponiendo la convexidad de la frontera de pareto, tenemos:

$$\forall (k_{cen}, a_{cen}) \quad \exists R \geq 0 \Rightarrow k_{cen} = k_{des}; a_{cen} = a_{des} \quad (1.114)^{11}$$

Debido a que la proposición (1.114) es de tipo universal, se requiere un contraejemplo<sup>12</sup>, para probar que es falsa:

$$\exists (k_{cen}, a_{cen}) \quad \text{para un } R \geq 0 \Rightarrow k_{cen} \neq k_{des}; a_{cen} \neq a_{des} \quad (1.115)$$

### E.1 Demostración para el caso de total depreciación:

La mejor asignación es la correspondiente a la regla de oro, o R el comando central cuándo R es cero. Se demuestra que la asignación dorada domina a la descentralizada.

Para que la asignación descentralizada sea óptimo en el sentido de pareto debe cumplirse que:

$$k_{cen} = k_{des}; a_{cen} = a_{des}$$

Cuándo el comando central considera un R de cero, es decir, llega a su nivel dorado en estado estacionario.

Se considera el caso en que  $k_{cen} = k_{des}$ . Esta condición es suficiente para el caso estándar sin medioambiente. Sin embargo, en este caso falta la segunda condición de medioambiente para la era dorada.

$$k_{des}^* = \left[ \frac{N\beta[\omega(1-\alpha) - e]}{[N(2+\theta)\beta + \gamma b]\omega} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\left[ \frac{\alpha(\omega - e)}{\omega} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} = k_{oro}; R = 0$$

<sup>11</sup> Para toda solución centralizada, existe un R positivo o cero, tal que la solución descentralizada es igual a la centralizada. Esto es una reformulación de los dos teoremas del bienestar. Si se cumple esta proposición, la asignación descentralizada estará sobre la frontera de Pareto.

<sup>12</sup> Ya que la negación de una proposición universal es una proposición existencial.

$$k_{des}^* = k_{oro}$$

Tenemos que:

$$\left[ \frac{\alpha(\omega - e)}{\omega} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left[ \frac{N\beta[\omega(1-\alpha) - e]}{[N(2+\theta)\beta + \gamma b]\omega} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Lo que no se puede excluir, dado el rango de los parámetros. Es decir, la economía descentralizada puede alcanzar el nivel dorado de capital. No obstante, falla al cumplir la segunda condición de la regla de oro verde o era dorada:

Se demuestra así, por contradicción o reducción al absurdo:

$$a_{oro} = a_{des}$$

$$a_{des}^* = k_{des}^{*a} \left[ \frac{[\omega(1-a) - e]}{N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b} \right]$$

$$k_{des}^* = k_{oro}$$

$$a_{des}^* = k_{oro}^{\alpha} \left[ \frac{[\omega(1-a) - e]}{N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b} \right]$$

$$a_{des}^* = \left[ \frac{\alpha(\omega - e)}{\omega} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left[ \frac{[\omega(1-a) - e]}{N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b} \right]$$

$$a_{oro} = \left[ k_{oro}^{\alpha} \left( \frac{\omega - e}{\omega} \right) - k + \frac{b\bar{A}}{\omega N} \right] \frac{\omega\gamma}{\beta + 2\gamma}$$

$$\left[ k_{oro}^{\alpha} \left( \frac{\omega - e}{\omega} \right) - k_{oro} + \frac{b\bar{A}}{\omega N} \right] \frac{\omega\gamma}{\beta + 2\gamma} = k_{oro}^{\alpha} \left[ \frac{[\omega(1-a) - e]}{N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b} \right]$$

$$\begin{aligned}
& \left[ k_{oro}^{\alpha} \left( \frac{w-e}{\omega} \right) - k_{oro} + \frac{b\bar{A}}{\omega N} \right] \left[ \frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma} \right] = k_{oro}^{\alpha} \left[ \frac{[\omega(1-a)-e]}{N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b} \right] \\
& \left[ k_{oro}^{\alpha} \left( \frac{w-e}{\omega} \right) - k_{oro} \right] \left[ \frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma} \right] = k_{oro}^{\alpha} \left[ \frac{[\omega(1-a)-e]}{N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b} \right] - \frac{b\bar{A}}{\omega N} \left[ \frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma} \right] \\
& \left[ k_{oro}^{\alpha} \left( \frac{w-e}{\omega} \right) - k_{oro} \right] \left[ \frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma} \right] = k_{oro}^{\alpha} \left[ \frac{[\omega(1-a)-e]}{N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b} \right] - \frac{b\bar{A}}{\omega N} \left[ \frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma} \right] \\
& k_{oro}^{\alpha} \left[ \left( \frac{w-e}{\omega} \right) - k_{oro}^{1-\alpha} \right] \left[ \frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma} \right] = k_{oro}^{\alpha} \left[ \frac{[\omega(1-a)-e]}{N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b} \right] - \frac{b\bar{A}}{\omega N} \left[ \frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma} \right] \\
& k_{oro}^{\alpha} \left[ \left( \frac{w-e}{\omega} \right) - \left[ \frac{\alpha(w-e)}{\omega} \right] \right] \left[ \frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma} \right] = k_{oro}^{\alpha} \left[ \frac{[\omega(1-a)-e]}{N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b} \right] - \frac{b\bar{A}}{\omega N} \left[ \frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma} \right] \\
& k_{oro}^{\alpha} \left[ (1-\alpha) \left( \frac{w-e}{\omega} \right) \right] \left[ \frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma} \right] = k_{oro}^{\alpha} \left[ \frac{[\omega(1-a)-e]}{N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b} \right] - \frac{b\bar{A}}{\omega N} \left[ \frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma} \right] \\
& k_{oro}^{\alpha} \left[ \left( \frac{(1-\alpha)(w-e)}{\omega} \right) \right] \left[ \frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma} \right] + \frac{b\bar{A}}{\omega N} \left[ \frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma} \right] > k_{oro}^{\alpha} \left[ \frac{[\omega(1-a)-e]}{N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b} \right] \\
& \left[ \left( \frac{(1-\alpha)(w-e)}{\omega} \right) \right] \left[ \frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma} \right] + \frac{b\bar{A}}{\omega N} \left[ \frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma} \right] > \left[ \frac{[\omega(1-a)-e]}{N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b} \right] \quad (1.116)
\end{aligned}$$

$$a_{cen} \neq a_{des}$$

$$a_{cen} > a_{des}$$

Queda demostrado, que la asignación descentralizada de estado estacionario no es óptimo de pareto, pues se sobredegrada el medioambiente o se submantiene el medioambiente. Esto ocurre por las externalidades e imperfecciones de mercado.

Para mostrar el efecto de la tragedia de los comunes sobre la eficiencia de la economía descentralizada se tiene que:

$$\alpha_{des} = 0, N \rightarrow \infty$$

$$\alpha_{oro} = k_{oro}^{\alpha} \left[ \left( \frac{(1-\alpha)(w-e)}{\omega} \right) \right] \left[ \frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma} \right], N \rightarrow \infty$$

Lo mismo ocurre para el caso de que la impaciencia por consumir hoy tienda al infinito. Esto significa que se da un peso de cero al futuro.

$$\alpha_{cen} > \alpha_{des}, N \rightarrow \infty, \theta \rightarrow \infty$$

Estos casos extremos, sirven para ilustrar que una población grande y una impaciencia alta afectan negativamente a la eficiencia de la economía y reducen el nivel de calidad ambiental hasta su nivel de cero.

Para demostrar que un gobierno de vida corta o un mecanismo de cooperación intrageneracional que elimine la tragedia de los comunes, aún cuándo la impaciencia por consumir hoy sea cero; es incapaz de alcanzar el óptimo de pareto se tiene –de (1.116)-:

$$\left[ \left( \frac{(1-\alpha)(w-e)}{\omega} \right) \right] \left[ \frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma} \right] + \frac{b\bar{A}}{\omega} \left[ \frac{\omega\gamma}{\beta+2\gamma} \right] > \left[ \frac{\gamma[\omega(1-a)-e]}{[2\beta+\gamma b]} \right], N=1, \theta=0$$

$$\alpha_{cen} > \alpha_{des}, N \rightarrow 1, \theta \rightarrow 0$$

## E.2 Demostración para el caso sin depreciación:

La mejor asignación es la correspondiente a la regla de oro, o cuándo R es cero:

$$k_{cen} = k_{des}; a_{cen} = a_{des}$$

La primera parte de esta condición requiere que:

$$k_{des}^* = \left[ \frac{N\beta[\omega(1-\alpha) - e]}{[N(2+\theta)\beta + \gamma b]\omega} \right]^{\frac{1}{(1-\alpha)}}$$

$$k_{cen}^* = 0, R = 0$$

$$k_{des}^* = 0$$

$$0 = \left[ \frac{N\beta[\omega(1-\alpha) - e]}{[N(2+\theta)\beta + \gamma b]\omega} \right]^{\frac{1}{(1-\alpha)}}$$

Esto está permitido dentro del rango de los parámetros. Ahora, la segunda parte de la condición requiere que:

$$a_{cen} = a_{des}$$

$$a_{des}^* = k_{des}^{*a} \left[ \frac{[\omega(1-a) - e]}{\left[ N \frac{(2+\theta)\beta}{\gamma} + b \right]} \right]$$

$$k_{des}^* = 0 \quad a_{des}^* = 0^{13}$$

Pero se tiene:

$$a_{cen} = \frac{2b\gamma}{(\beta + 2\gamma)N} A^-, R = 0, k_{cen} = 0$$

$$a_{cen} \neq a_{des}$$

Queda demostrado que la asignación en estado estacionario del modelo descentralizado, no es óptima en el sentido débil de pareto.

## F. Análisis de equidad intergeneracional

---

<sup>13</sup> La solución trivial descentralizada de estado estacionario.

Una función de bienestar especial, permite ver las actitudes sobre la equidad, ajustando un solo parámetro es la función de elasticidad constante de sustitución –CES-; o también conocida como de aversión relativa al riesgo, en este caso aversión a la desigualdad –CARA-. Es fácil mostrar, que la solución del planificador central desarrollada aquí, cuando R es cero, es equivalente al caso de una función de bienestar social CES o CRRA, cuando la elasticidad o alternativamente la aversión a la desigualdad tiende a cero. Si la aversión a la desigualdad es infinita este tipo de función se transforma en la función de bienestar de Leontief. Este tipo de funciones de bienestar social –Leontief, ha sido utilizada como una interpretación del principio de equidad rawlsiana.

Se parte de una función de tipo CES. Ahora el problema queda definido así:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \left[ u(c_{1t}, A_t) + (1 + \theta)^{-1} u(c_{2t+1}, A_{t+1}) \right]^{(1-\rho)} \\ \text{s.a.} \quad & k_t + k_t^\alpha = k_{t+1} + c_{1t} + c_{2t} + m_t \\ & A_{(t+1)} = (1 - b)A_t + b\bar{A} - eN \cdot k_t^\alpha + \omega \cdot Nm_t \end{aligned}$$

Si desarrollamos la sumatoria de la función de bienestar objetivo obtenemos la siguiente serie:

$$\dots + [u(c_{1_{t-1}}, A_{t-1}) + (1 + \theta)^{-1} u(c_{2t}, A_t)]^{(1-\rho)} + [u(c_{1t}, A_t) + (1 + \theta)^{-1} u(c_{2t+1}, A_{t+1})]^{(1-\rho)} + \dots$$

De manera análoga al problema del comando central utilitarista, se procede a sustituir las restricciones en la función objetivo y se obtiene las condiciones de primer orden:

$$A_t : (1 - \rho)U_{t-1}^{-\rho} (1 + \theta)^{-1} u_2(c_{2t}, A_t) + (1 - \rho)U_t^{-\rho} u_2(c_{1t}, A_t) + \dots (1.117)$$

$$\dots + (1 - \rho)U_t^{-\rho} (1 + \theta)^{-1} u_2(c_{2t+1}, A_{t+1})(1 - b) + (1 - \rho)U_{t+1}^{-\rho} u_2(c_{1t+1}, A_{t+1})(1 - b) = 0$$

$$c_{2t} : (1 - \rho)U_{t-1}^{-\rho} (1 + \theta)^{-1} u_1(c_{2t}, A_t) - (1 - \rho)U_t^{-\rho} u_1(c_{1t}, A_t) = 0 (1.118)$$

$$k_t : - (1 - \rho)U_{t-1}^{-\rho} u_1(c_{1_{t-1}}, A_{t-1}) + (1 - \rho)U_t^{-\rho} (1 + \alpha k_t^{\alpha-1}) u_1(c_{1t}, A_t) + \dots$$

$$\dots + (1 - \rho)U_t^{-\rho}(1 + \theta)^{-1}u_2(c_{2t+1}, A_{t+1})(-eN\alpha k_t^{\alpha-1}) + \dots$$

$$\dots + (1 - \rho)U_{t+1}^{-\rho}u_2(c_{1t+1}, A_{t+1})](-eN\alpha k_t^{\alpha-1}) = 0 \quad (1.119)$$

$$m_t : (1 - \rho)U_t^{-\rho}u_1(c_{1t}, A_t) + (1 - \rho)U_t^{-\rho}(1 + \theta)^{-1}u_2(c_{2t+1}, A_{t+1})(\omega N) + \dots$$

$$\dots + (1 - \rho)U_{t+1}^{-\rho}u_2(c_{1t+1}, A_{t+1})(\omega N) = 0 \quad (1.120)$$

En el caso en que el parámetro  $\rho$  sea cero, tenemos que las condiciones de primer orden de este problema; son idénticas a las condiciones de primer orden del comando central utilitario cuando  $R$  es igual a cero  $-R=0$ <sup>14</sup>. Esta afirmación se puede observar de manera directa al reemplazar en las condiciones de primer orden de este problema<sup>15</sup>. Este resultado, implica que una en estado estacionario, la economía que garantiza la equidad –en un sentido de utilitarista- entre generaciones, es decir, que resulta de la solución del problema cuándo la aversión a la desigualdad es cero, es precisamente la regla de oro y además soluciona el comando central cuando  $R$  es cero –es eficiente-<sup>16</sup>.

En el caso de que la aversión a la desigualdad sea infinita. En este caso se considera que niveles bajos de estos dos acervos pueden implicar una amenaza para la existencia de los individuos. La función de bienestar de Leontief ha sido utilizada para implementar el principio de la equidad rawlsiana a nivel intergeneracional (Mas-Collel, Whinston, & Green, 1995; Arrow, 1973; Pezzey & Toman, 2002; Solow, 1974).

La función de Leontief es un caso límite (Mas-Collel et al., 1995):

$$W = \sum_{t=0}^{\infty} U_t^{1-\rho} \equiv \min(U_t) \Leftrightarrow \rho \rightarrow \infty \quad (1.121)$$

<sup>14</sup> Esto incluye tanto el caso con depreciación total o sin depreciación.

<sup>15</sup> Todos los términos  $U_{t-1}$ ,  $U_t$ ,  $U_{t-1}$ , desaparecen de las CPO. Los términos  $(1-\rho)$ , desaparecen también.

<sup>16</sup> Estos resultados son ciertos en el caso de una población estacionaria  $N$ .

Ahora tomo la ecuación (1.118) y reordeno los términos:

$$\begin{aligned}
c_{2t} : (1 - \rho)U_{t-1}^{-\rho}(1 + \theta)^{-1}u_1(c_{2t}, A_t) &= (1 - \rho)U_t^{-\rho}u_1(c_{1t}, A_t) \\
U_{t-1}^{-\rho}(1 + \theta)^{-1}u_1(c_{2t}, A_t) &= U_t^{-\rho}u_1(c_{1t}, A_t) \\
U_{t-1}^{-\rho}(1 + \theta)^{-1} \frac{u_1(c_{2t}, A_t)}{u_1(c_{1t}, A_t)} &= U_t^{-\rho} \\
\left[ U_{t-1}^{-\rho}(1 + \theta)^{-1} \frac{u_1(c_{2t}, A_t)}{u_1(c_{1t}, A_t)} \right]^{\frac{1}{-\rho}} &= \left[ U_t^{-\rho} \right]^{\frac{1}{-\rho}} \\
U_{t-1} \left[ (1 + \theta)^{-1} \frac{u_1(c_{2t}, A_t)}{u_1(c_{1t}, A_t)} \right]^{\left(\frac{1}{-\rho}\right)} &= U_t \\
U_{t-1} = U_t, p \rightarrow \infty & \text{ (1.122)}
\end{aligned}$$

La condición (1.122), implica que el nivel de utilidad debe ser el mismo para todas las generaciones. Es decir, se tiene perfecta igualdad intergeneracional. Las demás condiciones de primer orden quedan indefinidas pues implican operaciones con cero e infinito. La maximización de un función social de tipo Leontief, que es equivalente a una preferencia extrema del planificador por la equidad intergeneracional, requiere que la utilidad intergeneracional se mantenga constante. Una solución directa implica aplicar el caso límite para la solución general de la CES<sup>17</sup>.

Una economía con una alta dotación de capital y recursos naturales puede ser igualitaria y tener altos niveles de consumo. Claramente, este enfoque no nos dice nada sobre como se acumuló el capital en primer lugar. Si la economía tiene un nivel bajo de capital y recursos naturales estará atrapada en bajos niveles de consumo y calidad ambiental<sup>18</sup>. En el presente modelo, un mayor nivel de capital produce más contaminación, por este motivo el planificador tiene que ajustar la

<sup>17</sup> Este es un problema complejo que no se intentará solucionar, por la presencia del infinito tanto en la sumatoria como en los términos de la sumatoria. Algunos términos de las CPO quedan indefinidos.

<sup>18</sup> Como posibles ejemplos, podemos a los países europeos que han combinado sistemas de mercado con alta acumulación de capital en una parte de su historia, para luego implantar sistemas de seguridad social que tienen como objetivo mejorar la equidad.

inversión y  $m_t$  hasta alcanzar un estado estacionario y mantener a la economía permanentemente en ese nivel.

$$\text{Max } \min(U_t) \quad (1.123)$$

$$\text{s.a. } k_t + k_t^\alpha = k_{t+1} + c_{1t} + c_{2t} + m_t$$

$$W = \sum_{t=0}^{\infty} U_t^{1-\rho} \equiv \min(U_t) \Leftrightarrow \rho \rightarrow \infty$$

Se define la función de utilidad del ciclo de vida de la generación nacida en el tiempo  $t$  – $U_t$ –:

$$U_t = [u(c_{1t}, A_t) + (1 + \theta)^{-1} u(c_{2t+1}, A_{t+1})]$$

$$U_{t-1} = U_t$$

$$U_{\text{equidad}} = \left[ \beta \ln c_{1t} + \gamma \ln A_t + (1 + \theta)^{-(t-1)} (\beta \ln c_{2(t+1)} + \gamma \ln A_{(t+1)}) \right]$$

Se estudia sólo el estado estacionario:

$$c_{it} = c_i, \quad i = 1, 2$$

$$A_t = A_{t+1} = A_e$$

Se recuerda la ecuación de movimiento del medioambiente:

$$A_{(t+1)} = (1 - b)A_t + b\bar{A} - eN \cdot k_t^\alpha + \omega \cdot Nm_t, \quad A_t = A_{t+1} = A_e$$

$$\frac{bA_e - b\bar{A} + eN \cdot k_t^\alpha}{\omega \cdot N} = m_t$$

$$\delta k_t + k_t^\alpha = k_{t+1} + c_1 + c_2 + m_t$$

$$\delta k_t + k_t^\alpha = k_{t+1} + c_1 + c_2 + \frac{bA_e - b\bar{A} + eN \cdot k_t^\alpha}{\omega \cdot N}$$

$$\delta k_t + k_t^\alpha \left(1 - \frac{e}{\omega}\right) - k_{t+1} = c_1 + c_2 + \frac{bA_e - b\bar{A}}{\omega \cdot N}$$

$$\delta k_t + k_t^\alpha \left(1 - \frac{e}{\omega}\right) - k_{t+1} = c_1 + c_2 + \frac{bA_e - b\bar{A}}{\omega \cdot N}$$

$$\delta k_t + k_t^\alpha \left(1 - \frac{e}{\omega}\right) - k_{t+1} = c_1 + c_2 + \frac{bA_e - b\bar{A}}{\omega \cdot N} \quad (1.124)$$

Esta ecuación, es la ecuación de movimiento del capital que mantiene fijos los niveles de consumo y de medioambiente.

El estado estacionario de este problema se encuentra, resolviendo la siguiente ecuación:

$$\delta k + k^\alpha \left(1 - \frac{e}{\omega}\right) - k = c_1 + c_2 + \frac{bA_e - b\bar{A}}{\omega \cdot N}$$

Esta polinomio no lineal no tiene solución analítica directa, para el caso de que el capital se deprecie totalmente,<sup>19</sup> se pueden realizar simulaciones numéricas. Pero en el caso de que el capital no se deprecie, se tiene:

$$k^\alpha \left(1 - \frac{e}{\omega}\right) = c_1 + c_2 + \frac{bA_e - b\bar{A}}{\omega \cdot N}$$

$$k^\alpha \left(1 - \frac{e}{\omega}\right) = c_1 + c_2 + \frac{bA_e - b\bar{A}}{\omega \cdot N}$$

$$k^\alpha \left(\frac{w - e}{\omega}\right) = c_1 + c_2 + \frac{bA_e - b\bar{A}}{\omega \cdot N}$$

$$k^\alpha = \frac{c_1 + c_2 + \frac{bA_e - b\bar{A}}{\omega \cdot N}}{\left(\frac{w - e}{\omega}\right)}$$

$$k^\alpha = \frac{\omega(c_1 + c_2) + \frac{bA_e - b\bar{A}}{N}}{(w - e)}$$

---

<sup>19</sup> En este caso, d es la depreciación neta, que es distinta a la d de la regla de oro:  $d_{\text{neta}} = (1 - d_{\text{bruta}})$

$$k = \left[ \frac{\omega(c_1 + c_2) + \frac{bA_e - b\bar{A}}{N}}{(w - e)} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (1.125)$$

El nivel de capital estacionario está dado por (1.125). En este caso se toma como exógeno al nivel de consumo y al nivel de medioambiente. Cuando el planificador central llega a este nivel de capital, se mantiene. Como podemos ver, en esta economía perfectamente igualitaria, el capital deberá cubrir los niveles de consumo y mantenerse en tal nivel que el medioambiente se mantenga en el nivel  $A_e$ .

Para saber la eficiencia de esta asignación, se observa:

$$k^\alpha = \frac{c_1 + c_2 + \frac{bA_e - b\bar{A}}{\omega \cdot N}}{\left(\frac{w - e}{\omega}\right)}$$

$$\left[ \frac{\alpha(\omega - e)}{\omega} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} = k_{oro}; R = 0$$

$$\left[ \frac{\omega}{\alpha(\omega - e)} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} = k_{oro}; R = 0$$

$$\left[ \frac{\omega}{(\omega - e)} \right] = \alpha k_{oro}^{\alpha-1}; R = 0$$

$$\frac{k_{oro}}{\alpha} = \left[ c_1 + c_2 + \frac{bA_e - b\bar{A}}{\omega \cdot N} \right] \quad (1.126)$$

$$k^\alpha = \left[ c_1 + c_2 + \frac{bA_e - b\bar{A}}{\omega \cdot N} \right] \cdot \alpha k_{oro}^{\alpha-1} \quad (1.127)$$

De la condición (1.126), se demuestra que la asignación igualitaria es alcanzable o posible. De (1.127), se infiere que aunque  $A_e$  sea fijada en el nivel dorado de la economía, la asignación igualitaria puede no ser eficiente.

## G. Análisis de sostenibilidad ambiental

Para completar, la discusión desde la sostenibilidad débil, se utiliza el tratamiento de Chichilnisky (1997). Chichilnisky (1997), prueba que una función de utilidad que cumple con estas características, tiene la siguiente especificación :

$$W(\{u_t\}) = \sum_{t=1}^{\infty} \lambda_t u_t + \lim_{t \rightarrow \infty} u_t \quad (1.128).$$

Esta función de bienestar social, requiere que se solucione como dos problemas separados. La primera parte es idéntica al problema centralizado, que ya se resolvió. La segunda parte, requiere que se maximice el  $\lim_{t \rightarrow \infty} u_t$ , sujeto a las trayectorias posibles –dadas por el primer problema-. Esto implica, que se encuentre los niveles mantenibles de manera indefinida de los argumentos de  $U(c,A)$  (Beltratti, Chichilnisky, & Heal, 1993). Esto es análogo a encontrar la regla de oro de capital y del medioambiente:

$$\begin{aligned} & \text{Max} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} U_t \\ & \text{Max} \quad U \\ & \text{Max}[u(c_1, A) + (1 + \theta)^{-1}u(c_2, A)] \\ & f(k) = \delta k + c_1 + c_2 + m \\ & bA = b\bar{A} - eN \cdot k^a + \omega \cdot Nm \end{aligned}$$

Entonces, la única asignación que satisface estos dos problemas simultáneamente, es la suma no descontada de las utilidades intergeneracionales. Es decir, la asignación del comando central cuando  $R$  es cero. Ahora queda demostrado que la economía descentralizada no es sostenible, pues no puede alcanzar la asignación del comando central no descontada. También, se

demuestra que la solución descentralizada sin descuento intertemporal es sustentable y es equitativa. Esta conclusión, sobre la equivalencia de sostenibilidad, equidad y eficiencia, no puede generalizarse para cualquier especificación funcional de la utilidad y de la producción (Beltratti et al., 1993; Chichilnisky, 1997).

#### F. Extensión del modelo descentralizado con crecimiento endógeno:

El modelo con crecimiento endógeno, debe ser visto como una versión dinámica del modelo AK. En este caso, la tecnología dependerá del capital del período anterior. Esto puede ser interpretado, como buenas prácticas industriales, difusión de conocimiento y otro tipo de externalidades positivas a la producción. El cambio fundamental en el modelo descentralizado está en el problema de la firma:

$$F_t(\tau, L_t, K_t) = \tau L_t^{(1-a)} K_t^a = \tau L f(K_t/L_t) = L f(k_t) = \tau k_t^a$$

$$\tau = \tau^- k_{t-1}^{1-\alpha}$$

$$f_t(\tau, k_t) = \tau k_t^a = \tau^- k_{t-1}^{1-\alpha} k_t^a$$

$$k_{t-1} = k_t = k$$

$$f_t(\tau, k) = \tau^- k$$

Las condiciones de primer orden del problema de maximización del beneficio sujeto a los costos y la función de producción son:

$$cpo \quad F_L(\tau, K_t, L_t) = w_t; \quad F_K(\tau, K_t, L_t) = r_t$$

$$\tau k_t^a - \tau k_t (a) k_t^{(a-1)} = w_t; \quad (1-a) \tau k_t^a = w_t$$

$$(1-a) (\tau^- k_{t-1}^{1-\alpha}) k_t^a = w_t$$

$$a (\tau^- k_{t-1}^{1-\alpha}) k_t^{(a-1)} = r_t$$

Ahora, las ecuaciones que determinan el equilibrio dinámico, se modifican así<sup>20</sup>:

$$k_{t+1} = \frac{(1-a)(\tau^- k_{t-1}^{1-\alpha})k_t^\alpha - \frac{(2+\theta)\beta^-}{\omega\gamma} \left[ N_{(t+1)} \left( (1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - ek_t^\alpha \right) \right]}{(1+n)(2+\theta)}$$

$$a_{(t+1)} = \frac{(1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - e\tau^- k_{t-1}^{1-\alpha} k_t^\alpha + \omega \left[ \frac{(1-a)\tau^- k_{t-1}^{1-\alpha} k_t^\alpha - \frac{(2+\theta)\beta^-}{\omega\gamma} \left[ N_{(t+1)} \left( (1-b)a_t + \frac{b\bar{A}}{N_t} - e\tau^- k_{t-1}^{1-\alpha} k_t^\alpha \right) \right]}{\left( (2+\theta)\frac{\beta}{\gamma} + 1 \right) + (2+\theta)\frac{\beta}{\gamma}(N_{(t+1)} - 1)} \right]}{(1+n)}$$

El factor  $\tau^-$ , sirve para poder escalar al modelo. Se puede fijar en  $\tau^- = 1$ , sin pérdida de generalidad. La tecnología se ha endogenizado. Este problema es matemáticamente complejo –ecuaciones en diferencias de segundo grado, no lineal-. Para ver los resultados numéricos, referirse al apéndice B de simulaciones numéricas.

---

<sup>20</sup> Estas ecuaciones son las que se utilizan en las simulaciones de la hoja de cálculo electrónica de Excel.

## 9. BIBLIOGRAFÍA:

- Blanchard, O., & Fischer, S. (1989). *Lectures on Macroeconomics*. Cambridge/MA: MIT Press.
- de La Croix, D., & Michel, P. (2002). *A Theory of Economic Growth: Dynamics and Policy in Overlapping Generations*: Cambridge University Press.
- Mas-Collel, A., Whinston, M. D., & Green, J. (1995). *Microeconomic Theory*: Oxford University Press.
- Shone, R. (2002). Economic Dynamics
- Arrow, K. J. (1973). Rawls's principle of just saving. *Swedish Journal of Economics*, 75(4), 323–335.
- Beltratti, A., Chichilnisky, G., & Heal, G. (1993). Sustainable Growth and the Green Golden Rule. *NBER Working Paper No. 4430*.
- Chichilnisky, G. (1997). What is sustainable development? *Land Economics*, 73(4), 467.
- Falconí, F. (2002). La desmaterialización de la economía. *Ecuador Debate*, 121-133.
- John, A., & Pecchenino, R. (1994). An Overlapping Generations Model of Growth and the Environment. *Economic Journal*, 104(427), 1393-1410.
- Pezzey, J. C. V., & Toman, M. A. (2002). The Economics of Sustainability: A Review of Journal Articles. *Resources for the Future Discussion Paper*, 02–03.
- Solow, R. (1974). Intergenerational Equity and Exhaustible Resources. *Review of Economics Studies*, *Symposium on the Economics of Exhaustible Resources*.