



MANUAL PRÁCTICO DE OPERACIONES FINANCIERAS

Dr D. Enrique R. Blanco Richart

CAPÍTULO 1º:

LA LÓGICA FINANCIERA. CONCEPTOS BÁSICOS

Dr D. Enrique R. Blanco Richart

OBJETIVOS

- Conocer las magnitudes que identifican a un capital financiero.
- Definir y comprender el principio de subestimación de capitales.
- Identificar que tipo de variación experimenta un capital del presente al trasladarlo al futuro y viceversa.
- Definir el concepto de Ley Financiera.
- Definir el concepto de factor financiero.
- Diferenciar entre capitalización y descuento.
- Definir y diferenciar el rédito, el interés y el tanto.
- Definir y enumerar las características de una operación financiera.
- Definir el concepto de equivalencia financiera de capitales.
- Enumerar las distintas leyes financieras generales.

1.- EL CAPITAL FINANCIERO.

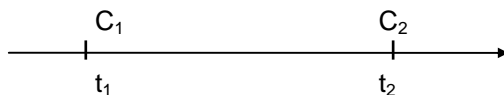
El dinero no es más que lo que comúnmente es aceptado en el mercado de bienes y servicios desempeñando, entre otras, las siguientes funciones: Ser unidad de cuenta de los bienes, o ser medio de pago o instrumento de cambio.

Estos bienes y servicios se caracterizan por satisfacer necesidades humanas y ser escasos, por lo que tienen una utilidad que puede medirse en términos monetarios. La actividad económica se caracteriza por la producción de estos bienes y servicios y por su intercambio. Este intercambio puede ser:

- Simultáneo: Cuando el bien o servicio que se adquiere y su pago, coinciden en el tiempo, es lo que entendemos como **operación al contado**.
- No simultáneo: Cuando el bien o servicio que se adquiere y su pago, no coinciden en el tiempo, es lo que entendemos como **operación aplazada**.

Nosotros vamos a analizar las operaciones aplazadas que son las denominadas **operaciones financieras**, por lo que vamos a definir el **Capital financiero** como: "La medida de cualquier activo real o financiero, expresada por su cuantía, **C** y por su vencimiento o momento de disponibilidad, **t**". En consecuencia todo capital financiero se caracteriza por ser una cantidad pero siempre asociada al momento en que la tendremos disponible (si es ahora el momento es cero, si es más tarde el momento es t)

El capital financiero puede representarse gráficamente de forma lineal:

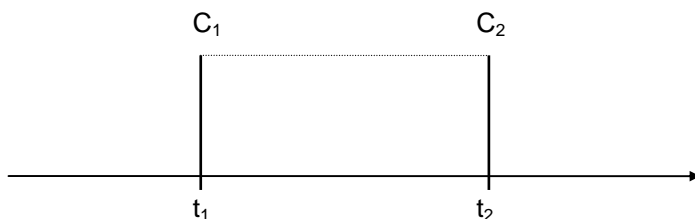


2.- COMPARACIÓN DE CAPITALES. "EL PRINCIPIO DE SUBESTIMACIÓN".

Establecida la definición de capital financiero, el primer punto a resaltar es que el tiempo afecta al valor de los capitales, así dados dos capitales cuyas cuantías sean iguales, no tendrán el mismo valor financiero si sus vencimientos son distintos, en este caso se preferirá el capital más próximo al momento en que se realiza el intercambio, al que vence más tarde. Este comportamiento se conoce como **Principio de subestimación de capitales futuros**, con lo que el tiempo actúa como un bien económico negativo, ya que el alejamiento de la disponibilidad de un bien debe de ser compensado con un aumento de su cuantía para que resulte indiferente (Si me ofrecen recibir 100 € hoy o dentro de dos meses, evidentemente los querré hoy, y sólo estaré dispuesto a esperar si me dan más euros dentro de los dos meses).

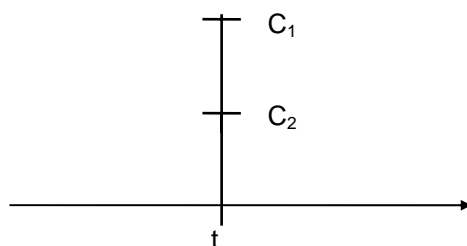
Establecido el *Principio de subestimación* podemos afrontar la comparación de capitales para ver cuál es preferible o comprobar si son indiferentes. Dicha comparación puede ser inmediata en algunos casos, cuando alguno de los componentes del capital financiero (C, t), coincidan y no será inmediata si alguno de los componentes del capital financiero no coincida. Los distintos casos que se nos pueden presentar en la comparación de capitales serían:

- a.- **Capitales de igual cuantía y distinto vencimiento:** Como el componente que coincide es la cuantía de los capitales, la elección será inmediata en función del tiempo, prefiriendo el capital (C_1, t_1) por ser más inmediato que (C_2, t_2) para así hacer cumplir el principio de subestimación de capitales futuros. Su representación gráfica sería:



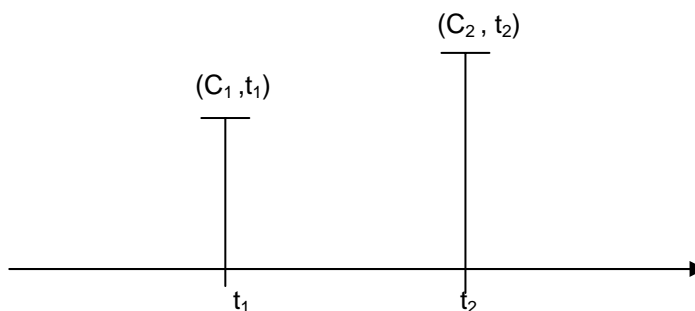
Si utilizásemos los números fraccionarios como ejemplo comparable a los capitales iguales y distinto vencimiento podría ser: $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{5}$ y $\frac{2}{5}$ en este caso tenemos fracciones distintas pero con el mismo denominador, por lo tanto podemos escoger de forma rápida sin hacer operaciones ya que es mayor aquella fracción cuyo numerador sea mayor ($\frac{8}{5}$).

- b.- Capitales de cuantía diferente e igual vencimiento:** Como el componente que coincide es el tiempo, la elección será inmediata escogiendo el capital de mayor cuantía, que es este caso es (C_1, t) . Gráficamente sería:



Si utilizásemos los números fraccionarios como ejemplo comparable a los capitales distintos y mismo vencimiento podría ser: $\frac{5}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{2}$ en este caso tenemos fracciones distintas pero con el mismo numerador, por lo tanto podemos escoger de forma rápida sin hacer operaciones ya que es mayor aquella fracción cuyo denominador sea menor ($\frac{5}{2}$).

- c.- Capitales de cuantía y vencimiento diferente:** Como en este caso ningún componente coincide no se puede precisar de forma inmediata y directa que capital es preferible, por lo que tendremos que establecer algún criterio de comparación cuando los capitales no coinciden en su cuantía o en su vencimiento. En este caso la representación gráfica sería:



La solución al problema será intentar homogeneizar alguno de los componentes que definen el capital financiero, C o t , de tal manera que queden reducidos a uno de los dos primeros casos planteados. A este criterio le denominaremos **Criterio de sustitución de capitales financieros**, que se expresará del siguiente modo:

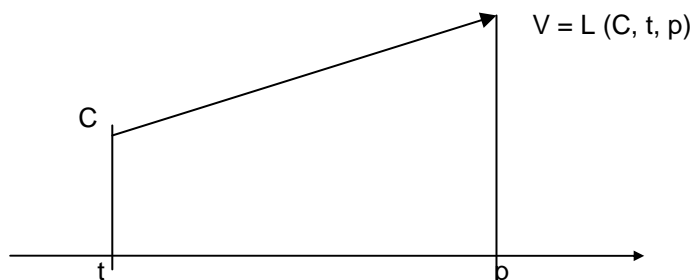
“Dado un capital (C_1, t_1) y fijado un punto de comparación en p , es posible obtener un capital que sea sustituto y equivalente al anterior en p , (V_1, p) ”.

Siguiendo el ejemplo de las fracciones: $\frac{5}{3}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{2}$ en este caso tenemos fracciones distintas en su numerador y su denominador, por lo tanto no podemos escoger de forma rápida sin hacer operaciones. El criterio que se aplica en este caso es reducir las fracciones a equivalentes a las dadas pero con el mismo denominador, (el mínimo común múltiplo): En este caso el m.c.m. es 12, por lo que las fracciones equivalentes a las anteriores (mismo valor aunque parecen distintas) serían: $\frac{20}{12}$, $\frac{24}{12}$, $\frac{4}{12}$ y $\frac{18}{12}$, de este modo podemos afirmar de forma rápida que la fracción de más valor sería $\frac{24}{12}$.

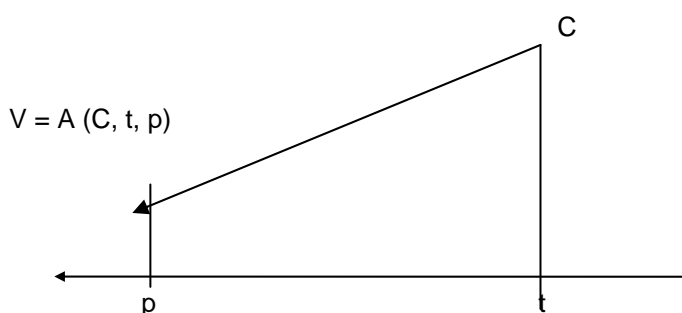
3.- LA LEY FINANCIERA.

La ley financiera se define: “Como la expresión matemática del criterio de sustitución de un capital (C_1, t_1) en p ”. Respecto a la sustitución en p del capital, y en función del vencimiento podemos obtener dos leyes:

- **Ley de capitalización:** Cuando $t < p$, es decir estamos buscando de un capital presente (C, t) , su sustituto V en el futuro, que en base al principio de subestimación será de cuantía mayor. Su representación gráfica será:



- **Ley de descuento:** Cuando $t > p$, es decir estamos buscando de un capital futuro (C, t) , su sustituto V en el presente, que en base al principio de subestimación será de cuantía menor. Su representación gráfica sería:



4.- LA SUMA FINANCIERA DE CAPITALES.

Hasta ahora hemos establecido de qué modo podemos comparar capitales en cualquier caso. Pero también es necesario saber como debemos proceder cuando se quiera agrupar varios capitales en uno sólo, es decir sumarlos, o viceversa tomar un capital y desglosarlo en varios, de tal forma que su suma sea equivalente al capital original. Ante este problema se nos pueden presentar dos casos:

- Quando los capitales a sumar tengan el mismo vencimiento: En este caso al tener todos los capitales el vencimiento (t) como elemento común bastará con obtener la suma aritmética de éstos. Así en el caso de dos capitales (C_1, t) y (C_2, t) , el capital suma sería $(C_1 + C_2, t)$.
- Si los vencimientos de los capitales y éstos son distintos no tienen ningún elemento común, por lo que necesitaremos homogeneizarlos utilizando una ley financiera (el m.c.m. del ejemplo).

Recordar que un bien es equivalente a otro cuando el valor de ambos es el mismo aunque sus formas o expresiones sean diferentes. Un coche y dinero, un yate y un piso, etc.

5.- EL TANTO Y EL INTERÉS.

- ❑ **El tanto:** Se define como la variación experimentada por unidad de capital y por unidad de tiempo al pasar de un punto t_1 a otro posterior t_2 o viceversa. Generalmente se expresan en tanto por ciento. Si hablamos de un 6 % anual, nos indica que la variación de 100 € en un año será de 6 € (o por cada 1 € se obtendrán 0,06 €). (Tanto = Tipo de interés).
- ❑ **El interés:** Se define la variación que experimenta un capital al pasar de un punto t_1 a otro posterior t_2 o viceversa pero medido en euros. Podemos encontrar dos tipos de interés, que dan lugar a dos leyes diferentes:
 - ✓ El interés vencido o postpagable (i), es aquel que se calcula al final de la operación o al final de cada periodo. La ley que utiliza este tipo de interés es la denominada de capitalización.
 - ✓ El interés anticipado o prepagable (d), que es aquel que se calcula al inicio de la operación o al inicio de cada periodo. La ley que utiliza este tipo de interés es la denominada de descuento.

6.- LA OPERACIÓN FINANCIERA. EL TRABAJO CON VARIOS CAPITALES.

Una operación financiera se define como todo intercambio de capitales financieros. En toda operación financiera se ha de cumplir:

- a.- Que el intercambio de capitales no sea simultáneo, es decir, los capitales que se intercambian han de tener vencimientos distintos, sino estaríamos ante una operación al contado, hoy tenemos todos los capitales, y no sería una operación financiera.
- b.- Que exista mutuo acuerdo entre las partes implicadas en dicho intercambio. Se denomina *acreedor o prestamista* a la persona que entrega los capitales y al conjunto de esta entrega se llama *prestación*, y se denomina *deudor o prestatario* a la persona que recibe los capitales comprometiéndose a su devolución y al conjunto de sus capitales se le llama *contraprestación*.
- c.- Que exista una ley financiera pactada entre las partes para que siempre se cumpla la equivalencia financiera entre la prestación y la contraprestación. Por lo tanto en toda operación financiera se ha de establecer el **Principio de equivalencia de capitales** que definiríamos como:

“ En toda operación financiera, elegida una ley financiera de valoración, se ha de cumplir siempre que la suma de los capitales de la prestación ha de ser igual a la suma de los capitales de la contraprestación”.

Por ejemplo: Si vamos al banco y depositamos hoy 1.000 € durante un año a un 10 % anual (es decir el banco nos va a devolver el capital y 10 € por cada 100 depositados y por cada año) al final del año el banco le devolverá en total 1.100 € (en este caso el interés será de $1.100 - 1.000 = 100$ €). Lo que hemos hecho financieramente es sustituir un capital de 1.000 € hoy por otro de 1.100 € valorado dentro de un año. Pues bien, toda operación que consista en sustituir un capital o conjunto de capitales por otro mediante un determinado acuerdo financiero (la ley o expresión matemática que vamos a utilizar para calcularlo), recibe el nombre de **operación financiera**. El *origen* de la operación es el inicio, en nuestro caso “hoy”; y el *final* el último vencimiento, en el ejemplo “dentro de un año” y la *duración* es la diferencia entre ambos vencimientos, en definitiva, un año.

Las operaciones financieras se pueden clasificar atendiendo a diversos criterios, como pueden ser los siguientes:

- ✗ Según la ley financiera utilizada:
 - De capitalización: Si se utiliza esta ley.
 - De descuento: Si en la operación se utiliza esta ley.
- ✗ Según el tiempo:
 - A corto plazo: Son generalmente operaciones hasta un año.

- A largo plazo: Generalmente operaciones a más de un año

DICCIONARIO ECONÓMICO BÁSICO

- 1.- **Activos Financieros:** Títulos que incorporan derechos sobre activos reales.
- 2.- **Activos Intangibles:** Activos inmateriales, marcas, patentes, ...
- 3.- **Activos Reales:** Activos tangibles e intangibles utilizados en el desarrollo del negocio.
- 4.- **Activos Tangibles:** Activos físicos como edificios, maquinaria, mobiliario, ...
- 5.- **Amortización:** Este término tiene dos acepciones:
 - * Devolución de un préstamo a plazos.
 - * Dotaciones realizadas para compensar la depreciación.
- 6.- **Apalancamiento financiero:** Utilización de la deuda para aumentar la rentabilidad esperada del capital propio.
- 7.- **Apalancamiento Operativo:** Costes fijos de explotación, así llamados porque acentúan la variabilidad de los beneficios.
- 8.- **Arbitraje:** Compra y venta de un título simultáneamente para obtener un beneficio sin riesgo.
- 9.- **Arrendador:** Propietario de un activo alquilado.
- 10.- **Arrendatario:** Usuario de un activo alquilado.
- 11.- **Beta (β):** Medida del riesgo de mercado.
- 12.- **Bono:** Deuda no garantizada, con un vencimiento normalmente inferior a diez años.
- 13.- **Bono de cupón cero:** Bono emitido al descuento que no paga intereses hasta el vencimiento.
- 14.- **Capital Riesgo:** Capital para financiar una nueva empresa.
- 15.- **Capital Social:** Valor nominal de las acciones de una sociedad.
- 16.- **Cartera Eficiente:** Cartera que ofrece el menor riesgo en relación con su rentabilidad esperada y la mayor rentabilidad esperada con respecto a su nivel de riesgo.
- 17.- **Coste de Oportunidad del Capital:** Rentabilidad esperada de la inversión financiera a la que se renuncia por invertir en un proyecto económico de riesgo similar.
- 18.- **Dividendo:** Pago de una empresa a sus accionistas.
- 19.- **Dividendo en Acciones:** Dividendo repartido en forma de acciones en lugar de efectivo.
- 20.- **Dividendo de Capital:** Dividendo que representa una recuperación del capital.
- 21.- **Efectos a Pagar:** Cuentas a pagar.
- 22.- **Emisión con Cotización Previa:** Emisión de un título para el que ya existe un mercado.
- 23.- **Emisión con Derechos (Emisión de Suscripción Preferente):** Emisión de títulos ofrecida a los accionistas ordinarios.
- 24.- **Emisión Infravalorada:** Emisión de títulos por debajo de su valor de mercado.
- 25.- **Emisión Pendular:** Emisiones sucesivas bancarias para conseguir financiación mientras la empresa reemplaza el papel comercial estadounidense por papel eurocomercial.
- 26.- **Emisión Pública Abierta:** Emisión de títulos ofrecida a todos los inversores.
- 27.- **Emisión Secundaria:** Procedimiento para vender conjuntos de títulos de emisiones con cotización previa. En general, venta de títulos ya emitidos.
- 28.- **Emisión sin Cotización Previa:** Emisión de un título para el que no existe ya mercado.
- 29.- **Emisión Totalmente Liberada:** Emisión gratuita de acciones para los actuales accionistas.
- 30.- **Emisor:** Vendedor de una opción.

- 31.- Flujo de caja cierto que tiene el mismo valor futuro que un determinado flujo incierto.
- 32.- Escritura de Constitución: Documento legal de constitución de una sociedad determinando su estructura y propósito.
- 33.- Estructura de Capital: Combinación de los diferentes títulos emitidos por una empresa.
- 34.- EURIBOR: (European Interbank Offered Rate). Es el interés al que las entidades financieras se prestan dinero en el mercado interbancario europeo
- 35.- Ex-derechos: Compra de acciones en la que el comprador no adquiere el derecho preferente de suscripción de las nuevas emisiones de acciones.
- 36.- Ex-dividendo: Término que describe una compra de acciones en la que el comprador no tiene derecho al dividendo.
- 37.- Factoring: Contrato por el que una institución financiera compra las cuentas a cobrar de una empresa y se encarga de cobrarlas.
- 38.- Factoring al Vencimiento: Contrato de *factoring* que garantiza el cobro y el seguro de las cuentas a cobrar.
- 39.- Factoring Clásico: Contrato de *factoring* que proporciona el cobro, el seguro y la financiación de las cuentas a cobrar.
- 40.- FCD: Flujo de caja descontado.
- 41.- Fecha de Cierre; Fecha fijada por los administradores en la que se hace efectivo el pago de dividendos. Los dividendos se envían a quienes están registrados en el libro de accionistas a la fecha de cierre.
- 42.- Fecha Estacional: Crédito facilitado a los clientes que solicitan productos fuera de temporada alta.
- 43.- Financiación de Proyecto: Deuda que generalmente incorpora un derecho sobre los flujos de tesorería de un proyecto concreto y no sobre los activos totales de la empresa.
- 44.- Financiación Externa: Financiación generada en la empresa por beneficios retenidos y amortizaciones.
- 45.- Financiación fuera de Balance: Financiación que no se refleja como pasivo en el balance de la empresa.
- 46.- Financiación Interna: Financiación generada en la empresa por beneficios retenidos y amortizaciones.
- 47.- Flujo de Tesorería Descontado (FTD): Flujo de tesorería futuro multiplicado por los factores de descuento correspondientes para obtener su valor actual.
- 48.- Flujo de Tesorería Disponible: Efectivo no retenido ni reinvertido en el negocio.
- 49.- Folleto de Emisión: Resumen de la memoria de inscripción que proporciona información sobre una emisión de títulos.
- 50.- Fondo de Inversión: Fondo de carácter mutualista cuyas participaciones se venden a los inversores.
- 51.- Fondo de Maniobra: Activo circulante menos pasivo circulante, es la parte del activo circulante financiada por pasivo fijo.
- 52.- Forex (Foreign Exchange): Tipo de cambio de una divisa.
- 53.- Forfaiting: Compra de promesas de pago emitidas por los importadores.
- 54.- Fusión: Adquisición en la que el comprador absorbe todos los activos y pasivos de la empresa vendedora. En general, cualquier combinación de dos empresas.
- 55.- Fusión Horizontal: Fusión entre dos empresas que no pertenecen a la misma rama de actividad económica.
- 56.- Fusión Vertical: Fusión entre un proveedor y su cliente.
- 57.- Futuro: Contrato de compra de un título o mercancía en fecha futura a un precio determinado hoy. A diferencia de los contratos *forward*, las transacciones de futuros se efectúan en mercados organizados y diariamente.
- 58.- Futuro de banda: Contrato sobre tipo de cambio futuro que establece límites inferior y superior en el tipo de cambio entre dos divisas.
- 59.- Garantía: Derecho de un prestamista sobre activos específicos.
- 60.- Garantía Prendataria: Activos aportados en garantía de un préstamo.
- 61.- Hipoteca Abierta: Hipoteca contra la que se puede emitir deuda adicional.
- 62.- Hipoteca Cerrada: Hipoteca contra la que no puede emitirse deuda adicional.

- 63.- **Índice de Rentabilidad (Ratio Beneficio-Coste):** Relación entre el valor actual de un proyecto y la inversión inicial.
- 64.- **Ingeniería Financiera:** Combinar o modificar instrumentos financieros ya existentes para crear productos financieros nuevos.
- 65.- **Inmunización Financiera:** Formación de una cartera de títulos cuyo valor no se vea afectado por los cambios en los tipos de interés.
- 66.- **Inscripción de un Plan de Emisiones:** Procedimiento que permite a las empresas presentar una memoria de inscripción que cubre emisiones diferentes del mismo título.
- 67.- **Intercambio de acciones:** Adquisición de otra empresa mediante la compra de sus acciones a cambio de efectivo o en acciones.
- 68.- **Intercambio de Activos:** Adquisición de otra empresa mediante la compra de sus activos a cambio de efectivo o en acciones.
- 69.- **Interés Compuesto:** Reinversión de los intereses devengados para obtener más intereses.
- 70.- **Interés Simple:** Interés calculado únicamente sobre la inversión inicial.
- 71.- **Intereses Devengados:** Intereses debidos pero todavía no pagados.
- 72.- **Intermediación:** Inversión a través de instituciones financieras.
- 73.- **Letra de Cambio:** Documento en demanda de pago.
- 74.- **Letra de Cambio a la Vista:** Demanda de pago inmediata.
- 75.- **Letra de Cambio a Plazo:** Demanda de pago en una fecha futura establecida.
- 76.- **Línea de crédito:** Acuerdo entre un banco y una empresa por el que ésta puede endeudarse en cualquier momento hasta un límite establecido.
- 77.- **Liquidez:** Facilidad y certeza de conversión a corto plazo de un activo en dinero.
- 78.- **Margen:** Tesorería o títulos aportados por un inversor como prueba de que puede hacer frente a sus compromisos.
- 79.- **Margen de Cobertura:** Situación en la que el precio al contado de un activo es superior a su precio futuro.
- 80.- **Margen de Mantenimiento:** Margen mínimo que debe mantenerse en un contrato de futuros.
- 81.- **Margen de variación:** Pérdidas o ganancias diarias en un contrato de futuros que se transfieren a la cuenta de márgenes del inversor.
- 82.- **Margen Horizontal:** Compra y venta simultánea de dos opciones que únicamente difieren en la fecha de ejercicio.
- 83.- **Margen Vertical:** Compra y venta de dos opciones que difieren solamente en su precio de ejercicio.
- 84.- **Mercado al alza:** Subida generalizada de los precios de los títulos.
- 85.- **Mercado a la baja:** Disminución generalizada de los precios de los títulos.
- 86.- **Mercado de Capital:** Mercado financiero en el que se negocian títulos a largo plazo.
- 87.- **Mercado Eficiente:** Mercado en el que los precios de los títulos reflejan instantáneamente la información.
- 88.- **Mercado Monetario:** Mercado de activos financieros a corto plazo y de bajo riesgo.
- 89.- **Mercado Primario:** Mercado en el que se emiten por primera vez los títulos.
- 90.- **Mercado Secundario:** Mercado en el que se cotizan, es decir, se puede comprar o vender títulos anteriormente emitidos y ya en circulación.
- 91.- **Montante Único:** Pago final único, por ejemplo, de un préstamo.
- 92.- **Obligación Convertible:** Obligación que puede ser convertida en otro título a opción del poseedor.
- 93.- **Obligación exterior:** Obligación emitida en el mercado de capitales interior de otro país.
- 94.- **Obligación Hipotecaria:** Obligación garantizada por instalaciones y equipos.
- 95.- **Obligación prorrogable:** Obligación cuyo vencimiento puede prorrogarse a voluntad del prestamista.
- 96.- **Obligación Simple:** Obligación no garantizada.
- 97.- **Obligaciones con Vencimiento Escalonado:** Paquetes de obligaciones que vencen en años sucesivos.
- 98.- **Obligaciones de Renta:** Obligaciones que sólo producen intereses si la empresa obtiene beneficios.

- 99.- **Oferta de Adquisición:** Oferta general hecha directamente a los accionistas de la empresa para comprar sus acciones.
- 100.- **Oferta Pública Inicial (OPI):** Primera emisión pública de acciones ordinarias de una empresa.
- 101.- **Opción Compuesta:** Opción sobre una opción.
- 102.- **Opción de Compra:** Contrato por el que el comprador adquiere el derecho de comprar un activo a un precio de ejercicio especificado antes o en la fecha de expiración acordada.
- 103.- **Opción de Venta:** Opción de vender un activo a un precio especificado en, o antes de una fecha de ejercicio especificada.
- 104.- **Pagaré:** Promesa de pago.
- 105.- **Pagaré Financiero:** Pagarés no garantizados emitidos por las empresas con vencimiento inferior a nueve meses.
- 106.- **Pagarés del Tesoro:** Deuda al descuento con vencimiento inferior a un año, emitida regularmente por el gobierno.
- 107.- **Pago Final:** Último pago de un préstamo reembolsado a plazos.
- 108.- **Pasivo:** Valor total de los recursos que financian los activos de la empresa. Igual a :
 - × Activos totales.
 - × Activos totales menos patrimonio neto.
- 109.- **Patrimonio Neto:** Valor contable de las acciones ordinarias, excedentes y reservas de una empresa.
- 110.- **PCGA:** Principios de contabilidad generalmente aceptado.
- 111.- **Plazo:** Duración de un préstamo.
- 112.- **Precio al Contado:** Precio de un activo para entrega inmediata.
- 113.- **Precio de Conversión:** Valor nominal de un título convertible dividido por el número de acciones en las que puede ser convertido.
- 114.- **Precio de Oferta:** Precio al cual un intermediario está dispuesto a vender.
- 115.- **Precio de Venta:** Precio al cual un intermediario está dispuesto a vender.
- 116.- **Precio de ejercicio (Precio Acordado o Strike):** Precio al que puede ejercitarse una opción de compra o una opción de venta.
- 117.- **Presupuesto de tesorería:** Previsión de fuentes y empleos de tesorería.
- 118.- **Prima de Riesgo:** Rentabilidad adicional por realizar una inversión arriesgada en lugar de una segura.
- 119.- **Primera Emisión:** Emisión de nuevos títulos de deuda de una empresa.
- 120.- **Principal:** Volumen de deuda que debe reembolsarse.
- 121.- **Punto Base:** 0,01 por ciento.
- 122.- **Rentabilidad:** Capacidad del título de producir intereses u otro tipo de rendimientos al adquiriente.
- 123.- **Riesgo:** Posibilidad de pérdida de valor de un activo.
- 124.- **Sistema Financiero:** Sistema formado por el conjunto de instituciones, medios y mercados que canalizan los recursos desde las unidades de gasto con superávit hacia las unidades de gasto con déficit.
- 125.- **Ratio de tesorería:** Este ratio tiene por objeto medir la capacidad de una empresa para hacer frente a sus deudas a corto plazo con sus activos disponibles a corto plazo. $\text{Activos realizables} + [(\text{Caja} + \text{bancos}) / \text{Deudas a c/p}]$



CAPÍTULO 2°:

LAS LEYES CLÁSICAS SIMPLES

Dr D. Enrique R. Blanco Richart

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✓ Conocer y utilizar las expresiones matemáticas de la ley de capitalización y de la ley de descuento.
- ✓ Conocer y utilizar la relación existente entre la ley de capitalización y la ley de descuento.
- ✓ Identificar el punto “p” de aplicación en una operación de capitalización y de descuento.
- ✓ Plantear correctamente una ecuación financiera identificando los capitales, su vencimiento y el punto de aplicación.
- ✓ Calcular la suma financiera de varios capitales distintos en cuantía y vencimiento.
- ✓ Calcular la reserva matemática o saldo financiero de una operación.
- ✓ Identificar y plantear correctamente una operación de vencimiento medio.
- ✓ Aplicar el procedimiento de ejecución de un asiento.

1.- LA CAPITALIZACIÓN SIMPLE.

Es una operación financiera cuyo objeto es la sustitución de un capital presente por otro equivalente con vencimiento posterior, mediante la aplicación de la ley financiera en régimen de simple. Este régimen financiero es propio de las operaciones a corto plazo. La característica fundamental del régimen simple, es que los intereses *no son productivos*, lo que significa.

- A medida que se generan no se acumulan al capital inicial para producir nuevos intereses en el futuro .
- Por lo tanto los intereses de cualquier período siempre los genera el capital inicial.

Ahora vamos a demostrar la expresión matemática referida a la ley de capitalización simple (viene a ser lo que en las fracciones era el m.c.m., es decir la fórmula que me va a permitir calcular capitales equivalentes en cualquier punto y así poder compararlos, sumarlos, etc.)

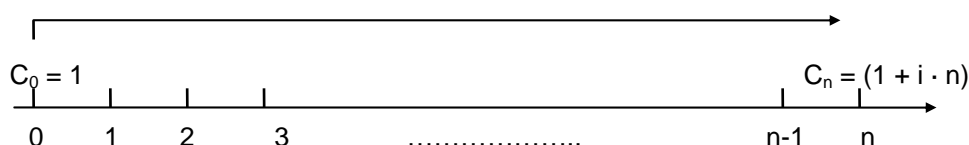
Sea: Un capital unitario ($C = 1$), un intervalo $(0, n)$ y recordando que el interés (I) se obtiene multiplicando el capital por el rédito ($I = C \cdot i$) y que se denomina montante a la suma del capital inicial más los intereses generados ($C_n = C_0 + I$), tendremos:

- Capital al inicio de la operación: $C_0 = 1$
- Capital al final del primer periodo: $C_1 = C_0 + I_1 = 1 + (1 \cdot i) = 1 + i$
- Capital al final del segundo periodo: Hay que tener en cuenta que los intereses no son productivos, por lo que el interés se seguirá calculando sobre el capital inicial C_0 :

$$C_2 = C_1 + I_2 = (1 + i) + (C_0 \cdot i) = (1 + i) + (1 \cdot i) = 1 + i + i = 1 + 2 \cdot i$$

- Generalizando
- Capital al final del periodo n , sería: $C_n = 1 + i \cdot n$

Esta expresión, es el valor final que se obtiene al invertir una unidad monetaria a un tanto unitario de interés i , para n periodos. La representación gráfica de la operación sería:



A la expresión $(1 + i \cdot n)$ se le denomina **FACTOR DE CAPITALIZACIÓN SIMPLE**, que nos permite trasladar un capital desde un momento a otro posterior y obtener su equivalente

✓ El Montante y el Interés.

- El Montante es el capital final, la suma del capital inicial más los intereses generados entre 0 y n . Se obtendrá multiplicando el capital inicial C_0 por el factor de capitalización.

$$C_n = C_0 (1 + i \cdot n)$$

- El Interés, que es el capital que nos dice la variación de un capital al pasar de 0 a n , se obtendrá por diferencia entre el montante C_n , capital final, y el capital inicial, C_0 .

$$I = C_n - C_0$$

O como los intereses en capitalización simple son *proporcionales* al número de periodos de capitalización, es decir $I = C_0 \cdot i \cdot n$

- ✓ **Ejemplo:** Calcular el montante obtenido al invertir 3.000 € al 5 % anual durante 3 años en régimen de capitalización simple.

$$C_3 = 3.000 \cdot (1 + 3 \cdot 0,05) = 3.450 \text{ €}$$

- ✓ **Ejemplo:** Calcular el interés generado por la operación anterior.

$$I = C_3 - C_0 = 3.450 - 3.000 = 450 \text{ € o también.}$$

$$I = 3.000 \cdot 0,05 \cdot 3 = 3.000 \cdot 0,15 = 450 \text{ €}$$

- ✓ **Ejemplo:** Calcular el montante obtenido al invertir 5.000 € al 3 % anual en el primer año, al 4 % en el segundo y al 5 % en el tercero.

Aquí no podemos aplicar la fórmula directa del montante (utilizar el factor de capitalización) al ser los tipos diferentes, por lo tanto calcularemos el interés de cada periodo lo sumaremos al capital inicial.

$$C_3 = C_0 + I_1 + I_2 + I_3 = 5.000 + (5.000 \cdot 0,03 \cdot 1) + (5.000 \cdot 0,04 \cdot 1) + (5.000 \cdot 0,05 \cdot 1) =$$

$$C_3 = 5.000 + 600 = 5.600 \text{ €}$$

✓ **Los Tantos Equivalentes.**

Los elementos que intervienen en el factor financiero de capitalización (i , n), han de estar expresados en la misma unidad para que la función sea homogénea. Por lo tanto un cambio en la unidad de uno de ellos supone un cambio en los demás para mantener dicha homogeneidad. La unidad de tiempo que se utiliza generalmente es el año, pero como la capitalización simple se utiliza en la práctica para operaciones a corto plazo, generalmente a menos de un año, es normal la utilización de otras unidades de tiempo: Meses, semestres, trimestres, etc. Así:

a.- Si se fracciona la unidad de tiempo en m partes la duración de la operación se multiplica por m para adecuarse al fraccionamiento, tomando un valor de $n \cdot m$ (La duración de la operación por el número de veces en que se ha fraccionado).

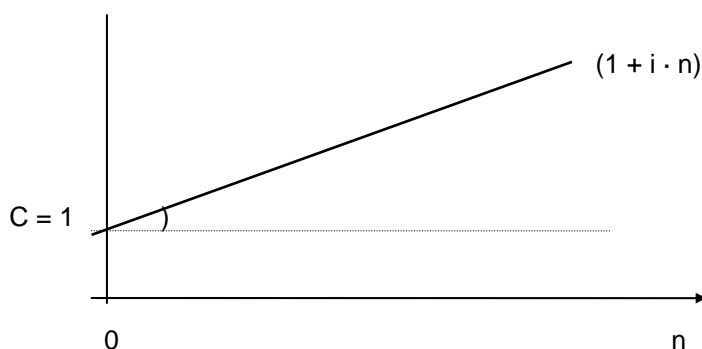
b.- El tanto i , correspondiente a cada periodo quedará, al contrario que con el tiempo, dividido por m , que son las partes en que se ha fraccionado la unidad de tiempo, por lo

$$\text{que: } i_m = \frac{i}{m}$$

En consecuencia como existe proporcionalidad, es indiferente o equivalente, para una duración determinada, en capitalización simple, trabajar con tantos fraccionados o no.

✓ **Representación Gráfica.**

En la capitalización simple, el factor de capitalización $(1 + i \cdot n)$, es una función de primer grado, cuya representación será una recta creciente cuya pendiente es igual al parámetro i .



✓ La Equivalencia De Capitales.

La sustitución de un o varios capitales por otro u otros de vencimientos y/o cuantías diferentes a las anteriores, sólo se podrá llevar a cabo si financieramente resultan ambas alternativas equivalentes.

Para ello se tendrán que valorar en un mismo momento de tiempo. A este momento de tiempo donde se realiza la valoración se le denomina punto de valoración (p). Para plantear una sustitución de capitales el acreedor y el deudor han de estar de acuerdo en las siguientes condiciones fundamentales:

- Momento en el cual se va a realizar la equivalencia, ya que si se varía este momento el resultado del problema puede variar.
- El tanto al que se va a valorar la operación.
- Decidir si se utiliza la ley de capitalización o de descuento.

En la capitalización simple, dos capitales que son equivalentes en **p**, tan sólo lo son en dicho punto y no en otro cualquiera. En la práctica ya se ha comentado que el punto p será el final de la operación ($p = n$) si trabajamos con capitalización y en el inicio ($p = 0$) si trabajamos con descuento.

Un caso particular es el denominado, **El Vencimiento Medio**, ya que es la única solución que no depende de ninguna ley financiera, siendo su característica fundamental la que el capital sustituto es la **suma aritmética** de los capitales sustituidos, es decir:

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad (1)$$

2.- EL DESCUENTO SIMPLE COMERCIAL.

También se caracteriza por la “*no productividad de los intereses*”. Si en la capitalización el aplazamiento de la operación provocaba, para mantener el principio de subestimación de capitales, que el capital sustituto en **n** fuese mayor, es decir el capital generaba intereses que se devengaban al final, en este caso se produce un adelantamiento del capital lo que supondrá obtener un descuento, una rebaja, sobre el capital al hacerlo efectivo antes de su vencimiento. El descuento serán los intereses que en este caso se devengan, ya se cobren o se paguen, al principio de la operación.

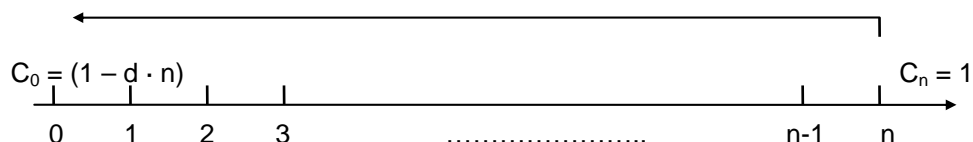
Al rédito de la operación se le designará con **d**, que es el **tanto anticipado** de la operación, frente a **i** que era el **tanto postpagable** de la operación.

El descuento se obtendrá multiplicando el capital por el rédito ($D = C \cdot d$) y el valor actual del capital será la diferencia entre el capital final y los intereses generados ($C_0 = C_n - D$).

Para la obtención de la expresión del factor financiero de descuento procederíamos igual que en el de capitalización, obteniendo la siguiente expresión:

$$C_0 = 1 - d \cdot n$$

Que es el valor actual que se obtiene al descontar una unidad monetaria a un tanto unitario de interés **d**, para **n** periodos. La representación gráfica de la operación sería:



A la expresión **(1 - d · n)** se le denomina **FACTOR DE DESCUENTO COMERCIAL SIMPLE**, que nos permite trasladar un capital desde un momento dado a otro anterior y obtener su equivalente.

✓ **El Valor actual y el Descuento.**

- **El Valor Actual**, es el capital inicial, la diferencia entre el capital final y los intereses generados entre 0 y n . Se obtendrá multiplicando el capital final C_n por el factor de descuento $(1 - d \cdot n)$

$$C_0 = C_n (1 - d \cdot n)$$

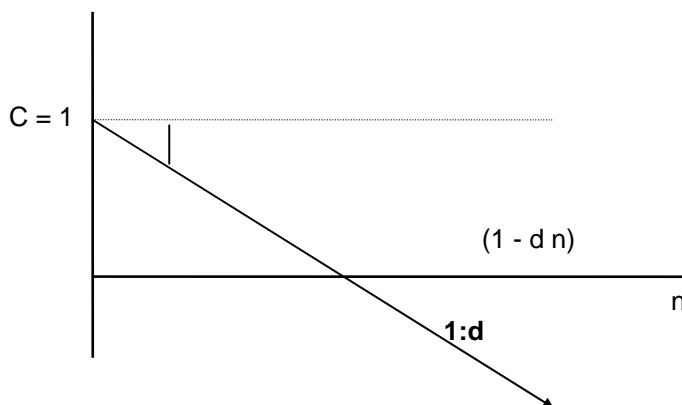
- **El Descuento**, es un capital que nos muestra la variación experimentada por un capital al pasar de n a 0 , se obtendrá por diferencia entre el valor actual (C_0), capital inicial, y el capital final (C_n).

$$D = C_n - C_0$$

Los intereses en descuento simple, al igual que en la capitalización son *proporcionales* al número de periodos de descuento.

✓ **Representación Gráfica.**

En el descuento simple comercial, el factor de descuento $(1 - d \cdot n)$, es una función de primer grado, cuya representación gráfica será una recta decreciente cuya pendiente es igual al parámetro $-d$.



Como todo capital financiero ha de ser positivo, comprobamos que la función tiene un campo de existencia limitado al mínimo valor que puede adoptar el capital sin llegar a ser 0 o negativo, que se representa por el punto de corte de la recta respecto al eje de abscisas que representa el tiempo.

Por lo tanto para duraciones iguales o mayores que el valor $(1 : d)$ la función, financieramente hablando, no existe, porque sería absurdo decir que el valor descontado de un capital fuese 0 o negativo ya que no sólo no se recibiría nada a cambio de transferir el derecho sino que incluso se debería pagar por él.

3.- RELACIÓN ENTRE LA CAPITALIZACIÓN Y EL DESCUENTO.

Los parámetros d e i , no son idénticos, porque aunque ambos se utilizan para el cálculo del interés, no lo realizan en el mismo momento del tiempo. Mientras que i se refiere a los intereses generados al final de un periodo cuando el capital se hace disponible “*Interés postpagable*”, d calcula los intereses al principio del periodo por anticipar del capital “*Interés anticipado*”.

Si necesitamos comparar dos operaciones valoradas una en capitalización y la otra en descuento necesitamos saber cambiar de unidad, es decir necesitamos conocer la relación que ha de existir entre ellos.

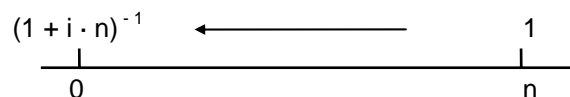
Para ello tomaremos un punto de referencia, que será 0, de una operación de n periodos de duración y con un capital unitario al final de la operación. Ambas operaciones serán equivalentes si actualizado el capital unitario, con ambas leyes, se obtiene el mismo valor en 0:

- **Operación de capitalización:** Para $C_n = 1$, el capital al inicio de la operación sería:

$$C_n = C_0 (1 + i \cdot n), \text{ sustituyendo } C_n \text{ y despejando } C_0$$

$$C_0 = 1 \cdot (1 + i \cdot n)^{-1} = (1 + i \cdot n)^{-1}$$

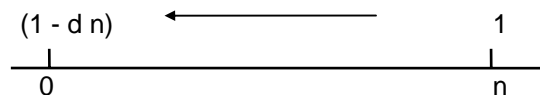
Gráficamente tendríamos:



- **Operación de descuento:** Para un capital unitario su valor actual sería:

$$C_0 = 1 \cdot (1 - d \cdot n) = (1 - d \cdot n)$$

Gráficamente tendríamos:



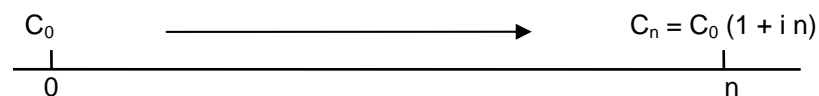
Igualando los valores actuales: $(1 - d \cdot n) = (1 + i \cdot n)^{-1}$ y operando podemos obtener la relación del tanto de capitalización (i) con el de descuento (d), o el de descuento con el de capitalización:

- i en función de d :
$$i = \frac{d}{1 - d \cdot n}$$

- d en función de i :
$$d = \frac{i}{1 + i \cdot n}$$

✓ El Descuento Racional, Matemático o Financiero:

Es la ley inversa de la capitalización simple, es decir conocido el capital final C_n nos permite calcular el capital inicial C_0 , que lo originó. Es simplemente una operación matemática de despejar en la ecuación de equivalencia de una operación de capitalización simple una de sus incógnitas, tal como hemos efectuado antes para calcular el capital C_0 , porque la diferencia esencial con el descuento comercial sigue siendo el devengo de intereses, mientras que en el racional el devengo es vencido o postpagable, en el comercial lo es anticipado o prepagable.



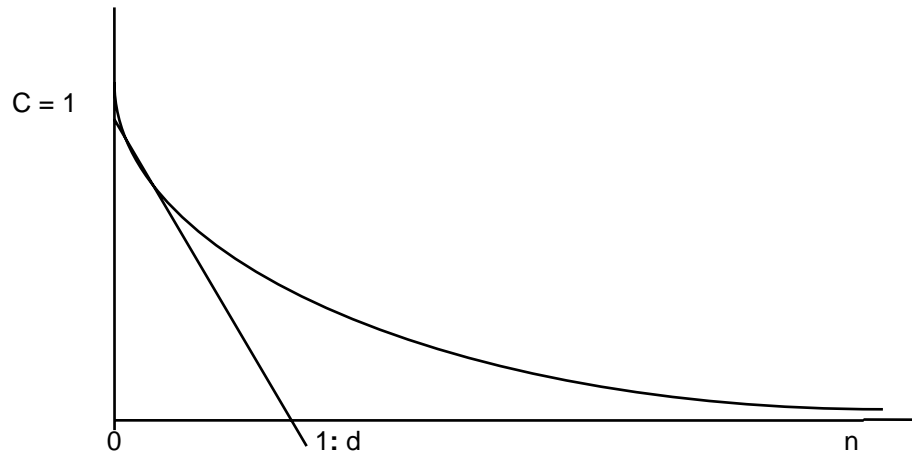
De la expresión del montante despejamos el valor actual del capital:

$$C_n = C_0 (1 + i \cdot n)$$

$$C_0 = \frac{C_n}{1 + in} = C_n (1 + in)^{-1}$$

El factor $(1 + in)^{-1}$ es el **descuento racional, matemático o financiero**.

- Comparación gráfica entre el descuento comercial y racional:



Como podemos comprobar se puede observar en el gráfico que el valor actual de 1 € de capital, obtenido con el descuento comercial es menor que el obtenido con el descuento racional. Además tiene la ventaja de la imposibilidad de hacerse negativa la función como ocurre con el descuento comercial.

4.- EJERCICIOS PRÁCTICOS.

✓ Planteamientos Generales: Actividades resueltas.

Desarrollo práctico de los conceptos relacionados con el cálculo de capitales equivalentes en capitalización o descuento, cálculo de tantos, de duración de operaciones, etc.

✓ **Fórmulas de cálculo del interés:** $I = C \cdot i \cdot n$ o $D = C \cdot d \cdot n$

✓ **Expresión de la ley de capitalización. (Trasladar un capital del presente al futuro para obtener su equivalente denominado *montante*).**

$$C_n = C_0 (1 + i \cdot n)$$

✓ **Expresión de la ley de descuento. (Trasladar un capital del futuro al presente para obtener su equivalente denominado *valor actual*).**

$$C_0 = C_n (1 - d \cdot n)$$

✓ **Expresiones que relacionan la ley de descuento con la de capitalización.**

i en función de d: $i = \frac{d}{1 - d \cdot n}$ o d en función de i: $d = \frac{i}{1 + i \cdot n}$

Actividad nº 1:

Calcular los siguientes tantos:

- El mensual del 4 % bimestral.
- El anual del 2 % bimestral.
- El bimestral del 8 % cuatrimestral.
- El semestral del 5 % trimestral.

Solución:

Como ya se ha explicado, los tantos en las operaciones simples son proporcionales, es decir dado un tanto i , se puede dividir en m subperiodos, obteniendo el tanto del subperiodo i_m , o viceversa de forma que se cumple que: $i = i_m \cdot m$.

a.- En este caso conocemos el tanto mayor (i) para $m = 2$, despejando i_m :

$$0,04 = i_m \cdot 2, \text{ de donde } i_m = 0,02, \text{ en porcentaje } 2 \% \text{ mensual}$$

b.- En este caso para un $m = 6$, conocido el tanto menor (fraccionado i_m) calcularemos i :

$$i = 0,02 \cdot 6 = 0,12, \text{ en porcentaje } 12 \% \text{ anual}$$

c.- En este caso conocemos el tanto mayor (i) para $m = 2$ despejando i_m :

$$0,08 = i_m \cdot 2, \text{ de donde } i_m = 0,04, \text{ en porcentaje } 4 \% \text{ bimestral.}$$

d.- En este caso para un $m = 2$, conocido el tanto menor (fraccionado i_m) calcularemos i :

$$i = 0,05 \cdot 2 = 0,10, \text{ en porcentaje } 10 \% \text{ anual}$$

Actividad nº 2:

Calcular los siguientes tantos:

- El anual del 5 % semestral.
- El mensual del 8 % anual.
- El anual del 3 % trimestral.
- El trimestral del 12 % anual.
- El mensual del 5 % trimestral.

Solución:

a.- En este caso para un $m = 2$, conocido el tanto menor (fraccionado i_m) calcularemos i :

$$i = 0,05 \cdot 2 = 0,10, \text{ en porcentaje } 10 \% \text{ anual}$$

b.- En este caso conocemos el tanto mayor (i) para $m = 12$ despejando i_m :

$$0,08 = i_m \cdot 12 \text{ de donde } i_m = 0,00666666, \text{ en porcentaje } 0,6666 \% \text{ mensual}$$

c.- En este caso para un $m = 4$, conocido el tanto menor (fraccionado i_m) calcularemos i :

$$i = 0,03 \cdot 4 = 0,12, \text{ en porcentaje } 12 \% \text{ anual}$$

d.- En este caso para un $m = 4$, conocido el tanto mayor (i) calcularemos i_m :

$$0,12 = i_m \cdot 4, \text{ de donde } i_m = 0,03, \text{ en porcentaje } 3 \% \text{ trimestral}$$

e.- En este caso para un $m = 3$, conocido el tanto mayor (i) calcularemos i_m :

$$0,05 = i_m \cdot 3, \text{ de donde } i_m = 0,016666, \text{ en porcentaje } 1,666666 \% \text{ mensual}$$

Actividad nº 3:

Calcular los días que median entre las siguientes fechas:

- a.- Del 3 de agosto al 2 de noviembre.
- b.- Del 5 de marzo al 6 de junio.
- c.- Del 6 de febrero al 4 de marzo.
- d.- Del 15 de noviembre al 10 de diciembre.
- e.- Del 5 de mayo al 6 de agosto.
- f.- Del 12 de julio al 5 de noviembre.

Solución:

Es usual en la práctica bancaria contar los días reales entre dos fechas dadas (año natural o civil de 365 o 366 si es bisiesto) y operar con el año comercial (meses de 30 días, 360 días el año).

a.- Días: $28 + 30 + 31 + 2 = 91$ días.

b.- Días: $26 + 30 + 31 + 6 = 93$ días.

c.- Días: $22 + 4 = 26$ días, o si fuese bisiesto $23 + 4 = 27$ días.

d.- Días: $15 + 10 = 25$ días.

e.- Días: $26 + 30 + 31 + 6 = 93$ días.

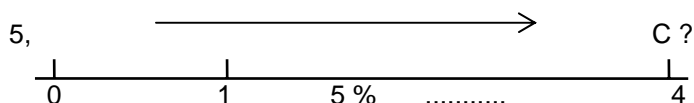
f.- Días: $19 + 31 + 30 + 31 + 5 = 116$ días.

Actividad nº 4:

Calcular el interés producido por un capital de 5.000 €, que estuvo colocado en una entidad bancaria durante 4 años al 5 % anual.

Solución:

- La representación gráfica:



- Como la expresión matemática del interés es: $I = C_0 \cdot i \cdot n$ y todos los elementos están en las mismas unidades, sustituimos directamente para obtener el valor buscado:

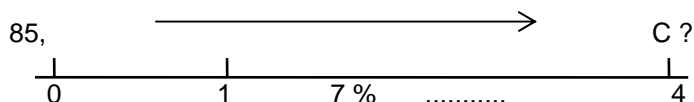
$$I = 5.000 \cdot 0,05 \cdot 4 = 1.000 \text{ €}$$

Actividad nº 5:

Calcular que cantidad de dinero nos devolverán al final del cuarto mes si realizamos una imposición de 85.000 € valorada al 7 % anual. ¿Cuál sería la cuantía de los intereses?

Solución:

- La representación gráfica:



- El capital que nos devolverán es el montante de los 85.000 €, por lo tanto:

$$C_n = C_0 (1 + i \cdot n) = 85.000 (1 + 0,07 \cdot 4/12) = 86.983,33 \text{ €}$$

- El interés será la diferencia entre el capital final e inicial:

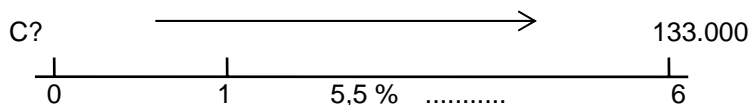
$$I = 86.983,33 - 85.000 = 1.983,33 \text{ €}$$

Actividad nº 6:

Calcular qué capital estuvo colocado durante 6 años al 5,5 % anual, si en ese plazo se convirtió en un capital de 133.000 €

Solución:

- La representación gráfica:



- En este caso conocemos el valor final de un capital inicial que queremos averiguar, por lo tanto sustituyendo en la expresión del montante, $C_n = C_0 (1 + i \cdot n)$ y despejando C_0 ,

$$133.000 = C_0 (1 + 0,055 \cdot 6)$$

Operando obtenemos que $C_0 = 100.000 \text{ €}$.

Actividad nº 7:

Durante cuanto tiempo estuvo impuesto un capital de 60.000 €, al 6 % de interés anual si produjo unos intereses de 3.000 €. Si la fecha de la imposición fue el 5 de marzo ¿En qué fecha retiraremos el capital?

Solución:

- a.- Si lo calculamos directamente desde la fórmula del interés, sustituyendo en: $I = C_0 \cdot i \cdot n$

$$3.000 = 60.000 \cdot 0,06 \cdot n/360 \text{ operando}$$

$$1.080.000 = 36.000 \cdot n, \text{ de donde } n = 300 \text{ días}$$

- b.- Si trabajamos con la expresión del montante, $C_n = C_0 (1 + i \cdot n)$ sabiendo que el montante es la suma del capital inicial más los intereses $C_n = 60.000 + 3.000 = 63.000 \text{ €}$, y sustituyendo valores en la expresión:

$$63.000 = 60.000 (1 + 0,06 \cdot n/360) \text{ y operando obtenemos que } n = 300 \text{ días}$$

La fecha pedida: Desde el 5 de marzo han de transcurrir 300 días reales por lo tanto:

$$26 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 30, \text{ es decir el } 30 \text{ de diciembre}$$

Actividad nº 8:

Calcular el valor actual de un capital de 50.000 € descontado un año a un tipo de descuento anual del 5 %. ¿Cuál es el descuento?

Solución:

- Trabajando con la expresión del valor actual $C_0 = C_n (1 - d \cdot n)$ y sustituyendo valores:

$$C_0 = 50.000 (1 - 0,05 \cdot 1) = 47.500 \text{ €}$$

- El descuento será la diferencia entre ambos capitales: $D = 50.000 - 47.500 = 2.500 \text{ €}$.
- O también aplicando directamente la fórmula del descuento:

$$D = C_n \cdot d \cdot n = 50.000 \cdot 0,05 \cdot 1 = 2.500 \text{ €}$$

Actividad nº 9:

El día 5 de mayo se descontó un capital de 645.000 € al 7,5 % anual obteniendo un valor actual de 620.812,5 €. Calcular los días de descuento y la fecha de vencimiento del capital.

Solución:

- a.- Si lo calculamos directamente desde la fórmula del descuento, conociendo que éste es la diferencia entre los dos capitales: $645.000 - 620.812,5 = 24.187,5$ €. Y sustituyendo en su expresión general:

$$D = 24.187,5 = 645.000 \cdot 0,075 \cdot n/360$$

$$8.707.500 = 48.375 \cdot n, \text{ de donde } n = 180 \text{ días}$$

- b.- Si trabajamos con la expresión del valor actual, $C_0 = C_n (1 - d \cdot n)$ y sustituimos valores:

$$620.812,5 = 645.000 (1 - 0,075 \cdot n/360) \text{ y operando obtenemos que } n = 180 \text{ días}$$

La fecha pedida: Desde el 5 de mayo han de transcurrir 180 días reales por lo tanto:

26 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 1, es decir el 1 de noviembre

Actividad nº 10:

Se desea conocer el tanto de descuento equivalente a una operación con vencimiento dentro de 8 meses valorada en capitalización a un interés del 5 % anual.

Solución:

- Como conocemos la expresión matemática que los relaciona, la aplicaremos directamente. Al ser el tanto anual y el tiempo en meses, $n = 8/12$.

$$d = 0,05 : (1 + 0,05 \cdot 8/12) = 0,048387, \text{ es decir el } 4,8387 \%$$

Actividad nº 11:

Se ha ingresado en una entidad bancaria un capital de 5.200 € a plazo fijo de 8 meses para retirar 5.320 €. ¿Cuál es el tanto de capitalización de la operación? ¿Cuál sería el tanto de descuento?

Solución:

- Como conocemos el capital inicial y final aplicando cualquiera de las expresiones de las leyes de capitalización y descuento obtendríamos el valor solicitado:
- Capitalización: $5.320 = 5.200 (1 + i \cdot 8/12)$ operando $i = 3,46153 \%$.
- Descuento: $5.200 = 5.320 (1 - d \cdot 8/12)$ operando $d = 3,38346 \%$.
- Si quisiéramos comprobar las soluciones obtenidas podemos utilizar la relación entre ellos:

$$d = 0,0346153 : (1 + 0,0346153 \cdot 8/12) = 0,0338346, \text{ es decir el } 3,38346 \%$$

Actividad nº 12:

Vamos al banco porque necesitamos financiación y nos dice que si descontamos a 60 días nos cobran un tanto de descuento del 6 % y si pedimos un crédito a 60 días nos cobrarían el 5,8 % ¿Qué escogemos?.

Solución:

- Como tenemos la información en unidades distintas, una en capitalización y otra en descuento, necesitamos una unidad común, por ejemplo todo en capitalización que es lo normal:

$$i = 0,06 : (1 - 0,06 \cdot 60/360) = 0,0594, \text{ es decir el } 5,94 \, \%$$

y como el crédito está en el 5,8 % escogeríamos éste al salirnos más barato.

✓ Planteamientos Generales: El tanto medio.

Conocidos los procesos de cálculo del interés y el montante, vamos a pasar a analizar operaciones que se plantean con más de un tipo de interés, con la finalidad fundamental de aprender a calcular cuál sería el tipo medio resultante de las inversiones realizadas. El tanto medio sería el equivalente matemático de una media ponderada respecto del capital y su vencimiento.

Actividad nº 13:

Un capital de 500.000 €, se invirtió al 5 % trimestral durante 3 años, después el montante obtenido se invirtió durante 22 meses al 3 % bimestral. Se pide calcular el tanto medio resultante de la operación.

Solución:

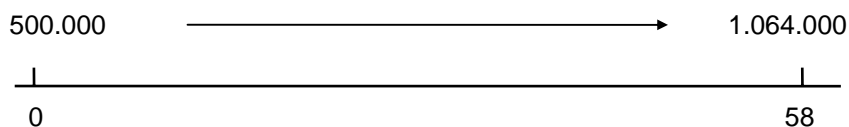
- El montante de la primera operación, pasando el tiempo a expresión trimestral, 3 años · 4 trimestres = 12 trimestres es de:

$$C_n = 500.000 \cdot (1 + 0,05 \cdot 12) = 800.000 \, \text{€}$$

- El montante de la segunda operación se obtiene tomando como capital inicial el valor anterior, por lo tanto volviendo a sustituir en la expresión del montante, tendremos para un tiempo expresado en bimestres: 22 meses : 2 = 11 bimestres.

$$C_n = 800.000 \cdot (1 + 0,03 \cdot 11) = 1.064.000 \, \text{€}$$

- El tanto medio, de las dos operaciones será el tanto único al que hubiesen estado impuestos los 500.000 € iniciales para obtener el montante de 1.064.000 € en los 58 meses (4 años y 10 meses). Gráficamente sería:



$$500.000 \cdot (1 + i_M \cdot 58/12) = 1.064.000, \text{ operando, } i_M = 23,3379 \, \% \text{ anual}$$

Actividad nº 14:

Se tienen las siguientes inversiones: 3.000 € a 2 años y a un interés del 8 % anual, 4.000 € a 9 meses y al 7 % anual y 6.000 € a 240 días y al 9 % anual. Se pide calcular el tanto medio de las tres inversiones.

Solución:

- Calculamos los montantes de las tres operaciones, como en el caso anterior:

$$C_1 = 3.000 (1 + 0,08 \cdot 2) = 3.480 \text{ €}$$

$$C_2 = 4.000 (1 + 0,07 \cdot 9/12) = 4.210 \text{ €}$$

$$C_3 = 6.000 (1 + 0,09 \cdot 240/360) = 6.360 \text{ €}$$

La suma total de los montantes es de 14.050 € y este montante tendrá que ser el mismo que el que se obtendría si lo aplicásemos a cada una de las inversiones, por lo que:

$$14.050 = 3.000 (1 + i_M \cdot 2) + 4.000 (1 + i_M \cdot 9/12) + 6.000 (1 + i_M \cdot 240/360)$$

Operando, $i_M = 0,08076923$, es decir el 8,076923 %

✓ **La sustitución de capitales: Actividades resueltas.**

El paso siguiente es adentrarnos en la problemática de la sustitución de capitales, es decir cuál es el valor de un capital suma de otros anteriores, cómo se puede desglosar un capital en varios equivalentes al dado, cuándo se ha de liquidar una operación manteniendo la equivalencia financiera, etc. En la práctica recordemos que para la valoración de capitales se toma el fin de la operación cuando trabajamos con capitalización y el inicio cuando trabajamos con descuento.

- ✓ **Expresión de la ley de capitalización. (Trasladar un capital del presente al futuro para obtener su equivalente denominado *montante*).**

$$C_n = C_0 (1 + i \cdot n)$$

- ✓ **Expresión de la ley de descuento. (Trasladar un capital del futuro al presente para obtener su equivalente denominado *valor actual*).**

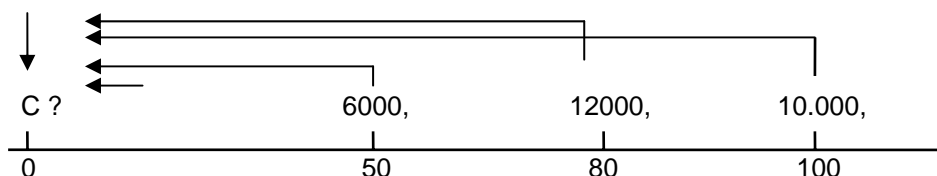
$$C_0 = C_n (1 - d \cdot n)$$

Actividad nº 15:

Hoy se propone la liquidación de las siguientes deudas mediante un pago único: 6.000 € con vencimiento dentro de 50 días, 12.000 € con vencimiento dentro de 80 días y 10.000 € con vencimiento dentro de 100 días. Calcular la cuantía del capital único a pagar hoy si la operación se valora a un tanto de descuento del 8 % anual.

Solución:

- La representación gráfica de la operación sería:



- Al estar valorado con ley de descuento tomamos como punto de valoración el día de hoy:

$$C = 6.000 \cdot (1 - 0,08 \cdot 50/360) + 12.000 \cdot (1 - 0,08 \cdot 80/360) + 10.000 \cdot (1 - 0,08 \cdot 100/360)$$

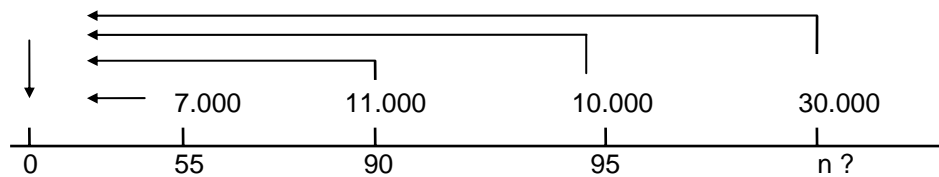
Operando, obtenemos el valor del capital sustituto, $C = 3.018.049 \text{ €}$

Actividad nº 16:

Se quiere liquidar las siguientes deudas: 7.000 € con vencimiento dentro de 55 días, 11.000 € con vencimiento dentro de 90 días y 10.000 € con vencimiento dentro de 95 días, mediante un pago único de 30.000 €. Calcular cuándo se ha de entregar el capital único si el tanto de descuento es del 9 % anual.

Solución:

- La representación gráfica de la operación sería:



- Procediendo del mismo modo que en el ejercicio anterior planteamos la ecuación de equivalencia al fecha de hoy, que es cuando se inicia la operación de cambio:

$$30.000 \cdot (1 - 0,09 \cdot n/360) = 7.000 \cdot (1 - 0,09 \cdot 55/360) + 11.000 \cdot (1 - 0,09 \cdot 90/360) + 10.000 \cdot (1 - 0,09 \cdot 95/360)$$

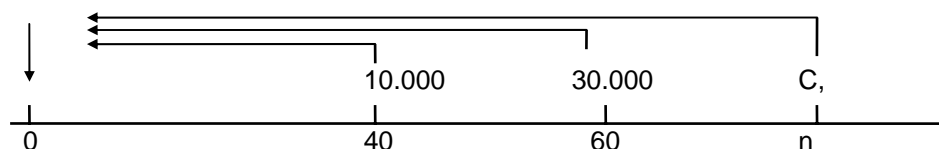
Operando, $n = 344,16$, es decir dentro de 344 días

Actividad nº 17:

Tenemos una deuda de 30.000 €. con vencimiento dentro de 60 días, si a los 40 días se entregan a cuenta de su liquidación 10.000 €. ¿Cuándo habrá que liquidar el resto si valoramos la operación al 10 de descuento?

Solución:

- Su representación gráfica sería:



- Como tendríamos dos incógnitas la ecuación no se podría resolver, por lo tanto aplicamos el concepto de vencimiento medio (suma aritmética de los capitales) y el importe del capital será de $30.000 - 10.000 = 20.000$ €, por lo tanto:

$$30.000 \cdot (1 - 0,10 \cdot 60/360) = 10.000 \cdot (1 - 0,10 \cdot 40/360) + 20.000 \cdot (1 - 0,10 \cdot n/360)$$

$$\text{Operando } 2.950.000 = 988.888,8889 + 2.000.000 - 555,55555 n$$

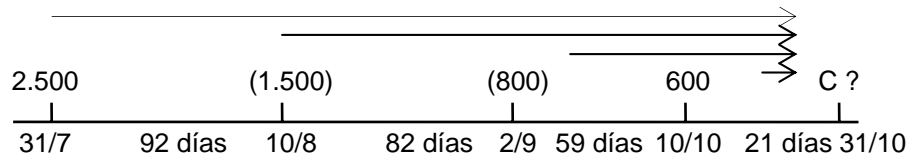
De donde, $n = 70$ días, es decir 10 después del capital sustituido.

Actividad nº 18:

Un señor ingresa el 31 de julio en una cuenta 2.500 €, el 10 de agosto paga por la cuenta una deuda de 1.500 €, el 2 de septiembre paga 800 € para la adquisición de un ordenador y el 10 de octubre ingresa 6.000 €. ¿Cuál es el saldo de la cuenta al 31 de octubre, fecha de liquidación, si se pactó a un interés del 2 % anual?

Solución:

- La representación gráfica de la operación sería:



- El saldo de la operación será la diferencia entre los ingresos y los pagos efectuados por la cuenta, con valoración en la fecha de término de la operación al trabajar con un tanto de capitalización, por lo tanto la ecuación sería:

$$C = 2.500 (1 + 0,12 \cdot 92/360) + 600 (1 + 0,12 \cdot 21/360) - 1.500 (1 + 0,12 \cdot 82/360) - 800 (1 + 0,12 \cdot 59/360)$$

Operando, $C = 824,133 \text{ €}$

Actividad nº 19:

Se tiene un préstamo de 24.000 €. que vence dentro de 120 días, se quiere liquidar mediante dos pagos con vencimientos dentro de 90 y 180 días. Se pide calcular la cuantía de ambos pagos, valorando la operación a un tanto de descuento del 8 % anual.

Solución:

- Como desconocemos los dos capitales tendríamos dos incógnitas, por lo tanto aplicaremos el concepto del vencimiento medio para su resolución.
- La representación de la operación sería:



$$C \cdot (1 - 0,08 \cdot 90/360) + (24.000 - C) \cdot (1 - 0,08 \cdot 180/360) = 24.000 \cdot (1 - 0,08 \cdot 120/360)$$

Operando, $C = 1.600.000 \text{ €}$ un capital y por lo que otro será de 800.000 €

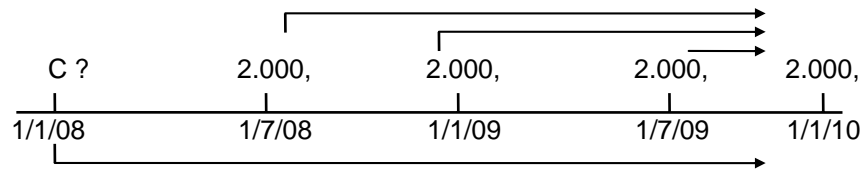
Actividad nº 20:

Un señor adquiere el 1 de enero de 2008 un terreno por el que ha de abonar cuatro pagos semestrales de 2.000.000 €. cada uno, calculados a un interés de capitalización del 4 % semestral. ¿Cuál sería el valor al contado del terreno?.

Si hoy 1 de octubre de 2002, el comprador propone liquidar la deuda pendiente mediante un sólo pago. ¿Cuál sería la cuantía de dicho pago para que no se produzca lesión de intereses a ninguna de las partes?.

Solución:

- La representación de la operación al contado sería:

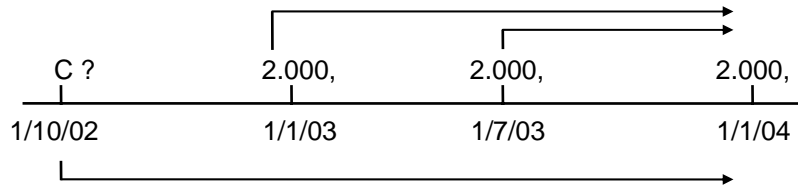


La valoración será en el 1/1/2004 al trabajar con ley de capitalización y ser el último vencimiento, por lo tanto la ecuación financiera que iguala el coste del terreno con los pagos para abonarlo sería:

$$C (1 + 0,04 \cdot 4) = 2.000.000 (1 + 0,04 \cdot 3) + 2.000.000 (1 + 0,04 \cdot 2) + 2.000.000 \cdot (1 + 0,04 \cdot 1) + 2.000.000$$

Operando $C = 7.310.344,83 \text{ €}$

- Para que no exista lesión de intereses se ha de mantener la ecuación de equivalencia pactada y por lo tanto el punto de valoración:



$$C (1 + 0,04 \cdot 2,5) = 2.000.000 (1 + 0,04 \cdot 2) + 2.000.000 (1 + 0,04 \cdot 1) + 2.000.000$$

Operando, $C = 5.672.727,27 \text{ €}$

✓ **Actividades propuestas. Planteamientos Generales:**

- 1.- Calcular las siguientes relaciones:
 - a.- ¿Cuántos meses hay en dos bimestres?.
 - b.- ¿Cuántos trimestres hay en 3 años?.
 - c.- ¿Cuántos cuatrimestres hay en 4 años?.
 - d.- ¿Cuántos meses hay en 3 semestres?.
 - e.- ¿Cuántos trimestres hay en 5 semestres?.
 - f.- ¿Cuántos bimestres hay en dos años?.
- 2.- Calcular los días naturales que median entre las siguientes fechas:
 - a.- Del 3 de agosto al 2 de noviembre.
 - b.- Del 5 de marzo al 6 de junio.
 - c.- Del 6 de febrero al 4 de marzo.
 - d.- Del 15 de noviembre al 10 de diciembre.
 - e.- Del 5 de mayo al 6 de agosto.
 - f.- Del 12 de julio al 5 de noviembre.
 - g.- Del 12 de febrero al 19 de marzo en año bisiesto.
- 3.- Dado un interés del 6 % calcular los siguientes tantos equivalentes:
 - a.- El mensual.
 - b.- El trimestral.
 - c.- El semanal.
 - d.- El bimestral.
 - e.- El cuatrimestral.
 - f.- El diario civil.
 - g.- El diario comercial.
- 4.- Calcular los siguientes tantos:
 - a.- El mensual del 4 % bimestral.
 - b.- El bimestral del 8 % cuatrimestral.
 - c.- El semestral del 5 % trimestral.
 - d.- El mensual del 8 % cuatrimestral.
- 5.- Calcular los siguientes tantos:
 - a.- El anual del 5 % semestral.
 - b.- El mensual del 8 % anual.
 - c.- El anual del 3 % trimestral.
 - d.- El trimestral del 12 % anual.
- 6.- Calcular el capital equivalente en el año 2009, a uno de 10.000 €, disponibles en el año 2007 según la ley de capitalización, siendo el tipo de interés anual efectivo del 5 %.
- 7.- Calcular el interés producido por un capital de 7.200 €, que estuvo colocado en una entidad bancaria durante 3 años y 8 meses al 3 % anual.
- 8.- Calcular el valor a día de hoy de un capital de 100.000 € de nominal y con vencimiento dentro de 8 meses al 5 % de descuento simple. ¿A cuánto asciende el descuento efectuado?.
- 9.- Calcular el capital equivalente en el año 2008, de uno de 125.000 € disponible en el año 2010 según la ley de descuento simple, siendo el tipo de interés anual aplicado el 6 %.
- 10.- Un capital de 1.800 € estuvo impuesto a un interés del 5 % anual, si produjo unos intereses de 45 €, se pide calcular el importe del montante, y el tiempo que estuvo impuesto.

- 11.- En el día de hoy se ha procedido a descontar un capital de 10.800 € disponible dentro de 8 meses a un tanto de descuento del 6 % anual. Representar gráficamente la operación, calcular el valor actual del capital y el importe de los intereses.
- 12.- Un individuo deposita 20.000 € en una entidad que remunera los depósitos al 6% anual.
 - a.- Determinar la cantidad que podría retirar al cabo de 2 meses.
 - b.- Si tras el primer mes retira los intereses ganados y los coloca en una nueva cuenta en la misma entidad, ¿qué cantidad podría retirar al cabo del segundo mes? ¿cuál sería la causa de la diferencia?.
- 13.- Vamos al banco porque tenemos 6.000 € que queremos invertir, en la cuenta verde el banco nos va a pagar durante los próximos 7 meses un interés del 3,5 % y si lo invertimos en Letras del Tesoro éstas pagan un tanto de descuento del 3,6 % ¿Cuál escogeremos?.
- 14.- Un cliente de la asesoría quiere que le comprobemos si la siguiente información mandada por el banco es correcta, sabiendo que el banco le ha aplicado un tipo de interés del 5 %.
 - ✓ De una imposición de 1.000 € realizada el 6 de octubre el banco le informa, que hoy 20 de diciembre, le van a ingresar 1.010,27 €
 - ✓ De la compra de una lavadora en 850 €, el 1 de noviembre, se acordó su pago hoy, por lo que nos exigen que paguemos 890 €
- 15.- El cliente anterior quiere que le revisemos también las siguientes operaciones sabiendo que el banco le ha aplicado un tipo de descuento del 5 %.
 - ✓ De una deuda de 2.100 €, que teníamos que pagar el 14 de marzo y queremos liquidar hoy 20 de diciembre abonando 2.075,84 €
 - ✓ Si descontamos hoy una letra de 11.000 € con vencimiento el 22 de febrero, nos ingresarían 10.900 €
- 16.- Si tenemos un capital de 1.250 € en el momento actual y nos dicen que si lo depositamos en un banco retiraríamos 1.380 € dentro de 8 meses. Calcular el tipo de interés de la operación para que los capitales sean equivalentes.
- 17.- Un señor tiene los siguientes capitales colocados en diversas entidades financieras: 1.300.000 € a 18 meses y al 6 % anual, 2.500.000 € a 2 años y al 7 % anual y 3.000.000 € a 300 días y al 8 % anual. Se pide calcular el tanto medio de las tres inversiones.
- 18.- Se han ingresado en una entidad bancaria 20.000 € a plazo de 18 meses, con un interés del 3 % semestral en el primer año y del 4 % semestral en el resto. Se pide el saldo de la cuenta al término de la imposición y el tanto medio de la operación.
- 19.- Un señor realiza las siguientes imposiciones en una entidad financiera, al principio de cada semestre iniciando la operación el 1 de enero de 2008: 200.000 €, 400.000 €, 300.000 € y 500.000 €. Se pide el montante que recibirá al finalizar el segundo año, si la entidad financiera valora la operación a un tanto del 7 % anual en el primer año y del 8 % anual en el segundo año. Calcular el tanto medio al que ha resultado la operación

✓ **Actividades propuestas. La sustitución de capitales:**

- 1.- Se tienen los siguientes capitales: 1.000 € con vencimiento dentro de 60 días, 800 € con vencimiento dentro de 80 días y 400 € con vencimiento dentro de 40 días. Éstos se quieren sustituir por un pago único. Se pide calcular cuándo ha de vencer el pago si se valora a un tipo de descuento del 9 %.
- 2.- Un empresario tiene tres deudas de 3.500 €, 7.000 € y 5.000 € con vencimientos dentro de 360, 60 y 90 días, que quiere cancelar por un pago único dentro de 120 días, valorando la operación a un tanto de capitalización del 4 % anual. Calcular la cuantía del capital sustituto.
- 3.- Hoy 1 de diciembre se compra una máquina por lo que debería pagar 15.000 € el próximo 30 de junio, en su lugar se acuerda abonar 3.000 € el próximo 30 de abril, y el resto (12.000 €) cuando corresponda, valorando la operación a un tanto de capitalización del 7 % anual. Se pide calcular el vencimiento del segundo capital.
- 4.- Por la adquisición de un vehículo cuyo coste ha sido de 40.000 €, se pagan al contado 10.000 € y por el resto se acuerdan los siguientes pagos: 6.000 € dentro de 3 meses, 14.000 € dentro de 12 meses y el resto dentro de 24 meses. Si el tipo de interés DE capitalización es del 12 % anual. Se pide calcular la cuantía del último pago.
- 5.- Se adquiere una máquina que para su pago se han de entregar dentro de 80 días 3.000.000 €, pero se acuerda la entrega de 750.000 €, como entrada y el resto en dos pagos de 1.000.000 € dentro de 60 días y otro de 1.300.000 €. Si la valoración de la operación se realiza al 9 % de descuento anual ¿Cuándo debería efectuarse el segundo pago para que no exista lesión de intereses?.
- 6.- Vendemos una máquina en 3.562.500 €, aceptando para su pago cuatro efectos de igual nominal con vencimientos dentro de 3, 6, 9 y 12 meses, efectos que descontaremos en el banco a un tipo de descuento del 10 % anual. ¿Cuál es la cuantía de los capitales?.
- 7.- El 1 de marzo se adquirió una grúa que se va a pagar del siguiente modo: Un pago al contado de 700.000 €, tres pagos de 700.000 € y vencimientos los días 1 de abril, 1 de junio y 1 de septiembre y dos pagos de 350.000 € con vencimientos los días 1 de noviembre y 1 de diciembre. ¿Cuál es el valor al contado de la grúa, valorando la operación al 0,75 % de descuento mensual?.
- 8.- Hoy 18 de septiembre un señor tiene las siguientes deudas: 5.000 € a pagar el próximo 30 de septiembre, 10.000 € a pagar el 25 de octubre, 8.000 € a pagar el 10 de noviembre y 6.000 € a pagar el próximo 12 de diciembre. A la fecha de hoy plantea las siguientes alternativas para liquidarlas, valorando la operación al 5 % anual de descuento. Se pide:
 - a) Liquidar todas sus deudas mediante un pago único de 290.000 € a efectuar el próximo 10 de octubre. ¿Nos aceptarán la propuesta?
 - b) Liquidar todas las deudas mediante un pago único a efectuar el próximo 20 de noviembre. ¿Cuánto hemos de abonar?
 - c) Y si liquidásemos hoy todas las deudas ¿Cuánto pagaríamos? ¿Cuál sería la cuantía de los intereses que nos hemos ahorrado?
- 9.- Una sociedad vendió el 1 de junio una máquina por un valor al contado de 100.000 € acordando la siguiente forma de cobro: Recibir al contado 30.000 € y tres pagos: El primero de 20.000 € a pagar a los dos meses, el segundo de 20.000 € a pagar dentro de tres meses, un tercero a pagar a los cinco meses. Si el interés de capitalización acordado fue del 4 % anual. Se pide calcular la cuantía del pago.

CAPÍTULO 3°:

OPERACIONES DE MERCADO QUE TRABAJAN CON LEYES SIMPLES

Dr D. Enrique R. Blanco Richart

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Calcular los días en una operación de descuento.
- Calcular el interés de cada uno de los efectos de la operación.
- Calcular el efectivo a ingresar en cuenta.
- Plantear correctamente la ecuación financiera que permite calcular la T.A.E. de la operación para el Banco y la sociedad.
- Calcular el nominal de un efecto impagado, con inclusión de gastos e intereses de demora.
- Reconocer una operación de letras persiana.
- Aplicar correctamente las expresiones matemáticas de la operación anterior.
- Saber definir que es un activo financiero.
- Calcular el valor de compra de un activo al descuento.
- En una operación de venta de activos: Calcular, conocida la rentabilidad a obtener, su precio de venta o viceversa.
- Interpretar si ha habido beneficio o pérdida en la operación.
- Definir el concepto de cuenta corriente y póliza de crédito. Diferenciar las utilidades de ambas.
- Reconocer el funcionamiento del método Hamburgués y sus ventajas.
- Saber calcular por el método anterior los intereses en la liquidación de una cuenta, o una póliza.

Operaciones de mercado que trabajan con leyes simples.

En el presente capítulo pasaremos a analizar desde un punto de vista práctico las operaciones financieras más usuales que trabajan con dichas leyes.

A.- Operaciones que trabajan con leyes de descuento:

En particular, analizaremos el funcionamiento de tres instrumentos financieros a corto plazo, que se valoran con leyes de descuento simples. En concreto analizaremos:

- Efectos comerciales o letras de cambio.
- Letras del tesoro.
- Pagarés de empresa.

Haremos principal hincapié en las dos primeras, Aunque básicamente los instrumentos anteriores tienen el mismo objeto, financiar a corto plazo a las entidades. En el siguiente cuadro se reflejan los rasgos comunes y diferenciadores entre ellos.

Rasgos comunes entre ellos	Diferencias entre ellos
<p>a) Constituyen un medio de financiación para uno de los agentes que participan en la operación, esto es, le permiten conseguir recursos.</p> <p>b) Son instrumentos a corto plazo, su vencimiento no supera los dieciocho meses.</p> <p>c) Cotizan al descuento, esto es, que se compran por un valor inferior al nominal, para recibir éste valor al vencimiento.</p>	<p>a) Los pagarés de empresa y los efectos comerciales son emitidos por un agente privado (normalmente una empresa), mientras que las Letras del Tesoro son emitidas por el Estado.</p> <p>b) En el corto plazo, los efectos comerciales se valoran según la leyes de descuento simples, mientras que las Letras del tesoro y los pagarés de empresa se valoran a través de una ley de capitalización simple o descuento racional.</p>

1.- El Descuento de Papel.

Normalmente, cuando una empresa realiza una operación de venta se plantean dos opciones: O cobrar el producto al contado (en el momento en el cual se entrega el producto), o cobrarlo más tarde (a plazo). En este último caso, la empresa tiene un derecho de cobro con su cliente al cual se le está concediendo financiación. Este compromiso de pago ha de quedar recogido en algún tipo de documento que asegure el cumplimiento de dicha obligación. Dicho documento será un efecto comercial bien sea una letra de cambio o un pagaré que es el más habitual ahora.

Los efectos comerciales, por tanto, no son más que documentos que formalizan el crédito concedido por el vendedor al comprador, comprometiendo a este último a realizar el pago de la mercancía comprada en el momento de su vencimiento.

A modo de ejemplo imaginemos que una empresa vende equipos industriales por importe de 100.000 €. Por lo tanto tiene las dos opciones mencionadas:

- a)** Cobrar los equipos al contado, con lo que obtendría 100.000 € en el momento de la venta.
- b)** Cobrar la venta de forma aplazada por ejemplo dentro de 30 días, para lo cual acepta un pagaré de su cliente de 100.000 € y vencimiento de 30 días.

Al vender de forma aplazada es probable que la empresa tenga un mayor número de compradores al darles más facilidades para el pago; el inconveniente es que durante esos

30 días no dispone de los 100.000 € para seguir operando sino que, en su lugar, tiene un efecto que acredita que dentro de 30 días cobrará 100.000 €. ¿Qué puede hacer entonces si necesita liquidez inmediata?:

- Puede pedir un préstamo normal.
- O que le anticipen el dinero, entregando “como garantía” el pagaré que tiene en su poder.

A esta operación se conoce como **descuento de efectos**.

- **¿Qué gana el banco por anticipar el dinero?**; al ser una operación financiera va a cobrar unos intereses (y además de forma anticipada) y una comisión, por lo que no nos entregará los 100.000 €, sino una cantidad inferior al tener que pagar de forma inmediata los intereses, comisiones y gastos.
- **¿Qué gana la empresa con la operación?**; gana tiempo y clientes, pues, a pesar de recibir una cantidad, dispone de liquidez para seguir trabajando y de unas condiciones de cobro que favorecen sus ventas. Es además el medio más fácil para la pequeña y mediana empresa de obtener créditos rápidos.

El descuento de papel, desde el punto de vista bancario, es una operación mixta, porque es de financiación y de servicio. La entidad bancaria financia a la empresa (le presta dinero) y a su vez efectúa la gestión del cobro del documento pero sin asumir el riesgo del posible impago (cláusula “**salvo buen fin**”).

Dada la frecuencia en la utilización de esta práctica por la pequeña y mediana empresa, es normal que se establezca una relación continuada entre la entidad financiera y la empresa y en consecuencia que la entidad financiera establezca un **límite de descuento**, es decir una cifra máxima hasta la cuál puede endeudarse la empresa (limita la cantidad de efectos que se pueden descontar). Este límite está sujeto a variación en función de determinadas circunstancias: Economía general, la evolución de la actividad de la sociedad y sus beneficios, las garantías personales, etc.

A su vez como lo normal es que cada operación de descuento comercial incluya varios efectos, el banco remitirá una **factura de descuento** en la que se detalla los efectos descontados y sus características, los intereses cobrados y demás gastos de la operación, que se denominan **características comerciales** siendo las principales:

- a.- **La comisión**: Que se calcula sobre el nominal en tanto por mil y que varía en función de condiciones como que el efecto esté o no aceptado, que esté domiciliado, etc. Las entidades financieras pueden establecer un mínimo a cobrar.
- b.- **Otros gastos**: (También denominados suplidos) como son el correo, corretajes, etc.
- c.- **Impuesto de Transmisiones Patrimoniales y Actos Jurídicos Documentados** (AJD) que conllevan este tipo de operaciones de acuerdo con un gravamen prefijado. Excepto las letras de cambio que ya lo pagaron en el momento de su compra.

Por lo tanto el valor efectivo ingresado en cuenta será el nominal de los efectos menos los intereses del descuento, comisiones, gastos, impuestos, etc. que ocasiona la operación.

Cuando la operación de descuento está compuesta por una serie de efectos de igual nominal y con vencimientos periódicos en el argot bancario se denomina operación de **letras persiana** y cuyo cálculo podría abreviarse. Son un tipo de efectos que se originan normalmente por operaciones de venta a plazo.

Siguiendo con nuestra empresa, el nominal de la operación serían los 100.000 €, a 30 días de vencimiento y si el banco nos cobrase un interés de descuento del 5%, unas comisiones del 1 ‰ y gastos de 3 €, por lo tanto el banco nos va a financiar los 100.000 € para que los podamos utilizar ya, pero nos va a descontar los siguientes conceptos:

- El interés: $D = 100.000 \cdot 0,05 \cdot 30/360 = 416,67 \text{ €}$
- Comisiones: $100.000 \cdot 1 \text{ ‰} = 100 \text{ €}$
- Gastos: 3 €
- Total: $416,67 + 100 + 3 = 519,67 \text{ €}$
- Efectivo ingresado en cuenta: $100.000 - 519,67 \text{ €}$

¿Qué sucederá cuando transcurran los 30 días? El cliente en lugar de pagarle a la empresa, le pagará al banco el importe del pagaré que, en el momento de su vencimiento, coincidirá con su valor nominal.

Si llegado el vencimiento de un efecto, éste no es pagado, la empresa debe hacer frente al impago de su cliente ya que el banco nos lo prestó “salvo buen fin” es decir no asume el riesgo del impago. Lo normal es que el banco cargue en la cuenta los gastos que ocasiona el impago y su devolución.

Si el impago ha sido por falta de liquidez y el librado sí desea efectuar su pago, se procede normalmente a girar un nuevo efecto, que si es una letra de cambio se denomina *letra de resaca* que incluirá en su nuevo nominal, el nominal de la impagada, los gastos ocasionados por el impago y los intereses de demora y que se puede valorar financieramente para que el nuevo efecto al descontarlo no ocasione pérdidas al cobrador.

- ✓ **Ejemplo:** Se desea conocer el efectivo a recibir si descontamos un pagaré de 3.000 € con vencimiento dentro de 60 días en las siguientes condiciones: Tipo de descuento del 7 % anual, comisión del 3 ‰ (mínimo 5 €) y otros gastos: 2 €

$$\text{Efectivo} = \text{Nominal} - \text{Intereses} - \text{Gastos}.$$

$$\text{Efectivo} = 3.000 - (3.000 \cdot 0,07 \cdot 60/360) - (3.000 \cdot 0,003) - 2 = 3.000 - 46 = 2.954 \text{ €}$$

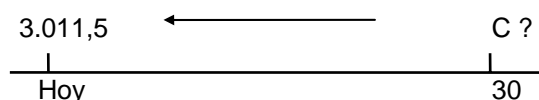
- ✓ **Ejemplo:** Calcular el importe adeudado en cuenta si llegado el vencimiento del pagaré anterior, éste es devuelto por impago, cargándose en nuestra cuenta los siguientes gastos: Comisión de devolución: 1 ‰, de protesto 2 ‰ y por correo 2,5 €.

Se le deberá al banco los 3.000 € que nos prestó y los gastos por culpa del impago:

$$3.000 + (3.000 \cdot 0,001) + (3.000 \cdot 0,002) + 2,5 = 3.000 + 11,5 = 3.011,5 \text{ €}$$

- ✓ **Ejemplo:** Puestos en contacto con el cliente se llega al acuerdo de aceptar un nuevo pagare con vencimiento a 30 días, sabiendo que las condiciones del nuevo descuento serían: Tipo de descuento: 7 %, comisión del 3 ‰ y otros gastos de 10 euros. ¿Cuál sería el importe del nuevo efecto para no salir perjudicados?

Se le pagó al banco 3.011,5 € por culpa del impago, por lo tanto al cliente le exigiremos un nominal que descontado nos permita cobrar dicha cantidad:



Queremos cobrar hoy 3.011,5 después de pagar los intereses del nuevo descuento, comisiones y gastos por lo tanto:

$$\text{Efectivo} = \text{Nominal} - \text{Intereses} - \text{Gastos}.$$

$$3.011,50 = C - (C \cdot 0,07 \cdot 30/360) - (C \cdot 0,003) - 10 \quad \text{operando}$$

$$3.011,50 = C - 0,00583333 C - 0,003 C - 10 \quad \text{operando } C = 3.048,43 \text{ €}$$

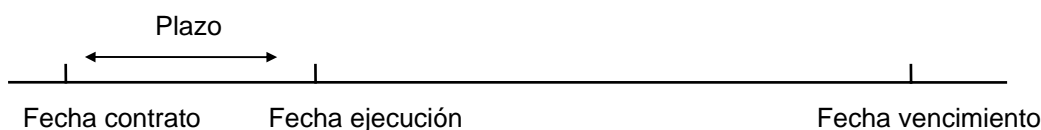
2.- Los Activos financieros a corto plazo.

Son títulos emitidos por entidades públicas o privadas con el fin de obtener recursos financieros a c/p, por parte de inversionistas. Financieramente son operaciones simples emitidas generalmente al descuento, compuestas por una prestación (el efectivo entregado al inicio de la operación) y una contraprestación (el nominal del título a recibir al término de la operación). Las operaciones más comunes:

- La Deuda Pública. Las Letras del Tesoro:** Es la principal vía de financiación del Estado, que consiste en un crédito que se formaliza a través de un valor negociable, de tal forma que el Tesoro recibe recursos y se compromete a devolverlos en un plazo determinado, con un rendimiento concreto para el inversor. La principal materialización de esta financiación a corto plazo la representan las *Letras del Tesoro* que se caracterizan por: Estar emitidas al descuento, con un valor nominal de 1.000 €, se representan mediante anotaciones en cuenta. (no se emiten títulos físicos) y son emitidas por subasta y a plazo máximo de 18 meses. La subasta puede ser:
 - Competitiva: Los suscriptores indican el precio que están dispuestos a pagar y no hay límite.
 - No competitiva: Los suscriptores no indican el precio a pagar. En este caso la petición no podrá superar los 200 títulos, o lo que es lo mismo 200.000 €.
- Pagarés de empresa:** Son títulos a la orden emitidos por empresas como un medio más de financiación a corto plazo. Se emiten mediante títulos cuyos nominales existen a partir de los 1.000 €, al descuento y con vencimientos normalmente a 3, 6 o 12 meses. Son títulos sujetos a retención fiscal al terminar la operación, sobre la diferencia entre el valor pagado y el recibido. Su tasa efectiva se calculará en capitalización simple.

Las distintas formas de negociar con estos activos financieros son:

- Operación al contado:** Cuando se paga el efectivo del activo en el momento inicial de la operación, planteada para mantenerla a su vencimiento, momento en el que se recupera el nominal del título, por lo que la rentabilidad de la operación se conoce a priori. Cuando el título no se mantiene hasta el final de la operación ya que necesita venderse por problemas de liquidez u otras causas, en este caso la rentabilidad no puede conocerse a priori, ya que ésta dependerá del precio al que se consiga colocar el título en el mercado secundario.
- Operación con pacto de recompra (REPO):** Es una operación de venta al contado con el compromiso de recuperar los títulos a un plazo determinado y a un precio prefijado. En este caso la rentabilidad es conocida a priori ya que no va a depender de la situación del mercado.
- Operación simple a plazo:** Cuando a la fecha de la contratación se compromete a la entrega de un título en una fecha posterior denominada fecha de ejecución. El plazo mínimo que ha de mediar entre la fecha de contrato y de ejecución será al menos de 5 días hábiles, si es menor la operación es al contado.



B.- Operaciones que trabajan con leyes de capitalización:

1.- Las Cuentas Corrientes.

Son depósitos que efectúan los clientes, generalmente con la finalidad de que el banco administre los fondos recibidos, además de custodiarlos, realizando cobros y pagos por su cuenta. Financieramente consiste en un intercambio no simultáneo de capitales en los que se acuerda saldar las diferencias financieras en un determinado momento y de acuerdo con una ley financiera previamente establecida.

Son operaciones a la vista ya que en cualquier momento, de forma automática y en el acto (a la vista) el cliente puede retirar el dinero u ordenar al banco que efectúe un pago en su nombre, con el único límite del dinero previamente depositado. Sin embargo pueden existir los llamados *números rojos* o descubierto en cuenta, que se originan cuando el banco autoriza a disponer mayor cantidad que los fondos depositados, esta situación que en resumidas cuentas es un préstamo que el banco efectúa al cliente, no puede prolongarse por mucho tiempo.

La cuenta corriente, en principio, no tiene plazo de duración, es ilimitada hasta que el cliente o el banco decidan la extinción de la misma. Periódicamente la entidad de crédito abona al cliente unos intereses, proporcionales a los capitales ingresados y al tiempo por el que han estado depositados. Es decir se utiliza la capitalización simple en su liquidación. Su funcionamiento se corresponde con la cuenta o estado contable en el que se van anotando las operaciones que se cruzan el banco y el cliente

♦ Elementos de una cuenta corriente:

- 1.- *Las partidas*: Son las operaciones entrecruzadas de los titulares: El banco y el cliente.
- 2.- *El vencimiento*: Es la fecha de cada operación cuyo importe modifica el saldo, es decir la fecha a partir de la cuál empieza a generar intereses. También se le denomina fecha valor. La fecha de inicio de la cuenta se denomina fecha de apertura y la de liquidación fecha de cierre.
- 3.- *El saldo*: Es la situación de la cuenta en un momento dado, indicando la posición deudora o acreedora de cada parte. Es por lo tanto la diferencia entre la suma de las partidas deudoras y de las acreedoras.
- 4.- *El tipo de interés aplicado*: Si el interés que se aplica es el mismo a las partidas deudoras que a las acreedoras, la cuenta es a *interés recíproco*, y si el interés aplicado a las partidas deudoras es distinto que el aplicado a las acreedoras la cuenta es a *interés no recíproco*. Si a lo largo de la operación el interés varía sería una cuenta a *interés variable*.
- 5.- *Liquidación de la cuenta*: Consiste en el cálculo del saldo de la cuenta a una fecha determinada incluidos los intereses devengados hasta esa fecha.

♦ Liquidación de una cuenta corriente:

Como ya hemos dicho consiste en calcular el montante final una vez calculados los intereses. Para efectuar esta liquidación se utilizan tres métodos: El directo, el indirecto y el escalar o hamburgués. En el presente capítulo sólo se explicará el método hamburgués por ser el utilizado en la práctica bancaria. Es decir se calcula el saldo de la cuenta después de cada operación, los días para la liquidación se calculan entre la fecha de una operación y la fecha de la operación siguiente y entre la fecha de la última operación y la de la liquidación. Se denominan números al producto del saldo tras cada operación y los días.

Los pasos a seguir serían:

- Se colocarán las partidas en el Debe o el Haber (deudores o acreedores).
- Se calculará en columna separada el saldo después de cada anotación.
- En otra columna se calculará el tiempo que serán los días que median entre su vencimiento y el vencimiento de la siguiente partida. Los días de la última partida serán los que median entre su fecha de valor y la fecha de cierre.
- Después se calcularán en columna separada los *números comerciales*, que es el producto de cada saldo por los días calculados en la columna anterior.

- Colocadas todas las partidas y calculados los números comerciales, el saldo de éstos serán la diferencia entre los números deudores y acreedores y el interés de liquidación se calculará multiplicado el tipo de interés de la cuenta por el saldo de los números comerciales y se anotarán con el mismo saldo que el de los números comerciales.
- Como los vencimientos de las partidas no tienen porqué producirse cronológicamente, al calcular los días de cada uno de los saldos puede darse la circunstancia de que los días den con signo negativo, es decir la partida siguiente tiene fecha de valor anterior a la partida precedente, entonces aparece el *número rojo*, en cuyo caso el número comercial se consignará con signo negativo.

♦ Las cuentas corrientes altamente remuneradas:

Son cuentas corrientes a interés no recíproco con una alta remuneración y que presenta unas características que las definen:

- *La existencia del saldo medio:* O cantidad mínima que hay que tener en la cuenta de media en un tiempo determinado para obtener el alto interés. El saldo medio es una media ponderada de capitales por sus tiempos dividido entre los días totales.
- *La Franquicia:* Es el tramo de dinero que no se remunera, independientemente del saldo medio, o se remunera muy poco.
- *El interés* se paga después de calculado el saldo medio, si éste es inferior al mínimo se paga un interés bastante inferior al que se paga si el saldo supera el medio, en este caso el interés se paga sobre la diferencia entre el saldo medio y la franquicia.

- ✓ **Ejemplo:** Liquidar la siguiente cuenta, cuyo titular ha realizado los movimientos que figuran en la tabla, al 30 de junio, con comisiones por apunte de 0,75 €, intereses del 4 % anual y retenciones sobre ellos del 18 %.

Fecha valor	Concepto	Cuantía
06-05	Ingreso apertura	35.000
14-05	Ingreso de Cheque a compensar	20.000
23-05	Cheque c/c	5.000
11-06	Ingreso en efectivo	10.000

Vamos colocando las partidas y efectuando los cálculos: Los días se cuentan de fecha valor a fecha valor. El saldo se obtiene sumando o restando las partidas y los números son el producto del saldo por los días.

Fecha valor	Concepto	Capitales		Saldo		Días	Números: Saldo · días	
				D	H			
06-05	Ingreso	-	35.000	-	35.000	8	-	280.000
14-05	Cheque compensar	-	20.000	-	55.000	9	-	495.000
23-05	Cheque c/c	5.000	-	-	50.000	19	-	950.000
11-06	Ingreso efectivo	-	10.000	-	60.000	19	-	1.140.000
30-06	Cierre. Intereses	-	56,52	-	60.056,52	55	-	
	Comisiones	3	-	-	60.053,52			
	Saldo al cierre				60.053,52			2865.000

Los intereses: $2.865.000 \cdot 0,04 / 365 = 314$ €, la retención 18 % de 314 € = 56,52 €

Comisión por apuntes = $0,75 \times 4 = 3$ €

Saldo al cierre: $60.000 + 56,52 - 3 = 60.053,52$ €

- ✓ **Ejemplo:** Liquidar la siguiente cuenta, con las siguientes condiciones:
- Tipo anual de interés para saldos acreedores: 1 %
 - Tipo anual de interés para descubiertos: 8 %
 - Comisión descubierto: 2 % sobre el mayor saldo descubierto en el período.
 - Fecha de liquidación: 30 abril.
 - La entidad bancaria utiliza 365 para calcular los intereses deudores y acreedores.

Los movimientos efectuados han sido:

Fecha	Fecha valor	Concepto	Cuantía
14-03	05-03	Efecto a su cargo	6.000
14-03	15-03	Ingreso en efectivo	30.000
27-03	28-03	Transferencia a su favor	18.000
30-03	03-04	Pagos varios	45.000
10-04	11-04	Ingreso en efectivo	20.000

Procediendo del mismo modo:

Fecha valor	Concepto	Capitales		Saldo		Días	Números: Saldo · días	
		D	H	D	H			
05-03	Efecto a su cargo	6.000		6.000	-	10	60.000	-
15-03	Ingreso en efectivo	-	30.000	-	24.000	13	-	312.000
28-03	Transferencia a s/f	-	18.000	-	42.000	6	-	252.000
03-04	Recibo luz	45.000	-	3.000	-	8	24.000	-
11-04	Entrega en efectivo	-	20.000	-	17.000	19	-	323.000
30-04	Cierre. Intereses Comisiones	- 60	1,52					
	Saldo al cierre		16951,52				84.000	887.000

- Cálculo intereses deudores: $84.000 \cdot 0,08 / 365 = 18,41 \text{ €}$
- Cálculo intereses acreedores: $887.000 \cdot 0,01 / 365 = 24,30 \text{ €}$
- Cálculo de la retención: 18 % de 24,30 = 4,37 €
- Comisión sobre mayor descubierto se tiene en cuenta la fecha de la operación, no la de valor por lo tanto el primer movimiento (6.000) no produce descubierto porque en la misma fecha se ingresa más dinero (30.000) . Será sobre 3.000 € · 2 % = 60 €
- Saldo: $17.000 + 34,30 - 18,41 - 4,37 - 60 = 16.951,52 \text{ €}$

3.- Las Cuentas de Crédito.

Un préstamo supone normalmente, la entrega al cliente de un montante de dinero, que éste irá devolviendo en etapas sucesivas. Pero existe una modalidad de préstamo en la que el prestamista no entrega de una vez todo el importe al cliente, sino que pone a su disposición una determinada cantidad de dinero, para que vaya disponiendo de él en la medida y forma que estime más conveniente, es decir se instrumentaliza a través de una cuenta corriente con peculiaridades propias. Es por lo tanto un contrato bancario (Póliza de crédito) donde se establece las condiciones del crédito.

La liquidación se efectuará generalmente por el método hamburgués y sus características principales son:

- El cliente no realiza ningún ingreso inicial, sino que es el banco el que autoriza a ir disponiendo de las cantidades hasta el límite establecido.
- En la duración de la operación se puede, a su vez realizar ingresos que disminuyan la deuda con el banco, además de realizar cobros y pagos a través de ella.
- La existencia de unos gastos especiales como son los corretajes, al tener que formalizarse a través de un agente mediador (Corredor de comercio generalmente), el pago de impuestos, al ser una operación mercantil, comisiones de apertura y cierre, además de los intereses devengados.

4.- Las Imposiciones a plazo.

Son depósitos en los que el titular se compromete a no solicitar la devolución de sus fondos en un periodo de tiempo, que puede ser de tres, seis, doce meses, etc. En estos depósitos la denominación de cuenta no es apropiada, ya que se trata de una sola entrega que permanece en el banco durante el periodo pactado, no se realizan operaciones de cobro y pago a través de ella. Al bloquear el dinero por un tiempo determinado, el tipo de interés es superior al de una cuenta corriente.

Además estos intereses no se acumulan al capital, por lo que son abonados en una cuenta diferente a nombre del titular, lo que supone que la liquidación se efectúa en capitalización simple al no ser los intereses productivos. Su liquidación, por lo tanto, es simple, bastará con calcular, para cada periodo de devengo el interés proporcional producido por el capital.

5.- La Compra-venta a plazos.

Se define como una operación comercial mediante la cuál el vendedor entrega la mercancía en un momento y el comprador que la recibe en ese momento, entrega una parte del precio (según la legislación vigente un mínimo del 10 %) y el resto diferido en un periodo superior a tres meses y excepcionalmente hasta cuatro años (financiación de automóviles) mediante una serie de plazos.

Financieramente es una operación caracterizada por una prestación única y una contraprestación múltiple, por lo que lo normal sería plantearla como cualquier operación financiera fijada una ley determinada, pero en la práctica se utilizan dos procedimientos:

- **Fijar un tipo de recargo:** Se establece un recargo por aplazamiento y que estará en función de la duración de la operación. Para obtener la cuantía del plazo, considerando éstos iguales, se procederá del siguiente modo:
 - Se calcula la cuantía total recargada: $C_n = C_0 (1 + \alpha \cdot n)$, donde n es la duración de la operación y α el recargo por aplazamiento (que no el interés).
 - El valor de cada plazo será el cociente entre la cuantía total aplazada y el número de plazos.
- **Fijar un tipo de interés a la operación:** En este caso se establece una ecuación financiera entre la prestación y la contraprestación, correspondiéndose con la misma demostración teórica de los pagos iguales y vencimientos periódicos del descuento de las letras persiana, nada más que ahora valorada a tanto de interés postpagable o vencido. La demostración seguiría los mismos pasos y se obtendrían las siguientes expresiones:

- **Con pagos constantes, periódicos y al final de cada periodo:**

$$V_a (1 + i \cdot n) = C \cdot n \cdot \left(1 + i \cdot \frac{n-1}{2} \right)$$

- **Con pagos constantes, periódicos y al principio de cada periodo:**

$$V_a (1 + i \cdot n) = C \cdot n \cdot \left(1 + i \cdot \frac{1+n}{2} \right)$$

6.- Préstamos obtenidos mediante pignoración.

Pignorar significa dejar en garantía o en prenda. La pignoración de valores mobiliarios implica la solicitud de un crédito entregando como garantía esos valores mobiliarios.

La cuantía del préstamo o del crédito que se obtenga estará en función del valor efectivo o de cotización de los títulos pignorados, al que se le aplica un coeficiente de reducción según el tipo de valores que se pignoren. Esta reducción sobre el valor efectivo se establece con el fin de garantizar mejor al préstamo. Este coeficiente de reducción o *cambio de pignoración* (c_p) suele oscilar entre el 40 % y el 90 %, el más bajo cuando son títulos de empresas que no reparten dividendos y son poco solventes, y el más alto para títulos de deuda pública.

- **Valor efectivo de los títulos pignorados** según el cambio (E_c), indica el valor de mercado de los títulos que se entregan como garantía. Se obtiene multiplicando la cotización del título por el valor nominal de la cartera pignorada.
 - **Efectivo máximo de pignoración** (E_p). Representa el importe máximo de préstamo al que podremos optar y que viene determinado por:
 - El valor efectivo de los títulos pignorados.
 - Cambio de pignoración.
 - **Efectivo líquido recibido** (E_L). El valor recibido siempre será inferior a la cuantía del crédito o del préstamo concedido, pues hay que deducir los gastos ocasionados y, además, los intereses de la operación, ya que suelen cobrarse por anticipado.
 - Las comisiones bancarias y los corretajes se expresan en tanto por uno sobre el valor efectivo máximo (E_p).
 - Otros gastos recogen partidas tales como pólizas, timbres, etc., a cargo del prestatario (OG).
 - Los intereses se calculan también sobre el valor efectivo máximo (E_p).
- ✓ **Cambio de cotización de los títulos pignorados.** Se denomina *cambio de reposición* (Cr) al límite al cual puede bajar la cotización de los valores en garantía, para que se considere en vigor el contrato de pignoración. Generalmente, en el contrato se estipula como límite un descenso de la cotización de un 10 % de la cotización existente cuando se revisaron por última vez las garantías. Llegado a este límite, el cambio de reposición, caben dos posibilidades:
- a) **Cálculo de la mejora de garantía:** Se trata de determinar cuántos títulos se deberán aportar de forma complementaria para poder seguir manteniendo el mismo importe del préstamo concedido inicialmente, ante un descenso en la cotización de los títulos pignorados inicialmente. Para ello se procederá a recalcular el efectivo máximo de pignoración pero dejando como única variable a calcular el nominal total que se tendría que pignorar de esos mismos títulos (n') para que ambos efectivos máximos (el inicialmente calculado (E_p) y el que ahora se calcula con el nuevo cambio de pignoración (E'_p) sean iguales.
 - b) **Cálculo de la reducción de préstamo.** Se trata de determinar en qué cuantía se reducirá el préstamo inicialmente concedido con una determinada garantía pignoraticia ante una bajada de la cotización de los títulos pignorados. En este caso se procederá a calcular el importe máximo de préstamo a conceder en el momento actual (E'_p) en función del nominal pignorado, la cotización vigente al día de hoy y el cambio de garantía establecido para esos títulos. Posteriormente, se enfrenta el nuevo (E'_p) con el calculado al principio de la operación (E_p), y la diferencia será el importe por el que habrá que reducir el préstamo. La reducción del préstamo se efectuará por la parte del préstamo no garantizada por los títulos inicialmente pignorados como consecuencia de un menor valor de éstos en el mercado, es decir, la décima parte del préstamo inicial.

C.- Ejercicios prácticos:

✓ Las facturas de descuento de papel.

En las siguientes actividades vamos a aprender a calcular los elementos que conforman una factura de descuento, además se entender su significado financiero, útil por otra parte para su correcto reflejo contable. Dados los datos básicos de una operación de descuento calcularemos los intereses, comisiones y suplidos y el nominal financiero de un efecto impagado.

Actividad nº 1:

Una empresa realiza una venta recibiendo tres pagarés de 8.000 € nominales y vencimientos los días 2 de octubre, 2 de noviembre y 2 de diciembre. El día 5 de septiembre procede a su descuento en una entidad bancaria que le cobra un interés del 5 %, comisiones del 1,5 ‰, AJD del 0,10 % y correo de 2 € por efecto.

Se pide confeccionar la factura de descuento y el importe que se le ha ingresado en cuenta a la empresa.

Solución:

- Para el cálculo de los distintos elementos de la factura procederemos a:
 - El cálculo de los días desde el 5 de septiembre a cada uno de los vencimientos con meses naturales, éste será el valor de n en el cálculo del interés.
 - El cálculo del interés: $I = N \cdot 0,05 \cdot n/360$ siendo N el nominal de cada efecto. Así $8.000 \cdot 0,05 \cdot 27/360 = 30$ €, $8000 \cdot 0,05 \cdot 58/360 = 64,44$ €, etc
 - Comisiones: $1,5 \text{ ‰} \cdot N$, es decir $1,5 \text{ ‰} \cdot 8.000 = 12$ €
 - AJD: $0,25 \% \cdot 8.000 = 8$ €. En este caso al ser pagarés no se ha devengado por lo que el banco lo cobrará para dar fuerza de ley ante un impago.
 - Los datos resultantes serán:

Fecha de descuento: 1 de febrero			Tipo de descuento del 8,25 %			
Nominal	Vencimiento	Días	Intereses	Comisiones	A.J.D.	Correo
8.000	2/10	27	30	12	8	2
8.000	2/11	58	64,44	12	8	2
8.000	2/12	88	97,78	12	8	2
24.000			192,22	36	24	6

El efectivo ingresado en cuenta será: $24.000 - 192,22 - 6 - 24 - 36 = 23.741,78$ €

Actividad nº 2:

Una sociedad tiene en cartera las siguientes letras de cambio: De 12.500 € y vencimiento el 25/03, de 14.000 € y vencimiento el 30/06, de 22.000 € y vencimiento el 15/09 y de 53.000 € y vencimiento el 30/10. Hoy 1 de febrero la sociedad realiza el descuento de los anteriores efectos con las siguientes condiciones:

- Tipo de descuento del 8,25 % anual.
- Gastos: Correo 2,25 € por título y por comisiones: 0,30 % para vencimientos inferiores a los 30 días, 0,45 % para vencimientos entre los 31 y 60 días y del 0,60 % para vencimientos a más de 61 días.

Se pide calcular la factura de descuento y el efectivo recibido.

Solución:

- Procederemos al cálculo de los elementos de la factura procediendo del mismo modo.
 - Los días se cuentan con meses naturales entre la fecha de descuento y el vencimiento de cada uno de los efectos.
 - Los intereses a través de la fórmula general: $I = N \cdot d \cdot n/360$.
 - La comisión se calcula sobre el nominal de cada efecto.
 - El AJD se obtendría a través de la tabla del impuesto. Si lo que se está descontando son letras de cambio, el AJD no aparecerá en la factura, ya que se devengó en el momento de adquirir la letra de cambio, si son otro tipo de documentos el AJD se devenga en el momento del descuento, para que el documento tenga fuerza legal ante un impago.
- La factura detallada por todos los conceptos del descuento será la siguiente:

Fecha de descuento: 1 de febrero			Tipo de descuento del 8,25 %			
Nominal	Vencimiento	Días	Intereses	Comisiones	A.J.D.	Correo
12.500	25/03	52	148,95	56,25	-	2,25
14.000	30/06	149	478,04	84,00	-	2,25
22.000	15/09	226	1.139,41	132,00	-	2,25
53.000	30/10	271	3.291,52	318,00	-	2,25
101.500			5.057,92	590,25	-	10

El efectivo será la diferencia entre los nominales descontados y los gastos ocasionados:

$$V_e = 101.500 - 5.057,92 - 590,25 - 10 = 95.850,83 \text{ €}$$

Actividad nº 3:

Una sociedad tiene en cartera los siguientes recibos: De 10.000 €. y vencimiento el 27 de marzo, de 7.500 € con vencimiento el 9 de marzo, de 16.500 € con vencimiento el 15 de febrero, de 15.000 € con vencimiento el 30 de marzo y de 5.000 € y vencimiento el 16 de abril. Hoy 6 de febrero la sociedad realiza el descuento de los anteriores efectos, en una entidad financiera que le aplica una tasa de descuento del 8,75 % anual, con los siguientes gastos

- Correo 0,25 € por efecto y A.J.D. del 0,5 % del nominal.
- Comisiones: 0,50 % para vencimientos < 30 días, 0,60 %, entre los 31 y 60 días y del 0,75 % para vencimientos > 61 días. Mínimo de 1,8 €.

Se pide calcular el efectivo recibido en cuenta.

Solución:

- La factura detallada por todos los conceptos del descuento, calculada según lo explicado en los ejercicios anteriores, será:

Fecha de descuento: 1 de febrero			Tipo de descuento del 8,25 %			
Nominal	Vencimiento	Días	Intereses	Comisiones	A.J.D.	Correo
10.000	27/03	49	119,10 €	50	60	0,25
7.500	09/03	31	56,51 €	37,5	45	0,25
16.500	15/02	9	36,09 €	82,5	82,5	0,25
15.000	30/03	52	189,58 €	75	90	0,25
5.000	16/04	69	83,85 €	25	37,5	0,25
54.000 €			485,13 €	270 €	315	1,25 €

$$V_e = 54.000 - (485,13 + 270 + 315 + 1,25) = 54.000 - 1.071,38 = 52.928,62 \text{ €}$$

Actividad nº 4:

Una sociedad tiene concertada con su banco una línea de crédito para el descuento de efectos que se caracteriza por las siguientes condiciones: Límite del papel a descontar 4.000 € y límite del tiempo de descuento 90 días. La sociedad envía el 7 de julio los siguientes efectos: De 100 € con vencimiento el 17 de agosto, de 1.175 € y vencimiento el 20 de agosto, de 2.165,5 € y vencimiento el 15 de octubre, de 1.150 € y vencimiento el 30 de noviembre, de 500 € con vencimiento el 30 de julio y de 2.200 € con vencimiento el 6 de septiembre. Los gastos aplicados al descuento son los siguientes:

- Interés del 10 % anual para efectos a menos de 30 días y el 12 % a más de 30 días.
- Correo 0,25 € por efecto y A.J.D. del 0,5 % del nominal.
- Comisiones: 0,5 % para efectos a menos de 30 días, 0,6 % para efectos entre 31 y 60 días y 0,75 % para efectos a más de 60 días. Mínimo de 300 €

Se pide: Calcular el efectivo recibido en cuenta.

Solución:

- Habrá que comprobar si la sociedad cumple con todos los requisitos de su línea de descuento en estos momentos, ya que tiene dos condiciones:
 - Respecto al tiempo, comprobamos que al calcular los días el tercer efecto (2.165,5 €) y el cuarto (1.150 €) no serán aceptados al superar los 90 días, (son 100 y 146 días).
 - Respecto al límite en cantidad: La suma de nominales eliminando los dos efectos anteriores se cumple, es decir no superan los 4.000 €
- La factura detallada por todos los conceptos del descuento será:

Fecha de descuento: 7 de julio			Tipo de descuento del 10 % y 12 %.			
Nominal	Vencimiento	Días	Intereses	Comisiones	A.J.D.	Correo
100 €	17/08	41	1,37	0,50	0,60	0,25
1.175 €	20/08	44	17,23	5,87	7,05	0,25
500 €	30/07	23	3,19	2,50	2,50	0,25
2.200 €	06/09	61	44,73	11	16,50	0,25
3.975			66,52	19,87	26,65	1

$$V_e = 3.975 - (66,52 + 19,87 + 26,65 + 1) = 3.975 - 114,04 = 3.860,96 \text{ €}$$

Actividad nº 5:

Una sociedad dispone de las siguientes letras, que procede hoy 13 de junio a su descuento: De 10.000 € con vencimiento el 14 de julio, de 15.000 € con vencimiento el 20 de agosto y de 8.000 € con vencimiento el 13 de octubre. El banco aplica un tipo de descuento del 7 % anual, para efectos hasta 60 días, el 8 % anual para efectos entre 61 y 100 días y del 9 % anual para efectos a más de 100 días. La comisión es del 0,5 % del nominal y los gastos de 0,30 € por efecto.

Se pide calcular el efectivo obtenido.

Solución:

- La factura de liquidación, procediendo del mismo modo que en los anteriores será:

Fecha de descuento: 13 de junio			Tipo de descuento del 7 %, 8 % y 9 %.			
Nominal	Vencimiento	Días	Intereses	Comisiones	A.J.D.	Correo
10.000	14/07	31	60,28	50	-	0,30
15.000	20/08	68	226,67	70	-	0,30
8.000	13/10	122	244	40	-	0,30
33.000			530,95	165		0,90

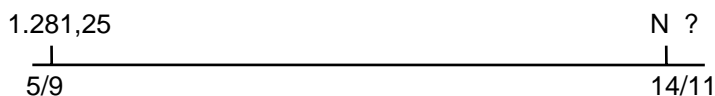
$$V_e = 33.000 - (530,95 + 165 + 0,90) = 33.000 - 696,85 = 32.303,15 \text{ €}$$

Actividad nº 6:

El 5 de septiembre, se recibe una letra impagada de 1.250 €. Tras un acuerdo con el cliente se pone en circulación un nuevo efecto con vencimiento el 14 de noviembre, que incluirá los gastos ocasionados por el impago del 2,5 % del nominal. Si el nuevo efecto se va a descontar a un tanto de descuento del 9 % anual, se pide calcular su nominal.

Solución:

- Los gastos han ascendido a: $1.250 \text{ €} \cdot 2,5 \% = 31,25 \text{ €}$
- El importe de la deuda hoy es de $1.250 + 31,25 = 1.281,25 \text{ €}$
- Los días entre el 5/9 y el 14/11 son 70.
- El dato que se nos pide será un nominal que descontado dé un efectivo igual al nominal de la letra impagada más los gastos ocasionados, que queremos cargar al moroso:



- El nuevo nominal será: $1.281,25 = N (1 - 0,09 \cdot 70/360)$, operando $N = 1.304,07 \text{ €}$

Actividad nº 7:

Un efecto de 2.000 € y vencimiento dentro de 90 días es descontado en el banco al 6 % anual con pago de unas comisiones del 6 ‰. Llegado su vencimiento es impagado cargando el banco por gastos de devolución un 2 %, por protesto 10 € y 0,30 € por correo. Dos días después se pone en circulación un nuevo efecto con vencimiento a 60 días, que incluirá los gastos ocasionados. Si el nuevo efecto se va a descontar a un tanto de descuento del 5 % anual, con unas comisiones del 4 ‰, se pide calcular el efectivo ingresado en cuenta y el nuevo efecto.

Solución:

- El efectivo obtenido tras el descuento será:
 $2.000 - (2.000 \cdot 0,06 \cdot 90/360) - (6 \text{ ‰ de } 2.000) = 1.958 \text{ €}$
- Los gastos: Por devolución: $2.000 \cdot 2 \% = 40 \text{ €}$, por protesto, 10 € y correo, 0,30 €. Por lo tanto el total de gastos cargados en cuenta ascienden a 50,30 €
- El nominal será un efecto que descontado dé un efectivo igual al nominal de la letra impagada más los gastos ocasionados, es decir de: $2.000 + 50,30 = 2.050,30 \text{ €}$

$$2.050,30 = N (1 - 0,05 \cdot 60/360) - 0,004 N, \text{ operando } N = 2.075,90 \text{ €}$$

✓ La liquidación de cuentas corrientes.

Aprenderemos el procedimiento de liquidación de una cuenta incluyendo cuentas corrientes normales y las denominadas de alta remuneración para utilizar el concepto de la franquicia o el concepto de liquidación a través del saldo medio.

Actividad nº 8:

Se pide liquidar al 30 de junio la siguiente cuenta que devenga un interés del 4 % y sobre lo descubiertos en cuenta el 15 %, calculados sobre el año natural, si ha tenido los siguientes movimientos:

- El 1 de enero el saldo anterior era de 25 €.
- El 17 de febrero ingreso de 150 €.
- El 23 de febrero reintegro de 25€.
- El 21 de marzo pago por un recibo 185 €.
- El 17 de abril ingreso de 190 €.
- El 20 de abril pago del recibo de la luz de 50 €.
- El 12 de mayo pago de impuestos por valor de 125 €.
- El 20 de mayo ingresa un cheque de 40 €.
- El 26 de mayo por diversos pagos 80 €.
- El 1 de junio ingresa 170 €.
- El 20 de junio pago de un recibo por valor de 20 €.

Solución:

- La partidas se colocan según su carácter deudor u acreedor, si es un ingreso es acreedor para el banco y si es un pago o reintegro es deudor para el banco.
- Los días se cuentan de un vencimiento al vencimiento siguiente, del 1/01 al 17/02 van 47 días, del 17/02 al 23/02 van 6 días y así sucesivamente.
- El saldo se obtiene sumando o restando al anterior la partida siguiente.
- Se denomina números al producto del saldo por los días. El primero es $25 \cdot 47 = 1.175$, el segundo es $175 \cdot 6 = 1.050$ y así sucesivamente.
- La tabla de la operación sería:

Fechas valor	Capitales		Saldo		Días	Números: Saldo · días	
1 de enero	-	25	25	H	47	-	1.175
17 de febrero	-	150	175	H	6	-	1.050
23 de febrero	25	-	150	H	26	-	3.900
21 de marzo	185	-	35	D	27	945	-
17 de abril	-	190	155	H	3	-	465
20 de abril	50	-	105	H	22	-	2.310
12 de mayo	125	-	20	D	8	160	-
20 de mayo	-	40	20	H	6	-	120
26 de mayo	80	-	60	D	6	360	-
1 de junio	-	170	110	H	19	-	2.090
20 de junio	20	-	90	H	10	-	900
30/6 Intereses	-	0,706	90,706	H			
30 de junio	-		90,706	H		1.465	12.010

Al existir saldos deudores y acreedores el tipo de interés que se ha de aplicar es distinto:

- Los intereses deudores: $I_d = 1.465 \cdot 0,15 : 365 = 0,610 \text{ €}$
- Los intereses acreedores: $I_a = 12.010 \cdot 0,04 : 365 = 1,316 \text{ €}$
- El saldo de intereses será de: $1,316 - 0,610 = 0,706 \text{ €}$
- El saldo de la cuenta es de $90 + 0,706 = 90,706 \text{ €}$

Actividad nº 9:

Un banco ofrece a sus clientes jóvenes una cuenta que devenga un interés del 5 % sobre el saldo medio, con abono de intereses semestrales. Se pide liquidar la cuenta al 30 de junio si se practica una retención del 18 % sobre los intereses. Los movimientos de la cuenta han sido:

- El 8 de enero ingreso de 50 €
- El 28 de enero ingreso de 100 €
- El 13 de febrero reintegro de 60 €
- El 28 de febrero reintegro de 10 €
- El 13 de marzo ingreso de 20 €
- El 10 de abril ingreso de 15 €
- El 20 de abril reintegro de 30 €
- El 20 de mayo ingreso de 10 €

Solución:

- Aquí introducimos como nuevo concepto el **Saldo medio** de la operación que es el cociente entre los números y la suma de los días surgidos en la liquidación, por lo tanto:
 - El saldo medio será: $S_m = 16.185 : 173 = 93,555 \text{ €}$
 - Los intereses calculados sobre dicho saldo: $I_b = 93,555 \cdot 0,05 \cdot 173/365 = 2,217 \text{ €}$
 - En cuenta sólo se ingresará el líquido resultante tras la retención fiscal: $I_l = 2,217 \text{ €} - 18 \% = 1,818 \text{ €}$
- El planteamiento de la tabla de liquidación se realizará de igual modo que en el problema anterior:

Fechas valor	Capitales		Saldo		Días	Números: Saldo · días	
8 de enero	-	50	50	H	20	-	1.000
28 de enero	-	100	150	H	16	-	2.400
13 de febrero	60	-	90	H	15	-	1.350
28 de febrero	10	-	80	H	13	-	1.040
13 de marzo	-	20	100	H	28	-	2.800
10 de abril	-	15	115	H	10	-	1.150
20 de abril	30	-	85	H	30	-	2.550
20 de mayo	-	10	95	H	41	-	3.895
30/06 Intereses		1,818	96,818				
30 de junio	-	-	96,818	H	173		16.185

- El saldo en cuenta será la suma de capitales más intereses: $95 \text{ €} + 1,66 \text{ €} = 96,66 \text{ €}$.

Actividad nº 10:

Se pide liquidar la siguiente cuenta al 31 de julio y calcular su tasa efectiva, si tiene las siguientes características: Franquicia de 150 €, interés del 5 % anual para saldos superiores a la franquicia y del 0,1 % anual para saldos inferiores, con liquidación mensual de intereses. Mantenimiento 0,50 € mensuales y a 0,10 € por cada apunte, siendo los cinco primeros gratuitos. Retención fiscal del 18 %. Los movimientos de la cuenta han sido:

- El 1 de julio ingreso de 125 €
- El 3 de julio ingreso de 200 €
- El 7 de julio reintegro de 50 €
- El 10 de julio reintegro de 100 €
- El 16 de julio ingreso de 450 €
- El 25 de julio reintegro de 250 €
- El 30 de julio reintegro de 100 €

Solución:

- Aquí introducimos el concepto de la franquicia que es la cantidad a partir de la cuál se pagan intereses. La liquidación de la cuenta será:

Fechas valor	Capitales		Saldo		Días	Números: Saldo · días	
1 de julio	-	125	125	H	2	-	250
3 de julio	-	200	325	H	4	-	1.300
7 de julio	50	-	275	H	3	-	825
10 de julio	100	-	175	H	6	-	1.050
16 de julio	-	450	625	H	9	-	5.625
25 de julio	250	-	375	H	5	-	1.875
30 de julio	100	-	275	H	1	-	275
Intereses	-	0,75					
Gastos	0,70						
31 de julio			275,05	H	30	11.200	-

- El saldo medio de la operación: $S_m = 11.200 : 30 = 373,333 \text{ €}$, como dicho saldo es mayor que la franquicia, se pagan intereses al 5 % sobre la cuantía que excede de la franquicia.
 - Interés bruto: $I_b = (373,333 - 150) \cdot 0,05 \cdot 30/365 = 0,918 \text{ €}$
 - Interés líquido: $I_l = 0,918 \text{ €} - 18 \% = 0,75 \text{ €}$
 - Gastos: Por apuntes $(7 - 5) \cdot 0,10 \text{ €} = 0,20 \text{ €}$ más los 0,50 € de mantenimiento, da un total de 0,70 €
 - El saldo de la cuenta será de: $275 + 0,75 - 0,70 = 275,05 \text{ €}$

Actividad nº 11:

Se pide liquidar la siguiente cuenta de alta remuneración, cuyas características son: Franquicia de 200 €. Liquidación de intereses cada 30 de junio y 31 de diciembre, interés anual sobre saldos medios según el siguiente detalle: Para saldos menores a 500 € el 2 %, para saldos entre 500 y 1.500 € del 7 %, para saldos mayores de 1.500 € el 8,25 %. Los movimientos de la cuenta han sido:

- El 20 de enero ingreso de 350 €
- El 10 de marzo ingreso de 400 €
- El 20 de abril ingreso de 200 €
- El 10 de mayo ingreso de 350 €
- El 25 de julio ingreso de 200 €
- El 20 de septiembre ingreso de 500 €
- El 10 de noviembre ingreso de 200 €
- El 15 de diciembre ingreso de 500 €

Solución:

- Aquí se van a efectuar dos liquidaciones al año. La primera el 30 de junio:

Fechas valor	Capitales		Saldo		Días	Números: Saldo · días	
20 de enero	-	350 €	350	H	49	-	17.150
10 de marzo	-	450 €	750	H	41	-	30.750
20 de abril	-	200 €	950	H	20	-	19.000
10 de mayo	-	350 €	1.300	H	51	-	66.300
Intereses	-	19,37 €					
30 de junio	-	1.319,37			161	133.200	

- El saldo medio de la operación: $S_m = 133.200 : 161 = 827,329 \text{ €}$, como dicho saldo es mayor que la franquicia, se pagan intereses al 7 % anual sobre la cuantía que excede de ésta al estar comprendido entre 500 y 1.500 €

- Interés: $I_b = (827,329 - 200) \cdot 0,07 \cdot 161/365 = 19,37 \text{ €}$
- La segunda liquidación se efectuará el 31 de diciembre y se inicia como saldo de capitales, el anterior de 1.319,37 €

Fechas valor	Capitales	Saldo	Días	Números: Saldo · días
30 de junio	- 1.319,37	1.319,37 H	25	- 32.984,25
25 de julio	- 200	1.519,37 H	57	- 86.604,09
20 de septiembre	- 500	2.019,37 H	51	- 102.987,8
10 de noviembre	- 200	2.219,37 H	35	- 7
15 de diciembre	- 500	2.719,37 H	6	- 77.677,95
Intereses	63,69			16.316,22
31 de diciembre	-	2.783,06	174	316.570,38

- El saldo medio: $S_m = 316.570,38 : 174 = 1.819,37 \text{ €}$, como dicho saldo es mayor que la franquicia, se pagan intereses al 8,25 % anual sobre la cuantía que excede.
- Interés: $I_b = (1.819,37 - 200) \cdot 0,0825 \cdot 174/365 = 63,69 \text{ €}$
- El saldo de la cuenta: El de capital más los intereses: $2.719,37 + 63,69 = 2.783,06 \text{ €}$

✓ **La liquidación de cuentas de crédito.**

Actividad nº 12:

Una sociedad para hacer frente a sus problemas de liquidez inmediatos, concierta con su entidad bancaria la apertura de una cuenta de crédito el 30 de septiembre con un límite de 3.000 €. a liquidar intereses el 31 de diciembre. El tipo de interés sobre saldos deudores será del 11 % anual, el de saldos acreedores del 0,2 % y sobre el exceso el 18 % anual. La comisión de apertura pagada en efectivo asciende a 1,5 €. Se pide liquidar la cuenta si sus movimientos han sido.

- El 8/10 dispone en efectivo de 200 €
- El 20/10 cobra de un cliente 150 € que aplica a la cuenta.
- El 18/11 paga a un proveedor por valor de 250 €
- El 20/11 paga consumos diversos por valor de 100 €
- El 21/12 ingresa en la cuenta 230 €

Solución:

- Para su resolución procederemos del mismo modo que en la liquidación de las cuentas corrientes:

Fecha operación	Debe	Haber	Saldo	Días	Interés	Números (*)
8 de octubre	200	-	200 € D	12	0,73 €	2.400
20 de octubre	-	150	50 € D	29	0,44 €	1.450
18 de noviembre	250	-	300 € D	2	0,18 €	600
20 de noviembre	100	-	400 € D	31	3,79 €	12.400
21 de diciembre	-	230	170 € D	10	0,52 €	1.700
31 de diciembre	5,67		170 €		5,67 €	18.550
SALDO		175,67				

Nota: Como podemos comprobar el saldo nunca ha superado el límite, por lo que sólo paga el 11 % de interés sobre el saldo de capitales.

(*) Esta columna se ha agregado para comprobar que los intereses también se pueden calcular de forma global, a través del saldo de los números, como hemos hecho ya en la liquidación de las cuentas corrientes normales. $I = 18.550 \cdot (0,11 : 360) = 5,67 \text{ €}$

Actividad nº 13:

Una sociedad concierta la apertura de una cuenta de crédito el 1 de julio con un límite de 18.000 € a cancelar y liquidar intereses el 31 de diciembre. El tipo de interés sobre saldos deudores será del 12 % anual, el de saldos acreedores del 0,2 % y sobre el exceso el 20 % anual. Los gastos de apertura pagados por la cuenta ascienden a 2 €. Liquidar la cuenta si sus movimientos han sido:

- El 13 de julio dispone en efectivo de 3.615 €
- El 8 de agosto paga a un proveedor 7.230 €
- El 23 de agosto cancela una deuda por valor de 9.036 €
- El 12 de septiembre cobra de un cliente 6.025 € aplicándolos a la cuenta.
- El 20 de septiembre ingresa en cuenta 3.012 €
- El 10 de octubre paga a un proveedor 8.433 €
- El 5 de noviembre ingresa por prestación de diversos servicios 3.614 €
- El 25 de noviembre ingresa el cobro de un cliente por valor de 9.036 €

Solución:

- Siguiendo los pasos señalados en el caso anterior:

Fecha operación	Debe	Haber	Saldo	Días	Interés: $C \cdot i \cdot n/360$
13 de julio	3.615	-	3.615 € D	26	31,33 €
8 de agosto	7.230	-	10.845 € D	15	54,23 €
23 de agosto	9.036	-	19.881 € D ⁽¹⁾	20	120 € 20,9 €
12 de septiembre	-	6.025	13.856 € D	8	36,95 €
20 de septiembre	-	3.012	10.844 € D	20	72,30 €
10 de octubre	8.433	-	19.277 € D ⁽²⁾	26	156 € 18,45 €
5 de noviembre	-	3.614	15.663 € D	20	104,42 €
25 de noviembre	-	9.036	6.627 € D	36	79,52 €
31 de diciembre	694,10 €				
SALDO		7.321,10			

Nota: Como podemos comprobar el saldo ha superado el límite en las operaciones del 23 de agosto y 10 de octubre, por lo que paga el 20 % de interés sobre el exceso. Así:

$$(1) \quad 18.000 \text{ €} \cdot 12 \% \cdot 20/360 = 120 \text{ €}$$

$$1.881 \text{ €} \cdot 20 \% \cdot 20/360 = 20,9 \text{ €}$$

$$(2) \quad 18.000 \text{ €} \cdot 12 \% \cdot 26/360 = 156 \text{ €}$$

$$1.277 \text{ €} \cdot 20 \% \cdot 26/360 = 18,45 \text{ €}$$

El saldo de la cuenta será la suma del de capitales, 6.627 €, más intereses de 694,10 €

Actividad nº 14:

Liquidar la siguiente cuenta de crédito abierta el 1 de septiembre con un límite de 3.000 € a liquidar el 28 de febrero. El tipo de interés pactado ha sido del 12 % anual, y sobre el exceso el 20 % anual. Los gastos de apertura ascienden a 3.300 € pagados en efectivo. Los movimientos con la cuenta han sido:

- El 12 de septiembre paga a un proveedor 1.000 €
- El 2 de octubre paga diversos recibos por valor de 60 €
- El 18 de octubre cancela una deuda de 1.500 €
- El 1 de noviembre ingresa en cuenta 300 €
- El 20 de noviembre cobra de un cliente 1.100 € que aplica a la cuenta.
- El 12 de diciembre paga por comisiones 200 €
- El 13 de enero del siguiente año, retira en efectivo 500 €
- El 20 de enero paga a un proveedor 1.000 €
- El 2 de febrero ingresa en cuenta 1.900 €
- El 21 de febrero paga a un proveedor 1.100 €

Solución:

- Siguiendo los mismos pasos:

Fecha operación	Debe	Haber	Saldo	Días	Interés
12 de septiembre	1.000	-	1.000 € D	20	6,67 €
2 de octubre	60	-	1.060 € D	16	5,65 €
18 de octubre	1.500	-	2.560 € D	14	11,95 €
1 de noviembre	-	300	2.260 € D	19	14,31 €
20 de noviembre	-	1.100	1.160 € D	22	8,51 €
12 de diciembre	200	-	1.360 € D	32	14,51 €
13 de enero	500	-	1.860 € D	7	4,34 €
20 de enero	1.000	-	2.860 € D	13	12,39 €
2 de febrero	-	1.900	960 € D	19	6,08 €
21 de febrero	1.100	-	2.060 € D	7	4,81 €
28 de febrero	89,22	-	2.060 €		
SALDO		2.149,22			

Nota: Como el saldo nunca ha superado el límite, sólo paga el 12 % de interés sobre las cantidades utilizadas.

También podíamos haber calculado los intereses a través de los números como en las cuentas corrientes:

Saldo	Días	Números
1.000 €	20	20.000
1.060 €	16	16.960
2.560 €	14	35.840
2.260 €	19	42.940
1.160 €	22	25.520
1.360 €	32	43.520
1.860 €	7	13.020
2.860 €	13	37.180
960 €	19	18.240
2.060 €	7	14.420
		267.640

Por lo tanto los intereses a pagar serían: $267.640 \cdot 0,12/360 = 89,22 \text{ €}$

✓ **Las imposiciones a plazo.**

En este apartado vamos a aplicar, de forma sencilla, los conceptos explicados referentes a las imposiciones a plazo de forma que los conceptos queden reafirmados a través del cálculo numérico en operaciones concretas.

Actividad nº 15:

Un banco ofrece a sus clientes la siguiente imposición: Capital de 2.500 € a un año, con liquidación semestral de intereses cada 30 de junio y 31 de diciembre calculados al 7,5 % anual con base comercial, intereses que se depositan en una cuenta corriente que devenga un interés del 4,5 % anual.

Se pide calcular el saldo de la cuenta corriente al 31 de diciembre si la imposición se efectuó el 2 de enero.

Solución:

- La primera liquidación de intereses se efectúa el 30 de junio, por lo tanto se liquida por los días transcurridos entre el 2/1 al 30/6, que ascienden a 179 días:

$$I = 2.500 \cdot 0,075 \cdot 179/360 = 93,23 \text{ €}$$
- La segunda liquidación se efectúa el 31 de diciembre, por lo tanto se liquida por los días transcurridos entre el 30/6 al 31/12, es decir 184 días, sobre 2.500 € al no acumularse los intereses en las operaciones simples.

$$I = 2.500 \cdot 0,075 \cdot 184/360 = 95,83 \text{ €}$$
- En la cuenta corriente se han realizado dos imposiciones:
 - El 30 de junio por el importe de 93,23 € de los intereses, que hasta el cierre de la cuenta, ha estado 184 días.
 - El 31 de diciembre por un importe de 95,83 € de los intereses, que hasta el cierre de la cuenta ha estado 0 días.
- El saldo de la cuenta será la suma de dichas cantidades más los intereses generados hasta la fecha de liquidación del 31 de diciembre, cómo sólo el primer ingreso devenga intereses, el saldo será:

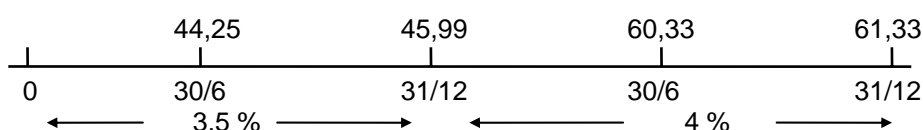
$$S = 93,23 + (93,23 \cdot 0,045 \cdot 184/365) + 95,83 = 191,17 \text{ €}$$

Actividad nº 16:

Un banco ofrece a sus clientes la siguiente imposición: Capital de 2.000 €, a dos años, con liquidación semestral de intereses cada 30 de junio y 31 de diciembre calculados al 6 % anual durante el primer año y al 8 % anual en el segundo año, intereses que se depositan en una cuenta corriente a un interés del 3,5 % anual en el primer año y del 4 % anual en el segundo año. Se pide calcular el saldo de la cuenta al 31 de diciembre del segundo año si la imposición se efectuó el 4 de enero y la retención de intereses es del 25 %

Solución:

- La primera liquidación de intereses se efectúa el 30 de junio, al 6 % anual, por lo tanto se liquida por los días transcurridos entre el 4/1 al 30/6, que ascienden a 177 días:
 - El interés bruto: $I_b = 2.000 \cdot 0,06 \cdot 177/360 = 59 \text{ €}$
 - El interés líquido: $I_l = 59 \text{ €} - 25 \% = 44,25 \text{ €}$
- La segunda liquidación se efectúa el 31 de diciembre, al 6 % anual, por lo tanto se liquida por los días transcurridos entre el 30/6 al 31/12, es decir 184 días.
 - El interés bruto: $I_b = 2.000 \cdot 0,06 \cdot 184/360 = 61,33 \text{ €}$
 - El interés líquido: $I_l = 61,33 \text{ €} - 25 \% = 45,99 \text{ €}$
- La tercera liquidación se efectúa el 30 de junio del siguiente año, al 8 % anual, por lo tanto se liquida por los días transcurridos entre el 31/12 al 30/6, es decir 181 días.
 - El interés bruto: $I_b = 2.000 \cdot 0,08 \cdot 181/360 = 80,44 \text{ €}$
 - El interés líquido: $I_l = 80,44 \text{ €} - 25 \% = 60,33 \text{ €}$
- La cuarta liquidación se efectúa el 31 de diciembre del siguiente año, al 8 % anual, por lo tanto se liquida por los días transcurridos entre el 30/6 al 31/12, es decir 184 días.
 - El interés bruto: $I_b = 2.000 \cdot 0,08 \cdot 184/360 = 81,78 \text{ €}$
 - El interés líquido: $I_l = 81,78 \text{ €} - 25 \% = 61,33 \text{ €}$
- En la cuenta corriente se han efectuado cuatro ingresos, cuya representación gráfica sería:



- El 30/6 por un importe de 44,25 €, que hasta el cierre, 31/12, ha estado 184 días valorado al 3,5 % y 365 días al 4 %.
- El 31/12 por importe de 45,99 €, que ha estado, hasta el cierre, 365 días valorado al 4 %.
- El 30/6 por un importe de 60,33 €, que hasta el cierre, 31/12, ha estado 184 días al 4 %.
- El 31/12 por un importe de 61,33 €, que hasta el cierre ha estado 0 días.

El saldo de la cuenta será la suma de dichas cantidades más los intereses generados hasta la fecha de liquidación, por lo tanto el saldo de intereses será:

$$S = (60,33 \cdot 0,04 \cdot 184/360) + (45,99 \cdot 0,04 \cdot 365/360) + (44,25 \cdot 0,04 \cdot 365/360) + (44,25 \cdot 0,035 \cdot 184/360) = 5,69 \text{ €}$$

- El saldo total será la suma de los capitales depositados más los intereses generados:

$$S = 44,25 + 45,99 + 60,33 + 61,33 + 5,69 = 217,59 \text{ €}$$

✓ La compra-venta a plazos.

En este apartado vamos a aplicar, las expresiones enunciadas, recalcando que el porcentaje de recargo no tiene nada que ver con el tipo de interés de capitalización, aunque mediante una ecuación financiera se puede calcular.

Actividad nº 17:

Un comerciante vende sus artículos con un 3 % de beneficio sobre el precio de coste, efectúa la venta de un producto por valor de 10.300 € (precio ya incrementado), cobrando 1.030 € al contado y por el resto gira seis efectos de 1.600 € con vencimientos a los 30, 60, 90, 120, 150 y 180 días. ¿Cuál es el recargo mensual por aplazamiento de la operación?

Solución:

- Cantidad total recargada: $1.600 \text{ €} \cdot 6 = 9.600 \text{ €}$
- Cantidad aplazada: $10.300 - 1.030 = 9.270 \text{ €}$, por lo tanto

$$9.600 = 9.270 (1 + \alpha \cdot 6)$$

Operando, $\alpha = 0,0059331$ es decir 0,59331 % de recargo mensual, que no el interés mensual.

Actividad nº 18:

Se compra un inmovilizado con estas condiciones: Precio de venta 1.050 €, entrada de 150 € y el resto en plazos mensuales de 20 € en el primer año y de 35 € en los dos siguientes. Se pide calcular la tasa de recargo anual aplicada a la operación. Si dicha tasa se mantuviese ¿Cuál debería ser el valor de cada pago si queremos que sean todos iguales?

Solución:

- En el primer caso tendremos: La cantidad aplazada es de $1.050 - 150 = 900 \text{ €}$.

Cantidad total a pagar: $(20 \cdot 12) + (35 \cdot 24) = 1.080 \text{ €}$.

El recargo será: $1.080 = 900 (1 + \alpha \cdot 3)$

Operando, $\alpha = 6,67 \%$ de recargo anual

- En este caso tendríamos: $1.080 = C \cdot 36 \cdot (1 + 0,067 \cdot 3)$

Operando, $C = 25 \text{ € mensuales}$

Actividad nº 19:

Un comerciante nos financia la compra de varios electrodomésticos por valor de 350 €, del siguiente modo: Entrada del 20 % y el resto mediante 10 mensualidades constantes y vencidas, con un recargo por aplazamiento del 0,5 % mensual. Se pide calcular el importe de dichas mensualidades.

Solución:

- La cantidad que se va a financiar: $350 \text{ €} - 20 \% = 280 \text{ €}$
- La cantidad total recargada es de:
 $C_n = 280 (1 + 0,005 \cdot 10) = 294 \text{ €}$
- El importe de cada pago será:
 $C = 294 : 10 = 29,40 \text{ €}$

Actividad nº 20:

Se realiza la compra de un aparato de aire acondicionado cuyo coste es de 500 €. Se va a pagar del siguiente modo: Una entrada del 10 % y el resto mediante 18 pagos mensuales vencidos, aplicando a la operación un recargo del 1 % mensual. Se pide calcular la cuantía de cada plazo.

Solución:

- Se paga al contado una cantidad total de: $500 \text{ €} \cdot 10 \% = 50 \text{ €}$ y se va a financiar el resto que asciende a: $500 - 50 = 450 \text{ €}$
- La cantidad total recargada serán 18 pagos mensuales con un recargo del 1 % mensual, por lo tanto:

$$C_n = 450 (1 + 0,01 \cdot 18) = 531 \text{ €}$$

La cuantía de cada plazo será de: $C = 531 : 18 = 29,50 \text{ €}$ cada mes

Actividad nº 21:

Una tienda de aparatos de música efectúa sus ventas aplazadas en las siguientes condiciones: Al contado un 25 % y el resto a seis o doce meses con un recargo por aplazamiento del 1 % mensual. Si se ha efectuado una compra por valor de 2.000 €. Se pide calcular la cuantía del plazo en cada caso y el tanto de capitalización simple aplicado a la operación.

Solución:

- Cantidad financiada: El 75 % de la operación, en este caso $2.000 \cdot 75 \% = 1.500 \text{ €}$
- La cuantía total aplazada a 6 meses: $1.500 (1 + 0,01 \cdot 6) = 1.590 \text{ €}$
- Cuantía del plazo a 6 meses: $1.590 : 6 = 265 \text{ €}$
- La cuantía total aplazada a 12 meses: $1.500 (1 + 0,01 \cdot 12) = 1.680 \text{ €}$
- Cuantía del plazo a 12 meses: $1.680 : 12 = 140 \text{ €}$
- Tanto de capitalización a 6 meses, procediendo a igualar prestaciones y contraprestaciones:

$$1.500 (1 + i \cdot 6) = 265 \cdot 6 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{6-1}{2}\right)$$

Operando, $i = 0,017910$ es decir el 1,7910 % mensual.

El anual sería $1,7910 \cdot 12 = 21,492 \text{ % anual}$.

- Tanto de capitalización a 12 meses. Procediendo de igual modo:

$$1.500 (1 + i \cdot 12) = 140 \cdot 12 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{12-1}{2}\right)$$

Operando, $i = 0,020547$, es decir el 2,0547 % mensual

El anual sería $2,0547 \cdot 12 = 24,656 \text{ % anual}$.

✓ **Los activos financieros a corto plazo.**

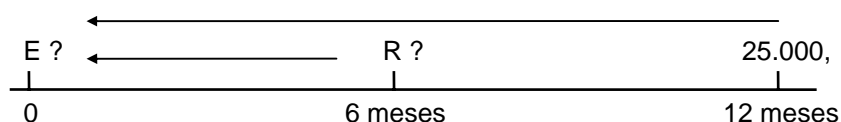
Es importante conocer el funcionamiento de estas operaciones a través de ejercicios prácticos dada la utilidad que tiene el conocimiento y la diferenciación, para temas posteriores, de las operaciones emitidas al descuento, conocer su significado, cuál es el valor de emisión de un título en estas circunstancias, cuál es el valor de recompra del título y su significado financiero, aplicar la relación existente entre las leyes de capitalización y descuento, etc. a su vez es importante conocer cuál sería el valor de venta de un título según las condiciones de mercado aprendiendo a calcular el beneficio o pérdida en términos financieros que puede producirse en una operación de este tipo.

Actividad nº 22:

Una sociedad dispone en estos momentos de una inversión de 25.000 €. en Letras del Tesoro compradas al descuento del 10 % anual, estos títulos tienen la garantía de recompra por parte del Estado a los seis meses de su emisión. Hoy, para obtener liquidez, la sociedad decide hacer efectiva dicha garantía. Se pide calcular el coste de la inversión, el valor a recibir hoy y el tanto de rentabilidad de la operación.

Solución:

- La representación gráfica de la operación sería:



- El coste de compra de los títulos E, será el valor descontado de los 25.000 € nominales:

$$E = 25.000 (1 - 0,10 \cdot 12/12) = 22.500 \text{ € que se pagaron}$$

- La operación de recompra, significa que la ley original pactada se mantiene, por lo que el valor de recompra R, será aquel capital que descontado 6 meses al 10 %, dé 22.500 €, que fue el precio pagado por las Letras, manteniendo $p = 0$:

$$22.500 = R (1 - 0,10 \cdot 6/12)$$

$$\text{Operando, } R = 23.684,211 \text{ €}$$

- La rentabilidad de la operación será el tanto i que iguala la prestación a la contraprestación. Pero como la ley pactada, al ser una operación de recompra se mantiene podemos calcularla directamente por la equivalencia entre los tantos:

$$i = \frac{d}{1 - d \cdot n} = \frac{0,10}{1 - (0,10 \cdot 6/12)} = 0,105263, \text{ es decir el } 10,5263 \%$$

Si lo hubiésemos calculado mediante la ecuación financiera sería:

$$22.500 (1 + i \cdot 6/12) = 23.684,211$$

Operando el resultado obtenido sería del 10,523 % anual, el mismo que mediante la equivalencia de los tantos.

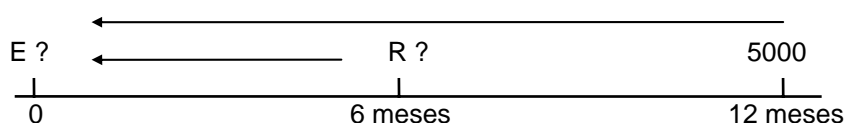
Actividad nº 23:

Un inversor adquiere un pagaré de 5.000 € nominales a 12 meses y al descuento del 10 % anual, con garantía de recompra a los 6 meses de la emisión. Se pide:

- El coste de compra.
- El valor de reembolso a los seis meses.

Solución:

- La representación gráfica de la operación sería:



- El coste de la operación E, será el valor descontado de las 5.000 € nominales:

$$E = 5.000 (1 - 0,10 \cdot 12/12) = 4.500 \text{ € pagados por su adquisición}$$

- Como en la operación de recompra, la ley pactada se mantiene como ya hemos visto en el caso anterior, el valor de recompra R, será aquel capital que descontado 6 meses al 10 %, dé 4.500 €, que fue el precio pagado por el pagaré:

$$4.500 = R (1 - 0,10 \cdot 6/12)$$

$$\text{Operando, } R = 4.736,84 \text{ €}$$

Actividad nº 24:

Un inversor procede a la compra de tres pagarés de 3.000 € nominales a 10 meses, abonando un total de 8.700 €. Los gastos de compra ascendieron a 10 €, la comisión de reembolso es el 1 ‰ del nominal y la retención fiscal sobre intereses del 25 %. Se pide:

- Tasa de descuento aplicada a la operación.
- Tasa de rentabilidad pactada.

Solución:

- La tasa de descuento aplicada será la que iguale la cantidad pagada en $p = 0$, de 8.700 €, con la cantidad a recibir a los 10 meses de $3.000 \cdot 3 = 9.000$ €, por lo tanto:

$$8.700 = 9.000 (1 - d \cdot 10/12)$$

Operando, $d = 4$ % anual.

- La tasa de rentabilidad pactada será la que iguale los 8.700 € pagados en $p = 0$, con 9.000 € que recibirá a los 10 meses:

$$8.700 (1 + i \cdot 10/12) = 9.000$$

Operando, $i = 4,13$ % annual.

Actividad nº 25:

Una sociedad compra en Bolsa diez pagarés de la Diputación Foral de 5.000 € nominales al descuento del 9,5 % anual y a 360 días. A los 180 días vende los citados Pagarés ¿Cuál será el valor de venta si la rentabilidad que queremos obtener es del 10,5 % anual?

Solución:

- El coste de adquisición de un título al descuento es de:

$$E = 5.000 (1 - 0,095 \cdot 360/360) = 4.525 \text{ €}$$

Como adquiere 10 títulos invierte un total de: $4.525 \cdot 10 = 45.250$ €.

- El precio de venta será aquél que iguale al 10,5 % anual, la prestación de 45.250 €, y la contraprestación a los 180 días, que es el precio de venta, por lo tanto:

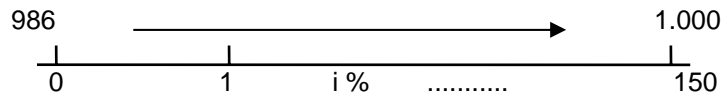
$$C' = 45.250 (1 + 0,105 \cdot 180/360) = 47.625,63 \text{ €}$$

Actividad nº 26:

Se compra el 14 de febrero una Letra del Tesoro a la que le quedan 150 días para su vencimiento a un precio de compra de 986 €. ¿Cuál será la rentabilidad al vencimiento?

Solución:

- Al ser la operación de menos de un año (150 días < año natural) la rentabilidad del comprador se calculará en régimen de simple:



$$986 (1 + i \cdot 150/360) = 1.000 \text{ operando } i = 3,41 \%$$

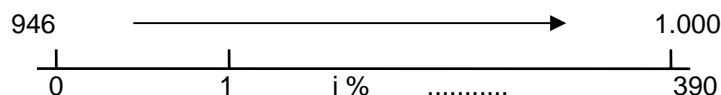
Actividad nº 27:

Se compra una Letra del Tesoro a la que le quedan 390 días para su vencimiento a un precio de 946 €. ¿Cuál será la rentabilidad al vencimiento?.

Y si 10 días antes del vencimiento se vende por 990 €, ¿cuál sería la rentabilidad de la operación?

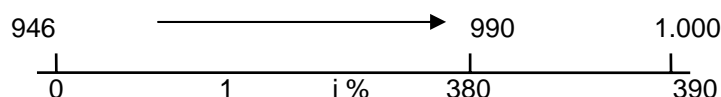
Solución:

- Al ser las dos operaciones de más de un año (390 días > año natural) la rentabilidad del comprador se calculará en régimen de compuesta. Al vencimiento la rentabilidad obtenida se obtendrá igualando el precio de compra con el valor de reembolso:



$$946 (1 + i)^{390/360} = 1.000 \text{ operando } i = 5,26 \%$$

- En el supuesto de la venta anticipada, igualamos lo pagado con lo cobrado para obtener la rentabilidad de la operación:



$$946 (1 + i)^{380/360} = 990 \text{ operando } i = 4,40 \%$$

Actividad nº 28:

El 15 de marzo se adquiere una Letra del Tesoro con pacto de recompra a los 30 días, a un precio de 930 € y acordando para la recompra un precio de 933 €. ¿Cuál será la rentabilidad de la operación?

Solución:

- La rentabilidad igualando el coste de compra con el precio de venta sería:

$$930 (1 + i \cdot 30/360) = 933 \text{ operando } i = 3,87 \%$$

Actividad nº 29:

Se compra en mercado secundario un pagaré de 1.000 € nominal de Telefónica, realizándose la operación con un tipo de descuento del 14 %. El pagaré vence a 180 días y los gastos ascienden al 1,5 ‰ del nominal. ¿Cuál será la liquidación efectuada y la rentabilidad obtenida?

Solución:

- El precio del título, sin gastos, será:

$$1.000 (1 - 0,14 \cdot 180/365) = 930,96 \text{ €}$$

- El precio del título, con gastos, será:

$$\text{Precio del pagaré} = 930,96 + 0,0015 \cdot 1.000 = 932,46 \text{ €}$$

- La rentabilidad obtenida en esta operación se obtendrá igualando lo pagado con lo recibido, por lo tanto:

$$932,46 (1 + i \cdot 180/365) = 1.000 \text{ operando } i = 14,69 \%$$

Actividad nº 30:

Una sociedad dispone de un excedente de tesorería cifrado en 100.000 €, para su optimización el director financiero adquiere Pagarés de 5.000 €. nominales con vencimiento dentro de un año y al descuento del 9 % anual. A los 45 días de su adquisición procede a su venta ingresando un total de 99.850 €. Se pide calcular el número de Pagarés comprados.

Solución:

- El número de Pagarés lo obtendremos dividiendo el dinero disponible entre el coste por Pagaré. El coste de un Pagaré será:

$$E = 5.000 (1 - 0,09 \cdot 1) = 4.550 \text{ € cada uno, por lo tanto}$$

$$100.000 \text{ €} : 4.550 \text{ €} = 21,97 \text{ títulos}$$

- Al salir inexacta la operación, y cómo dispone de un tope de 100.000 € habrá que efectuar un redondeo por defecto. Sólo podrá adquirir 21 títulos. Si pudiese aplicar más fondos redondearíamos al alza y adquiriría 22 títulos.

Actividad nº 31:

Una sociedad necesita financiación y para obtenerla pignora 1.000 acciones cuya cotización en estos momentos es de 12,25 €. El banco las acepta a pignoración al 90 %.

Se pide calcular ¿Cuál es la máxima cuantía a obtener como préstamo?

Solución:

- Importe máximo de préstamo a solicitar:

$$E_p = 1.000 \times 12,25 \times 0,9 = 11.025 \text{ €}$$

Actividad nº 32:

Una empresa obtiene un préstamo mediante la pignoración de 10 títulos de 1.000 € nominales siendo su cotización en estos momentos del 95 %. Se admiten a pignoración al 90 %, los gastos de formalización ascienden a 75 € y el corretaje es el 2 ‰. Si el préstamo es concedido a 120 días, al 10% de interés anual y la comisión bancaria es el 4 ‰, ¿Cuál será el préstamo concedido y el líquido obtenido? Utilizar el año comercial.

Solución:

- Importe del préstamo solicitado: Será el 90 % sobre el valor de cotización, por lo tanto:

$$E_p = 10 \cdot (1.000 \cdot 0,95) \cdot 0,90 = 8.550 \text{ €}$$

- Importe líquido obtenido, después de deducir todos los gastos de la operación y los intereses:

$$\text{Gastos: } 8.550 \cdot 0,004 + 8.550 \cdot 0,002 = 34,2 + 17,1 = 51,3 \text{ €}$$

$$\text{Intereses: } I = 8.550 \cdot 0,10 \cdot 120/360 = 285 \text{ €}$$

$$\text{Efectivo recibido: } 8.550 - 51,3 - 285 - 75 = 8.138,70 \text{ €}$$

Actividad nº 33:

Mediante la pignoración de 10.000 acciones cuya cotización es de 13,20 €, se obtiene el máximo préstamo que permite el cambio de pignoración del 80 %. La operación se concerta por tres meses a un tipo de interés del 10 % anual. Los gastos de formalización ascienden a 150 € y el corretaje es el 2,5 ‰, determinar:

- Préstamo concedido.
- Líquido obtenido.
- Número de títulos a aportar a los dos meses de concertada la operación si el cambio desciende hasta el cambio de reposición.
- En el caso de no mejorar la garantía, calcular el valor de la reducción del préstamo.

Solución:

- Importe del préstamo solicitado: Será el 80 % sobre el valor de cotización, por lo tanto:

$$E_p = 10.000 \cdot 13,20 \cdot 0,80 = 105.600 \text{ €}$$

- Importe líquido obtenido, después de deducir todos los gastos de la operación y los intereses:

$$\text{Gastos: } 105.600 \cdot 0,0025 = 264 \text{ €}$$

$$\text{Intereses: } I = 105.600 \cdot 0,10 \cdot 3/12 = 2.640 \text{ €}$$

$$\text{Efectivo recibido: } 105.600 - 264 - 2.640 - 150 = 102.546 \text{ €}$$

- Si la cotización ha descendido hasta el 90 % de lo que valían los títulos cuando se pignoraron, es decir ahora valen $0,9 \cdot 13,20 = 11,88 \text{ €}$ y se quiere seguir manteniendo el préstamo de 105.600 € se ha de aportar mayor número de títulos, una novena parte de los títulos inicialmente entregados:

$$E_p = n \cdot 11,88 \cdot 0,80 = 105.600 \text{ €}$$

operando $n = 11.111,11$ títulos que redondeando son 11.112 títulos como aportó 10.000 títulos, ha de complementar la operación con 1.112 nuevos títulos para mantener la operación.

- Si ahora se quiere seguir manteniendo como garantía los 10.000 títulos iniciales, deberemos reducir el préstamo:

$E_p = 10.000 \cdot 11,88 \cdot 0,80 = 95.040 \text{ €}$, que sería el préstamo que obtendríamos con las nuevas condiciones, por lo tanto debería reducirse en:

$$105.600 - 95.040 = 10.560 \text{ €}$$

$$270 \text{ €} \cdot 0,90 = 243 \text{ €, en total } 900 \text{ € solicitados.}$$

✓ Otros ejemplos de operaciones en el mercado.

Ya hemos estudiado operaciones que en el mercado financiero, especialmente el bancario, utilizan las leyes clásicas de capitalización (liquidación de cuentas corrientes y de crédito, etc.) y de descuento (facturas de descuento de papel o emisión de Letras del Tesoro, etc.), ahora vamos a analizar más que operaciones financieras, casos o situaciones que se dan en el mercado y en que se utilizan las leyes de capitalización simple para realizar sus cálculos, fundamentalmente en la liquidación de intereses.

Normalmente en estas operaciones se suele utilizar el denominado interés legal y el interés de demora que actualmente son los siguientes:

	INTERÉS LEGAL	INTERÉS DE DEMORA
AÑO 2008	5,500 %	7,000 %
AÑO 2007	5,000 %	6,250 %
AÑO 2006	4,000 %	5,000 %
AÑO 2005	4,000 %	5,000 %
AÑO 2004	3,750 %	4,750 %
AÑO 2003	4,250 %	5,500 %
AÑO 2002	4,205 %	5,500 %
AÑO 2001	5,500 %	6,500 %
AÑO 2000	4,250 %	5,500 %

El interés de demora se calcula sobre el importe no ingresado en el plazo establecido para el pago en periodo voluntario de una deuda resultante de una liquidación practicada por la Administración, o bien sobre el importe no ingresado en el plazo establecido para la presentación de una autoliquidación o declaración sin que hubiera sido presentada o hubiera sido presentada incorrectamente. (art. 26.2 LGT)

✗ Ejemplo de notificación de un juzgado, comprobar sus cálculos:

CREDIT LYONNAIS ESPAÑA
<p align="center">JUZGADO DE PRIMERA INSTANCIA Nº 2 DE MURCIA</p> <p>S/ref.: Ejecutivo 458/97</p> <p>ILMO Sr.:</p> <p>Por la presente le informamos que los intereses de demora devengados en el asunto referenciado asciende a 377,28 € (trescientos setenta y siete con veintiocho), que resultan de:</p> <p>Deuda reclamada en la demanda: 3.318,62 € Tipo de interés: 13,50 % Número de días transcurridos desde el día 24 de septiembre de 1996 (fecha de cierre de la cuenta, conforme documento nº 3 aportado con la demanda) hasta el día 30 de julio de 1997 (fecha de consignación): 309 días.</p> <p>$I = 3.318,62 \cdot 0,1350 \cdot 309/365 = 379,28 \text{ €}$</p> <p>En Murcia se expide el presente certificado</p>

- * Ejemplo de notificación de liquidación de intereses por parte de la Agencia Tributaria en contra de un sujeto pasivo, comprobar los datos:

AGENCIA TRIBUTARIA. Oficina de Gestión Tributaria Plaza La Montañeta 8 03001 ALICANTE.	Delegación de ALICANTE															
NOTIFICACIÓN DE LIQUIDACIÓN DE INTERES																
<p>ACUERDO:</p> <p>Debido a que se ha producido un retraso en el ingreso de su liquidación del Impuesto de Sociedades correspondiente al periodo 2001-2004, se acuerda el pago de intereses de demora generados en su contra, de conformidad con lo establecido en la normativa vigente.</p> <p>LIQUIDACIÓN DE INTERESES:</p> <p>Los intereses se han calculado aplicando el interés de demora, regulado en el artículo 58.2.c de la Ley General Tributaria y conforme al siguiente baremo:</p> <p>A partir de 01-01-2001 el 6,5 % anual A partir de 01-01-2002 el 5,5 % anual A partir de 01-01-2003 el 5,5 % anual A partir de 01-01-2004 el 4,75 % anual A partir de 01-01-2005 el 5 % anual</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: left;">Periodo</th> <th style="text-align: right;">Nº de días</th> <th style="text-align: right;">Importe</th> <th style="text-align: left;">Tipo de interés</th> <th style="text-align: right;">Intereses</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>30-01-2002 al 23-04-2005</td> <td style="text-align: right;">1.179</td> <td style="text-align: right;">21.401,18</td> <td style="text-align: center;">-</td> <td style="text-align: right;">3.608,00</td> </tr> <tr> <td>30-05-2003 al 23-04-2005</td> <td style="text-align: right;">814</td> <td style="text-align: right;">45.330,03</td> <td style="text-align: center;">-</td> <td style="text-align: right;">5.1489,00</td> </tr> </tbody> </table> <p>LIQUIDACIÓN:</p> <p>Cuota: 66.731,21 € Recargos: 0,00 € Intereses de demora: 8.757,00 €</p> <p>DEUDA A INGRESAR: 75.488,21 €</p> <p>El obligado tributario presta su conformidad a la propuesta de liquidación provisional que antecede extendiéndose su aceptación a los hechos recogidos en el acta y a todos los demás elementos determinantes de dicha liquidación.</p> <p>RECURSOS Y RECLAMACIONES</p>		Periodo	Nº de días	Importe	Tipo de interés	Intereses	30-01-2002 al 23-04-2005	1.179	21.401,18	-	3.608,00	30-05-2003 al 23-04-2005	814	45.330,03	-	5.1489,00
Periodo	Nº de días	Importe	Tipo de interés	Intereses												
30-01-2002 al 23-04-2005	1.179	21.401,18	-	3.608,00												
30-05-2003 al 23-04-2005	814	45.330,03	-	5.1489,00												

- * Ejemplo de notificación de liquidación de intereses por parte de la Agencia Tributaria a favor de un sujeto pasivo, comprobar los datos:

AGENCIA TRIBUTARIA. Oficina de Gestión Tributaria Plaza La Montañeta 8 03001 ALICANTE.	Delegación de ALICANTE			
NOTIFICACIÓN DE LIQUIDACIÓN DE INTERES				
ACUERDO: Debido a que se ha producido un retraso en la ordenación del pago de su devolución del Impuesto de Sociedades correspondiente al ejercicio 2000, se acuerda el abono de intereses de demora generados a su favor, de conformidad con lo establecido en la normativa vigente.				
LIQUIDACIÓN DE INTERESES: Los intereses se han calculado aplicando el interés de demora, regulado en el artículo 58.2.c de la Ley General Tributaria:				
Periodo 26-01-2002 al 22-05-2002 23-05-2002 al 23-05-2002	Nº de días 117 1	Importe 15.729,15 15.729,15	Tipo de interés 5,50 % 5,50 %	Intereses 277,31 2,37
RECURSOS Y RECLAMACIONES				

- * Ejemplo de liquidación de la cuenta que mantiene un empresario con la caja de su empresa (entendido como un préstamo personal), comprobando los datos:

FECHA	DEBE	HABER	SALDO	DÍAS	INTERESES
31/12/2003		0	0	23	- 0
23-01-2004	-	267,89	- 267,89	69	- 1,90
01-04-2004	-	66,00	- 333,89	16	- 0,55
17-04-2004	-	27,43	- 361,32	4	- 0,15
21-04-2004	-	13,84	- 375,16	0	- 0
21-04-2004	-	18.000	- 18.375,16	5	- 9,44
26-04-2004	-	30,37	- 18.405,53	2	- 3,78
28-04-2004	-	60,00	- 18.465,53	1	- 1,90
29-04-2004	-	111,87	- 18.577,40	4	- 7,63
03-05-2004	577,40	-	- 18.000	72	-133,15
14-07-2004	-	217,24	- 18.217,24	16	- 29,95
30-07-2004	-	2.000	- 20.217,24	102	- 211,87
09-11-2004	-	606	- 20.823,24	52	- 111,25
31-12-2004	-		- 20.823,24		- 0
SALDO FINAL	A 31/12/2004			366	- 511,56

✓ **Operaciones con leyes de descuento. Actividades propuestas.**

- 1.- Una sociedad realizó a BROTOSA una venta por la que giró seis efectos de 2.073,10 € cada uno y vencimientos mensuales, siendo el del primero el 20 de noviembre. El 21 de octubre procedió a su descuento. Las condiciones fueron: Interés del 6 % para efectos hasta 30 días, del 7 % para efectos entre 31 y 90 días y del 8 % para el resto. La comisión es de 3,60 € por efecto, los gastos de 0,30 € por efecto y el AJD de 0,96 € por efecto. Se pide calcular el efectivo obtenido.
- 2.- La sociedad **HERMA S.L.** realiza el 20 de octubre una venta por valor de 150.630 € (IVA incluido), la venta se documenta en dos efectos aceptados de 78.315 € cada uno y vencimientos el 20 de diciembre y el 20 de febrero del siguiente año. El día 25 de octubre procede su descuento a un interés del 10 % anual, con comisiones del 0,5 %, Gastos de correo de 0,35 € por efecto. Actos Jurídicos, 540 € por efecto. Se pide calcular el efectivo ingresado en cuenta.
- 3.- Una sociedad dispone de las siguientes letras, que procede hoy 13 de junio a su descuento: De 10.000 € con vencimiento el 14 de julio, de 15.000 € con vencimiento el 20 de agosto y de 8.000 € con vencimiento el 13 de octubre. El tipo de descuento es del 7 % anual, para efectos hasta 60 días, el 8 % anual para efectos entre 61 y 100 días y del 9 % anual para efectos a más de 100 días. La comisión es del 0,05 % del nominal y los gastos de 0,30 € por efecto. Se pide calcular el efectivo obtenido.
- 4.- Una sociedad dispone de los siguientes pagarés: Uno de 3.500 € y vencimiento a los 30 días, de 4.000 € y vencimiento a los 50 días, de 5.000 € y vencimiento a los 60 días y de 7.000 € y vencimiento a los 90 días. Para ajustar su tesorería los descuenta en su banco habitual que le cobra un interés del 7 %, con comisiones del 0,05 %, mínimo de 2 € y 0,60 € de correo. Se pide calcular el efectivo obtenido.
- 5.- Una sociedad dispone de las siguientes letras: Una de 4.000 € y vencimiento a los 30 días, de 5.000 € y vencimiento a los 60 días y de 6.000 € y vencimiento a los 90 días. Para ajustar su tesorería las descontará en su banco habitual a un interés del 7 %, con comisiones del 0,05 % y mínimo de 2 € y 0,60 € de correo. Se pide calcular el efectivo obtenido.
- 6.- Un cliente le debe a nuestra empresa 3.250 €, para su cobro se procede al giro de una letra con vencimiento a los 120 días y con todos los gastos a su cargo: Los intereses del descuento al 6 % anual, las comisiones del 0,08 % y correo de 0,6 €. Se pide calcular el nominal del efecto girado y efectivo obtenido tras el descuento.
- 7.- Una sociedad tiene en cartera los siguientes efectos: Dos letras de cambio, una de 25.000 € y vencimiento el 25/03 y otra 40.000 € con vencimiento el 30/06. Dos recibos uno de 12.000 € con vencimiento el 15/07 y otro 3.000 € y vencimiento el 30/8. Tres pagarés, el primero de 6.500 € con vencimiento el 20/5, otro 5.000 € con vencimiento el 30/4 y un tercero de 4.800 € y vencimiento el 30/3.

Hoy 1 de febrero la sociedad realiza el descuento de los anteriores efectos con las siguientes condiciones:

- Interés aplicado: El 9 % anual, para efectos a menos de 60 días y el 10 % para efectos a más de 60 días.
- Gastos de correo 0,5 €. por efecto
- Comisiones: 0,30 % para vencimientos inferiores a los 30 días, 0,45 % para vencimientos entre los 31 y 60 días y del 0,60 % para vencimientos a más de 61 días. (Mínimo 25 €.)
- Impuesto A.J.D. 1 % del nominal.

Se pide:

- a) Calcular el efectivo recibido en cuenta, detallando los distintos conceptos que aparecen en la correspondiente factura de descuento.
- b) Al vencimiento del recibo de 12.000 €, éste es impagado cargando el banco unos gastos de devolución de 20 €. ¿Cuál sería el nuevo nominal a girar con vencimiento a 90 días, si se incluyen en él todos los gastos que ocasionará su nuevo descuento y los de devolución?
- 8.- Una sociedad recibe dos ofertas por un inmueble que ha puesto a la venta:
- a) En la primera le ofrecen un pago al contado de 50.000 € y por el resto seis efectos de vencimiento trimestral y de 10.000 € nominales.
- b) Un pago al contado de 20.000 € y el resto en 12 efectos de vencimiento mensual y de un nominal de 7.500 €

Si la sociedad descuenta los efectos en una entidad que cobra un 10 % de descuento anual ¿Qué oferta escogerá?

- 9.- Una sociedad presenta la siguiente relación de albaranes, por las ventas realizadas:

13/11/2008	2.500 €
23/11/2008	5.000 €
30/11/2008	3.590 €
8/12/2008	1.800 €
15/12/2008	3.600 €
20/12/2008	680 €

La sociedad emite una sola factura con fecha 1 del mes siguiente al de los albaranes que se formaliza del siguiente modo: A los 60 días se cobrará en efectivo el 40 % de la deuda y por el resto se formalizan dos recibos iguales domiciliados con vencimientos a los 90 y 120 días comerciales desde la emisión.

La sociedad tiene una línea de descuento con un límite de 15.000 €, procediendo el 27 de enero del año 2009 al descuento de los citados recibos en las siguientes condiciones:

- Tipo de descuento del 8,25 % hasta 60 días y del 9,25 % a más de 60 días
- Comisiones del 0,7 ‰ hasta 60 días y del 0,8 ‰ a más de 60 días
- Correo 40 € por efecto y A.J.D. el 3 ‰ del nominal

Se pide detallar la factura de descuento.

- 10.-Una sociedad dispone en cartera de los siguientes efectos, que procede hoy 1 de mayo a su descuento:

- De 15.000 € nominales con vencimiento el 30 de mayo.
- De 18.000 € de nominal y vencimiento 16 de junio.
- De 10.000 € de nominal y vencimiento el 20 de junio y
- De 5.000 € nominales con vencimiento el 15 de julio.

Las condiciones de la operación de descuento son:

- El tipo de descuento aplicado es del 8 % anual, para efectos hasta 30 días, el 9 % anual para efectos entre 31 y 60 días y del 10 % anual para efectos a > 60 días.
- La comisión es del 0,5 % para efectos hasta 60 días y del 0,6 % para > 60 días.
- El A.J.D. es del 1 ‰ y los gastos de 0,40 € por efecto.

Se pide detallar la factura de descuento con el efectivo ingresado en cuenta.

- 11.-Una sociedad tiene, hoy 17 de noviembre, en su poder dos efectos que pretende descontar y cuyo detalle es el siguiente: Un efecto de 5.000 € de nominal y vencimiento el próximo 30 de diciembre y una letra de cambio de 4.000 € y vencimiento el próximo 28 de enero. Conoce las condiciones de descuento de dos entidades financieras que son:

- a.- El Banco César, le oferta una tasa de descuento única del 10 %, no cobra comisiones con A.J.D. de 135 € por efecto.
- b.- El Banco Augusto le oferta una tasa de descuento del 9 % para efectos hasta 60 días y el 9,5 % para efectos a más de 60 días. Comisiones del 0,5 ‰, con mínimo de 12 € y correo de 0,40 € y 67,5 € de A.J.D. por efecto.
- ¿Cuál es la entidad que le cobrará menos gastos?
- 12.-** Un señor dispone hoy de 150.000 € que desea invertir en Pagarés de Empresa. La emisión se efectuó al descuento del 3,5 % y vencimiento a los 180 días.
- a) ¿Cuál es el precio de compra de cada uno, si su nominal es de 6.000 €?
- b) ¿Cuántos podrá adquirir? ¿Cuál es la cuantía del recurso ocioso que se genera?
- c) Si a los 70 días de la compra por necesidades financieras decide proceder a la venta de las Letras que posee queriendo obtener una rentabilidad del 4 % en la operación ¿Cuál será el precio de venta de cada Letra?
- 13.-** Un señor dispone hoy de 10.000 € para invertir y ha decidido comprar activos financieros, su asesor le propone dos operaciones:
- Comprar Pagarés de 6.000 € nominales, a 120 días a un valor de compra de 5.920 €
 - Comprar Bonos de la Generalitat de 3.000 € nominales al descuento del 3,5 % y vencimiento a los 180 días.
- Se pide calcular ¿Cuántos títulos podrá adquirir en cada caso?. Si escogiese la inversión que menos recurso ocioso le generase ¿Cuál escogería?
- 14.-** Una sociedad ha emitido pagarés a seis meses de 5.000 € nominales, ofreciendo en su publicidad una rentabilidad del 11,5 %. Los gastos de comisión ascienden al 2 ‰, los de custodia al 1‰ y la retención fiscal del 25 %. Si un inversor adquiere un título. Calcular el precio de compra.
- 15.-** Un inversor procede a la compra de tres pagarés de 3.000 € nominales cada uno a 10 meses, abonando un total de 8.700 €. Se pide calcular la tasa de descuento aplicada a la operación y la tasa de rentabilidad pactada.
- 16.-** Se adquiere un Pagaré al descuento de 100.000 € nominales con vencimiento a los seis meses pagando por ellos 93.500 €. Se pide:
- El tipo de descuento aplicado en la operación.
 - Rentabilidad obtenida al vencimiento original de la operación.

✓ **Operaciones con leyes de capitalización. Actividades propuestas.**

- 1.- Determinar los intereses que le serán abonados al Sr. Pérez por su cuenta vivienda al 31 de diciembre, si el interés abonado es del 5 % anual y tuvo los siguientes movimientos y la retención a practicar es del 18 % de los rendimientos de capital:
 - El 30 de marzo ingresó 3.855 €
 - El 29 de junio ingresó 20.000 €
 - El 23 de agosto ingresó 2.000 €
 - El 14 de noviembre transfirió 3.500 €
 - El 17 de diciembre ingresó de 7.500 €

- 2.- Un banco ofrece a sus clientes jóvenes una cuenta que devenga un interés del 5 % sobre el saldo medio, con abono de intereses semestrales. Se pide liquidar la cuenta al 30 de junio. Los movimientos de la cuenta han sido:
 - El 8 de enero ingreso de 50 €
 - El 28 de enero ingreso de 100 €
 - El 13 de febrero reintegro de 60 €
 - El 28 de febrero reintegro de 10 €
 - El 13 de marzo ingreso de 20 €
 - El 10 de abril ingreso de 15 €
 - El 20 de abril reintegro de 30 €
 - El 20 de mayo ingreso de 10 €

- 3.- Se pide liquidar la siguiente cuenta de alta remuneración al 30 de junio, si tiene las siguientes características:
 - Franquicia de 2.500 €
 - Interés del 5 % anual para saldos superiores a la franquicia y del 0,1 % anual para saldos inferiores a la franquicia, con liquidación semestral de intereses.
 - Los gastos de mantenimiento ascienden a 0,1 € por cada apunte, siendo los cinco primeros gratuitos. Retención fiscal sobre intereses del 25 %.
 - Los movimientos de la cuenta han sido:
 - El 1 de enero el saldo anterior era de 1.500 €
 - El 17 de febrero ingresa de 5.500 €
 - El 23 de febrero reintegro de 250 €
 - El 21 de marzo pago de una compra por valor de 2.000 €
 - El 17 de abril ingreso de 1.900 €
 - El 20 de abril pago del recibo de la luz por importe de 650 €
 - El 12 de mayo pago de impuestos por valor de 1.250 €.
 - El 20 de mayo ingresa un cheque de 4.000 €
 - El 26 de mayo por diversos pagos dispone de 800 €
 - El 1 de junio ingresa 1.700 €.
 - El 20 de junio pago de un recibo por valor de 200 €

- 4.- Se pide liquidar la siguiente cuenta de alta remuneración, si tiene las siguientes características:
 - Franquicia de 3.000 €
 - Liquidación de intereses, el 31 marzo, sobre saldos medios según el siguiente detalle: Para saldos menores a 10.000 € el 3 %, para saldos entre 10.000 € y 30.000 € del 7 %, para saldos mayores de 30.000 € el 8 %.
 - Los gastos de administración ascienden a 5 € anuales.
 - La retención fiscal sobre intereses es del 25 %.
 - Los movimientos de la cuenta han sido:
 - El 2 de enero ingreso de 3.000 €
 - El 2 de febrero ingreso de 10.000 €
 - El 15 de marzo ingreso de 30.000 €

- 5.-** Una sociedad para hacer frente a sus problemas de liquidez inmediatos, concierta con su entidad bancaria la apertura de una cuenta de crédito el 30 de septiembre con un límite de 3.000 € a liquidar intereses el 31 de diciembre. El tipo de interés sobre saldos deudores será del 11 % anual, el de saldos acreedores del 0,2 % y sobre el exceso el 18 % anual. La comisión de apertura pagada en efectivo asciende a 1,5 €. Se pide liquidar la cuenta si sus movimientos han sido:
- o El 8/10 dispone en efectivo de 200 €
 - o El 20/10 cobra de un cliente 150 € que aplica a la cuenta.
 - o El 18/11 paga a un proveedor por valor de 250 €
 - o El 20/11 paga consumos diversos por valor de 100 €
 - o El 21/12 ingresa en la cuenta 230 €
- 6.-** Una sociedad concierta con su entidad bancaria la apertura de una cuenta de crédito el 1 de julio con un límite de 18.000 € a cancelar y liquidar intereses el 31 de diciembre. El tipo de interés sobre saldos deudores será del 12 % anual, el de saldos acreedores del 0,2 % y sobre el exceso el 20 % anual. Los gastos de apertura pagados por la cuenta son de 2 €. Se pide la liquidación de la cuenta sabiendo que sus movimientos han sido:
- El 13 de julio dispone en efectivo de 3.615 €
 - El 8 de agosto paga a un proveedor 7.230 €
 - El 23 de agosto cancela una deuda por valor de 9.036 €
 - El 12 de septiembre cobra de un cliente 6.025 € aplicándolos a la cuenta.
 - El 20 de septiembre ingresa en cuenta 3.012 €
 - El 10 de octubre paga a un proveedor 8.433 €
 - El 5 de noviembre ingresa por prestación de diversos servicios 3.614 €
 - El 25 de noviembre ingresa el cobro de un cliente por valor de 9.036 €
- 7.-** Se compra un coche cuyo coste es de 35.000 €, entregando el viejo que es valorado en 5.000 €, el resto se financiará a 12 meses con un recargo por aplazamiento del 1 % mensual. Se pide calcular la cuantía del pago mensual y el tipo de interés al que se habría valorado la operación.
- 8.-** Una sociedad efectúa la venta de una nave industrial por un valor de 3.500.000 € en las siguientes condiciones: Una entrada del 40 % y el resto mediante tres efectos del mismo importe y vencimiento dentro de 1, 2 y 3 meses. ¿Cuál será el valor mínimo del recargo por aplazamiento que estaría dispuesto a aceptar si tiene establecida una línea de descuento para sus efectos al 10 % de descuento anual sin gastos?.
- 9.-** Una tienda vende sus ordenadores en las siguientes condiciones: Una entrada del 20 % y el resto con 24 letras de vencimiento mensual con un recargo por aplazamiento del 0,5 % mensual. Un señor adquiere un equipo cuyo coste es de 800.000 €, lo que le ocasiona los siguientes gastos: Timbres de los efectos de 10 € por efecto, comisiones de 105 € y corretajes de 90 €. Se pide calcular la cuantía mensual a pagar, gastos incluidos en ellas, y la tasa efectiva de la operación.

CAPÍTULO 2º:

LAS LEYES COMPUESTAS

Dr D. Enrique R. Blanco Richart

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Conocer y utilizar las expresiones matemáticas de la ley de capitalización compuesta y de la ley de descuento compuesto.
- Conocer y utilizar la relación existente entre la ley de capitalización y la ley de descuento.
- Plantear correctamente una ecuación financiera identificando los capitales y su vencimiento, con cualquier punto de aplicación.
- Calcular la suma financiera de varios capitales distintos en cuantía y vencimiento.
- Calcular la suma financiera de varios capitales distintos en cuantía y vencimiento, valorados a distintos tipos de interés.
- Calcular la reserva matemática o saldo financiero de una operación.
- Distinguir entre interés nominal, interés fraccionado y el interés efectivo equivalente.
- Dado un tipo de interés nominal calcular cualquier tipo de interés efectivo.
- Dado un tipo de interés efectivo calcular cualquier tipo de interés fraccionado o el nominal equivalente.
- Elegir una operación financiera según su interés efectivo.

1.- LA CAPITALIZACIÓN COMPUESTA.

La característica fundamental de la capitalización compuesta, es que los intereses de un periodo se acumulan al capital para producir nuevos intereses en el periodo siguiente. Es decir los *intereses son productivos*.

La capitalización compuesta es una ley que se caracteriza porque las ecuaciones de equivalencia financiera no van a depender del punto p de aplicación, por lo tanto si se plantean con puntos p diferentes el resultado obtenido será el mismo, a diferencia de la capitalización simple donde la equivalencia sólo se cumplía en un punto p .

Si el factor de capitalización lo definiáramos en el capítulo segundo como el número por el que hay que multiplicar el capital al inicio de la operación ($t = 0$) para obtener el capital sustituto o equivalente al final de la operación ($p = n$), lo que vamos es a demostrar la expresión matemática que nos permita obtener dicho número.

Sea un capital unitario ($C = 1$), un intervalo temporal definido en $(0, n)$ y recordando que el interés (I) se obtiene multiplicando el capital por el rédito ($I = C \cdot i$) y que el montante es la suma del capital inicial más los intereses generados ($C_n = C_0 + I$), tendremos:

Capital al inicio de la operación:

$$C_0 = 1$$

Capital al final del primer periodo:

$$C_1 = C_0 + I_1 = 1 + (1 \cdot i) = 1 + i$$

Capital al final del segundo periodo: Hay que tener en cuenta que los intereses son productivos, por lo que el interés se calculará sobre el capital anterior C_1

$$C_2 = C_1 + I_2 = (1 + i) + (C_1 \cdot i) = (1 + i) + (1 + i) \cdot i \quad \text{sacando factor común a } (1 + i)$$

$$C_2 = (1 + i)(1 + i) = (1 + i)^2$$

Capital al final del tercer periodo:

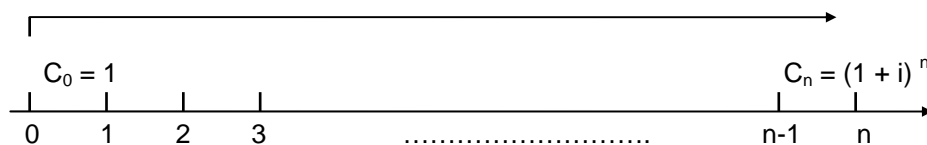
$$C_3 = C_2 + I_3 = (1 + i)^2 + (C_2 \cdot i) = (1 + i)^2 + (1 + i)^2 \cdot i \quad \text{sacando factor común}$$

$$C_3 = (1 + i)^2(1 + i) = (1 + i)^3$$

Generalizando

Capital al final del periodo n , sería: $C_n = (1 + i)^n$

Que es el valor final que se obtiene al invertir una unidad monetaria a un tanto unitario de interés i , para n periodos. La representación gráfica de la operación sería:



A la expresión $(1 + i)^n$ se le denomina **FACTOR DE CAPITALIZACIÓN COMPUESTA**, que nos permite trasladar un capital desde un momento dado a otro posterior y obtener así su equivalente.

✓ El Montante y el Interés.

El montante es el capital final, la suma del capital inicial más los intereses generados entre 0 y n . Se obtendrá multiplicando el capital inicial C_0 por el factor de capitalización $(1 + i)^n$.

$$C_n = C_0 (1 + i)^n$$

El interés, que es el capital que nos muestra la variación experimentada por un capital al pasar de 0 a n , se obtendrá por diferencia entre el montante (C_n), capital final, y el capital inicial (C_0).

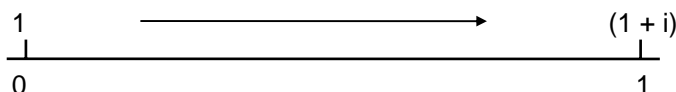
$$I = C_n - C_0$$

Los intereses en capitalización compuesta no son *proporcionales* al número de periodos de capitalización.

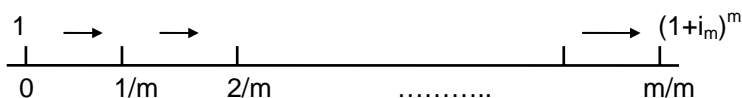
✓ Los tantos equivalentes.

Son los que surgen al comparar entre sí dos procesos de capitalización distintos. Financieramente se dirá que dos tantos son equivalentes en capitalización compuesta, cuando aplicados al mismo intervalo temporal proporcionan idéntico resultado.

Sea un rédito i , asociado a un periodo de amplitud unitario y un capital de cuantía unitaria, el montante de dicho capital al final del periodo será:



Si ahora el intervalo unitario anterior, se fracciona en m subintervalos de amplitud $1:m$ cada uno, y se asocia a cada subintervalo un rédito i_m , el capital al final del periodo sería:



Para que ambos réditos sean equivalentes se ha de cumplir que el valor del capital unitario al final del periodo sea el mismo:

$$(1 + i) = (1 + i_m)^m$$

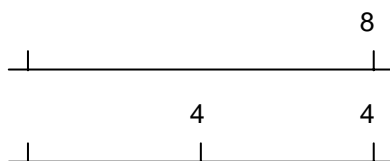
En la práctica real en una operación financiera la unidad temporal suele venir expresada en años, pero también es frecuente que se trabaje con periodos fraccionados del año: Meses, semestres, trimestres, etc. por lo que al realizar una operación se efectúan generalmente dos pactos:

- 1.- Se pacta el tanto de referencia a aplicar a la operación, es decir el tanto con el que se van a calcular los intereses.
- 2.- Se pactan los vencimientos de los capitales a entregar: Anuales, semestrales, etc.

El **tanto pactado** de referencia es el denominado **Tanto nominal de la operación** que se designa con J_m , si este tanto de referencia, expresado normalmente en anual, no coincide con los vencimientos de los capitales a entregar, es cuando surge la problemática de los tantos y así tendremos:

- El tanto nominal J_m o tanto de referencia pactado.
- El tanto fraccionado i_m o tanto a aplicar a cada subperiodo, cuando existe fraccionamiento de los pagos respecto al tanto pactado o tanto nominal.
- El tanto efectivo i o tanto equivalente de la operación, que mide el coste o rendimiento real de la operación motivado por los fraccionamientos.

Si en una operación se pacta un tipo de interés del 8 % anual, y se ofrecen dos alternativas de pago: Anual y semestralmente. El coste real de la operación es diferente en cada uno de los casos debido a la anticipación de los capitales basándonos en el principio de subestimación de capitales:



- En el primer caso los 8 € a pagar al final del año están en nuestro poder, por lo que podemos gastarlos, prestarlos o invertirlos, sacando un rendimiento con ellos hasta el final del año.
- En el segundo caso sólo podemos disponer todo el año de 4 € puesto que los otros hay que pagarlos antes, con lo que dejamos de disponer de ellos durante medio año perdiendo la posibilidad de invertirlos, gastarlos o prestarlos. Esto nos supondrá un coste que puede ser medido financieramente a través del tanto efectivo i de la operación.
- Esto supone, a modo de conclusión, que a mayor fraccionamiento de los pagos o de los cobros mayor coste o rentabilidad de la operación.

✓ Relación entre los tantos.

Establecidos los distintos tantos que aparecen en una operación financiera, vamos a establecer las relaciones entre ellos:

- **Relación entre el tanto nominal J_m y el tanto fraccionado i_m :**

El tanto nominal es la suma aritmética de los tantos de cada subperiodo, es decir:

$$J_m = i_m \cdot m$$

Es por lo tanto proporcional al del subperiodo y en consecuencia actúa como un tanto en capitalización simple, tal como se explicó en el capítulo 2. Conocido el tanto nominal pactado podemos obtener el tanto asociado a cada subintervalo:

$$i_m = \frac{J_m}{m}$$

- **Relación entre el tanto fraccionado i_m y el efectivo equivalente i :**

Será la relación establecida anteriormente, es decir son aquellos que producirán el mismo montante aplicado sobre el mismo capital en el mismo periodo de tiempo. Por lo tanto nos va a medir la variación, financieramente hablando, que se origina al fraccionar los pagos.

$$(1 + i) = (1 + i_m)^m$$

Establecidas todas estas relaciones podemos comprobar que ahora seremos capaces de establecer todo tipo de relaciones entre las leyes simples y compuestas y entre sus tantos ya que conocido el tanto a aplicar a un subperiodo i_m podemos conocer de forma inmediata su equivalente en capitalización simple, que es el tanto nominal J_m o su equivalente en capitalización compuesta, que es el tanto efectivo i .

Veamos algunos ejemplos:

- 1.- En una operación de préstamo se ha pactado un tanto anual del 12 %, con pagos trimestrales. Calcular el tanto efectivo anual equivalente.

- El tanto pactado es del 12 % anual.
- Los pagos pactados son trimestrales, por lo que respecto al tanto pactado, $m = 4$.

Conocidas las expresiones de su relación, calcularemos los tantos pedidos:

- El tanto trimestral es: $i_m = 12 \% : 4 = 3 \%$, que será el tanto a pagar cada trimestre.
- El tanto anual efectivo: $i = (1 + 0,03)^4 - 1 = 0,12550881$, es decir del 12,550881 %, que es el coste real de la operación por el adelantamiento trimestral de los pagos.

Es decir pagar de una sola vez supone el desembolso de los 12 € al finalizar el año, y pagar cuatro veces desembolsando cada una de ellos 3 €, al estar efectuando un adelantamiento de los pagos dejamos de percibir los posibles beneficios de su inversión, por lo que supondrá un coste negativo que se cuantifica con el tanto anual efectivo.

2.- Se ha pactado una inversión por la que recibiremos un interés del 6 % semestral, pero pagadero mensualmente. Calcular el tanto nominal anual y el tanto efectivo anual equivalente.

- El tanto pactado es del 6 % semestral.
- Los pagos pactados son mensuales, por lo que respecto al tanto pactado, $m = 6$.

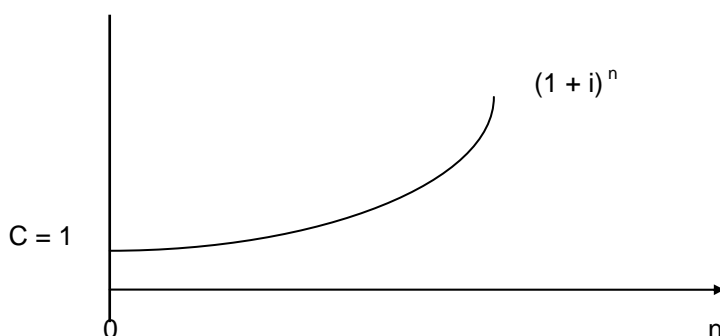
Conocidas las expresiones de su relación, calcularemos el tanto mensual y el resto de tantos:

- El tanto mensual es del $i_m = 6 \% : 6 = 1 \%$.
- El tanto anual equivalente para $m = 12$: $i = (1 + 0,01)^{12} - 1 = 0,126825$, es decir el 12,6825 % anual.
- El tanto nominal anual para $m = 12$ sería: $J_m = 0,01 \cdot 12 = 0,12$ es decir del 12 % anual.

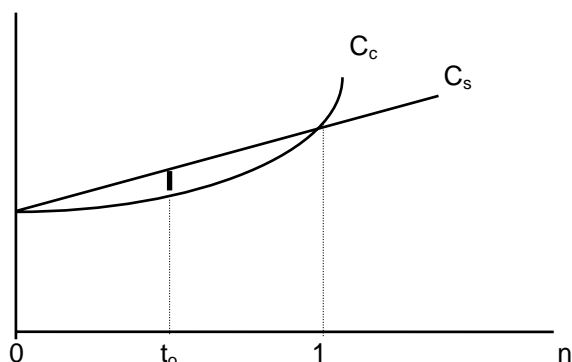
Si recibiésemos al finalizar el año todos los intereses juntos recibiríamos 12 €, pero como se van a recibir mensualmente, este dinero adelantado podemos invertirlo a su vez lo que nos dará un rendimiento en la operación superior, este rendimiento lo refleja el 12,6825 %.

✓ Comparación entre la capitalización simple y compuesta.

En la capitalización compuesta, el factor de capitalización $(1 + i)^n$, es una función exponencial, cuya representación gráfica será una curva mayor que la unidad y creciente:



Sabiendo que el montante en capitalización simple es $C_n = C_0 (1 + i \cdot n)$ y cuya representación gráfica es una recta creciente y que en capitalización compuesta el montante es $C_n = C_0 (1 + i)^n$ y su representación gráfica es una curva creciente, tendremos para $C_0 = 1$.



Comprobamos que para valores $n < 1$, la capitalización simple produce montantes mayores que la simple, siendo el punto t_0 la máxima diferencia. En cambio para valores $n > 1$, es la compuesta la que produce mayores montantes y para el caso en que $n = 1$, ambas producen montantes iguales.

2.- EL DESCUENTO COMPUESTO.

Al igual que lo explicado en la capitalización compuesta, es característica fundamental del sistema la *productividad de los intereses*.

El descuento compuesto es también una ley multiplicativa, estacionaria y unificable de infinitas soluciones cuyas características son las ya explicadas para la capitalización.

Su expresión matemática se obtendrá del mismo modo que en el caso de la capitalización y al rédito de la operación se le designará con d , que es el *tanto anticipado* de la operación, frente a i que era el *tanto postpagable* de la operación.

$$C_0 = (1 - d)^n$$

Esta expresión es el *FACTOR DE DESCUENTO COMPUESTO*, que nos permite trasladar un capital desde un momento dado a otro anterior y obtener su equivalente.

✓ Relación entre capitalización y descuento compuesto.

Ya sabemos que los parámetros d e i , no son idénticos, porque aunque ambos se utilizan para el cálculo del interés, éste no lo realizan en el mismo momento del tiempo, ya que i lo realiza al final de un periodo, d lo realiza al principio del periodo.

Al igual que hicimos en simple, existe una relación entre ambas leyes y se demuestra del mismo modo:

- Operación de capitalización: Para $C_n = 1$, el capital al inicio de la operación sería:

$$C_n = C_0 (1 + i)^n, \text{ sustituyendo } C_n \text{ y despejando } C_0$$

$$C_0 = 1 \cdot (1 + i)^{-n} = (1 + i)^{-n}$$

- Operación de descuento: El valor actual de una peseta sería $C_0 = 1 \cdot (1 - d)^n = (1 - d)^n$

$$\text{Igualando los valores actuales: } (1 - d)^n = (1 + i)^{-n}$$

Tomando raíces enésimas:

$$\sqrt[n]{(1-d)^n} = \sqrt[n]{(1+i)^{-n}}$$

Operando $(1-d) = (1+i)^{-1}$

De donde:

- **i** en función de **d**: $i = \frac{d}{1-d}$
- **d** en función de **i**: $d = \frac{i}{1+i}$

Es importante resaltar en las anteriores expresiones que la equivalencia entre los tantos no depende del parámetro **n**, como sucedía en las operaciones simples. es decir de la duración de la operación, con lo que se vuelve a corroborar la característica fundamental de las leyes multiplicativas, que la equivalencia de capitales no depende del punto de valoración.

3.- EJERCICIOS PRÁCTICOS.

✓ La problemática de los tantos: Actividades resueltas.

A través de los ejemplos planteados tenemos que comprobar que la relación entre los tantos no va a presentar ninguna dificultad. Es decir se pretende que las dos relaciones fundamentales, de nominal a efectivo y viceversa se utilicen con soltura y más cuando en la vida real, aunque de forma más simple, esta relación se utiliza constantemente.

Actividad nº 1:

Se desea conocer cuál es el tanto efectivo anual i equivalente, a cada uno de los casos propuestos:

- a.- Del 8 % anual capitalizable mensualmente.
- b.- Del 8 % anual pagadero anualmente.
- c.- Del 8 % anual simple capitalizable mensualmente.
- d.- Del 8 % efectivo anual capitalizable semestralmente.
- e.- Del 10 % bienal capitalizable trimestralmente.
- f.- Del 6 % semestral capitalizable mensualmente.
- g.- Del 5 % semestral capitalizable trimestralmente.
- h.- Del 3 % trimestral capitalizable mensualmente.
- i.- Del 24 % trienal capitalizable anualmente.
- j.- Del 12 % bienal capitalizable semestralmente.

Solución:

a.- El tanto pactado es el 8 % anual, el número de pagos es $m = 12$, por lo tanto:

El tanto mensual: $i_m = 0,08 : 12 = 0,0066666$.

El anual equivalente i , para $m = 12$, al utilizar el pagadero mensual:

$$(1 + i) = (1 + 0,006666) ^{12}, \text{ de donde } i = 8,2999507 \ \%.$$

b.- Al ser el tanto pactado igual que el pago pactado, ya es directamente el tanto efectivo i .

c.- El tanto pactado es el 8 % anual, el número de pagos es $m = 12$, por lo tanto:

El tanto mensual: $i_m = 0,08 : 12 = 0,0066666$

El anual equivalente i , para $m = 12$, al utilizar el mensual:

$$(1 + i) = (1 + 0,006666) ^{12}, \text{ de donde } i = 8,2999507 \ \%$$

d.- Como dice que el tanto es el efectivo ya se ha tenido en cuenta la forma del pago, por lo que $i = 8 \ \%$.

e.- El tanto pactado es el 10 % bienal, el número de pagos es $m = 8$, por lo tanto:

El tanto trimestral: $i_m = 0,10 : 8 = 0,0125$.

El anual equivalente i , para $m = 4$, al utilizar el pagadero del trimestral:

$$(1 + i) = (1 + 0,0125) ^4, \text{ de donde } i = 5,0945336 \ \%$$

f.- El tanto pactado es el 6 % semestral, el número de pagos es $m = 6$, por lo tanto:

El tanto mensual: $i_m = 0,06 : 6 = 0,01$.

El anual equivalente i , para $m = 12$.

$$(1 + i) = (1 + 0,01) ^{12}, \text{ de donde } i = 12,6825030 \ \%$$

g.- El tanto pactado es el 5 % semestral, el número de pagos $m = 2$, por lo tanto:

El tanto trimestral: $i_m = 0,05 : 2 = 0,025$.

El anual equivalente i , para $m = 4$.

$$(1 + i) = (1 + 0,025)^4 \text{ de donde } i = 10,381289 \%$$

h.- El tanto pactado es el 3 % trimestral, el número de pagos $m = 3$, por lo tanto:

El tanto mensual: $i_m = 0,03 : 3 = 0,01$.

El anual equivalente i , para $m = 12$.

$$(1 + i) = (1 + 0,01)^{12}, \text{ de donde } i = 12,682503 \%$$

i.- El tanto pactado es el 24 % trienal, el número de pagos $m = 3$, por lo tanto:

El tanto anual: $i_m = 0,24 : 3 = 0,08$.

El anual equivalente i es el calculado del 8 %.

j.- El tanto pactado es el 12 % bienal, el número de pagos $m = 4$, por lo tanto:

El tanto semestral: $i_m = 0,12 : 4 = 0,03$.

El anual equivalente i , para $m = 2$.

$$(1 + i) = (1 + 0,03)^2 \text{ de donde } i = 6,09 \%$$

Actividad nº 2:

Se desea conocer para cada uno de los casos propuestos a continuación cuál es el tanto efectivo de descuento anual d equivalente:

a.- Del 6 % de descuento semestral.

b.- Del 3 % trimestral, actualizable mensualmente.

c.- Del 12 % anual actualizable bimestralmente.

d.- Del 8 % de descuento anual simple.

e.- Del 6 % semestral actualizable mensualmente.

Solución:

a.- El tanto pactado es el 6 % semestral, al no decir nada más ya es tanto fraccionado d_m

El tanto anual para $m = 2$:

$$(1 - d) = (1 - 0,06)^2, \text{ de donde } d = 11,64 \%$$

b.- El tanto pactado es el 3 % trimestral, el número de pagos $m = 3$, por lo tanto:

El tanto mensual: $d_m = 0,03 : 3 = 0,01$.

El anual equivalente d , para $m = 12$.

$$(1 - d) = (1 - 0,01)^{12}, \text{ de donde } d = 11,361512 \%$$

c.- El tanto pactado es el 12 % anual, el número de pagos $m = 6$, por lo tanto:

El tanto bimensual: $d_m = 0,12 : 6 = 0,02$.

El anual equivalente d , para $m = 6$.

$$(1 - d) = (1 - 0,02)^6, \text{ de donde } d = 11,415762 \%$$

d.- El tanto pactado es el 8 % anual, pero como en el año el tanto simple y compuesto coinciden, ya es directamente el tanto d , al no pactar pagos distintos al tanto dado.

e.- El tanto pactado es el 6 % semestral, el número de pagos $m = 6$, por lo tanto:

El tanto mensual: $d_m = 0,06 : 6 = 0,01$.

El anual equivalente d , para $m = 12$.

$$(1 - d) = (1 - 0,01)^{12}, \text{ de donde } d = 11,361512 \text{ \%.}$$

Actividad nº 3:

Una sociedad dispone en estos momentos de un excedente de tesorería de 20.000 € que son invertidos en una entidad que le abona unos intereses del 3 % trimestral simple en los próximos 3 años.

¿Cuál será el tanto anual que en compuesta le han de ofrecer para que la operación le resulte indiferente?.

Solución:

Hemos de buscar un tanto de capitalización compuesta que aplicado a los 20 millones y a un plazo de 3 años dé el mismo montante. Por lo tanto calculamos el montante en régimen de capitalización simple para un periodo de 3 años que son 12 trimestres, para igualar el tanto y el tiempo:

$$C_n = 20.000 (1 + 0,03 \cdot 12) = 27.200 \text{ €}$$

Este montante es el que queremos obtener en capitalización compuesta para que la operación se indiferente, por lo tanto para un periodo de tres años, el tanto será:

$$27.200 = 20.000 (1 + i)^3$$

Operando, $i = 10,793165 \text{ \% anual.}$

Actividad nº 4:

Una sociedad tiene sus actuales excedentes de tesorería invertidos del siguiente modo:

- a.- 45.000 € a plazo fijo que le devenga un interés del 7,5 % anual con capitalizaciones mensuales.
- b.- 75.000 € en una Cédula a un tanto de descuento del 10 % anual con actualizaciones semestrales.
- c.- 88.500 € en una Letra del Tesoro al 7,15 % de descuento anual.
- d.- 50.000 € en títulos que le reportan un interés trimestral del 2 %.

¿Cuál de las inversiones es más rentable?. Si decidiese retirar todas las inversiones y colocarlas en una única entidad a un año ¿Cuál debería ser el interés que tendría que recibir para que la inversión le resultase indiferente?.

Solución:

Procederemos a calcular el tanto i equivalente a cada caso y escogiendo aquella inversión que produzca mayor rentabilidad:

- El tanto pactado es el 7,5 % anual, el número de pagos $m = 12$, por lo tanto:
El tanto mensual: $i_m = 0,075 : 12 = 0,00625$.
El anual equivalente i , para $m = 12$.

$$(1 + i) = (1 + 0,00625)^{12} \text{ de donde } i = 7,763259 \text{ \%.}$$

- El tanto pactado es el 10 % anual, el número de pagos $m = 2$, por lo tanto:

El tanto semestral: $d_m = 0,10 : 2 = 0,05$.

El anual d equivalente, para $m = 2$.

$$(1 - d) = (1 - 0,05)^2 \text{ de donde } d = 9,75 \%$$

$$\text{El anual } i \text{ equivalente, } i = \frac{0,0975}{1 - 0,0975} = 10,803324 \%$$

- El tanto dado ya es efectivo al no pactar pagos diferentes a él, luego bastará con calcular el i equivalente:

$$\text{El anual } i \text{ equivalente, } i = \frac{0,0715}{1 - 0,0715} = 7,700592 \%$$

- Ya tenemos el interés trimestral al no pactar pagos distintos a él.
El anual equivalente sería para $m = 4$.

$$(1 + i) = (1 + 0,02)^4, \text{ de donde } i = 8,243216 \%$$

La opción más rentable es la 2

El interés a recibir será aquél que le reporte el mismo montante que los dados para que así le resulte indiferente. Por lo tanto la suma total de su inversión única, será la suma de las parciales: $45.000 + 75.000 + 88.500 + 50.000 = 258.500 \text{ €}$

$$45.000 (1 + 0,07763259) + 75.000 (1 + 0,10803324) + 88.500 (1 + 0,07700592)$$

$$+ 50.000 (1 + 0,08243216) = 258.500 (1 + i)$$

Operando $i = 8,716669 \%$ anual.

Actividad nº 5:

Una sociedad tiene un excedente de tesorería de 20.000.000 € y tres alternativas de inversión, deseando saber cuál es la más rentable:

- 1.- Invertir en Pagarés de empresa a un tanto anual compuesto del 9 % con actualizaciones semestrales
- 2.- Comprar dos Pagarés a dos años y al descuento compuesto, siendo sus nominales de 12.209.639 €

Solución:

Calcularemos la tasa de rentabilidad de cada caso y escogeremos aquella que sea más alta:

- 1.- El tanto pactado es el 9 % anual, el número de pagos $m = 2$, por lo tanto:

El tanto semestral: $d_m = 0,09 : 2 = 0,045$.

El anual d equivalente, para $m = 2$.

$$(1 - d) = (1 - 0,045)^2, \text{ de donde } d = 8,7975 \%$$

El anual i equivalente, $i = \frac{0,087975}{1 - 0,087975} = 9,646117 \%$.

2.- Si disponemos de 20.000.000 € en el momento 0 y los nominales ascienden a $12.209.639 \cdot 2 = 24.419.278$ €, en el momento 2, el tanto de interés que iguala ambos capitales será:

$$20.000.000 (1 + i)^2 = 24.419.278$$

Operando $i = 10,497235 \%$.

Actividad nº 6:

Una sociedad tiene el siguiente paquete conjunto de inversiones:

- a) Imponer 5.000.000 € en una cuenta al 6 % semestral con capitalizaciones bimestrales
- b) Imponer 10 millones en una cuenta al 10 % anual con pago de intereses semestrales
- c) Con el resto realizar una inversión a un interés trimestral del 2,75 %

Calcular el tanto medio de la inversión.

Solución:

- Primero calcularemos los tantos efectivos de cada una de las operaciones y después el tanto medio del conjunto de ellas, para así obtener un tanto único a comparar con los de las dos inversiones anteriores:
- El tanto pactado es el 6 % semestral, el número de pagos $m = 3$, por lo tanto:
El tanto bimensual: $i_m = 0,06 : 3 = 0,02$.
El anual equivalente i , para $m = 6$.

$$(1 + i) = (1 + 0,02)^6, \text{ de donde } i = 12,616241 \%$$

- El tanto pactado es el 10 % anual, el número de pagos $m = 2$, por lo tanto:

El tanto semestral: $i_m = 0,10 : 2 = 0,05$.
El anual equivalente i , para $m = 2$.

$$(1 + i) = (1 + 0,05)^2, \text{ de donde } i = 10,25 \%$$

- Conociendo el tanto trimestral $i_m = 2,75 \%$, el tanto anual para $m = 4$

$$(1 + i) = (1 + 0,0275)^4, \text{ de donde } i = 11,462125 \%$$

El tanto medio para la inversión única de 20.000.000 €, sería:

$$5.000.000 (1 + 0,12616241) + 10.000.000 (1 + 0,1025) + 5.000.000 (1 + 0,11462125) = 20.000.000 (1 + i)$$

Operando $i = 11,144591 \%$.

✓ **Planteamientos generales: Actividades resueltas.**

Realización de ejercicios sobre las cuestiones generales. Cálculo del montante y valor actual de un capital, cálculo del interés, del tiempo, etc. El trabajo con operaciones valoradas a más de un tanto, etc. Comprobaremos que los movimientos de capital y las ecuaciones de equivalencia son más fáciles de resolver en compuesta que en simple al no depender de un punto de aplicación concreto, es decir podremos utilizar el punto de valoración más cómodo a la hora de plantear a la equivalencia financiera.

Actividad nº 7:

Resolver las siguientes cuestiones:

- a.- ¿Durante cuánto tiempo estuvo invertido un capital de 2.450.000 €, si colocado al 6 % anual produjo unos intereses de 1.937.596,8 €?
- b.- ¿A qué tanto se impusieron 685.000 €, si en ocho años se convirtieron en 974.139 €?
- c.- ¿Qué capital colocado al 6 % anual durante doce años produjo 404.878,56 € de interés?
- d.- ¿Qué tiempo ha de pasar para que un capital colocado al 8 % de interés se triplique?

Solución:

- a.- Si aplicamos directamente la fórmula del montante, habrá que calcular éste como la suma del capital inicial más los intereses generados en la operación, por lo que:

$$C_n = C_0 + I = 2.450.000 + 1.937.596,8 = 4.387.596,86 \text{ €}$$

Sustituyendo en la expresión general del montante:

$$4.387.596,86 = 2.450.000 (1 + 0,06)^n$$

Operando	$(1 + 0,06)^n = 1,79084769$
Tomando logaritmos	$n \cdot \log (1 + 0,06) = \log 1,79084769$
De donde	$n = 10 \text{ años}$

- b.- Aplicando directamente la fórmula del montante: $974.139 = 685.000 (1 + i)^8$

$$\text{Operando } 1,42210073 = (1 + i)^8$$

Tomando raíces, $i = 4,5 \%$

- c.- Sabiendo que el capital final, $C_n = C_0 + I = C_0 + 404.878,56$ y sustituyendo en la expresión general del montante:

$$C_0 + 404.878,56 = C_0 (1 + 0,06)^{12}$$

$$\text{Operando, } C_0 = 400.000 \text{ €}$$

- d.- En este caso el montante ha de ser $C_n = 3 \cdot C_0$, por lo que sustituyendo en la expresión del montante

$$3 C_0 = C_0 (1 + 0,08)^n \quad \text{eliminando } C_0$$

$$3 = (1 + 0,08)^n$$

$$\log 3 = n \cdot \log 1,08$$

$$n = 14,274913 \text{ años, es decir}$$

tomando logaritmos
operando

La parte entera son 14 años, con el resto calculamos los meses, de 0,274913 años \cdot 12 meses = 3,288956 la parte entera son meses, y con el nuevo resto calculamos los días, de 0,288956 \cdot 30 = 8,96. Con lo que el tiempo exacto será de 14 años, 3 meses y 9 días.

Actividad nº 8:

Resolver las siguientes cuestiones:

- a.- Calcular el valor actual de un capital de 650.000 € si se anticipó 18 meses, valorando la operación a un tanto de descuento del 3,5 % trimestral. Calcular los intereses anticipados.
- b.- El descuento de un capital que se anticipó quince meses fue de 12.683,5 €. Calcular la cuantía del capital descontado y su valor actual si la operación se realizó al 8 % anual de descuento.

Solución:

- 1.- Expresando el tiempo en la misma unidad que el tanto: $18 : 3 = 6$ trimestres y planteando la ecuación general del valor actual tendremos:

$$C_0 = 650.000 (1 - 0,035)^6 = 524.901 \text{ €}$$

Los intereses serán la diferencia entre el capital final y el inicial:

$$D = 650.000 - 524.901 = 125.099 \text{ €}$$

- 2.- Si el valor actual es $C_0 = C_n - D$, y sustituimos en la expresión general

$$C_n - D = C_n (1 - d)^n \quad \text{sustituyendo, para un tiempo anual de } 15/12 \text{ y operando}$$

$$C_n - 12.683,5 = C_n (1 - 0,08)^{15/12} = 128.143 \text{ €}$$

Y el valor actual será de:

$$C_0 = C_n - C_0 = 128.143 - 12.683,5 = 115.459,5 \text{ €}$$

Actividad nº 9:

Calcular los intereses generados por un capital de 1.000.000 € colocado durante cinco años a un tanto de interés del 5 % semestral. Determinar el tanto efectivo anual que permita obtener el mismo resultado en el mismo periodo de tiempo y el tanto anual que permita en el mismo tiempo duplicar los intereses obtenidos.

Solución:

- El montante para, $5 \cdot 2 = 10$ semestres, de 1.000.000 € valoradas al 5 % semestral, será:

$$C_n = 1.000.000 (1 + 0,05)^{10} = 1.628.894,62 \text{ €}$$

- Los intereses son: $I = C_n - C_0 = 1.628.894,62 - 1.000.000 = 628.894,62 \text{ €}$
- El tanto anual equivalente para obtener el mismo resultado se obtendría:

- O buscando directamente la equivalencia de tantos, en función del semestral del 5 %:

$$i = (1 + 0,05)^2 - 1 = 0,1025, \text{ el } 10,25 \% \text{ anual.}$$

- O buscando la equivalencia con los capitales:

$$1.628.894,62 = 1.000.000 (1 + i)^5$$

Operando, $i = 10,25 \% \text{ anual}$

- El tipo de interés a aplicar en el mismo periodo y capital, para que obtenga unos intereses dobles sería:

Intereses a obtener: $628.894,62 \cdot 2 = 1.257.789,24 \text{ €}$

El montante final será: $1.000.000 + 1.257.789,24 = 2.257.789,24 \text{ €}$

Por lo tanto el interés equivalente sería el que igualase el capital de 1.000.000 € con el anterior montante:

$$2.257.789,24 = 1.000.000 (1 + i)^5$$

Operando, $i = 17,6892 \% \text{ anual}$

Actividad nº 10:

Calcular el montante de un capital de 350.000 €, si se impuso al 6 % anual en los cinco primeros años, al 7 % en los tres siguientes y al 7,25 % en los dos últimos. ¿Cuál ha sido el tanto medio?

Solución:

- El gráfico de la operación sería:



Estamos de nuevo ante el producto financiero, en este caso de tres leyes por lo que:

$$C_n = 350.000 (1 + 0,06)^5 (1 + 0,07)^3 (1 + 0,0725)^2 = 659.999 \text{ €}$$

- El tanto medio será aquel que aplicado sobre 350.000 € dé en 10 años un total de 659.999 €

$$659.999 = 350.000 (1 + i)^{10}$$

Operando, $i = 6,548545 \% \text{ anual}$

✓ **La sustitución de capitales: Actividades resueltas.**

Vamos a realizar ejercicios que nos permitan obtener capitales que sean suma de otros dados, o dividir un capital en otros equivalentes, etc. La principal diferencia con las operaciones simples es que las leyes compuestas, cumplen la equivalencia en cualquier punto p.

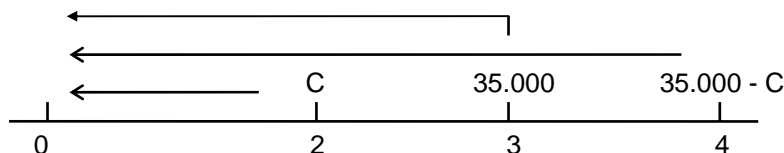
Actividad nº 11:

Hay que pagar 35.000 € dentro de tres años, pero se acuerda su liquidación mediante dos pagos dentro de dos y de cuatro años. Si la operación se valora al 6 % de interés anual. ¿Cuál es la cuantía de los pagos?

Solución:

Como tendríamos dos incógnitas, procederemos igual que hicimos en las operaciones simples, es decir buscar la solución media, es decir buscamos dos capitales. Por lo tanto un pago será de cuantía C y el otro tendrá una cuantía de (35.000 - C). Como la suma financiera no depende del punto p de valoración, vamos a resolver el problema con distintos punto p de aplicación y comprobar que el resultado no cambia (misma solución unificable).

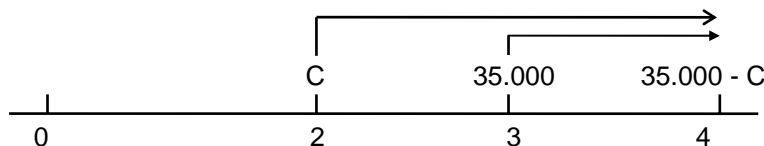
- Con punto p de aplicación en 0:



$$35.000 (1 + 0,06)^{-3} = C (1 + 0,06)^{-2} + (35.000 - C) (1 + 0,06)^{-4} \text{ operando}$$

$$C = 16.990,29 \text{ € y el otro capital, el resto, } 35.000 - 16.990,29 = 18.009,71 \text{ €}$$

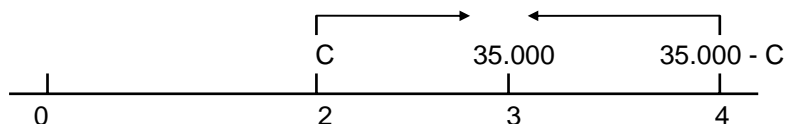
- Con punto p de aplicación en 4:



$$35.000 (1 + 0,06)^1 = C (1 + 0,06)^2 + (35.000 - C)$$

$$C = 16.990,29 \text{ € y el otro capital, el resto, } 35.000 - 16.990,29 = 18.009,71 \text{ €}$$

- Con punto p de aplicación en 3:



$$35.000 = C (1 + 0,06)^1 + (35.000 - C) (1 + 0,06)^{-1}$$

$$C = 16.990,29 \text{ € y el otro capital, el resto, } 35.000 - 16.990,29 = 18.009,71 \text{ €}$$

Con lo que comprobamos que la suma financiera de capitales en capitalización compuesta coincide con el capital unificado.

Actividad nº 12:

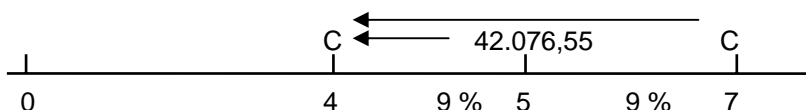
Se nos había concedido un préstamo de 30.000 € para devolver dentro de cinco años con un interés del 7 % anual. Acordamos con el banco sustituir el pago único por dos iguales y vencimientos dentro de cuatro y siete años, pero valorando la operación al 9 % de interés anual. Se pide calcular la cuantía de los pagos para que no exista lesión de intereses.

Solución:

En este caso la vieja operación valorada al 7 % anual será sustituida por otra pero valorada al 9 % de interés anual. Para que no exista lesión de intereses se ha de mantener la equivalencia financiera de lo que se iba a pagar con lo que se va a pagar ahora en la nueva condición.

- Si valorásemos la operación en el punto $p = 4$: Calcularemos el importe del capital a entregar para la devolución del préstamo y éste será el importe a sustituir:

$$30.000 (1 + 0,07)^5 = 42.076,55 \text{ €}$$



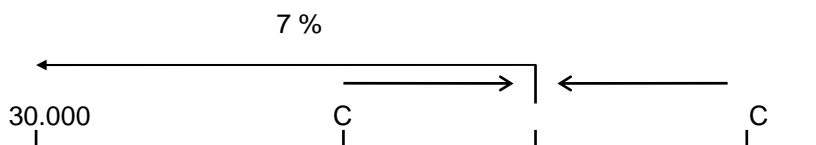
Valorando en $p = 4$, al nuevo tipo de interés tendremos:

$$42.076,55 (1 + 0,09)^{-1} = C + C (1 + 0,09)^{-3}$$

$$\text{Operando, } C = 21.782,36 \text{ €}$$

- Si valorásemos la operación en el punto $p = 0$:

Comprobamos en el gráfico que al trasladar el primer capital a (0) se mezclan dos tantos, en el periodo de 4 a 5, para resolver el problema llevaremos el nuevo capital al vencimiento original con el 9 % (5) y desde allí a (0) con el viejo tipo de interés:



0 4 9 % 5 9 % 7

$$30.000 = C (1 + 0,09)^1 (1 + 0,07)^{-5} + C (1 + 0,07)^{-5} (1 + 0,09)^{-2}$$

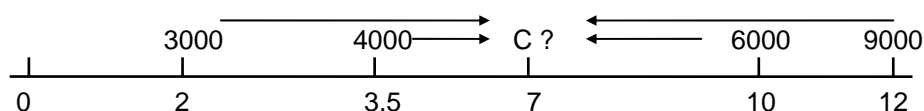
Operando, $C = 21.782,36 \text{ €}$

Actividad nº 13:

Calcular la cuantía a pagar por la devolución en el 7º año, de los siguientes capitales: 3.000 € con vencimiento en el año dos, 4.000 € con vencimiento en tres años y seis meses, 6.000 € con vencimiento en el año diez y 9.000 € a pagar en el año doce, si la operación se valora al 8 % anual.

Solución:

- El esquema de la operación sería:



- La ecuación de equivalencia con $p = 7$, será:

$$C = 3.000 (1 + 0,08)^5 + 4.000 (1 + 0,08)^3 (1 + 0,08)^{6/12} + 6.000 (1 + 0,08)^{-3} + 9.000 (1 + 0,08)^{-5}$$

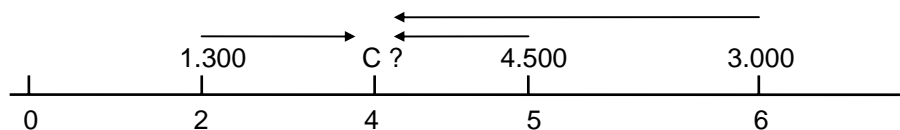
Operando, $C = 20.532,75 \text{ €}$

Actividad nº 14:

Se quieren liquidar las siguientes deudas, mediante un único pago dentro de cuatro años valorando la operación al 7 % de interés anual: 1.300 € a pagar en el año dos, 4.500 € a pagar en el año cinco y 3.000 € a pagar en el año seis. Calcular la cuantía del único pago a efectuar.

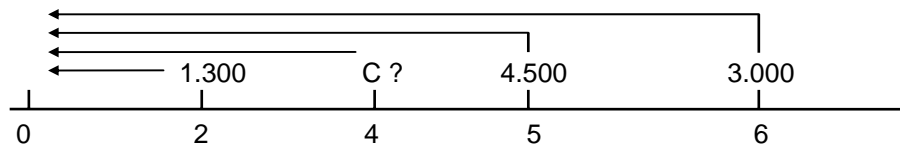
Solución:

- El esquema de la operación será con $p = 4$:



$$C = 1.300 (1 + 0,07)^2 + 4.500 (1 + 0,07)^{-1} + 3.000 (1 + 0,07)^{-2} = 8.314,29 \text{ €}$$

- Si valorásemos en $p = 0$, tendríamos:



$$C (1 + 0,07)^{-4} = 1.300 (1 + 0,07)^{-2} + 4.500 (1 + 0,07)^{-5} + 3.000 (1 + 0,07)^{-6}$$

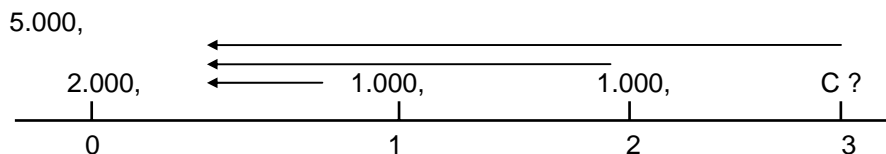
Operando, $C = 8.314,29 \text{ €}$

Actividad nº 15:

Comparamos una máquina cuyo coste al contado es de 5.000.000 €, entregando al contado 2.000.000 € y el resto mediante tres pagos, el primero y el segundo de 1.000.000 € con vencimientos dentro de uno y dos años. Si el vencimiento del tercer pago es dentro de tres años ¿Cuál es su cuantía, si se valora la operación al 6,5 % anual?

Solución:

- La cuantía del tercer pago será aquella que mantenga la equivalencia financiera entre la prestación (el valor de la máquina), y las contraprestaciones, (los pagos). Por lo tanto valorando en 0:



$$5.000.000 = 2.000.000 + 1.000.000 (1 + 0,065)^{-1} + 1.000.000 (1 + 0,065)^{-2} + C (1 + 0,065)^{-3}$$

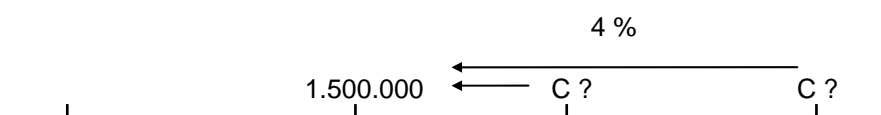
Operando, $C = 1.424.624 \text{ €}$

Actividad nº 16:

Por la devolución de un préstamo, concedido al 3 % de interés, hemos de entregar dentro de tres años 1.500.000 €. Se acuerda con el prestamista devolverlo en dos pagos iguales con vencimientos dentro de cuatro y cinco años, pero subiendo el interés un punto. ¿Cuál será la cuantía de los pagos?

Solución:

- La representación gráfica sería:



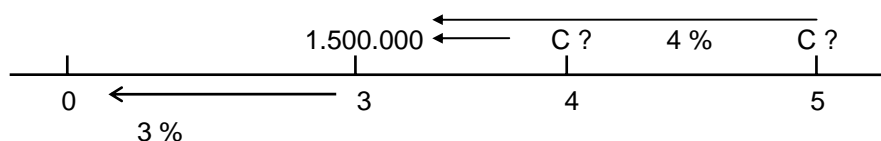
0 3 4 5

- Valorando la operación en $p = 3$:

$$1.500.000 = C (1 + 0,04)^{-1} + C (1 + 0,04)^{-2}$$

Operando, $C = 795.294 \text{ €}$

- Si hubiésemos valorado en $p = 0$: Habrá que llevar la deuda original a 0, con su tanto y los nuevos pagos los llevaremos al vencimiento original ($p = 3$) con el nuevo interés y desde allí a 0 con el viejo tipo de interés, como ya hicimos en el problema nº 2:



$$1.500.000 (1 + 0,03)^{-3} = C (1 + 0,04)^{-1} (1 + 0,03)^{-3} + C (1 + 0,04)^{-2} (1 + 0,03)^{-3}$$

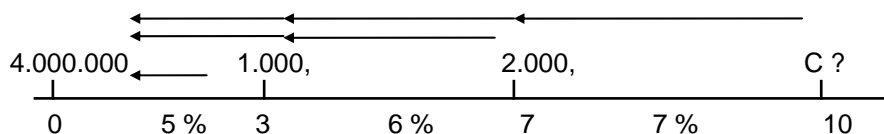
Operando, $C = 795.294 \text{ €}$

Actividad nº 17:

Un préstamo de 4.000.000 € ha de ser devuelto en tres pagos, el primero por un importe de 1.000.000 € a pagar dentro de tres años, el segundo de 2.000.000 € a pagar dentro de siete años y el tercero a pagar dentro de diez años, si los tipos de interés acordados son del 5 % en los tres primeros años, del 6 % en los cuatro siguientes y del 7 % en los tres últimos ¿Cuál será la cuantía del tercer pago ?

Solución:

- El esquema de la operación es:



- La ecuación financiera será la que iguale la prestación de cuatro millones con las contraprestaciones:

$$4.000.000 = 1.000.000 (1 + 0,05)^{-3} + 2.000.000 (1 + 0,05)^{-3} (1 + 0,06)^{-4} + C (1 + 0,05)^{-3} (1 + 0,06)^{-4} (1 + 0,07)^{-3}$$

Operando, $C = 3.164.804 \text{ €}$

✓ **Capitalización compuesta: Actividades propuestas.**

- 1.- Se desea conocer cuál es el tanto efectivo anual i equivalente:
 - a.- Del 6 % nominal anual pagadero mensualmente.
 - b.- Del 8 % efectivo anual.
 - c.- Del 4 % efectivo semestral.
 - d.- Del 10 % bienal pagadero semestralmente.
 - e.- Del 6 % anual pagadero semestralmente.

- 2.- Se desea conocer el tanto efectivo i equivalente:
 - a.- Del 2 % trimestral.
 - b.- Del 8 % efectivo anual pagadero semestralmente.
 - c.- Del 1,5 % de descuento trimestral.
 - d.- Del 4 % semestral.
 - e.- Del 8 % anual pagadero semestralmente.

- 3.- Se desea conocer cuál es el tanto efectivo anual i equivalente:
 - Del 2 % bimestral capitalizable mensualmente.
 - Del 6 % semestral capitalizable trimestralmente.
 - Del 3 % trimestral capitalizable mensualmente.
 - Del 4 % bienal capitalizable semestralmente
 - Del 2 % mensual.

- 4.- Compramos una máquina cuyo coste al contado es de 900.000 €, entregando al contado 200.000 € y el resto mediante cuatro pagos, el primero de 200.000 €, con vencimiento dentro de 3 meses, el segundo de 100.000 € con vencimiento dentro de 7 meses, el tercero de 100.000 € y vencimiento dentro de 12 meses, y el último con vencimiento a los 18 meses. ¿Cuál es la cuantía del último pago, si se valora la operación al 4 % anual? ¿Cuál es la cuantía de la deuda pendiente en el octavo mes?

- 5.- Se ha realizado una inversión de 45.000 €, a 14 meses, concertando con la entidad financiera los siguientes intereses: Del 3 % semestral en los cinco primeros meses, del 1 % mensual en los siete siguientes y del 5 % anual en los restantes. Se pide calcular el montante que recibirá al final de la inversión.

- 6.- Se ha obtenido un préstamo de 30.000 €, a devolver mediante un pago único dentro de 18 meses, valorado a un interés del 6 % nominal pagadero mensualmente. Pero se acuerda con el prestamista devolverlo en dos pagos uno de 1.500.000 € con vencimiento dentro de 20 meses y otro con vencimiento a los 24 meses, pero subiendo el interés al 7 % efectivo anual ¿Cuál será la cuantía del segundo pago?

- 7.- Una entidad dispone de un efectivo de 8.000.000 € y con él quiere realizar una inversión a dos años. Las opciones que tiene son las siguientes: Comprar 10 Pagarés de 1.000.000 € al descuento compuesto o prestarlos para ser devueltos en el plazo de dos años, a un interés nominal del 10,5 % capitalizable por semestres. ¿Cuál de las alternativas es mejor?

- 8.- Una entidad dispone de un efectivo de 3.000.000 € y su asesor le ofrece: Invertirlo en una cuenta de ahorro a un interés del 3 % trimestral. Adquirir una Letra al 8 % anual de descuento o depositarlo en una cuenta al 7,75 % anual con pago trimestral de intereses. ¿Cuál es la opción que ha de escoger ?

- 9.- Calcular el montante de un capital de 150.000 €, si se valora al 6 % anual en los cinco primeros años y al 4 % semestral en los dos siguientes

CAPÍTULO 5°:

LAS RENTAS CONSTANTES

Dr D. Enrique R. Blanco Richart

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Conocer las condiciones que ha de cumplir una operación financiera para poder utilizar las expresiones matemáticas de las rentas.
- Identificar la duración de una renta y número de términos.
- Clasificación de las rentas.
- Diferenciar entre un vencimiento anticipada de uno vencida.
- Plantear correctamente una ecuación financiera identificando los distintos tipos de renta y su valor actual o final.
- Identificar cuando el valor actual de una renta no coincide con el inicio de una operación.
- Identificar cuando el valor final de una renta no coincide con el valor final de la operación.
- Reconocer cuándo una operación financiera está compuesta por más de una renta.
- Reconocer en el caso anterior donde están situados los valores actuales o finales de las diferentes rentas.
- Calcular la suma financiera de varias rentas que conforman una única operación financiera.
- Calcular la reserva matemática o saldo financiero de una operación formada por una o más de una renta.
- Desglosar una operación financiera en varias rentas y sumarlas. (Solución disociativa)
- Calcular el capital anual equivalente cuando una renta está formada por capitales irregulares en cuantía, vencimiento o ambos. (Solución asociativa)
- Interpretar correctamente el significado de un valor de n inexacto.

1.- Concepto de una renta financiera:

En la vida cotidiana nos encontramos con multitud de situaciones en que se cobran o se pagan cantidades con vencimientos sucesivos en el tiempo: El alquiler de una vivienda, el salario de un empleado, los plazos por la compra del coche, etc., este tipo de operaciones, que son las que vamos a analizar en le presente capítulo, se denominan rentas.

Las rentas financieras las podemos definir como una sucesión de capitales con vencimientos sucesivos, es decir es una distribución de capitales en el intervalo $(0, n)$ donde a cada subintervalo se asocia un capital.

Hasta ahora las operaciones financieras con las que hemos trabajado no se componían de un número excesivo de capitales, por lo que los cálculos no se hacían excesivamente engorrosos. Pero avanzando en el estudio de las operaciones financieras nos vamos a encontrar con situaciones en que la contraprestación suele estar constituida por multitud de capitales (Un préstamo a devolver en cinco años con pagos mensuales, supone una contraprestación de 60 capitales, etc.) por lo que aplicando lo que sabemos hasta ahora haría extremadamente dificultoso el trabajo. Por lo tanto lo que realmente vamos a analizar y estudiar en el presente capítulo es la búsqueda de una forma de cálculo lo más abreviada posible que permita de una forma muy sencilla trabajar con multitud de capitales a la vez y conocer su suma en un punto determinado. Para poder buscar esas expresiones abreviadas, a la definición de renta habrá que ponerle unas condiciones que ha de cumplir para poder operar, lo que además será coincidente con lo que en la vida cotidiana se produce:

- 1.- Los capitales que integran la operación han de ser iguales, y si son variables la variación ha de ser conocida.
- 2.- Que los periodos de vencimiento de los capitales han de ser equidistantes, es decir que tengan el mismo vencimiento, mensual, anual, etc.

2.- Elementos de una renta financiera:

- *El término:* Es la cuantía de cada capital.
- *El periodo de vencimiento:* Son los subintervalos o espacios de tiempo a los que se asocia un capital, el mes, el trimestre, etc.
- *La duración de la operación:* Es la diferencia entre el origen de la operación y su final, es decir, la amplitud del intervalo que hemos definido como $(0, n)$.
- *La duración de la renta.* La duración de la renta engloba el número de capitales que vamos a sumar pudiendo coincidir o no con la duración de la operación.
- *La ley financiera utilizada:* Generalmente ley de capitalización compuesta al ser operaciones de duración a más de un año.
- *El valor actual:* Es la suma en el origen de la operación de todos los capitales que integran la renta.
- *El valor final:* Es la suma en el final de la operación de todos los capitales que integran la renta.

3.- Clasificación de las rentas financieras:

Las rentas se pueden clasificar en función de los elementos que intervienen:

1.- Según la definición de sus términos:

- Renta cierta: Cuando los términos de la renta y su duración son conocidos.
- Renta aleatoria: Cuando algunos de los anteriores elementos no es conocido.

2.- Según la cuantía de los términos:

- Renta constante: Cuando la cuantía de los capitales es siempre la misma.
- Renta variable: Cuando la cuantía de los capitales no es siempre la misma.

3.- Según su vencimiento:

- Renta anticipada o prepagable: Cuando sus términos vencen al principio de cada periodo. O dicho de otro modo, si el inicio de la operación coincide con el vencimiento de un capital.
- Renta vencida o postpagable: Cuando sus términos vencen al final de cada periodo. O dicho de otro modo, que desde el inicio de la operación hasta el vencimiento de un capital transcurre un periodo.

4.- Según su duración:

- Renta temporal: Cuando la duración es finita.
- Renta perpetua o indefinida: Cuando la duración es infinita.

5.- Según el punto de valoración:

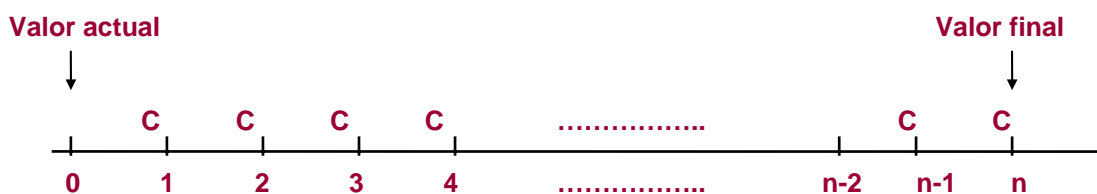
- Renta inmediata: Cuando el inicio o final de la operación financiera coincide con el inicio o final de la renta.
- Renta no inmediata: Cuando el inicio de la operación es anterior al inicio de la renta o cuando el final de la operación es posterior al final de la renta.

4.- Propiedades de las rentas financieras:

- 1.- Respecto al punto de valoración: Las rentas pueden ser valoradas en cualquier punto.
- 2.- Propiedad asociativa: Dos o más rentas pueden ser sustituidas por una única equivalente a las anteriores. En la práctica significará que rentas con distintas pautas de funcionamiento o rentas formadas por varias rentas, pueden calcularse de forma separada y después sumarse o podemos asociar capitales distintos para formar una renta con propiedades conocidas.
- 3.- Propiedad disociativa: Una renta puede ser desdoblada y obtener varias rentas equivalentes a la original. En la práctica permitirá que rentas variables puedan ser convertidas en varias rentas constantes.

5.- Representación gráfica:

• Representación de una renta vencida (postpagable):



Como podemos comprobar desde el inicio de la operación hasta el vencimiento del primer capital ha transcurrido un periodo completo. (Ejemplo, obtenemos un préstamo el 1 de enero y el primer pago se realiza el 31 de enero).

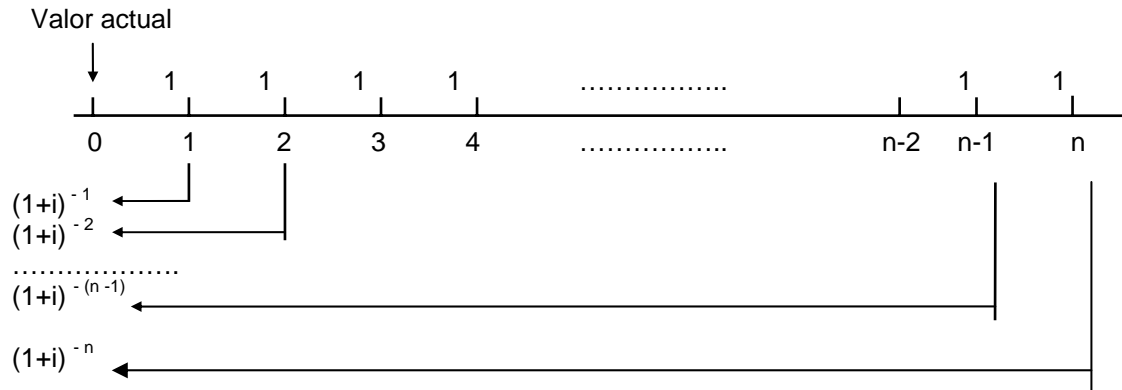
• Representación de una renta anticipada (prepagable):



Como podemos comprobar en el inicio de la operación ya vence el primer capital. (Ejemplo, iniciamos una operación de ahorro el 1 de enero, con el ingreso del primer depósito).

6.- El valor actual de una renta unitaria y vencida (postpagable).

Vamos a calcular la forma abreviada de obtener el capital suma al principio de la operación de una renta de cuantía unitaria que vence al final de cada periodo, durante n periodos. Para ello llevaremos todos los capitales unitarios al principio de la operación mediante el factor de contracapitalización. Su representación gráfica será:



Sumamos todos los valores para obtener el capital suma que será el valor actual:

$$V_a = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \dots + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n}$$

Sacando factor común a $(1+i)^{-1}$

$$V_a = (1+i)^{-1} [1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \dots + (1+i)^{-n+2} + (1+i)^{-n+1}]$$

Dentro del corchete se ha formado una progresión geométrica decreciente de n términos, siendo el primer término 1 , el último $(1+i)^{-n+1}$ y la razón $(1+i)^{-1}$. Sustituyendo estos valores en la expresión matemática de la suma de los n términos de una progresión geométrica decreciente, sabiendo que dicha expresión es:

$$S = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1 - r} \quad \text{sustituyendo tendremos}$$

$$V_a = (1+i)^{-1} \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n+1} \cdot (1+i)^{-1}}{1 - (1+i)^{-1}} \quad \text{operando las potencias del numerador,}$$

Positivando el denominador y operándolo:

$$V_a = (1+i)^{-1} \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{1 - \frac{1}{(1+i)^1}} = (1+i)^{-1} \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{\frac{1+i-1}{(1+i)}} =$$

$$= (1+i)^{-1} \cdot (1+i) \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

$$V_a = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

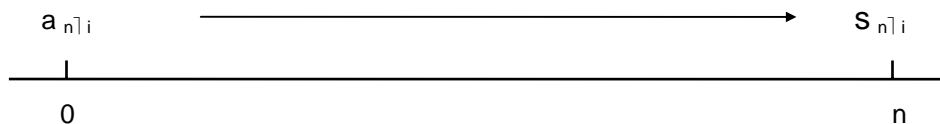
Esta expresión se representará con el símbolo $a_{n|i}$

Que representará a la expresión matemática del valor actual de una renta unitaria, es decir que con esta expresión podemos obtener de forma rápida la suma de n capitales unitarios. Si queremos obtener la suma de n capitales de cuantía C , bastará con multiplicar la expresión por la cuantía del capital:

$$V_a = C \cdot a_{n|i}$$

7.- El valor final de una renta unitaria y vencida.

Ahora vamos a calcular la forma abreviada de obtener el capital suma al final de la operación de una renta de cuantía unitaria que vence al final de cada periodo, durante n periodos. Para ello en vez de realizar otra demostración partiremos de la relación existente entre un capital en (0) y su equivalente en (n):



Bastará con capitalizar el capital inicial $a_{n|i}$ para obtener el capital final $S_{n|i}$:

$$S_{n|i} = a_{n|i} (1+i)^n \quad \text{sustituyendo a}_{n|i} \text{ por su expresión matemática y operando}$$

$$S_{n|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \cdot (1+i)^n \quad \text{operando}$$

$$S_{n|i} = \frac{(1+i)^n - (1+i)^{-n}(1+i)^n}{i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

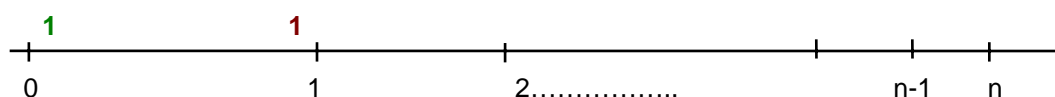
$$V_f = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \text{Expresión que se representará con el símbolo } S_{n|i}$$

8.- El valor actual y final de una renta unitaria y anticipada (prepagable).

Bastará con multiplicar cualquiera de las dos expresiones anteriores por el factor $(1+i)^n$

$$\ddot{a}_{n|i} = a_{n|i} (1+i)$$

$$S_{n|i} = C \cdot S_{n|i} (1+i)$$



La explicación financiera es sencilla, si la renta anticipada o anticipada está formada por capitales que vencen al principio del periodo (**1**) y la vencida o vencida por capitales que vencen al final del periodo (**1**), sabemos por el Principio de Subestimación de capitales futuros, que es mejor un capital presente que uno futuro, es decir vale más un euro hoy que un euro al final del periodo. Dicho de otra forma la renta anticipada dará siempre un resultado mayor que la vencida ya que el euro colocado al comienzo del periodo produce desde ese momento intereses, por lo que la diferencia entre ambos valores actuales serán los intereses de un periodo es decir $(1+i)$.

9.- El valor actual de una renta unitaria y perpetua (anticipada).

Como en este caso una renta es perpetua, indefinida o vitalicia, cuando la duración no es posible determinarla podemos demostrar su fórmula mediante el límite del valor actual de una renta vencida cuando n tiende a infinito:

$$a_{\infty|i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = \frac{1}{i}$$

Por lo tanto:
$$a_{\infty|i} = C \cdot \frac{1}{i}$$

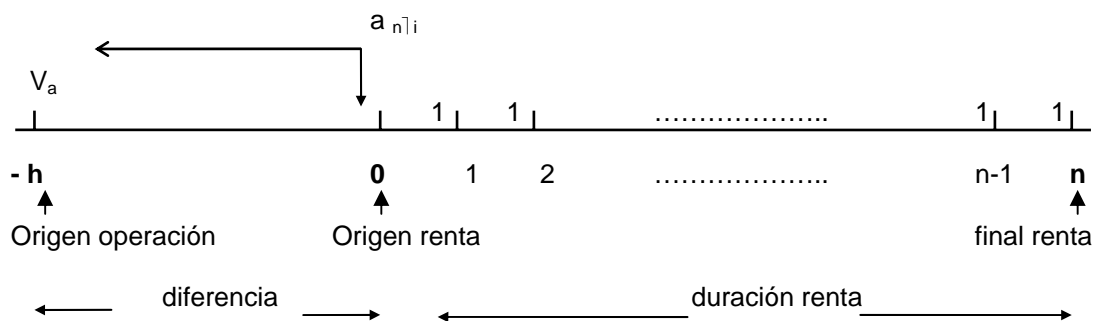
Como conocemos la relación entre el valor de una renta vencida y una anticipada, tendremos que el valor actual de una renta perpetua anticipada sería el de la vencida capitalizado un periodo:

$$\ddot{a}_{\infty|i} = \frac{1}{i} \cdot (1+i)$$

10.- El valor de una renta no inmediata.

Como ya dijimos en la clasificación podemos encontrarnos dos casos:

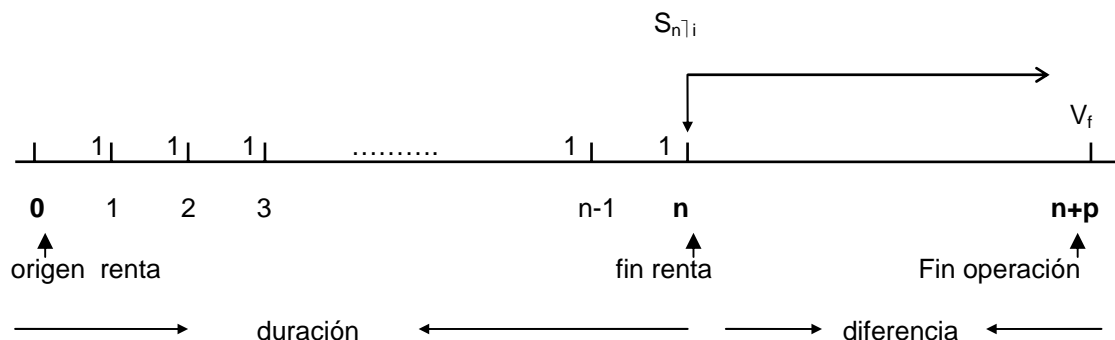
- 1º.-** Que el inicio de la operación es anterior al inicio de la renta, por lo tanto habrá que actualizar la renta para que coincida con el inicio de la operación. como por ejemplo cuando compramos hoy algo y empezamos a pagarlo dentro de seis meses Su representación gráfica sería:



Como podemos comprobar en el gráfico el valor actual de la operación está h periodos antes que el inicio (valor actual) de la renta, por lo tanto bastará con actualizar la renta h periodos para obtener el valor buscado, multiplicando por $(1+i)^{-h}$.

- Por lo tanto para una renta vencida: $V_a = C \cdot a_{n|i} (1+i)^{-h}$
- Para una renta anticipada: $V_a = C \cdot \ddot{a}_{n|i} (1+i)^{-h}$
- Para una renta perpetua vencida: $V_a = C \cdot \frac{1}{i} (1+i)^{-h}$
- Para una renta perpetua anticipada: $V_a = C \cdot \frac{1}{i} (1+i) (1+i)^{-h}$

- 2º.-** Cuando el final de la operación es posterior al final de la renta, como por ejemplo que dejamos de realizar imposiciones en un plan de ahorro y los dejamos en el banco para retirarlo más tarde. Por lo tanto habrá que capitalizar la renta para hacerla coincidir con el final de la operación. Su representación gráfica sería:



Como podemos comprobar en el gráfico el valor final de la operación está p periodos después del valor final de la renta, por lo tanto bastará capitalizar la renta p periodos para obtener el valor buscado, multiplicando por $(1+i)^p$.

- Por lo tanto para una renta vencida: $V_f = C \cdot S_{n|i} (1+i)^p$
- Para una renta anticipada: $V_f = C \cdot S_{n|i} (1+i)^p \cdot (1+i)$

11.- Aplicaciones prácticas de las propiedades de las rentas.

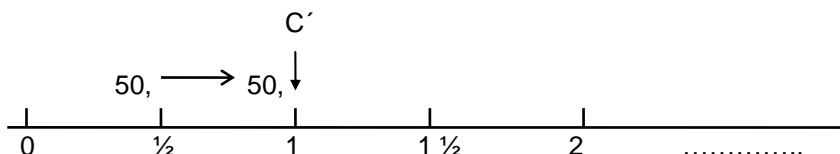
Las propiedades asociativa y disociativa de las rentas, son muy útiles para la resolución de problemas en los que no se cumple la homogeneidad de los elementos que integran la operación, como puede ser el vencimiento irregular de los capitales, periodos de tiempo en que no existen vencimientos de capital, etc. vamos a estudiar a través de ejemplos la aplicación de estas propiedades en la resolución de problemas.

Calcular el valor actual de una renta de 50.000 € semestrales, de 5 años de duración y valorada a un tanto efectivo anual del 6,09 %.

- **La solución lógica.** Como la unidad de vencimiento del capital y la del tanto no son iguales, pasaremos todos los elementos a la unidad semestral, que es la del vencimiento de los capitales.
 - El número de capitales a sumar: $2 \cdot 5 = 10$ capitales semestrales.
 - Y el interés semestral: $i_2 = (1 + 0,0609)^{1/2} - 1 = 0,03$, es decir el 3 % semestral

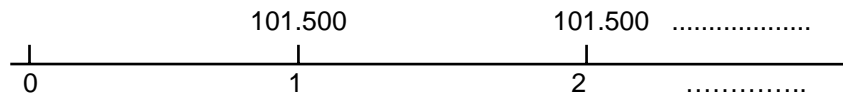
Por lo tanto el valor actual sería: $V_a = 50.000 \cdot \frac{1 - (1 + 0,03)^{-10}}{0,03} = 426.510,14 \text{ €}$

- **Aplicando la solución asociativa:** Consistirá en asociar capitales, es decir, sumar dos capitales semestrales y obtener su equivalente anual, para que de este modo hacerlo coincidir con el periodo de capitalización anual.



Vamos a obtener la suma anual de dos capitales de 50.000 € semestrales, por lo tanto:

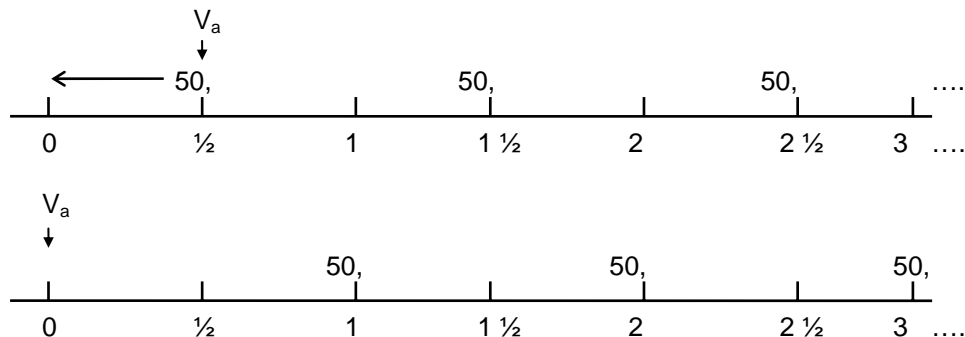
$$C' = 50.000 + 50.000 (1 + 0,0609)^{\frac{1}{2}} = 50.000 + 51.500 = 101.500 \text{ € anuales.}$$



De este modo tenemos capitales anuales, vencimientos anuales y tanto anual, así:

$$V_a = 101.500 \cdot \frac{1 - (1 + 0,0609)^{-5}}{0,0609} = 426.510,14 \text{ €}$$

- **Aplicando la solución disociativa:** Ahora vamos a dividir la renta original en dos partes, de forma que obtendremos que los vencimientos de los capitales serán anuales como podemos comprobar en el gráfico de la operación resultante:



La primera renta es una renta anual de cuantía 50.000 €, que se inicia en $\frac{1}{2}$, para que así de vencimiento a vencimiento trascurra un año completo, con cinco años de duración y vencimiento en cada $\frac{1}{2}$, como hacemos que el inicio de la operación coincida con el primer vencimiento de capital la renta resultante será anticipada y diferida medio año, al tener que valorarla en 0 e iniciarse en $\frac{1}{2}$. La segunda renta es una renta anual de 50.000 € de cinco años de duración y vencida, al vencer el capital al final del año. Por lo tanto el valor actual de la operación será la suma del valor actual de las dos rentas:

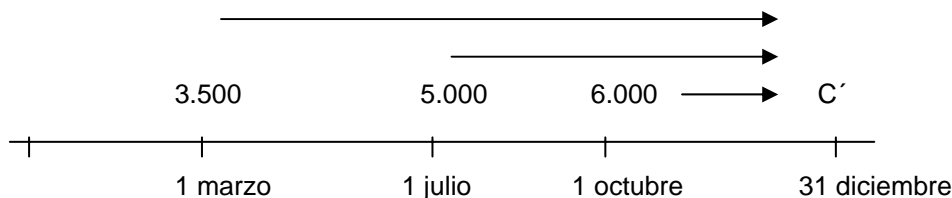
$$V_a = 50.000 \cdot \frac{1 - (1 + 0,0609)^{-5}}{0,0609} \cdot (1 + 0,0609) \cdot (1 + 0,0609)^{-\frac{1}{2}} + 50.000 \cdot \frac{1 - (1 + 0,0609)^{-5}}{0,0609}$$

$$V_a = 216.406,62 + 210.103,52 = 426.510,14 \text{ €}$$

Con lo que comprobamos la equivalencia entre todas las propuestas de solución realizadas, aunque podemos comprobar fácilmente que la propuesta **b** es la más sencilla de aplicar.

Calcular el valor actual de los pagos a efectuar a un proveedor con el que se ha firmado un contrato de suministro de productos por diez años, acordando el abono de éstos mediante tres pagos los días 1 de marzo, 1 de julio y 1 de octubre por sendos importes de 3.500 €, 5.000 € y 6.000 € financiando la operación a un interés del 10 % anual.

- **Aplicando la solución asociativa:** En este caso comprobamos que los capitales que se devengan cada año, ni son iguales ni vencen de forma periódica, por lo tanto no podemos aplicar la expresión matemática de la renta constante. La solución al problema consistirá en obtener el capital anual equivalente a los tres pagos que se efectúan cada año (solución asociativa).

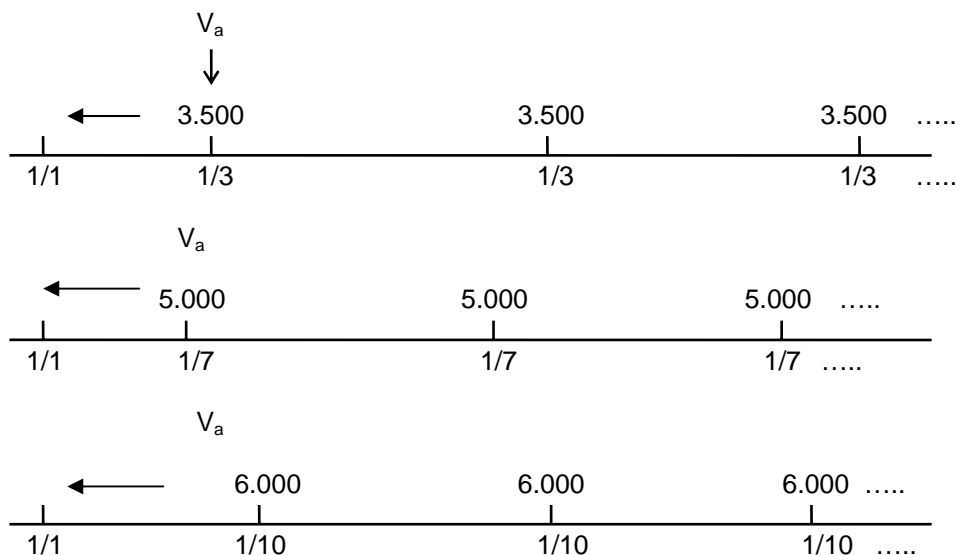


$$C' = 6.000 (1 + 0,10)^{3/12} + 5.000 (1 + 0,10)^{6/12} + 3.500 (1 + 0,10)^{10/12} = 15.178,05 \text{ €}$$

Ahora tenemos capitales anuales de 15.178,05 €, con lo que hemos obtenido una renta constante y anual, cuyo valor actual será:

$$V_a = 15.178,05 \cdot \frac{1 - (1 + 0,10)^{-10}}{0,10} = 93.262,56 \text{ €}$$

- **Aplicando la solución disociativa:** Tendríamos tres rentas, con inicios diferentes (1 de marzo, 1 de julio y 1 de octubre) y además ninguno de ellos está en el inicio de la operación que es el 1 de enero, por lo tanto diferidas dos meses en el primer caso (enero y febrero), seis meses en el segundo (enero al 1 de julio) y nueve meses en el tercero (enero al 1 de octubre), como podemos comprobar en el gráfico. Además como el inicio de cada renta se hace con el devengo del capital, la renta será anticipada.



El valor actual de la operación será la suma de las tres rentas disociadas.

$$V_a = 3.500 \cdot a_{10|0,10} \cdot (1 + 0,10) \cdot (1 + 0,10)^{-2/12} + 5.000 \cdot a_{10|0,10} \cdot (1 + 0,10) \cdot (1 + 0,10)^{-6/12} + 6.000 \cdot a_{10|0,10} \cdot (1 + 0,10) \cdot (1 + 0,10)^{-9/12}$$

$$V_a = 23.283,76 + 32.222,38 + 37.756,42 = 93.262,56 \text{ €}$$

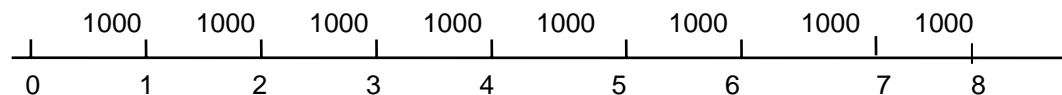
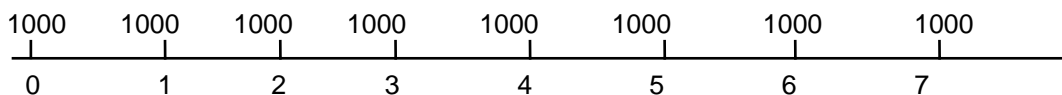
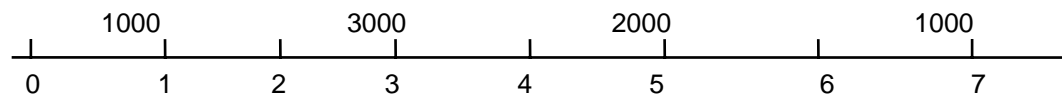
12.- Ejercicios prácticos.

□ Estudio mediante sus representaciones gráficas:

Actividad nº 1:

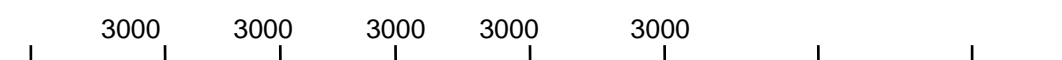
Dadas las siguientes operaciones, valoradas a un interés anual del 6 %. Se pide:

- ¿De cuántos capitales está formada cada operación?
- ¿Dónde está el valor actual y final de cada una de las rentas?
- ¿Coincide el valor actual y final de cada renta con el inicio y fin de cada operación? (Indica en cada caso el punto de inicio y fin de la operación)
- Indica qué rentas son anticipadas y cuáles vencidas.
- Calcular el valor inicial y final de cada una



Actividad nº 2:

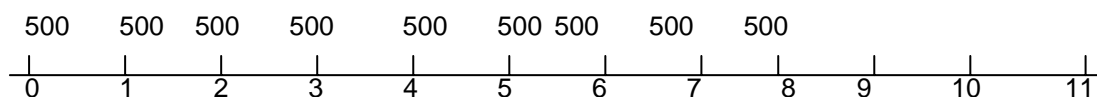
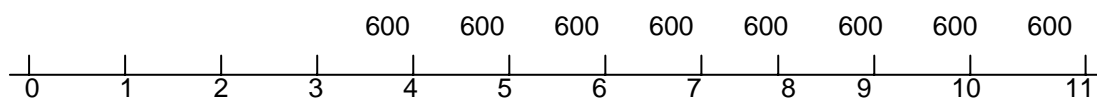
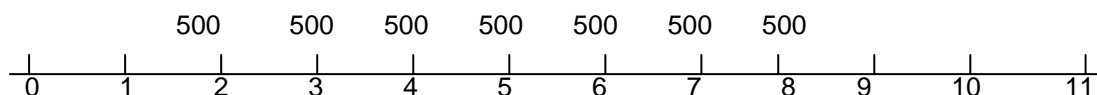
Dadas las siguientes operaciones, valoradas a un interés anual del 5 %, se pide calcular su valor inicial y final.



0 1 2 3 4 5 6 7

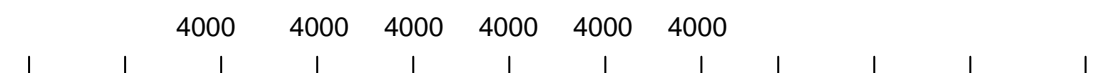
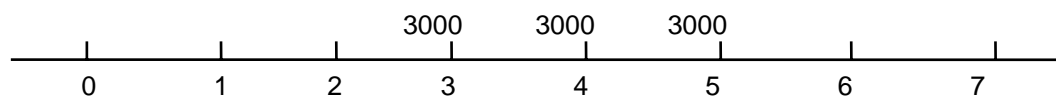
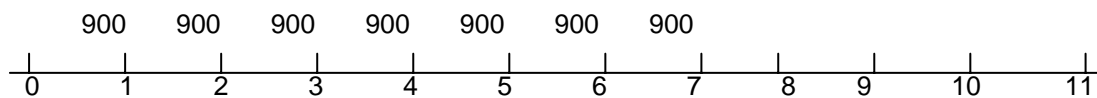
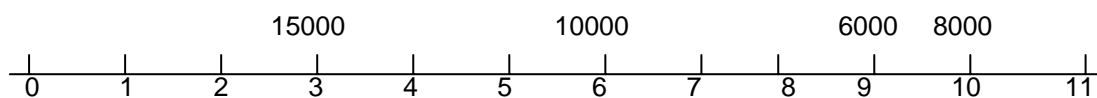
Actividad nº 3:

Dadas las siguientes operaciones, valoradas a un interés anual del 4 %, se pide calcular su valor inicial y final de la operación de las representaciones gráficas, indicando donde está el inicio y final de cada operación.



Actividad nº 4:

Dadas las siguientes operaciones, valoradas a un interés anual del 5 %, se pide calcular su valor inicial y final de la renta de las siguientes representaciones, indicando dónde está el inicio y final de la operación y el inicio y final de cada renta.



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

❑ **Vamos a sumar muchos, muchísimos capitales de una forma sencilla:**

En este caso vamos a trabajar con las expresiones del valor actual y final de una renta, que nos permite sumar de una sola vez multitud de capitales iguales, y que el resultado es un capital suma equivalente a los capitales que conforman la renta.. Es muy importante tener presente que todos los elementos que conforman las rentas han de estar expresados en las mismas unidades, por lo que hay que saber modificar un tanto a la unidad de capitalización necesaria, diferenciando cómo se hace cuando éste es nominal o efectivo, etc.

Actividad nº 5:

Calcular el valor de las siguientes operaciones valoradas al 6 % anual:

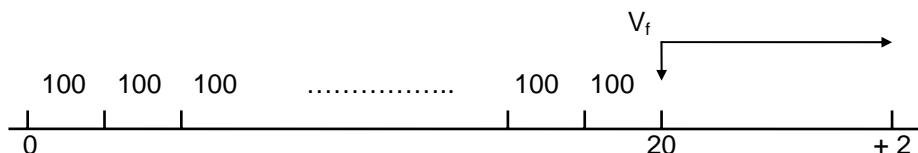
- a.- El actual de una renta vencida de 500 €. anuales y duración de 15 años
- b.- El final de una renta anticipada de 100 €. anuales y 20 años de duración, si se valora dos años después de terminada.

Solución:

a.- Todos los elementos están expresados en la misma unidad, el año, por lo tanto

$$V_a = C \cdot a_{15|0,06} = 500 \cdot \frac{1 - (1 + 0,06)^{-15}}{0,06} = 4.856,12 \text{ €}$$

b.- El esquema de la operación, con todos los elementos homogéneos, es el siguiente:



Vamos a valorar la operación dos años después de finalizada, con capitales anticipadas:

$$V_f = C \cdot S_{20|0,06} = 100 \cdot \frac{(1 + 0,06)^{20} - 1}{0,06} \cdot \underbrace{(1 + 0,06)^2}_{\text{Llevada a 22}} \cdot \underbrace{(1 + 0,06)^{-1}}_{\text{Anticipada}} = 4.381,22 \text{ €}$$

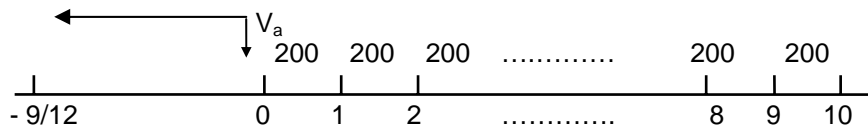
Actividad nº 6:

Calcular el valor de las siguientes operaciones valoradas al 6 % anual:

- a.- El actual de una renta anticipada de 200 € anuales y 10 años de duración, si el devengo del primer capital se realiza a los nueve meses de iniciada la operación.
- b.- El actual de una renta anual de 120 € anticipadas, de duración indefinida, si el devengo de capitales se realiza a los tres años de iniciada la operación.

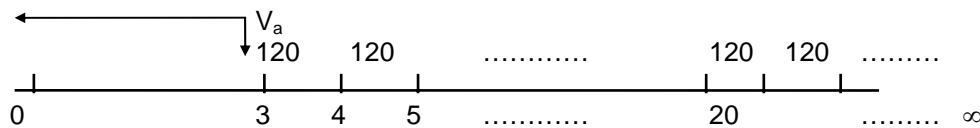
Solución:

a.- El esquema gráfico de la operación, con todos los elementos homogéneos, es el siguiente:



$$V_a = 200 \cdot \frac{1 - (1 + 0,06)^{-10}}{0,06} \cdot \underbrace{(1 + 0,06)^{-9/12}}_{\text{Llevada a } -9/12} \cdot \underbrace{(1 + 0,06)}_{\text{Anticipada}} = 1.493,62 \text{ €}$$

b.- El esquema de la operación, con todos los elementos homogéneos, será:



$$V_a = 120 \cdot \frac{1}{0,06} \cdot \underbrace{(1 + 0,06)^{-3}}_{\text{Llevada a } 0} \cdot \underbrace{(1 + 0,06)^1}_{\text{Anticipada}} = 1.779,99 \text{ €}$$

Actividad nº 7:

Calcular el valor actual de las siguientes rentas, valoradas al 6,5 % anual efectivo:

- De una renta vencida de 15.000 € trimestrales durante 6 años.
- De una renta semestral anticipada de 30.000 € y duración indefinida.
- De una renta de setenta y dos pagos 36.000 € mensuales que se comienza 8 meses después de iniciada la operación.
- De una renta bimestral, anticipada de 25.000 €, durante dos años.
- De una renta anual de 85.000 € anticipada durante 12 años.

Solución:

a.- Ahora el capital vence en unidades temporales inferiores al tanto, por lo al ser una renta fraccionada de $m = 4$, tendremos que calcular el tanto trimestral, siendo el número de capitales $6 \cdot 4 = 24$.

$$\text{El tanto trimestral será: } (1 + 0,065)^{1/4} - 1 = 0,0158682$$

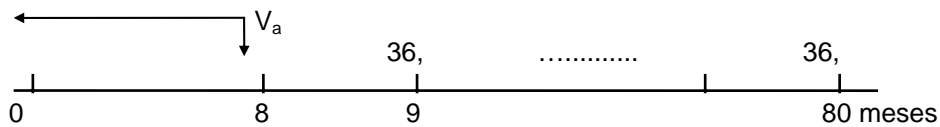
$$\text{El valor actual será: } V_a = 15.000 \cdot \frac{1 - (1 + 0,0158682)^{-24}}{0,0158682} = 297.448,21 \text{ €}$$

b.- Ahora también es una renta fraccionada de $m = 2$, anticipada y perpetua, por lo que tenemos que calcular el tanto semestral.

$$i_m = (1 + 0,065)^{1/2} - 1 = 0,03198837$$

$$\text{El valor será: } V_a = 30.000 \cdot \underbrace{\frac{1}{0,03198837}}_{\text{Perpetua}} \underbrace{(1 + 0,03198837)}_{\text{Anticipada}} = 967.850,66 \text{ €}$$

c.- Es una renta fraccionada de $m = 12$ y diferida, para $12 \cdot 6 = 72$ capitales.



El tanto a mensual será: $(1 + 0,065)^{1/12} - 1 = 0,0052616942$

$$V_a = 36.000 \cdot \frac{1 - (1 + 0,00526169)^{-72}}{0,00526169} \underbrace{(1 + 0,00526169)^{-8}}_{\text{Para llevarla a 0}} = 2.064.398,22 \text{ €}$$

d.- Es una renta anticipada, fraccionada de $m = 6$, para $2 \cdot 6 = 12$ capitales.

El tanto bimestral será: $(1 + 0,065)^{1/6} - 1 = 0,01055107$

$$V_a = 25.000 \cdot \frac{1 - (1 + 0,01055107)^{-12}}{0,01055107} \underbrace{(1 + 0,01055107)}_{\text{Anticipada}} = 283.358,22 \text{ €}$$

e.- Como todos los datos están en anual, directamente.

$$V_a = 55.000 \cdot \frac{1 - (1 + 0,065)^{-12}}{0,065} \underbrace{(1 + 0,065)}_{\text{Anticipada}} = 738.568,61 \text{ €}$$

Actividad nº 8:

Un señor recibe la siguiente herencia:

- Un inmueble valorado en 600.000 €.
 - Una renta trimestral de 65.000 € a recibir durante 15 años
 - Una finca rústica valorada en 850.000 € y alquilada en 5.000 € Semestrales
- ¿Cuál es el valor de la herencia recibida, si se valora la operación a un interés efectivo del 5,5 % anual?

Solución:

El valor de la herencia será el valor actual de todo lo recibido:

- Del inmueble y la finca, ya conocemos su valor hoy: $600.000 + 850.000 = 1.450.000$ €
- Del alquiler de la finca rústica: Una renta fraccionada, de $m = 2$, anticipada, al recibirse los alquileres al inicio del periodo y perpetua o indefinida.

Cambiando el tanto a semestral: $(1 + 0,055)^{1/2} - 1 = 0,02713193$

$$\text{El valor de la renta será: } V_a = 5.000 \cdot \underbrace{\frac{1}{0,02713193}}_{\text{Perpetua}} \cdot \underbrace{(1 + 0,02713193)}_{\text{Anticipada}} = 189.284,71 \text{ €}$$

- De la renta trimestral, necesitamos el tanto trimestral, para $15 \cdot 4 = 60$ pagos.

Cambiando el tanto a trimestral: $(1 + 0,055)^{1/4} - 1 = 0,013475174$

$$V_a = 65.000 \cdot a_{60|0,013475} = 60.000 \cdot \frac{1 - (1 + 0,013475)^{-60}}{0,013475} = 2.662.997,24 \text{ €}$$

Valor total de la herencia: $1.450.000 + 189.284,71 + 2.662.997,24 = 4.302.281,95$ €

Actividad nº 9:

¿Cuál será el montante que ahorrará un empleado en los próximos cinco años, si su sueldo mensual es de 1.200 €, con dos pagas extras de igual cuantía al final de junio y diciembre más una paga por beneficios de 500 € al final de cada trimestre. Dedicará al ahorro el 25 % de su salario, el 50 % de las pagas extras y la totalidad de la de beneficios. El banco abona un interés nominal del 6 % anual?

Solución:

- Dedicar al ahorro, $1.200 \cdot 25 \% = 300$ € mensuales, $1.200 \cdot 50 \% = 600$ € semestrales y 500 € trimestrales. Por lo tanto es una operación en valor final formada por tres rentas de $m = 12$, $m = 2$ y $m = 4$, por lo que necesitamos calcular los tantos fraccionados, siendo el número de capitales de la operación: $5 \cdot 12 = 60$, $5 \cdot 2 = 10$ y $5 \cdot 4 = 20$.
- El tanto mensual será 6 %: $12 = 0,5 \%$, el tanto semestral será el 6 %: $2 = 3 \%$ y el tanto trimestral 6%: $4 = 1,5 \%$. Por lo tanto el valor final de la operación sería:

$$V_f = 300 \cdot S_{60|0,005} + 600 \cdot S_{10|0,03} + 500 \cdot S_{20|0,015}$$

$$V_f = 300 \cdot \frac{(1 + 0,005)^{60} - 1}{0,005} + 600 \cdot \frac{(1 + 0,03)^{10} - 1}{0,03} + 500 \cdot \frac{(1 + 0,015)^{20} - 1}{0,015}$$

$$V_f = 20.931 + 6.878,33 + 11.561,83 = 30.001,99 \text{ €}$$

Actividad nº 10:

Una sociedad construye un edificio de oficinas para alquilar, con el siguiente desglose de gastos:

- El terreno se ha comprado con la entrega de 400.000 € al contado y se ha aceptado pagar el resto mediante 4 pagos semestrales de 80.000 €, valorados al 8 % nominal anual.
- Los gastos por los materiales de construcción supondrán el desembolso en los dos años de duración de las obras de 30.000 € mensuales y el pago de la nómina supondrá un desembolso medio de 100.000 € mensuales.
- El sueldo de la portería del edificio será de 1.200 € mensuales.
- Los gastos de mantenimiento ascenderán a 3.000 € mensuales.
- Si existen diez oficinas, se pide el alquiler que habrá que cobrar al comienzo de cada trimestre, en los próximos 12 años, para que la rentabilidad de la operación sea del 7 % anual

Solución:

- El coste de construcción y mano de obra, será el valor actual de los pagos a realizar, como éstos son mensuales, calculamos el tanto mensual del efectivo dado, $(1 + 0,07)^{1/12} - 1 = 0,005654145$, y el número de pagos a efectuar será de $12 \cdot 2 = 24$.

$$V_a = (30.000 + 100.000) \cdot \frac{1 - (1 + 0,005654145)^{-24}}{0,005654145} = 2.909.894,28 \text{ €}$$

- El coste del terreno, será el valor hoy de todos los pagos a efectuar, como éstos son semestrales necesitamos el tanto semestral. 8 %: $2 = 4 \%$.

$$V_a = 400.000 + 80.000 \cdot \frac{1 - (1 + 0,04)^{-4}}{0,04} = 690.391,62 \text{ €}$$

- El coste de la mano de obra de portería y los de mantenimiento será también el valor hoy de los, $12 \cdot 12 = 144$ pagos a realizar en el periodo de estudio.

$$V_a = (1.200 + 3.000) \cdot \frac{1 - (1 + 0,005654145)^{-144}}{0,005654145} = 412.997,83 \text{ €}$$

El total de costes: $690.391,62 + 2.909.894,28 + 412.997,83 = \mathbf{4.013.283,73 \text{ €}}$

- Si quiere obtener una rentabilidad del 7 %, el valor actual de la renta a obtener por los alquileres será igual a los costes actualizados de construcción y mantenimiento, como el cobro se realiza trimestralmente necesitamos el tanto trimestral equivalente a la rentabilidad dada: $i_4 = (1 + 0,07)^{1/4} - 1 = 0,01705852$, el número de cobros será de $12 \cdot 4 = 48$ anticipadas.

$$4.013.283,73 = C \cdot \frac{1 - (1 + 0,0170585)^{-48}}{0,0170585} (1 + 0,0170585),$$

Operando $C = 121.068,16 \text{ €}$

Como son 10 oficinas, el alquiler será: $121.068,16 : 10 = 12.106,82 \text{ € por oficina}$.

Actividad nº 11:

Una persona concertó un plan de ahorro, cuando inició su actividad laboral a los 25 años, mediante el ingreso de 100 € al principio de cada mes. La entidad aseguradora concertó con él la entrega cuando se jubilase a los 65 años de 18.000 € en metálico y el resto mediante una renta mensual vitalicia. Si se concertó el plan de ahorro al 6 % nominal anual y la renta vitalicia al 5 % nominal anual ¿Cuál es la cuantía de la mensualidad a recibir?

Solución:

- Su operación de ahorro durará $65 - 25 = 40$ años, por lo que el valor ahorrado al final de la operación será el generado por la renta anticipada de 100 € mensuales, por lo que necesitamos para $40 \cdot 12 = 480$ capitales, el tanto mensual: $6 \% : 12 = 0,5 \%$

$$\text{El valor del ahorro será: } V_f = 100 \cdot \frac{(1 + 0,005)^{-480} - 1}{0,005} \cdot \underbrace{(1 + 0,005)}_{\text{Anticipada}} = 200.144,82 \text{ €}$$

- La cantidad a recibir, será una renta perpetua y mensual valorada al $5 \% : 12 = 0,4167 \%$ mensual y cuyo valor actual es la cantidad ahorrada menos los 18.000 € que retira en efectivo: $200.144,82 - 18.000 = 182.144,82 \text{ €}$

$$\text{La mensualidad será: } 182.144,82 = C \cdot \underbrace{\frac{1}{0,04167}}_{\text{Perpetua}} \quad \text{Operando, } C = 758,94 \text{ €}$$

Actividad nº 12:

Un señor posee una huerta que se estima producirá en los próximos ocho años una renta anual estimada en 2.800 € con unos gastos de mantenimiento del 5 % anual. Si se decide su venta ¿Cuál es el precio mínimo que aceptará, si el interés de mercado es del 7 % efectivo anual?

Solución:

- Aceptará como mínimo un valor que sea, hoy, equivalente a sus ingresos netos en los ocho próximos años.
- Ingreso neto anual: $2.800 \text{ €} - 5 \% = 2.660 \text{ €}$ anuales y el valor hoy de dichos ingresos:

$$V_a = 2.660 \cdot \frac{1 - (1 + 0,07)^{-8}}{0,07} = 15.883,65 \text{ €}$$

que será el precio mínimo de venta para que la operación le fuese indiferente, por encima de dicho valor obtendrá beneficios y por debajo pérdidas.

❑ Vamos a trabajar con operaciones formadas por rentas diferentes..

Realizado el estudio de las rentas normales, o de aplicación casi inmediata, vamos a analizar a través de distintos ejercicios el estudio de operaciones formadas por más de una renta ya sea debido a la existencia de capitales distintos o de tantos de valoración diferentes. En este análisis siempre nos aparecerán, al tener que valorar todas las rentas existentes, en un punto concreto, (0) si es valor actual o (n) si es valor final, rentas no inmediatas, con lo que debemos tener siempre presente la existencia de varios valores actuales o finales, los de las rentas que integran la operación y de un único valor actual o final, que será el de la operación analizada.

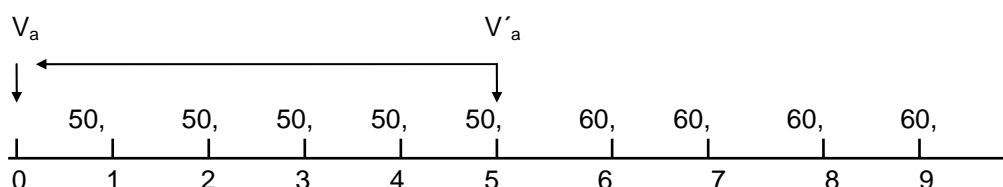
Actividad nº 13:

Calcular el valor actual de las siguientes operaciones, valoradas al 8 % anual:

- a.- De una operación formada por una renta de 50.000 € en los cinco primeros años y otra de 60.000 € en los cuatro siguientes.
- b.- De una operación formada por una renta anticipada de 100.000 € en los seis primeros años y otra de 80.000 € en los tres siguientes.
- c.- De una operación formada por una renta anticipada, de 200.000 € durante cinco años realizando el primer pago en el tercer año y de otra de 150.000 € vencida en los dos últimos años.

Solución:

a.- El esquema de la operación es el siguiente:



Tenemos dos rentas, en la primera su valor actual coincide con el de la operación, pero la segunda de 60.000 €, tiene su valor actual en (5), y como el de la operación conjunta está en (0), habrá que actualizarla cinco periodos:

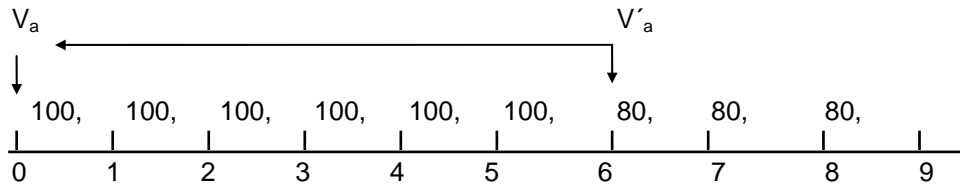
$$V_a = 50.000 \cdot a_{\overline{5}|0,08} + 60.000 \cdot a_{\overline{4}|0,08} (1 + 0,08)^{-5}$$

$$V_a = 50.000 \cdot \frac{1 - (1 + 0,08)^{-5}}{0,08} + 60.000 \cdot \frac{1 - (1 + 0,08)^{-4}}{0,08} (1 + 0,08)^{-5}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
 llevada a 0

$$V_a = 199.635,50 + 135.250,67 = 334.886,17 \text{ €}$$

b.- En este caso tendremos:



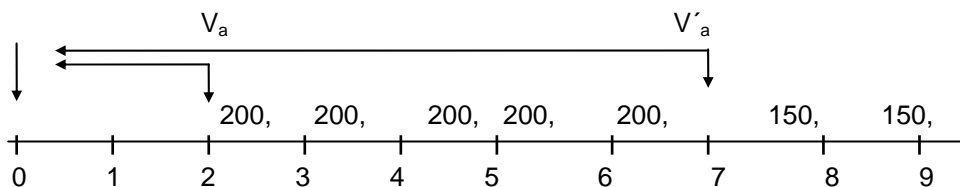
Ahora las rentas son anticipadas. La primera tiene su valor actual en (0) coincidente con el de la operación, pero la segunda tiene su valor actual en (6), habrá que actualizarla seis periodos al querer el valor de la operación en (0):

$$V_a = 100.000 \frac{1 - (1 + 0,08)^{-6}}{0,08} (1 + 0,08) + 80.000 \frac{1 - (1 + 0,08)^{-3}}{0,08} (1 + 0,08) (1 + 0,08)^{-6}$$

Anticipada
Anticipada
Llevada a 0

$$V_a = 499.271 + 140.314,31 = 639.585,32 \text{ €}$$

c.- El esquema de esta operación es el siguiente:



Al realizarse el primer pago en el tercer año, al no haber en los dos primeros, habrá que actualizarla dos años al tener su valor actual en (2) y el de la operación en (0), mientras que la segunda tiene su valor actual en (7) y por lo tanto habrá que actualizarla siete años:

$$V_a = 200.000 \frac{1 - (1 + 0,08)^{-5}}{0,08} (1 + 0,08) (1 + 0,08)^{-2} + 150.000 \frac{1 - (1 + 0,08)^{-2}}{0,08} (1 + 0,08)^{-7}$$

Anticipada
Llevada a 0
Llevada a 0

$$V_a = 739.390,75 + 156.077,68 = 895.468,43 \text{ €}$$

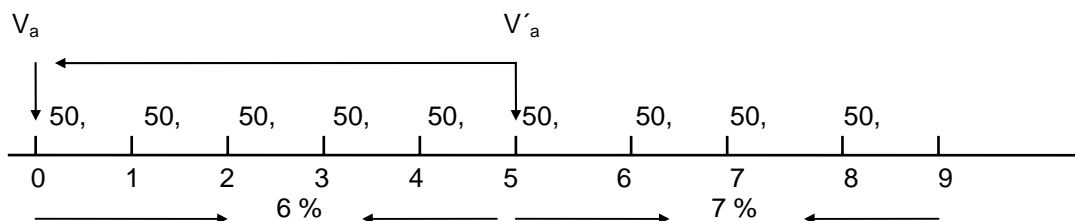
Actividad nº 14:

Calcular el valor de las siguientes operaciones:

- a.- El actual de una renta de 50.000 € anuales anticipadas, valorada al 6 % anual en los cinco primeros años y al 7 % anual en los cuatro siguientes.
- b.- El final de una renta de 50.000 € anuales, valorada al 5 % anual en los cinco primeros años y al 6 % anual en los cuatro siguientes
- c.- El actual de una renta que se inicia un año después de concertada, con ocho términos anuales de 250.000 € y anticipados, valorada al 8 % anual en los siete primeros y en los dos últimos se valora al 6 % anual
- d.- El final de una renta que termina dos años antes de cerrar la operación, de siete términos de 500.000 € anuales anticipados, si se valora al 6 % en los cinco primeros años y al 8 % en los siguientes.

Solución:

a.- El esquema de la operación es el siguiente:



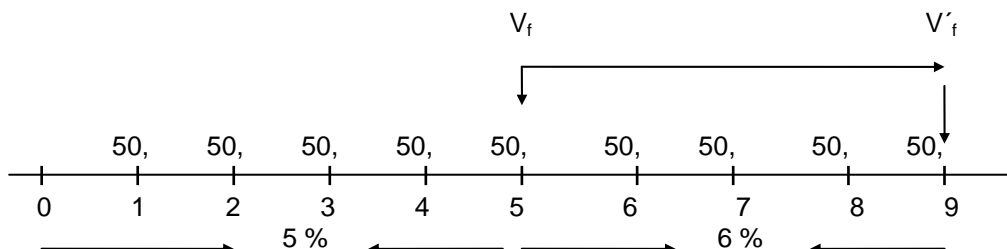
Ahora tenemos dos rentas, porque la ley de valoración es distinta, la primera tiene su valor actual en (0) calculado al 6 % y la segunda con valor actual en (5) calculado al 7 %, por lo que habrá que actualizarla cinco años al tanto del 6 %, por pedir el valor de la operación en (0):

$$V_a = 50.000 \cdot \frac{1 - (1 + 0,06)^{-5}}{0,06} (1 + 0,06) + 50.000 \cdot \frac{1 - (1 + 0,07)^{-4}}{0,07} (1 + 0,07) (1 + 0,06)^{-5}$$

Anticipada
Anticipada llevada a 0

$$V_a = 223.255,28 + 135.414,99 = 358.670,27 \text{ €}$$

b.- El esquema gráfico en este caso será:



Existen dos rentas por tener dos leyes de valoración diferentes, la primera renta, tiene su valor final en el año (5) y valorada al 5 %, y por lo tanto como queremos el valor final en (9), habrá que capitalizarla al 6 % cuatro años y la segunda cuyo valor final está en (9) valorada al 6 %, coincide con el final de la operación, por lo tanto:

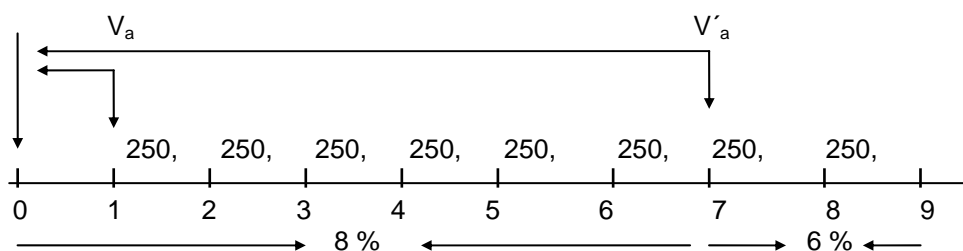
$$V_f = 50.000 \cdot \frac{(1 + 0,06)^4 - 1}{0,06} + 50.000 \cdot \frac{(1 + 0,05)^5 - 1}{0,05} (1 + 0,06)^4$$

llevada a 9

$$V_f = 218.730,80 + 348.799,11 = 567.529,91 \text{ €}$$

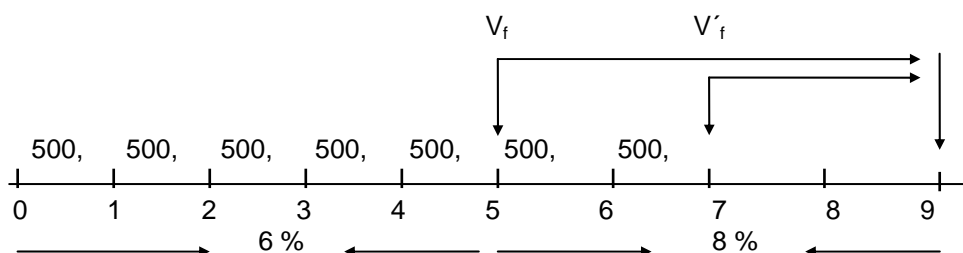
c.- En este caso tendremos una renta que se origina en (1), donde está su valor actual valorado al 8 %, por lo tanto hay que llevarla a (0) y otra renta que tiene su valor actual en (7) valorada a un interés del 6 %, llevada a 0, valor actual de la operación, al 8 % anual, por lo tanto:

Su representación gráfica sería:



$$V_a = 250.000 \cdot \frac{1 - (1 + 0,08)^{-6}}{0,08} (1 + 0,08)^{-1} + 250.000 \cdot \frac{1 - (1 + 0,06)^{-2}}{0,06} (1 + 0,06)^{-7} = 1.155.719,92 + 283.488,26 = 1.439.208,18 \text{ €}$$

d.- Estamos ante dos rentas, la primera de cinco términos valorada al 6 % cuyo valor final está en (5) y por lo tanto habrá que capitalizarla cuatro años al 8 % al terminar la operación en (9) y una segunda renta cuyo valor final está en (7) y capitalizada dos años al estar el final de la operación en el año (9). El esquema gráfico en este caso será:



$$V_f = 500.000 \cdot S_{\overline{5}|0,06} (1 + 0,06) \underbrace{(1 + 0,08)^4}_{\text{llevada a 9}} + 500.000 \cdot S_{\overline{2}|0,08} (1 + 0,08) \underbrace{(1 + 0,08)^2}_{\text{llevada a 9}}$$

$$V_f = 4.064.677,45 + 1.310.100,48 = 5.374.777,93 \text{ €}$$

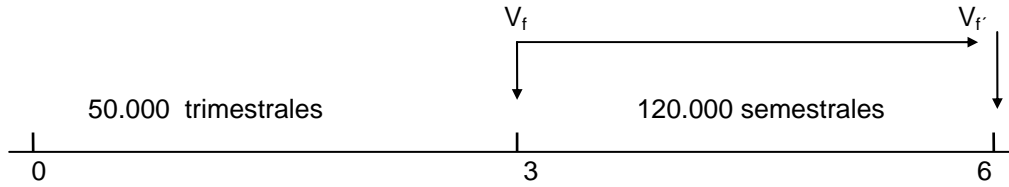
Actividad nº 15:

Calcular el valor de las siguientes operaciones:

- El valor final de 50.000 € trimestrales en los tres primeros años y de 120.000 € semestrales en los tres siguientes, valorada a un tanto efectivo del 8 % anual.
- El valor actual de una renta anticipada de: 80.000 € cuatrimestrales en los tres primeros años y de 20.000 € bimestrales en los tres siguientes, valorada a un tanto efectivo del 8 % anual.
- El valor final de una renta de 800.000 € anuales en los cuatro primeros años y de 120.000 € semestrales y anticipados en los tres siguientes, valorada a un interés nominal del 8 % anual, si la operación se valora tres años después de terminadas las rentas.
- El actual de una renta de 120.000 € semestrales durante tres años y de 300.000 € anuales anticipadas en los cuatro siguientes, si se valora dos años antes del inicio de las rentas. Interés nominal del 8 % anual.

Solución:

a.- Su esquema gráfico será:



Estamos ante dos rentas fraccionadas, la primera trimestral y la segunda semestral. La primera habrá que capitalizarla tres años, al estar su valor final en (3) y el de la operación en (6), mientras que el valor final de la segunda coincide con el de la operación. Por lo tanto hay que obtener los tantos equivalentes según el devengo de cada una de ellas:

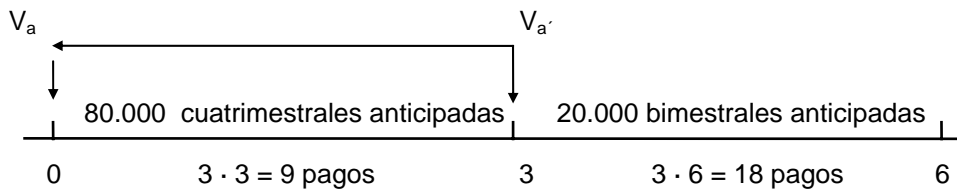
$$\text{El tanto a trimestral: } (1 + 0,08)^{1/4} - 1 = 0,01942654$$

$$\text{El tanto semestral equivalente: } (1 + 0,08)^{1/2} - 1 = 0,03923048$$

$$V_f = 50.000 \cdot \frac{(1 + 0,01942)^{12} - 1}{0,001942} \underbrace{(1 + 0,08)^3}_{\text{llevada a 6}} + 120.000 \cdot \frac{(1 + 0,03923)^6 - 1}{0,003923}$$

$$V_f = 842.049,57 + 794.418,93 = 1.636.468,50 \text{ €}$$

b.- El esquema de la operación es el siguiente:



Estamos rentas fraccionadas, la primera de $m = 3$ y la segunda de $m = 6$, la segunda habrá que actualizarla tres años, al estar su valor actual en (3) y el de la operación en (0).

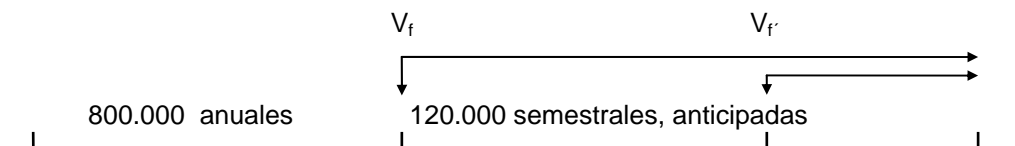
$$\text{El tanto cuatrimestral: } (1 + 0,08)^{1/3} - 1 = 0,02598556$$

$$\text{El tanto bimestral equivalente: } (1 + 0,08)^{1/6} - 1 = 0,01290945$$

$$V_a = 80.000 \frac{1 - (1 + 0,02598)^{-9}}{0,02598} (1 + 0,025985) + 20.000 \frac{1 - (1 + 0,0129)^{-18}}{0,0129} (1 + 0,01290) (1 + 0,08)^{-3}$$

$$V_a = 651.207,71 + 256.827,74 = 908.035,45 \text{ €}$$

c.- El esquema gráfico de la operación es el siguiente:



0

4

7

10

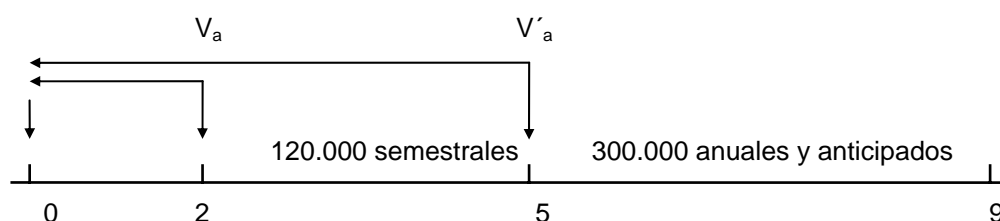
La duración de los pagos es de siete años, pero como se valora tres años después de su fin, el valor de la operación está en (10), mientras que el de la primera está en (4), habrá que capitalizarla 6 años (12 semestres) y la segunda está en (7) a capitalizar tres años (6 semestres). Cambiando el tanto a semestral: $8\% : 2 = 4\%$ semestral

$$V_f = 800.000 \cdot \frac{(1 + 0,08)^{-4} - 1}{0,08} (1 + 0,04)^{12} + 120.000 \cdot \frac{(1 + 0,04)^{-6} - 1}{0,04} (1 + 0,04)^6$$

llevada a 10
llevada a 10

$$V_f = 5.771.544,39 + 1.047.425,18 = 6.818.969,58 \text{ €}$$

d.- Estamos ante dos rentas, la primera semestral que hay que actualizarla al estar su valor actual en (2) y el de la operación en (0), la segunda de 10 semestres, después del inicio al estar su actual en (5), como podemos comprobar con el gráfico. El semestral: $8\% : 2 = 4\%$



$$V_a = 120.000 \frac{1 - (1 + 0,04)^{-6}}{0,04} (1 + 0,04)^{-4} + 300.000 \frac{1 - (1 + 0,08)^{-4}}{0,08} (1 + 0,08)^{-10}$$

llevada a 0
llevada a 0

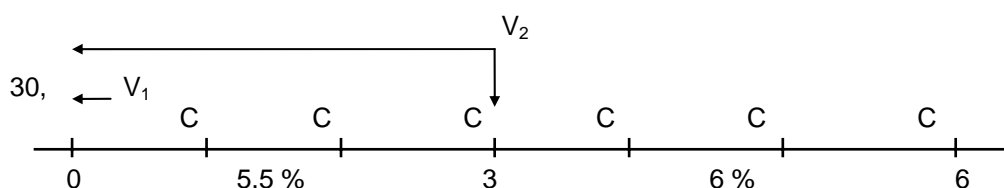
$$V_a = 497.152,43 + 1.419.101,17 = 1.916.253,60 \text{ €}$$

Actividad nº 16:

Obtenemos un préstamo de 30.000 €. a devolver en seis años mediante pagos constantes, pero abonando unos intereses del 5,5 % en los tres primeros años y del 6 % en los siguientes. ¿Cuál será la cantidad anual que se paga?

Solución:

Estamos ante dos rentas distintas motivado por las leyes de valoración utilizadas, por lo que la segunda, con valor actual en (3), habrá que actualizarla tres años a (0).



$$30.000 = C \cdot \frac{1 - (1 + 0,055)^{-3}}{0,055} + C \cdot \frac{1 - (1 + 0,06)^{-3}}{0,06} \underbrace{(1 + 0,055)^{-3}}_{\text{llevada a 0}}$$

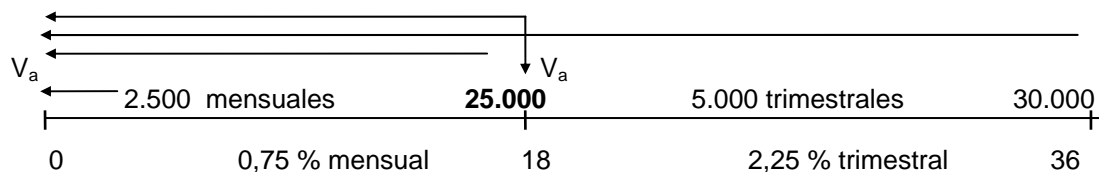
Operando, $C = 6.030,99$ € anuales.

Actividad nº 17:

Para liquidar una deuda se acuerda realizar pagos de 2.500 € mensuales durante los primeros 18 meses, un desembolso de 25.000 € al terminar éstos, y pagos de 5.000 €. Trimestrales anticipadas durante los siguientes 18 meses, terminando de amortizar la deuda mediante un pago de 30.000 € al finalizar los 36 meses de la operación. Si se valora a un tanto nominal del 9 % anual ¿Cuál es el importe de la deuda?

Solución:

- El esquema de la operación es el siguiente:



Es decir está formada por dos pagos de 25.000 € en (18) y 30.000 € en (36) y dos rentas:

- La primera de 2.500 € y cuyo valor actual coincide con el inicio de la operación
- La segunda de 5.000 €, cuyo valor actual está en (18) y hay que actualizarla 18 meses.

- Como los pagos son mensuales y trimestrales, los tantos de la operación serán diferentes. En el primer tramo del: 9 %: 12 = 0,75 % mensual durante 18 meses y en el segundo tramo del 9 %: 4 = 2,25 % trimestral durante 6 trimestres (18 : 3). La ecuación financiera sería:

$$V_a = 2.500 \frac{1 - (1 + 0,0075)^{-18}}{0,0075} + \underbrace{25.000 (1 + 0,0075)^{-18}}_{\text{llevada a 0}} + 5.000 \frac{1 - (1 + 0,0225)^{-6}}{0,0225} \underbrace{(1 + 0,0075)^{-18}}_{\text{llevada a 0}}$$

$$+ 30.000 \cdot (1 + 0,0225)^{-6} \cdot (1 + 0,0075)^{-18}$$

$$V_a = 41.947,95 + 21.853,90 + 24.277,40 + 22.947,24 = 111.026,49 \text{ €}$$

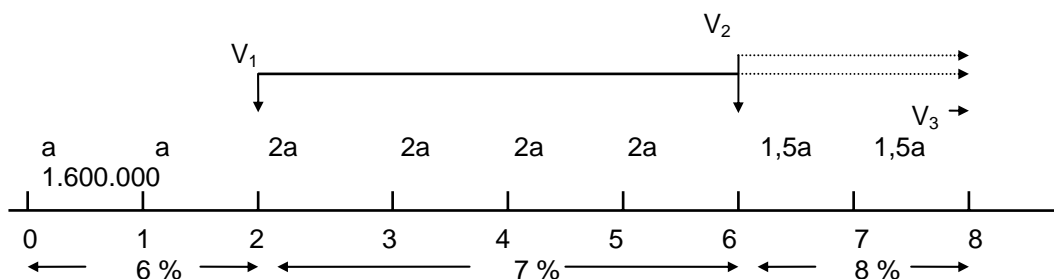
Actividad nº 18:

Se pretenden ahorrar 1.600.000 € en ocho años mediante el ingreso al comienzo de cada año de una cantidad de cuantía a en los dos primeros años, de cuantía $2a$

en los cuatro siguientes y de cuantía **1,5 a** en los restantes. Los tantos de valoración son los siguientes: Del 6 % en los dos primeros, del 7 % en los cuatro siguientes y del 8 % en el resto. ¿Cuál es la cuantía de los pagos?

Solución:

El esquema de la operación es el siguiente:



Estamos ante tres rentas:

- La primera de cuantía **a**, valorada al 6 % y cuyo valor final está en (2), por lo tanto habrá que capitalizarla cuatro años al 7 % y dos años al 8 %,
- La segunda de cuantía **2a**, valorada al 7 % con valor final en (6) por lo que habrá que capitalizarla años al 8 % y
- La tercera de cuantía **1,5a** con valor final en (8), valorada al 8 %.

La ecuación financiera será:

$$1.600.000 = a \cdot S_{\overline{2}|0,06} (1 + 0,06) (1 + 0,07)^4 (1 + 0,08)^2 + 2a \cdot S_{\overline{4}|0,07} (1 + 0,07) \cdot (1 + 0,08)^2 + 1,5a \cdot S_{\overline{2}|0,08} (1 + 0,08)$$

Operando $1.600.000 = 17.79065722 a$

Por lo tanto

$$a = 89.934,84 \text{ €} \quad 1,5a = 134.902,26 \text{ €} \quad \text{y} \quad 2a = 179.869,69 \text{ €}$$

Actividad nº 19:

Se construye un centro social y con el importe de una donación se van a pagar los gastos de mantenimiento que se estiman en 480.000 €. anuales en los primeros diez años y de 600.000 € en el resto de vida del centro. ¿Cuál es el importe de la donación, si se valora la operación al 6 % anual?

Solución:

Estamos ante el valor actual de dos rentas, la primera de 480.000 € anuales durante 10 años, cuyo valor actual está en (0) y la segunda de 600.000 € perpetua cuyo valor actual está en (10), por lo que habrá que actualizarla 10 años:

$$V_a = 480.000 \cdot \frac{1 - (1 + 0,06)^{-10}}{0,06} + 600.000 \cdot \underbrace{\frac{1}{0,06} \cdot (1 + 0,06)^{-10}}_{\text{llevada a 0}}$$

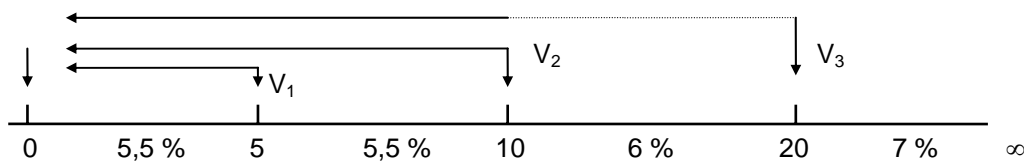
$$V_a = 3.532.841,78 + 5.583.947,77 = 9.116.789,55 \text{ €}$$

Actividad nº 20:

Una persona empezará a recibir dentro de cinco años una renta vitalicia y vencida de 50.000 €. anuales que está colocada en una entidad financiera que le ofrece una valoración del 5,5 % en los próximos diez años, el 6 % en los diez siguientes y el 7 % en el resto de la operación. ¿Cuál sería la cantidad a retirar hoy de una sola vez?

Solución:

Será el valor actual de una operación formado por tres rentas al estar valoradas con leyes distintas y por tener sus valores actuales en (5), (10) y (20) que habrá que actualizar. El esquema de la operación sería:



La ecuación financiera:

$$V_a = 50.000 \cdot \frac{1 - (1 + 0,055)^{-5}}{0,055} (1 + 0,055)^{-5} + 50.000 \cdot \frac{1 - (1 + 0,06)^{-10}}{0,06} (1 + 0,055)^{-10} + 50.000 \cdot \frac{1}{0,07} \cdot (1 + 0,055)^{-10} (1 + 0,06)^{-10}$$

$$V_a = 163.367,07 + 215.441 + 233.500,98 = 6.12.309,05 \text{ €}$$

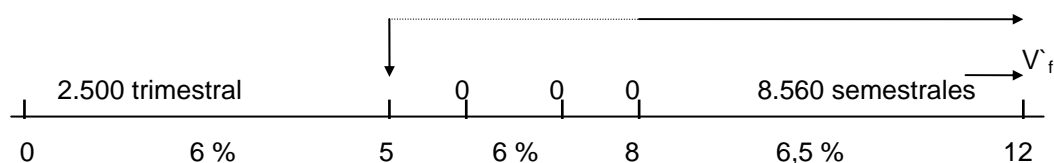
Actividad nº 21:

¿Qué capital tendremos ahorrado al cabo de 12 años, con la siguiente operación: Ingresos durante los cinco primeros años de 2.500 € al inicio de cada trimestre y valorados a un interés efectivo del 6 % anual, tres años sin realizar imposiciones y ocho ingresos semestrales anticipadas de 8.560 € cada uno valorados al 6,5 % efectivo anual?

Solución:

El esquema de la operación sería:

$$V_f$$



Es decir tenemos tres rentas, lo que sucede que una de ellas es de valor 0 y no hace falta tenerla en cuenta. La primera es trimestral y anticipada valorada al 6 %, con valor final en (5), y el final de la operación en (12), por lo tanto habrá que capitalizarla 7 periodos anuales, pero valorada al 6 % cinco años y al 6,5 % cuatro años. La segunda renta se inicia en (8) con ocho pagos semestrales y con valor final en el término de la operación.

El tanto trimestral: $(1 + 0,06)^{1/4} - 1 = 0,014673846$, con $5 \cdot 4 = 20$ capitales

El tanto semestral equivalente: $(1 + 0,065)^{1/2} - 1 = 0,03198837$

$$\begin{aligned}
 V_f = & 2.500 \cdot \frac{(1 + 0,0146738)^{20} - 1}{0,0146738} \cdot (1 + 0,0146738) (1 + 0,06)^3 (1 + 0,065)^4 + \\
 & 8.560 \cdot \frac{(1 + 0,031988)^8 - 1}{0,031988} \cdot (1 + 0,0146738)
 \end{aligned}$$

$$V_f = 89.586,99 + 79.109,76 = 168.696,75 \text{ €}$$

□ Rentas irregulares.

La finalidad de este apartado es comprobar a través de los distintos ejercicios propuestos la utilidad que las propiedades asociativa y disociativa de las rentas, tienen a la hora de resolver situaciones que no se amoldan a las características definidas en una renta normal. Comprobaremos como cualquiera de dichas propiedades puede emplearse en la resolución de problemas diversos, con lo que los conceptos de suma de capitales y equivalencia de capitales en cualquier punto han de estar perfectamente comprendidos para asumir estas formas de resolución de problemas.

Actividad nº 22:

Un señor va a recibir diez pagos de 20.000 €. cada 18 meses, a partir de la fecha de hoy, y quiere cambiar dicha renta por una vivienda. ¿Cuál es el valor de ésta, si se valora la operación a un interés efectivo anual del 5 %?

Solución:

- En este caso tenemos la irregularidad en el vencimiento, ya que los capitales lo hacen cada dieciocho meses (cada 1,5 años). La forma más cómoda será adecuar el tanto al vencimiento del capital, es decir buscamos un tanto en el que el anual está contenido 1,5 veces, por lo tanto para $m = 1,5$:

$$i = (1 + 0,05)^{1,5} - 1 = 0,07592983043 \text{ cada año y medio}$$

Ahora es una renta constante anticipada de 10 pagos y vencimiento periódico valorada al 7,592983 %

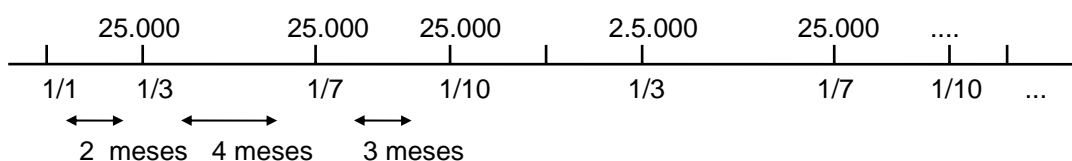
$$V_a = 20.000 \cdot \frac{1 - (1 + 0,0759298)^{-10}}{0,0759298} (1 + 0,0759298) = 147.080,32 \text{ €}$$

Actividad nº 23:

Se ha contratado a comienzos del presente año, el suministro de materia prima con un proveedor con el que se ha llegado a un acuerdo por diez años, en el que se especifica que todas las entregas de material de cada año, se abonarán mediante tres pagos los días 1 de marzo, 1 de julio y 1 de octubre de 25.000 € cada uno. Calcular el valor actual de la operación a un tanto de valoración del 10 % anual.

Solución:

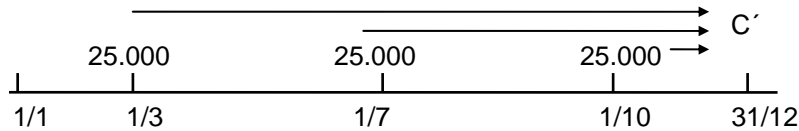
El esquema de la renta es el siguiente:



Como podemos comprobar aún siendo iguales los capitales la periodicidad de sus vencimientos no es constante. Una forma de calcular el valor actual de la operación sería la

actualización de los capitales uno a uno, lo que supondría para un periodo de 10 años, la actualización de 30 capitales, solución no operativa. Las posibles soluciones serían:

- Aplicar la solución asociativa, buscando un capital anual equivalente a los tres dados para hacerlo coincidir con el periodo de capitalización:



$$C' = 25.000 (1 + 0,10)^{3/12} + 25.000 (1 + 0,10)^{6/12} + 25.000 (1 + 0,10)^{10/12}$$

$$C' = 78.889,68 \text{ € anuales,}$$

Por lo tanto ahora ya es una renta constante de vencimiento anual a tanto anual:

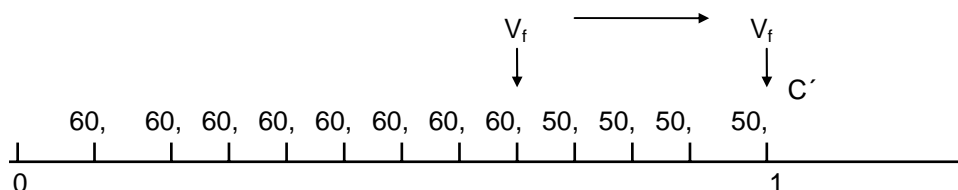
$$V_a = 78.889,68 \cdot \frac{1 - (1 + 0,10)^{-10}}{0,10} = 484.742,91 \text{ €}$$

Actividad nº 24:

Dada la estructura productiva de una sociedad, los costes salariales ascienden a 60.000 € mensuales en los ocho primeros meses del año y 50.000 € en los restantes. Calcular el valor actual de los salarios de los próximos 10 años si se valora la operación a un tanto nominal del 12 % anual

Solución:

Estamos en una situación parecida a las anteriores, con la salvedad de que ahora los capitales son doce por año, pero diferentes. Si empleamos la solución asociativa, calcularemos el capital anual equivalente:



Se nos forman dos rentas, una de ocho capitales de 60.000 € mensuales cuyo valor final está en el mes octavo, por lo que está anticipada 4 meses y la segunda de cuatro capitales de 50.000 € mensuales cuyo valor final coincide con el final del año. El tanto mensual será: $i_m = 0,12:12 = 0,01$

$$C' = 60.000 \cdot \frac{(1 + 0,01)^8 - 1}{0,01} (1 + 0,01)^4 + 50.000 \cdot \frac{(1 + 0,01)^4 - 1}{0,01} = 720.346,17 \text{ € anuales}$$

Ahora al ser el capital anual necesitamos el efectivo anual equivalente al 1 % mensual:

$$i = (1 + 0,01)^{12} - 1 = 0,12682503 \text{ y el valor de la renta será:}$$

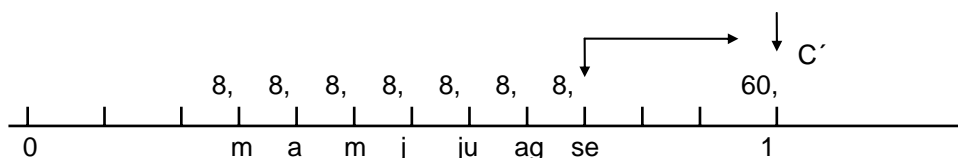
$$V_a = 720.346,17 \cdot a_{10|0,12682503} = 3.958.879,74 \text{ €}$$

Actividad nº 23:

Calcular el valor actual de una renta de 20 años de duración, valorada al 1 % mensual si sólo existen pagos de marzo a septiembre por un importe de 8.000 €. Más uno adicional al final de cada año de 60.000 €.

Solución:

- Utilizando la propiedad asociativa, por ser la más cómoda, vamos a calcular el capital anual equivalente, siendo el esquema de la operación el siguiente:



$$V_f = 8.000 \cdot \frac{(1 + 0,01)^{-7} - 1}{0,01} \cdot (1 + 0,01)^3 + 60.000 = 119.456,90 \text{ € anuales}$$

Ahora necesitamos el tanto anual para la renta anual: $i = (1 + 0,01)^{12} - 1 = 0,12682503$

El valor hoy será:

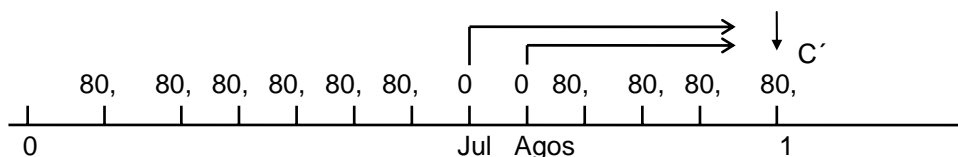
$$V_a = 119.456,09 \cdot \frac{1 - (1 + 0,126825)^{-20}}{0,126825} = 855.430,98 \text{ €}$$

Actividad nº 24:

Calcular el valor actual de una renta valorada a un tanto nominal del 9 %, de 20 años de duración y cuantía de 80.000 €. mensuales, si durante los meses de julio y agosto no se efectúan pagos.

Solución:

Calcularemos el capital anual equivalente, como en el caso anterior, siendo el interés mensual del 9 %: $12 \cdot 0,75 \% = 0,75 \%$.



Podemos calcular el capital final como si en los meses de julio y agosto hubiese pagos y después restarlos:

$$V_f = 80.000 \cdot S_{12|0,0075} - 80.000 (1 + 0,0075)^5 - 80.000 (1 + 0,0075)^4 = 835.134,43 \text{ €}$$

El tanto anual equivalente: $i = (1 + 0,0075)^{12} - 1 = 0,09380689$

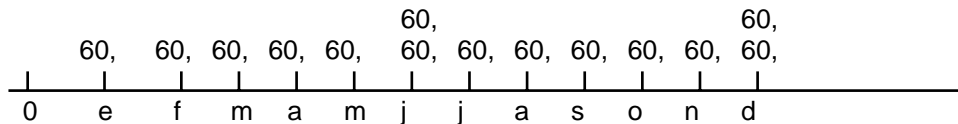
El valor hoy será: $V_a = 835.134 \cdot \frac{1 - (1 + 0,093806)^{-20}}{0,093806} = 7.421.174,25 \text{ €}$

Actividad nº 25:

Calcular el valor actual de una renta de 14 pagos cada año de 60.000 €, coincidiendo en julio y diciembre dos pagos, valorando la operación al 9 % nominal anual durante 20 años.

Solución:

Este tipo de renta es muy utilizado en la práctica para la financiación de coches, viviendas, etc. su esquema gráfico sería:



- Si aplicamos la propiedad asociativa, tendremos un capital anual equivalente de:

$$V_f = 60.000 \cdot S_{12|0,0075} + 60.000 (1 + 0,0075)^6 + 60.000 = 873.206,32 \text{ €}$$

Ahora necesitamos el interés anual equivalente: $(1 + 0,0075)^{12} - 1 = 0,093806897$
Siendo el valor actual de la operación:

$$V_a = 873.206,32 \cdot \frac{1 - (1 + 0,093806)^{-20}}{0,093806} = 7.759.488,80 \text{ €}$$

□ Cálculo de saldos financieros de una operación: La Reserva matemática.

Con este apartado volvemos a insistir en el concepto de la reserva matemática como aquella que nos permite conocer cómo está una operación financiera en un momento determinado: Cuánto llevo ahorrado hasta la fecha, cuánto me queda por devolver de un préstamo, cuánto debería pagar hoy para cancelar una deuda, etc. Tenemos que recordar que al trabajar en compuesta la equivalencia financiera se cumple en cualquier punto de la operación, lo cuál nos permite formular de una manera más sencilla la ecuación financiera que necesitemos.

Actividad nº 26:

Las condiciones de compra de una vivienda, a un nominal del 6 % anual son:

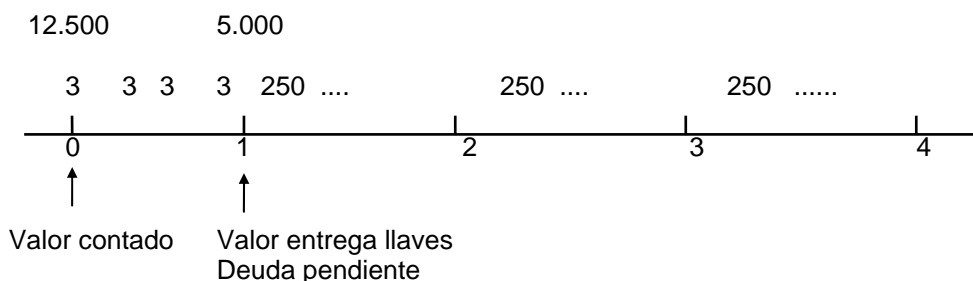
- Entrada de 12.500 € y un año realizando pagos trimestrales de 3.000 € cada uno.
- Al finalizar los anteriores, se abonan 5.000 € coincidiendo con la entrega de las llaves.
- El resto en tres años mediante pagos mensuales de 250 €.

Se pide calcular:

- Capital desembolsado a la entrega de las llaves.
- Deuda pendiente tras la entrega de las llaves.
- Precio al contado del piso.

Solución:

- En este ejercicio como existen dos formas de pago en la operación, dará lugar a dos tantos efectivos: El tanto trimestral: $6\% : 4 = 1,5\%$ y el tanto mensual: $6\% : 12 = 0,5\%$. La representación gráfica de la operación sería:



- a.- Capital desembolsado a la entrega de las llaves. El punto de valoración es (1) momento de la entrega, como vamos hacia el futuro, a nuestra izquierda, se planteará el valor final de una renta o se capitalizará:

$$V_f = 12.500 (1 + 0,015)^4 + 3.000 \cdot S_{4|0,015} + 5.000 = 30.539,75 \text{ €}$$

- b.- En estos momentos quedan por pagar 36 pagos mensuales de 250 €, como valoramos hoy cantidades futuras, a nuestra derecha, se ha de plantear el valor actual de una renta o actualizar capitales.

$$V = 250 \cdot a_{36|0,005} = 8.217,75 \text{ €}$$

- c.- El precio al contado será la suma en (0), de todos los pagos a efectuar. Como en los dos apartados anteriores ya hemos calculado lo pagado hasta (1) y lo pendiente de pagar en (1), si ambas cantidades se suman en (0), tendremos el valor al contado:

$$V_a = 30.539,75 (1 + 0,015)^{-4} + 8.217,75 (1 + 0,015)^{-4} = 36.516,71 \text{ €}$$

Si tomamos toda la operación en su conjunto el valor al contado, será la suma de todos pagos a efectuar valorados en (0):

$$V_a = 12.500 + 3.000 \cdot a_{4|0,015} + 5.000 (1 + 0,015)^{-4} + 250 \cdot a_{36|0,005} (1 + 0,015)^{-4}$$

$$V_a = 36.516,71 \text{ €}$$

Actividad nº 27:

Un señor adquiere una vivienda abonando como entrada 5.000 €, y el resto durante los próximos diez años a razón de 600 € trimestrales. Si se valora a un tanto nominal del 12 % anual, se pide:

- Valor al contado del piso.
- Si no abonase nada en los primeros doce pagos ¿Cuánto abonará en el trece para ponerse al día?
- Si en el caso anterior decide, no ponerse al día y la deuda acumulada repartirla en los pagos restantes. ¿Cuál será la cuantía de éstos?
- Si después de efectuados ocho pagos, decide cancelar toda la deuda ¿Cuánto pagará?

Solución:

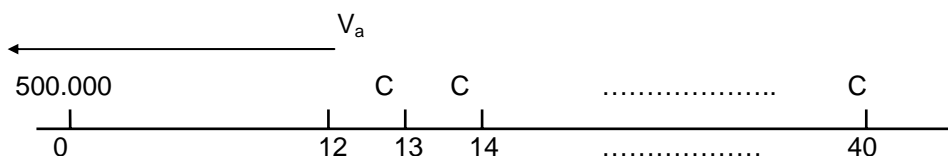
- a.- Será el valor hoy (0), de todos los pagos acordados, por lo tanto será el valor actual de una renta constante de 600 € durante $10 \cdot 4 = 40$ trimestres, valorada al $12 \% : 4 = 3 \%$ trimestral:

$$V_a = 5.000 + 600 \cdot a_{40|0,03} = 18.868,86 \text{ €}$$

- b.- Supondrá el pago en (13) de los doce pagos aún no efectuados más el correspondiente al momento actual, el trece, por lo tanto como vamos hacia el futuro será el valor final de una renta constante de trece periodos valorada al 3 %

$$V_f = 600 \cdot S_{13|0,03} = 9.370,67 \text{ €}$$

- c.- Si no se pone al día tendremos la siguiente situación: Un valor al contado en (0), y una renta constante de cuantía C, que se inicia en el trimestre número trece, por lo tanto habrá que actualizarla hasta (0). El valor de la vivienda ya conocemos que es de 18.868,86 € que es el valor actual de la operación:



$$18.868,86 = 5.000 + C \cdot a_{28|0,03} (1 + 0,03)^{-12}, \text{ operando, } C = 1.053,80 \text{ €}$$

- d.- Si ya ha efectuado ocho pagos, quedan pendientes treinta y dos pagos de 600 €, el valor actual de dichos pagos futuros será el valor de la deuda a liquidar:

$$V_a = 600 \cdot a_{32|0,03} = 12.233,26 \text{ €}$$

Actividad nº 28:

Una pareja de novios se casará dentro de un año y decide hoy la compra de un piso. La inmobiliaria les informa de sus condiciones de venta: Una entrada de 18.000 €. A la entrega de las llaves dentro de un año, se abonarán 10.000 €, el resto en 10 años, mediante pagos mensuales constantes de 500 €, y cada seis meses coincidiendo con las pagas extras de junio y diciembre, desembolsarán 600 € más.

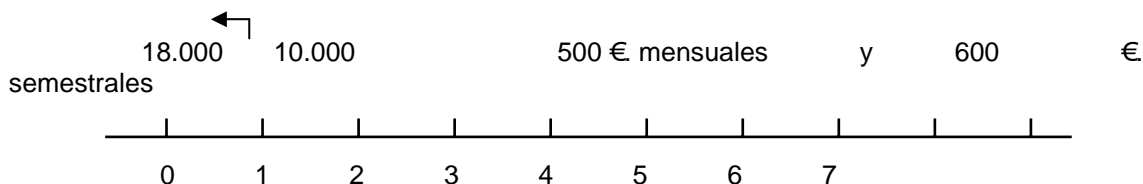
Si la operación se valora al 5 % efectivo en el primer año y al 6 % nominal anual en el resto. ¿Cuál es el valor al contado del piso?

Los novios dicen que no pueden afrontar el pago de la entrada y solicitan su pago mediante entregas mensuales durante ese año hasta la entrega de las llaves, proposición que es aceptada por la inmobiliaria pero a un tipo de interés efectivo del 6 % anual ¿Cuál será la cuantía de los pagos mensuales?

Y si deciden iniciar un plan de ahorro a un año, para así disponer del dinero que necesitan a la entrega de las llaves, mediante entregas mensuales anticipadas valoradas a un tanto nominal del 6 % ¿Qué cantidad han de ingresar?

Solución:

- El valor al contado será la suma en (0) de todos los pagos a realizar: 18.000 € (0) , 10.000 € (1) que habrá que actualizar, una renta mensual que se inicia en (1) y como la operación se inicia en (0) habrá que actualizarla y otra renta semestral en las mismas condiciones que la anterior ya que son simultáneas. Los tantos a utilizar serán el 6 %: $12 = 0,5\%$ mensual y el semestral del 6 %: $2 = 3\%$



$$V_a = 18.000 + 10.000 (1 + 0,05)^{-1} + 500 \cdot a_{120|0,005} \cdot (1 + 0,05)^{-1} + 600 \cdot a_{20|0,03} \cdot (1 + 0,05)^{-1}$$

$$V_a = 18.000 + 8.523,81 + 42.892,12 + 8.501,41 = 78.917,34 \text{ €}$$

NOTA: Hemos utilizado el 5 % en las actualizaciones porque ya es efectivo.

- Si queremos sustituir el pago de 18.000 € en (0) por una renta mensual equivalente, éste valor será el actual de una renta mensual de un año de duración, al 0,5 % mensual:

$$18.000 = C \cdot a_{12|0,005}$$

$$\text{Operando } C = 1.549,20 \text{ €}$$

- Si realizasen la operación de ahorro, necesitamos el valor final de una renta valorada al 6 %: $12 = 0,5\%$ mensual:

$$10.000 = C \cdot S_{12|0,005} (1 + 0,005)$$

$$\text{Operando, } C = 806,63 \text{ € mensuales.}$$

Actividad nº 29:

Se ha contraído una deuda a amortizar en 12 pagos trimestrales de 2.300 € cada uno, a un tanto de valoración del 7 % nominal anual. Se pide:

- Cuánta de la deuda contraída.
- Si no se abonase nada en los tres primeros pagos ¿Cuánto se abonará en el cuarto para ponerse al día?
- Si durante los cuatro primeros pagos no se abonase nada ¿Cuál sería la nueva cuota a pagar para amortizar la deuda en los ocho pagos restantes?
- Si efectuado el octavo pago se decidiese saldar la deuda ¿Cuánto se abonaría?

Solución:

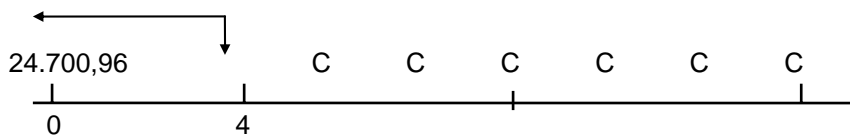
- a.- El valor de la deuda será el valor actual de los pagos. Es una renta de 12 pagos y valorada al 7 %: $i = 1,75\%$ trimestral:

$$V_a = 2.300 \cdot a_{12|0,0175} = 24.700,96 \text{ €}$$

- b.- Se pagarán los tres pagos no efectuados, más el cuarto y los intereses devengados, como valoramos el final del primer año, los pagos anteriores no efectuados será el valor final de esos pagos.

$$V_f = 230.000 \cdot S_{4|0,0175} = 944.433 \text{ €}$$

- c.- El esquema de la operación es el siguiente:



Pagar la misma deuda pero en ocho pagos que se inician en (4), por lo que habrá que actualizarla hasta (0) donde está el valor actual de la operación:

$$24.700,96 = C \cdot a_{8|0,0175} (1 + 0,0175)^{-4}$$

$$\text{Operando, } C = 3.575,39 \text{ €}$$

- d.- En el momento en que se quiere saldar la deuda faltan cuatro pagos por realizar, por lo que será el valor actual de dicha renta:

$$V_a = 2.300 \cdot a_{4|0,0175} = 8.811,17 \text{ €}$$

□ La problemática de los pagos en su número.

El objetivo fundamental de este apartado es insistir que estamos ante operaciones que son resultado de la suma de multitud de capitales, cuando se utilizan las fórmulas del valor final o del actual para efectuar estas sumas, el factor n no representa el tiempo en sí mismo sino el número de capitales que estamos sumando. Lo que sucede es que si las rentas son normales el número de capitales suele coincidir con la duración de la operación. Con estos ejercicios aprenderemos a interpretar el concepto del número de pagos ante situaciones anómalas.

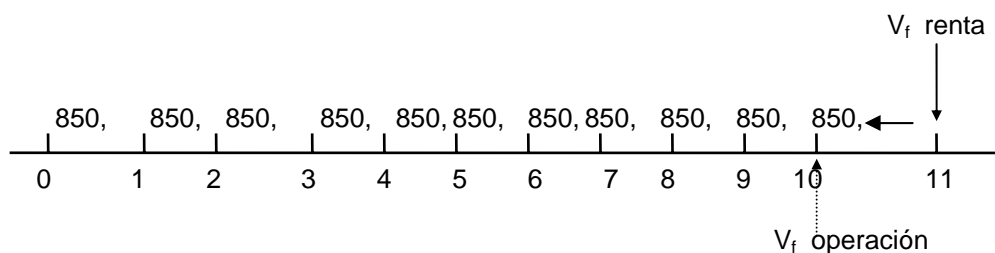
Actividad nº 30:

Calcular el valor de las siguientes operaciones:

- a.- El final de una renta semestral, anticipada de 850.000 €, valorada al 7 % nominal anual y de cinco años y cuatro meses de duración
- b.- El final de una renta anual valorada al 6 % anual, de 420.000 € anticipadas, durante tres años y seis meses.

Solución:

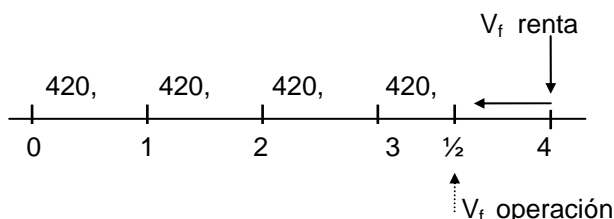
- a.- Al vencer los capitales al principio del semestre en la duración de la operación se producen 11 vencimientos ya que el último capital vence al principio de los cuatro últimos meses. Cambiando el tanto a semestral, será $7\% : 2 = 3,5\%$. Su gráfico sería:



Como estamos sumando 11 capitales el valor se sitúa al final del semestre onceavo, mientras que el de la operación dos meses antes, por lo tanto el valor final obtenido habrá que actualizarlo dos meses:

$$V_f = 850.000 \cdot S_{11|0,03440804328} \cdot (1 + 0,035) (1 + 0,035)^{-2/6} = 11.429.845,36 \text{ €}$$

- b.- El esquema de la operación es el siguiente:



Al ser anticipada en los tres años y medio, vencen cuatro capitales, el último al principio del cuarto año, como el valor final de la renta se sitúa al final del cuarto año, al sumar 4 capitales y el de la operación seis meses antes, habrá que actualizarlo seis meses.

$$V_f = 420.000 \cdot S_{4|0,06} \cdot (1 + 0,06) (1 + 0,06)^{-6/12} = 1.891.655,99 \text{ €}$$

Actividad nº 31:

Calcular el valor de las siguientes operaciones:

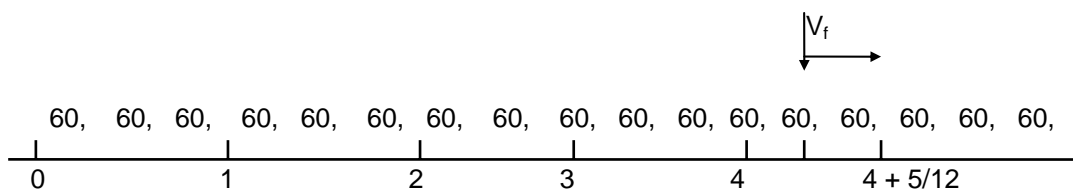
- El actual de una renta de 300.000 € semestrales y anticipadas, valorada al 8 % efectivo anual y de tres años y medio de duración.
- El final de una renta de 60.000 € trimestrales, valorada al 8 % nominal anual y de cuatro años y cinco meses de duración. Calcularla en el caso de ser vencida y anticipada.
- En el caso anterior el valor final como renta anticipada.

Solución:

- a.- Comprobamos que en la duración de la operación vencen 7 capitales semestrales, coincidiendo el valor final de la suma con el de la operación. Bastará con cambiar el tanto a semestral y los sumaremos. El tanto semestral será: $(1 + 0,08)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,0392304845$

$$V_a = 300.000 \cdot a_{\overline{7}|0,03923048} \cdot (1 + 0,03923048) = 1.876.588,42 \text{ €}$$

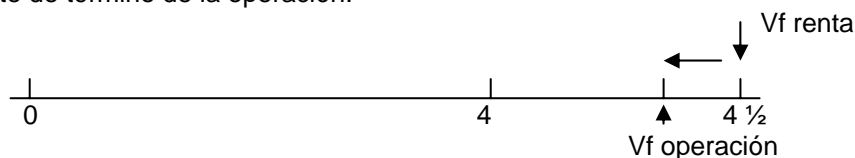
- b.- El esquema de la operación en el caso de ser pospagables para una duración de $(4 \cdot 12) + 5 = 53$ meses es:



En la operación vencen en los cuatro años 16 capitales trimestrales, y en los cinco meses sólo da lugar al vencimiento, al final del tercer mes, de un capital al ser vencida, pero el vencimiento de la operación es dos meses más tarde, por lo que habrá que capitalizar el valor final obtenido. El tanto trimestral será: $8 \% : 4 = 2 \%$.

$$V_f = 60.000 \cdot S_{\overline{17}|0,02} \cdot \underbrace{(1 + 0,02)^{\frac{2}{3}}}_{\text{capitalizada dos meses}} = 1.216.681,02 \text{ €}$$

- c.- En el caso de ser anticipada, en los cuatro años vencen 16 capitales y en los cinco meses da lugar al vencimiento de otros dos, uno al principio del primer mes y el otro al principio del cuarto mes, por lo que la operación estará formada por 18 capitales y su suma se situará al final del trimestre 18 (en el mes $18 \cdot 3 = 54$) por lo que habrá que actualizarlo un mes, que es el punto de término de la operación:



$$V_f = 60.000 \cdot S_{\overline{18}|0,02} \cdot (1 + 0,02) \cdot (1 + 0,02)^{-1/3} = 1.301.811,99 \text{ €}$$

Actividad nº 32:

Un señor inicia una operación de ahorro depositando el 2 de julio 1.500 €. en una entidad de ahorro y acuerda entregar cada semestre 1.500 € en los próximos diez años a un interés nominal del 6 %. Si al finalizar la operación quiere recibir una renta mensual de 850 €. ¿Cuántas mensualidades recibirá, si el interés efectivo de la nueva operación es el 6,5 %?

Solución:

- Es una renta en valor final, al ser una operación de ahorro, semestral, de $m = 2$, y anticipada al iniciarse el 2 de julio con el ingreso de los primeros 1.500 €. y de 10 años de duración. El dinero ahorrado se va a retirar mediante una renta, por lo que el valor final anterior se transforma en valor actual de la siguiente operación.
- El número de entregas es de $10 \cdot 2 = 20$ y el interés semestral 6 %: $2 = 3$ % y el capital ahorrado será de :

$$V_f = 1.500 \cdot S_{20|0,03} \cdot (1 + 0,03) = 41.514,73 \text{ €}$$

- El valor final ahora es el actual de la nueva operación donde n es el dato desconocido. El tanto mensual será: $(1 + 0,065)^{1/12} - 1 = 0,005261694$

$$41.514,73 = 850 \cdot a_{n|0,005261694} \quad \text{operando}$$

$$48,840858 = \frac{1 - (1 + 0,005261694)^{-n}}{0,005261694} \quad \text{despejando la potencia}$$

$$0,743014332 = (1 + 0,005261694)^{-n} \quad \text{tomando logaritmos}$$

$$\log 0,74426217 = -n \cdot \log 1,005261694 \quad \text{donde}$$

$n = 56,60$, son 56 las mensualidades completas que recibirá, más la 57 por un valor inferior para retirar todo el dinero ahorrado

Actividad nº 33:

Un señor desea ahorrar 7.500 €, para lo cual concierta con un banco la entrega de pagos semestrales anticipados de 250 €. El banco le abona un interés del 5 % nominal anual. Se pide calcular el número de depósitos a realizar. ¿Cuál será la cuantía extra a depositar junto al último pago para completar los 7.500 €?

Solución:

- Estamos ante el valor final de una renta anticipada, a un interés semestral del 5 %: $2 = 2,5$ % El número de depósitos a realizar será:

$$7.500 = 250 \cdot S_{n|0,025} (1 + 0,025) \quad \text{operando}$$

$$1,731707317 = 1,025^n \quad \text{tomando logaritmos}$$

$$\log 1,731707317 = n \cdot \log 1,025 \quad \text{despejando } n$$

$$n = 22,23 \text{ pagos, que completos serán 22 pagos}$$

- Como pregunta la cuantía extra a depositar junto con el último, quiere decir que mantenemos los 22 pagos, pero incrementándole el valor del último. La ecuación financiera será el valor de la renta de 21 pagos, con valor final en (21), por lo tanto hay que capitalizarla hasta (22), más la cuantía C' , a depositar al principio del último semestre que completará los 7.500 €

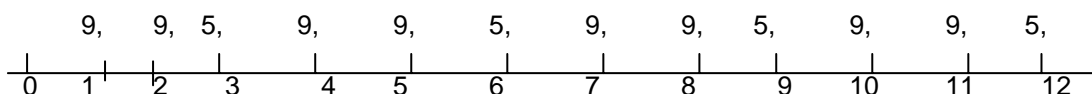
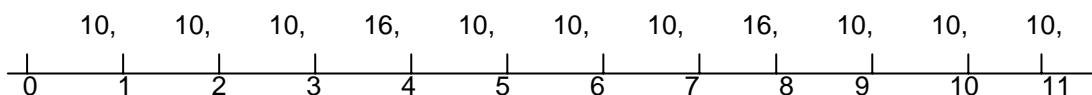
$$7.500 = 250 \cdot S_{21|0,025} \underset{\text{Prepagable}}{(1 + 0,025)} \underset{\text{Diferida}}{(1 + 0,025)} + C' \underset{\text{Prepagable}}{(1 + 0,025)}$$

Operando, $C' = 351,36$ € que será la cuantía del pago nº 22.

13.- Ejercicios propuestos.

* Cálculos generales.

- 1.- Dadas las siguientes operaciones, valoradas a un interés anual del 3 %, se pide calcular su valor inicial y final.



- 2.- Realizar la representación gráfica y calcular la suma, de las siguientes operaciones, valoradas a un interés anual del 5 %, en su versión anticipada y vencida.
- El actual de 300 € trimestrales durante tres años.
 - El final de 500 € mensuales durante dos años.
 - El actual de una renta semestral de 1.000 € durante cuatro años.
- 3.- Realizar la representación gráfica de la siguiente operación, calculando su valor inicial y final, valorada a un interés anual del 3 % y formada por los siguientes capitales que vencen al final de cada año: 1.000 €, 1.500 €, 3.000 € y 4.000 €
- 4.- Realizar la representación gráfica de la siguiente operación, calculando su valor inicial y final, valorada a un interés semestral del 2 % y formada por los siguientes capitales: 3.000 € con vencimiento a los tres meses, 1.500 € con vencimiento a los ocho meses, 4.200 € con vencimiento a los doce meses, 5.200 € con vencimiento a los dieciséis meses y 6.000 €
- 5.- Calcular el valor de las siguientes rentas valoradas a un interés nominal del 6 %.
- El actual de 3.000 € trimestrales durante cinco años.
 - El final de 5.000 € mensuales durante cinco años.
 - El actual de una renta perpetua semestral de 10.000 € y anticipada.
- 6.- Un señor tiene en la actualidad una deuda de 8.500 € que quiere liquidar mediante pagos mensuales vencidos. Si el interés nominal que le cobran es del 4 % y quiere librarse de ella en seis años ¿Cuál será el importe de cada pago?
- 7.- Calcular el valor actual de las siguientes rentas, valoradas al 4 % anual nominal:
- De una renta vencida de 850 €, bimestrales durante 12 años.
 - De una renta semestral anticipada de 3.500 € y durante 23 años.
 - De una renta trimestral, anticipada de 650 €, durante 12 años.
- 8.- Calcular el valor de las siguientes rentas valoradas a un interés efectivo del 6 %.
- El actual de una renta vencida de 500 € trimestrales y duración de 15 años.
 - El final de una operación de ahorro, con depósitos anticipadas, de 1.000 € semestrales, durante 10 años, si retiramos lo ahorrado dos años después.
 - El actual de una operación de ahorro con 60 depósitos de 100 € mensuales, si el primer depósito se realiza a los cinco meses de iniciada la operación.
 - El actual de una renta anual de 120 €, anticipadas, y de duración indefinida, si la operación se inicia tres años antes del devengo del primer capital.

- 9.- Calcular el valor de los siguientes gastos valorados a un interés nominal del 4 %, y por un periodo de 5 años.
- Los gastos por salarios suponen el pago mensual de 6.100 €, con el abono de dos pagas extras de igual cuantía a finales de junio y diciembre, más una paga de beneficios al finalizar cada año de 5.800 €.
 - Los gastos por compra de materiales suponen el desembolso de 23.000 € trimestrales.
 - Los gastos de mantenimiento ascenderán a 2.000 € mensuales y cada tres años los extras de mantenimiento ascienden a 5.000 €.
 - Los gastos de suministros suponen el desembolso bimestral de 600 €.
- 10.- Realizar la representación gráfica y calcular la suma de las siguientes operaciones, valoradas a un interés anual del 5 %, en su versión anticipada y vencida.
- El actual de ocho pagos de 300 € trimestrales si se empiezan a pagar dentro de seis meses.
 - El final de cinco ingresos de 500 € semestrales si los retiramos seis meses después de terminados de ingresar.
 - El actual de una renta semestral de 1.000 € durante dos años y de 500 € durante tres años.
- 11.- Calcular qué cantidad ha recibido hoy una persona en un sorteo si el banco le notifica que depositándolo allí podrá recibir una renta mensual 300 € durante los próximos diez años abonándole un interés nominal del 4 %.
- 12.- A una empresa le ofrecen la compra de una mina que tiene un periodo de explotación de 10 años, con unos ingresos trimestrales calculados en 175.000 € y unos gastos trimestrales de 35.000 €. Si la empresa espera una rentabilidad en la inversión del 6 % efectivo ¿Cuál será el precio máximo que pagaría?.
- 13.- Dadas las siguientes operaciones, se pide valorando a un 6 % nominal:
- El valor actual de los suministros de madera que se pagarán a razón de 800 € cuatrimestrales al inicio de cada periodo en los tres primeros años y de 200 € bimestrales en los tres siguientes.
 - El valor actual de los salarios que ascienden a 5.500 € mensuales, con abono de una paga de beneficios de 8.000 € a finales de diciembre.
 - El valor de otros suministros con pagos semestrales vencidos de 12.000 € durante un año y de 2.500 € anuales anticipada s en los siguientes.

✱ Operaciones formadas por más de una renta.

- 14.-Un empresario para la adquisición de diversos inmovilizados contrajo un préstamo a un interés nominal del 6 % anual, que acordó devolver del siguiente modo: Realizar pagos de 120 € mensuales durante los primeros 24 meses, un desembolso de 3.000 € al terminar éstos, y pagos de 240 € trimestrales durante los siguientes 36 meses. ¿Cuál es el importe de la deuda?.
- 15.-Calcular el valor actualizado de las siguientes compras de un fabricante de maderas con sus suministradores de materias primas a 10 años, con, con el siguiente detalle: La madera de pino se paga a razón de 15.000 € semestrales, valorando la operación a un interés del 2 % semestral en los cinco primeros pagos y del 1,5 % semestral en los siguientes y las maderas nobles las adquiere mediante pagos anuales anticipados de 12.500 €, en los cuatro primeros años y de 14.000 € en los siguientes, valorando la operación a un interés nominal anual del 6 %.
- 16.-Por otra parte, el fabricante abona los gastos de mantenimiento del siguiente modo, valorados a un tanto nominal del 4 % anual, durante el mismo periodo de tiempo.
 - El valor de los suministros de ferretería se pagan a razón de 48 € cuatrimestrales al inicio de cada periodo en los tres primeros años y a 22 € bimestrales en los siguientes
 - El valor de los salarios se estiman en 20.000 € mensuales, con abono de dos pagas extras de igual cuantía al final de julio y diciembre, más una paga de beneficios de 15.000 € a finales de octubre.
 - También ha firmado un contrato de adquisición de otros suministros que se empezarán a pagar pasados dos años, es decir al inicio del tercer año, con pagos semestrales anticipados de 600 € durante tres años y de 700 € anuales y anticipados en los siguientes.
- 17.-Calcular el capital que habrá ahorrado un señor que inició hace 9 años un plan de ahorro en una entidad financiera concertado a un interés nominal del 4 % anual, con las siguientes operaciones: Realizó entregas de 100 € mensuales durante los primeros 48 meses, después realizó un desembolso extra de 1.500 € al terminar los anteriores y durante el resto del tiempo, realizó entregas de 250 € trimestrales y anticipadas.
- 18.-Qué capital tendremos ahorrado al cabo de 12 años, con la siguiente operación: Ingresos durante los cinco primeros años de 2.500 € al inicio de cada trimestre y valorados a un interés efectivo del 6 %, tres años sin realizar imposiciones y ocho ingresos semestrales anticipada s de 8.560 € cada uno valorados al 6,5 % efectivo anual.
- 19.-¿Qué capital tendremos ahorrado al cabo de 15 años, con la siguiente operación: Ingresos durante los tres primeros años 500 € anticipados cada mes y valorados al 3 % nominal anual, dos años sin realizar imposiciones, al término de éstos realiza un ingreso extraordinario de 5.000 € y durante le resto ingresos trimestrales de 650 € valorados a un nominal del 4 % anual ?
- 20.-El día 1 de enero del presente año, en previsión de las futuras necesidades de renovación de las instalaciones industriales de la sociedad, su propietario inició un plan de ahorro a cinco años, acordando con el banco lo siguiente: Realizar imposiciones anticipadas de 500 € trimestrales durante los tres primeros años, pagos mensuales vencidas de 200 € los restantes años. Siendo el tipo de interés del 4 % nominal anual en los tres primeros años y del 5% nominal anual en los siguientes.
Se pide la cantidad total que habrá ahorrado en los años del plan y la cantidad pendiente de ahorrar al inicio del tercer año.

✖ Cálculos diversos.

- 21.-Juan sobrino de María ha sido declarado heredero universal, el banco le notifica que su herencia consiste en la percepción de las siguientes rentas valoradas a un interés nominal del 6 %.
- Una renta semestral de 5.000 € que percibe de unos Títulos del Estado durante los próximos diez años, momento en el que le entregarán 100.000 €.
 - Una renta mensual de 800 € de un Fondo constituido por Títulos Deuda Perpetua
 - Una renta trimestral de 12.000 € procedente de unos inmuebles de su propiedad.
- Si el Impuesto de Sucesiones a pagar en este caso es del 1 % del valor actual ¿Cuál es la cuantía a liquidar a la Hacienda Pública?
- 22.-Por la compra de un camión aún debemos catorce mensualidades de 850 € de una operación de financiación al 4 % anual. Si queremos liquidar la deuda cediendo a nuestro proveedor un depósito que hicimos en una cuenta hace ocho meses a un interés anual simple del 4 % anual de 10.000 € ¿Nos aceptarán la propuesta?
- 23.- Una sociedad realizó un plan de ahorro en las siguientes condiciones: En los tres primeros años realizó imposiciones al principio de cada mes de 750 € valoradas al 6 % nominal finalizadas éstas ingresó 3.500 €, y estuvo un año sin poder realizar imposiciones, reanudándolas con el ingreso al comienzo de cada semestre de 1.230 € durante los siguientes tres años valoradas ahora al 5 % nominal. Calcular la cuantía del capital ahorrado.
- 24.- A un señor le ofrecen las siguientes alternativas para realizar un plan de jubilación que le permita obtener un capital de 22.000 €
- Realizar pagos mensuales anticipadas durante cinco años de forma que en los dos primeros años sean de cuantía doble que los pagos de los tres últimos años, ofreciendo un interés mensual del 0,25 %.
 - Realizar pagos trimestrales durante cinco años valorados al 6 % anual nominal en los dos primeros años y al 5 % nominal en los tres siguientes.
 - Realizar pagos mensuales de 300 €, durante dos años, estar dos años sin realizar ninguna aportación y en los tres últimos años realizar pagos trimestrales constantes y anticipadas, valorando la operación a un 6 % nominal en los cuatro primeros años y al 5 % nominal en los tres siguientes. Se pide calcular:
 - a) La cuantía de los ingresos en cada caso.
 - b) El capital ahorrado, en cada caso, al finalizar el tercer año.
 - c) Y el valor de la renta mensual vitalicia a recibir si decide retirar 8.000 € en metálico, valorando la operación a un interés del 0,25 % mensual.
- 25.- El 1 de enero vendemos una nave industrial en las siguientes condiciones:
- Pago al contado de 36.150 €
 - Pagos mensuales vencidos de 300 € en los tres primeros años y de 2.000 € semestrales en los tres siguientes.
 - Dos pagos extraordinarios de 6.000 € cada uno, al finalizar el 3º y 6º año.
 - Duración de la operación: 6 años
 - Tipo de interés aplicado: El 4 % nominal anual en los tres primeros años y el 5 % nominal anual en los tres siguientes.
- ¿Cuál es el valor al contado de la nave?. Efectuados los pagos de los tres primeros años, incluido el adicional de 6.000 € ¿Cuál es la cuantía de la deuda pendiente?.
- 26.-Un empresario adquiere una máquina, por un valor al contado de 16.500 € a pagar con la entrega al contado de 5.000 € y el resto mediante pagos trimestrales durante los próximos 6 años, a un interés efectivo del 5,0625 % anual. Se pide:
- Calcular la cuantía de los pagos trimestrales.
 - Si realizado el quinto pago desea cancelar la deuda ¿Cuánto pagará?

Resulta que cuando va iniciarlos pagos, tras la entrega al contado, tiene dificultades financieras y no puede, llama a su proveedor y acuerda con él que los tres primeros pagos se los va a pagar juntos dentro de 18 meses y después seguirá con lo acordado ¿Cuánto pagará a los 18 meses?

- 27.-**Un empresario adquiere maquinaria diversa por la que ha abonando una entrada 50.000 €, y el resto va a pagarlo en los próximos diez años a razón de 600 € bimestrales, operación que le financia el proveedor a un tanto nominal del 6 % anual, se desea conocer:
- Valor al contado de la maquinaria.
 - Si no pudiese pagar nada en los primeros dos años ¿Cuánto pagaría al finalizar éstos para ponerse al día?
 - Si después de efectuados treinta pagos, decide cancelar toda la deuda ¿Cuánto pagaría?
- 28.-**Una sociedad adquiere hoy un vehículo cuyo coste al contado es de 350.000 €, acuerda con el vendedor aplazar el pago en las siguientes condiciones, a un interés del 5 % anual: Pagar al contado 100.000 € y realizar cinco pagos mensuales vencidos de 50.000 €, ¿El acuerdo alcanzado beneficia a alguna de las partes?. ¿Porqué?. Para que ninguna de las partes saliese perjudicada ¿Cuál sería la cuantía del pago al contado?.
- 29.-**Un empleado gana 1.300 € mensuales con dos pagas extras que cobra a finales de junio y diciembre. Decide iniciar en el año 2.000 un plan de jubilación a 20 años dedicando el 10 % de su sueldo y el 35 % de las pagas extras. El banco le va a pagar un interés nominal del 4 %. ¿Qué cantidad tendría ahorrada al finalizar el plan de ahorro?. Si durante el periodo comprendido entre los años 2.006 al 2.008 no pudo realizar ninguna aportación por dificultades financieras ¿Qué capital ahorró?.

*** Operaciones con rentas irregulares y problemática de los pagos..**

- 30.-** Hoy a enero del 2002 una sociedad tiene intención de adquirir un negocio turístico que proporciona unos ingresos mensuales estimados en 60.000 € en los meses de temporada alta (mayo, junio, julio, agosto, septiembre), y 36.000 € en los de temporada baja (marzo, abril, octubre y noviembre), permaneciendo cerrado el resto del año. A su vez acuerda con un proveedor que las entregas del suministro de los productos de alimentación para el restaurante, se abonarán cada año mediante tres pagos los días 1 de marzo, 1 de julio y 1 de octubre por sendos importes de 35.000 €, 25.000 € y 16.000 €. Se pide calcular el valor actual de la corriente de gastos, valorando la operación a un interés nominal del 6 %.
- 31.-** Una empresa obtuvo un préstamo de 100.000 € a devolver mediante pagos trimestrales constantes en 10 años y a un interés nominal del 6 % anual. ¿Cuál es la cuantía de los pagos trimestrales? ¿Cuánto deberá cuando haya realizado el pago número treinta?
Si al efectuar el pago número veintidós, realiza una aportación extraordinaria de 18.000 € ¿Cuál sería el nuevo pago trimestral a realizar?.
- 32.-** Calcular el valor de las siguientes rentas, realizando su representación gráfica:
- El final de una renta semestral anticipada de 8.500 €, valorada al 4 % anual y de cinco años y cuatro meses de duración.
 - El final de una renta anticipada anual de 42.000 € durante tres años y seis meses, valorada al 5 % anual
- 33.-** Un empresario ha retirado tres operaciones de ahorro que concertó con sendas entidades financieras, y en las siguientes condiciones:
- Con el BBVA, entregó pagos semestrales anticipadas de 5.120 €, valorados a un interés nominal del 7 % nominal anual durante los cinco años y cuatro meses que duró la operación.
 - Con la CAIXA, realizó entregas anuales anticipadas de 25.300 €, valoradas a un interés anual del 6 % durante los tres años y seis meses que duró la operación.
 - Con BANCAJA, realizó entregas trimestrales vencidas de 850 €, valoradas a un interés nominal del 5 %, durante los cuatro años y cinco meses que duró la operación.
- ¿Cuál es la cantidad que ha retirado?.
- 34.-** Un empresario concierta una operación de ahorro para conseguir un capital de 45.200 €, para lo cual acuerda con el banco la entrega de pagos semestrales de 1.500 € anticipados. El banco abona un interés del 5 % nominal anual. Se desea conocer:
- ¿Cuántos depósitos completos realizará?
 - ¿Cuál será la cuantía extra a depositar junto al último pago para completar la cantidad a ahorrar?.
 - ¿Cuál es la cuantía ahorrada al finalizar el segundo año?.

* **Cálculo del saldo de una operación.**

- 35.-**Un empresario adquiere una máquina, por un valor al contado de 50.000 € a pagar con la entrega al contado de 5.000 € y el resto mediante pagos trimestrales durante los próximos 6 años, a un interés efectivo del 5,0625 % anual. ¿Cuál será la cuantía de los pagos trimestrales?. Si realizado el octavo pago decide cancelar la deuda ¿Cuánto pagará?.
- 36.-**Un empresario adquiere una máquina, por un valor al contado de 16.500 € a pagar con la entrega al contado de 5.000 € y el resto mediante pagos trimestrales durante los próximos 6 años, a un interés efectivo del 5,09453 % anual. Se pide, calcular la cuantía de los pagos y si realizado el décimo pago desea cancelar la deuda entregando 6.500 € ¿Nos aceptarán la propuesta ?
- 37.-**Un empresario adquiere maquinaria diversa entregando como entrada 5.000 €, y el resto va a pagarlo en los próximos diez años a razón de 600 € bimestrales, operación que le financia el proveedor a un tanto nominal del 6 % anual, se desea conocer:
- Valor al contado de la maquinaria.
 - Si después de efectuados ocho pagos, cancela toda la deuda ¿Cuánto pagará?
- 38.-**Se ha comprado una nave industrial por un precio de 850.000 €, las condiciones de pago son: Una entrada de 200.000 €, dos años efectuando pagos trimestrales de 10.000 €, otros tres años efectuando pagos semestrales de 25.000 € y el resto mediante pagos mensuales constantes durante seis años. Si la operación tiene un coste del 6 % nominal anual, se pide:
- Importe de los pagos mensuales.
 - Importe de la deuda tras terminar los pagos trimestrales.
 - Importe de la deuda tras terminar los pagos semestrales.
 - Importe de la deuda al finalizar el sexto año.
- 39.-**Un señor realiza imposiciones mensuales anticipadas de 300 € una cuenta de ahorro que paga un interés nominal del 4 % para los próximos diez años. Se pide:
- Importe que habrá ahorrado al final de los diez años.
 - Si desea recibir una renta trimestral en los próximos cinco años ¿Qué cantidad recibirá?
 - ¿Qué cantidad lleva ahorrada la finalizar el quinto año?.
 - ¿Qué cantidad le queda pendiente de ahorrar al finalizar el séptimo año?
- 40.-**Se ha comprado una nave industrial por un precio de 700.000 €, las condiciones de pago son: Una entrada de 200.000 €, dos años sin efectuar pago alguno y al final de éstos se entregarán 250.000 € más, el resto mediante pagos mensuales constantes durante ocho años. Si la operación tiene un coste efectivo del 5 % en los dos primeros años, del 6 % en los dos siguientes y del 6,5 % en los restantes, se pide:
- Importe de los pagos mensuales.
 - Importe de la deuda tras efectuar el pago de los 250.000 €
 - Importe de la deuda al finalizar el sexto año.
- 41.-** Una empresa ha adquirido maquinaria por la que ha abonando una entrada 3.000 €, y el resto va a pagarlo en los próximos diez años a razón de 360 € trimestrales, operación que le financia el proveedor a un tanto nominal del 5 % anual, se desea conocer:
- a.- Valor al contado de la maquinaria.
 - b.- Si no abonase nada en los primeros doce pagos ¿Cuánto abonará en el trece para ponerse al día?
 - c.- Si no abonase nada en los seis primeros pagos acordados, ¿Cuál sería la cuantía del nuevo pago trimestral para cancelar la deuda?.
 - d.- Si después de efectuados ocho pagos, decide cancelar toda la deuda ¿Cuánto pagará?

- 42.-** Una empresa ha adquirido un camión de reparto a pagar mediante 12 pagos trimestrales de 6.120 €. cada uno, con una entrada de 3.000 €, cobrándole el concesionario un interés anual del 6 % nominal. Se desea conocer:
- El valor al contado del camión.
 - Si decidiese saldar la deuda efectuado el octavo pago ¿Cuánto se abonaría?.
 - Si durante los cuatro primeros pagos no se abonase nada ¿Cuál sería la nueva cuota a pagar para amortizar la deuda en los ocho pagos restantes?.
 - Si efectuado el octavo pago, por dificultades financieras ha de estar seis meses sin realizar abono alguno ¿Cuál sería la cuantía del nuevo pago para terminar en la fecha prevista?.
- 43.-** Una empresa ha adquirido un equipo informático financiado a un interés nominal del 6 % anual y con las siguientes condiciones de pago:
- Una entrada de 6.150 €. y un año con pagos trimestrales de 1.250 €.
 - Al finalizar los anteriores, abono de 3.000 €.
 - El resto en tres años mediante pagos mensuales de 150 €.
- Se desea conocer: Capital desembolsado a la entrega de los 3.000 €. Deuda pendiente tras la entrega de los 3.000 € y precio al contado del equipo informático.
- 44.-** Se vende una nave industrial en las siguientes condiciones: Un pago al contado de 60.000 €, pagos mensuales de 300 € durante seis años, realizando dos pagos extraordinarios de 6.000 € al finalizar el tercer y quinto año, aplicando un interés del 6 % nominal. se pide:
- Valor al contado de la nave.
 - Importe pendiente de cobrar al finalizar el tercer año.
 - Si al finalizar el cuarto año me ofrecen 12.000 € para cancelar la deuda ¿Aceptaremos la propuesta?
- 45.-** Un señor acuerda con su entidad financiera realizar un plan de ahorro en las siguientes condiciones: Realizar imposiciones mensuales anticipadas durante diez años, valoradas al 4 % nominal anual para conseguir ahorrar un capital de 40.000 €. Realizada la entrega número treinta se efectúa una revisión del tipo de interés a aplicar a la operación que sube al 6 % nominal anual. Se pide:
- Cantidad trimestral con la que inició la operación.
 - Cantidad que ha ahorrado tras depositar el vigésimo pago.
 - Cantidad trimestral que ha de ingresar, a partir del pago número treinta (al cambio del tipo de interés), si mantiene la condición de ahorrar los 40.000 €.
- 46.-** Un empresario adquiere una nave industrial con la entrega al contado de 25.000 €, el resto se pagará en diez años mediante pagos mensuales constantes de 850 € en los cinco primeros años , de 2.500 € trimestrales en los cinco siguientes, con dos aportaciones extraordinarias de 10.000 € al finalizar el cuarto y séptimo año. Si la operación se valora 4 % en los cinco primeros años y al 6 % en los siguientes, se pide:
- Valor al contado de la nave.
 - Importe adeudado al finalizar el cuarto año.
 - Importe adeudado al finalizar el quinto año.

CAPÍTULO 6°:

LAS RENTAS VARIABLES

Dr D. Enrique R. Blanco Richart

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Conocer las condiciones que ha de cumplir una operación financiera para poder utilizar las expresiones matemáticas de las rentas variables.
- Identificar la duración de una renta variable y el número de términos.
- Clasificación de las rentas variables.
- Diferenciar entre un vencimiento anticipado de uno vencido.
- Plantear correctamente una ecuación financiera identificando los distintos tipos de renta y su valor actual o final.
- Identificar cuando el valor actual de una renta no coincide con el inicio de una operación.
- Identificar cuando el valor final de una renta no coincide con el valor final de la operación.
- Reconocer cuándo una operación financiera está compuesta por más de una renta.
- Reconocer en el caso anterior donde están situados los valores actuales o finales de las diferentes rentas.
- Calcular la suma financiera de varias rentas que conforman una única operación financiera.
- Calcular la reserva matemática o saldo financiero de una operación formada por una o más de una renta.

1.- Concepto de una renta financiera variable:

Al igual que en capítulo anterior se decía que en la vida cotidiana nos encontramos con multitud de situaciones en que se cobran o se pagan cantidades con vencimientos sucesivos en el tiempo: El alquiler de una vivienda , el salario de un empleado, los plazos por la compra del coche, etc., a este tipo de operaciones las denominábamos rentas.

Pero el capítulo se desarrolló con la premisa de que los capitales permanecían constantes a lo largo de toda la operación. Pero sabemos que muchas de las operaciones se pactan con variación en los capitales de la prestación o de la contraprestación como en las aportaciones a los Planes de Pensiones, el incremento de los salarios de cada año en función de la inflación real o prevista, la variación del tipo de interés de un préstamo, etc. es decir que estaríamos ante el caso de rentas cuyos capitales varían con lo que las fórmulas generales desarrolladas en el capítulo precedente no tendrán validez

Las rentas variables serán por lo tanto una sucesión de capitales variables, con vencimientos sucesivos, pero siguen siendo una distribución de capitales en el intervalo (0 , n) donde a cada subintervalo se le asocia un capital distinto en cada uno de ellos.

Las rentas variables se pueden clasificar en función de la variación de los capitales en:

- 1.- Cuando los capitales no siguen ninguna ley de variación
- 2.- Cuando los capitales siguen una ley de variación conocida, pudiendo ser:
 - Renta variable en progresión geométrica
 - Renta variable en progresión aritmética.

2.- Representación gráfica:



Los capitales $C_1 \neq C_2 \neq C_3 \neq \dots \neq C_n$

3.- Rentas estrictamente variables:

Se trata de las rentas variables en las que sus capitales no siguen ninguna ley de variación, en el caso de ser vencida:



Al no seguir ninguna ley de variación, no podemos utilizar ninguna fórmula abreviada de cálculo, por lo tanto procederíamos a la actualización o capitalización de cada capital:

- a.- El valor actual: $V_a = C_1 (1 + i)^{-1} + C_2 (1 + i)^{-2} + \dots + C_n (1 + i)^{-n}$
- b.- El valor final: $V_f = C_1 (1 + i)^{n-1} + C_2 (1 + i)^{n-2} + \dots + C_n$

4.- Rentas variables en progresión geométrica:

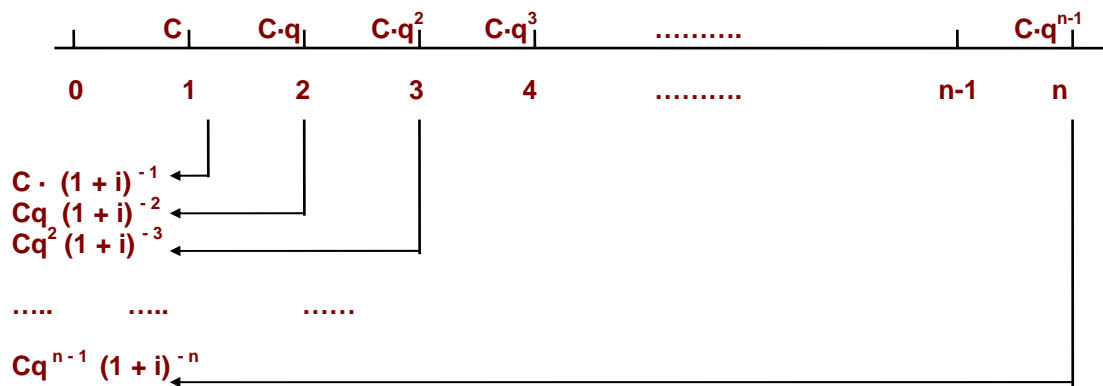
Una renta será variable en progresión geométrica cuando cada capital se obtiene del anterior multiplicado o dividiendo por un número constante. Al primer capital se le denominará **C** y al número constante o razón se le denominará **q**, el valor de **q** será siempre positivo, pudiendo ser:

- Mayor que la unidad, $q > 1$, con lo que la renta sería de capitales crecientes en progresión geométrica
- Menor que la unidad pero mayor de 0, $0 < q < 1$, con lo que la renta sería de capitales decrecientes en progresión geométrica.

Conocido el primer capital **C**, y el valor de la razón, podemos calcular el importe de cualquier capital enésimo: $C_s = C \cdot q^{s-1}$

* Valor actual y final como renta inmediata y vencida.

La representación gráfica de la operación sería:



El valor actual, cuya notación será **A** $(C, q, n | i)$, se obtendrá con la actualización de los capitales y después sacando factor común a $C \cdot (1+i)^{-1}$

$$V_a = C \cdot (1+i)^{-1} + C \cdot q \cdot (1+i)^{-2} + C \cdot q^2 \cdot (1+i)^{-3} + \dots + C \cdot q^{n-1} \cdot (1+i)^{-n}$$

$$V_a = C \cdot (1+i)^{-1} [1 + q \cdot (1+i)^{-1} + q^2 \cdot (1+i)^{-2} + \dots + q^{n-1} \cdot (1+i)^{-(n-1)}]$$

En el corchete hay una progresión geométrica decreciente cuya razón es $q \cdot (1+i)^{-1}$, el primer término es 1 y el último $q^{n-1} \cdot (1+i)^{-(n-1)}$, sumando sus términos quedará:

$$V_a = C \cdot (1+i)^{-1} \cdot \frac{1 - q^n \cdot (1+i)^{-n}}{1 - q \cdot (1+i)^{-1}}$$

Operando las potencias y positivando el denominador tendremos:

$$V_a = C \cdot (1+i)^{-1} \cdot \frac{1 - q^n \cdot (1+i)^{-n}}{1 - \frac{q}{(1+i)}} = C \cdot (1+i)^{-1} \cdot \frac{1 - q^n \cdot (1+i)^{-n}}{1 - \frac{1+i-q}{(1+i)}} \text{ obteniendo}$$

$$A_{(C,q)n|i} = C \cdot \frac{1 - q^n \cdot (1+i)^{-n}}{1+i-q} \text{ que es el valor actual de la renta geométrica}$$

El valor final, $S_{(C,q)n|i}$, se obtendrá con la capitalización el valor actual:

$$V_f = S_{(C,q)n|i} = A_{(C,q)n|i} \cdot (1+i)^n \text{ operando}$$

$$S_{(C,q)n|i} = C \cdot \frac{(1+i)^n - q^n}{1+i-q}$$

* La anomalía del denominador.

La razón q normalmente viene dada en porcentaje, por lo que en las fórmulas ha de venir expresada, al igual que el tipo de interés, en tanto por uno, por lo que analizando el denominador pueden darse las siguientes situaciones:

- 1.- Que el valor de $q < (1+i)$, que es el caso normal
- 2.- Que el valor de $q > (1+i)$, lo que implicaría obtener un valor negativo, pero como en el numerador sucedería lo mismo la solución quedaría positiva.
- 3.- Que el valor de $q = (1+i)$, lo que implicaría que la expresión del valor actual o final daría como resultado una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Para resolverla se procederá a la actualización de cada uno de los capitales al punto de origen de la renta:

Para ello se sustituirá el valor de q por $(1+i)$ al ser ambos iguales, con lo que la renta quedará del siguiente modo:

	C	$C \cdot (1+i)$	$C \cdot (1+i)^2$	$C \cdot (1+i)^{n-1}$	
0	1	2	3	n-1	n

$$V_a = C(1+i)^{-1} + C(1+i)^{-1}(1+i)^{-2} + C(1+i)^{-2}(1+i)^{-3} + \dots + C(1+i)^{n-1}(1+i)^{-n}$$

Operando las potencias quedará:

$$V_a = C(1+i)^{-1} + C(1+i)^{-1} + C(1+i)^{-1} + \dots + C(1+i)^{-1}$$

Por lo que en el caso en que se cumpla que: $q = (1+i)$, el valor actual será:

$$A_{(C,q)n|i} = C \cdot n \cdot (1+i)^{-1}$$

El valor final sería la capitalización del valor actual anterior:

$$S_{(C,q)n|i} = C \cdot n \cdot (1+i)^{-1} \cdot (1+i)^n$$

En el caso de ser anticipada:

$$\ddot{A}_{(C,q)n|i} = C \cdot n \cdot (1+i)^{-1} \cdot (1+i) = C \cdot n$$

✱ El valor actual de la renta perpetua y vencida.

El valor de la renta cuando es de duración indefinida puede calcularse como el límite del valor de su renta temporal. Para ello comprobamos que en la fórmula del valor actual los únicos elementos afectados por el tiempo son $q^n \cdot (1+i)^{-n}$, si positivamos la potencia quedaría: $\frac{q^n}{(1+i)^n}$ tomado límites para valores de $q < (1+i)$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{(1+i)^n}$ será 0, por lo tanto:

$$A_{(C, q) \infty | i} = C \cdot \frac{1}{1+i-q}$$

Las rentas anticipadas se obtendrán multiplicando las expresiones por $(1+i)$.

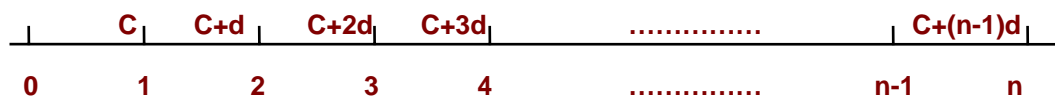
5.- Rentas variables en progresión aritmética:

Una renta será variable en progresión aritmética cuando cada capital se obtiene del anterior sumándole o restándole una cantidad constante. Al primer capital se le denominará **C** y a la cuantía constante o razón se le denominará **d**, el valor de d puede ser positivo, entonces la renta variable lo es en progresión aritmética creciente y si es negativo, la renta variable lo será en progresión aritmética decreciente, en este último caso ha de cumplir la condición de que el último capital sea positivo o cero como máximo.

Conocido el valor del primer capital C, y el valor de la razón d, podemos calcular el valor de un capital enésimo: $C_s = C + (n-1)d$

✱ Valor actual y final como renta inmediata y vencida.

La representación gráfica de la operación sería:



El valor actual, cuya notación será $A_{(C, d) n | i}$, se obtendrá con la suma de todos los capitales valorados en 0, pero como su demostración es algo compleja no creo necesario explicar su obtención. Por lo tanto su expresión matemática del valor actual y final sería:

$$A_{(C, d) n | i} = \left(C + \frac{d}{i} + d \cdot n \right) a_{n | i} - \frac{d \cdot n}{i}$$

$$S_{(C, d) n | i} = \left(C + \frac{d}{i} \right) s_{n | i} - \frac{d \cdot n}{i}$$

✱ Valor actual como renta perpetua y vencida.

El valor lo obtendremos como el límite del valor actual de la renta temporal variable en progresión aritmética cuando n tiende a infinito. La expresión resultante sería:

$$A_{(C, d) \infty | i} = \left(C + \frac{d}{i} \right) \cdot \frac{1}{i}$$

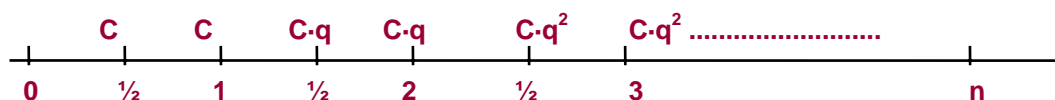
6.- Rentas variables fraccionadas:

Cuando se analizaron las rentas constantes decíamos que el tipo de interés y el periodo de vencimiento del capital deberían estar expresados en las mismas unidades (vencimiento mensual, interés mensual, etc.). Y se dice que una renta es fraccionada cuando el capital vence en una unidad inferior a la del tanto problema que en las rentas constantes sorteábamos mediante la adecuación del tanto al vencimiento del capital. El caso de las variables fraccionadas hay que tener en cuenta que además interviene la razón, por lo tanto será fraccionada aquella renta en que el interés y la razón son anuales y el capital vence en una unidad inferior. Que es el caso más común en el mercado y por lo tanto es el que utilizaremos.

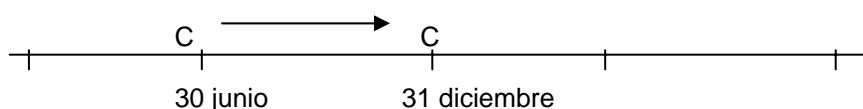
La expresión matemática para el cálculo en el caso de las variables en progresión geométrica sería:

$$A^{(m)}_{(C, q) n | i} = C \cdot m \cdot \frac{i}{J_{(m)}} \cdot \frac{1 - q^n \cdot (1 + i)^{-n}}{1 + i - q}$$

Siendo $J_{(m)}$ el interés nominal anual, q la razón, i el interés efectivo anual y m las fracciones o particiones del año. El resto de los valores, como el valor final, el ser anticipada, estar diferida, etc. Se obtendrán multiplicando la expresión anterior por su conversor correspondiente. La finalidad de la expresión cociente entre i y J_m es tener en cuenta los intereses devengados, vamos a considerar una renta de vencimiento semestral en que cada año se aumenta en q , y que el interés es anual:



Comprobamos que cada año los capitales son iguales, como el resto de los elementos está en expresión anual, habría que modificar el capital para poder aplicar la fórmula. El capital anual sería: $C + C(1 + i)^{1/2} = C'$



si los capitales fuesen mensuales el cálculo sería más engorroso por lo tanto la expresión de la fórmula $m \cdot \frac{i}{J_{(m)}}$ tiene como finalidad efectuar esa operación de forma abreviada.

La expresión matemática para el cálculo en el caso de las variables en progresión aritmética sería:

$$A^{(m)}_{(C, d) n | i} = \frac{i}{J_{(m)}} \cdot \left((C \cdot m + \frac{d}{i} + d \cdot n) a_{n | i} - \frac{d \cdot n}{i} \right)$$

El resto de los valores se obtendrán multiplicando por sus correspondientes conversores.

7.- Ejercicios prácticos resueltos:

* Casos generales.

Al igual que ya hicimos con las rentas constantes, lo primero que ha de quedar claro es la correcta utilización de las expresiones matemáticas de las rentas variables pudiendo reconocer en qué casos se ha de utilizar cada una de ellas. Además en las rentas variables es importante, dado que todos los capitales son distintos pero con relación conocida entre ellos, que sepamos en qué circunstancias es necesario calcular un capital enésimo.

Actividad nº 1:

Calcular el valor final de un renta compuesta por los siguientes capitales que vencen al final de cada año: 1.000 €, 1.500 €, 3.000 € y 4.000 €, valorada al 5 % anual.

Solución:

- Estamos ante una renta estrictamente variable, al no existir relación matemática entre los capitales, por lo tanto el valor final será la suma de los cuatro capitales en $p = 4$ y para obtenerlo tendremos que capitalizar cada uno de ellos:

$$V_f = 1.000 (1 + 0,05)^3 + 1.500 (1 + 0,05)^2 + 3.000 (1 + 0,05)^1 + 4.000$$

$$V_f = 9.961,37 \text{ €}$$

Actividad nº 2:

Calcular el valor actual y final de una renta cuya cuantía en el primer año es de 1.000.000 €, con incremento lineal cada año del 20 %. Duración de 10 años y valorada al 5 % anual.

Solución:

- Estamos ante el caso general de una variable en progresión aritmética, al tener un crecimiento lineal, cuya razón es: $1.000.000 \cdot 0,2 = 200.000 \text{ €}$. Sustituyendo en su expresión general:

$$V_a = (1.000.000 + \frac{200.000}{0,05} + 200.000 \cdot 10) \cdot a_{10|0,05} - \frac{200.000 \cdot 10}{0,05}$$

$$V_a = 14.052.144,50 \text{ €}$$

El valor final se puede obtener capitalizando el valor actual:

$$V_f = 14.052.144,50 (1 + 0,05)^{10} = 22.889.462,68 \text{ €}$$

O utilizando su expresión general:

$$V_f = (1.000.000 + \frac{200.000}{0,05}) S_{10|0,05} - \frac{200.000 \cdot 10}{0,05} = 22.889.462,68 \text{ €}$$

Actividad nº 3:

Calcular el valor actual y final de una renta de 200.000 € en el primer año si tiene un crecimiento anual del 10 %, durante seis años y valorada al 5 % anual.

Solución:

- Estamos ante el caso general de una variable en progresión geométrica, ya que el crecimiento no es lineal cuya razón es $q = 1,10$. Sustituyendo en su expresión general:

$$V_a = 200.000 \cdot \frac{1 - 1,10^6 \cdot (1 + 0,05)^{-6}}{1 + 0,05 - 1,10} = 1.287.864,38 \text{ €}$$

El valor final se puede obtener capitalizando el valor actual: $V_f = 1.287.864,38 (1 + 0,05)^6 = 1.725.861,44 \text{ €}$. O utilizando su expresión general:

$$V_f = 200.000 \cdot \frac{(1 + 0,05)^6 - 1,10^6}{1 + 0,05 - 1,10} = 1.725.861,44 \text{ €}$$

Actividad nº 4:

Se realiza la compra de un edificio acordando la siguiente forma de pago:

- Al contado se abonan 1.000.000 € y el resto mediante 61 pagos mensuales el primero de 30.000 € y decrecientes a razón de 500 € mensuales.
- El tipo de interés de la operación se fija en el 6 % anual nominal anual.

Se pide calcular la duración de la operación y el valor al contado del edificio.

Solución:

- Como todos los elementos de la renta están expresados en la misma unidad, el valor al contado del edificio será el valor actual de una variable en progresión aritmética, decreciente en 500 € cada mes, duración de 61 términos, valorada al 6 %: $i = 0,5 \%$ mensual.

$$V_a = 1.000.000 + \left((30.000 - \frac{500}{0,005} - 500 \cdot 61) a_{\overline{61}|0,005} + \frac{500 \cdot 61}{0,005} \right)$$

$$V_a = 1.000.000 + 827.443,92 = 1.827.443,92 \text{ €}$$

* Rentas fraccionadas.

Ahora no sólo hay que identificar que tipo de renta variable es, sino también hay que aprender a identificar cuándo es una renta fraccionada. En la parte teórica ya se comentó que con las rentas variables tenemos tres elementos en juego, el capital, el tanto y la razón. En las constantes, éstas eran fraccionadas cuando el capital vencían en un periodo inferior al de capitalización del tanto y modificando éste solucionábamos el problema. En las variables esta condición se mantiene pero se exige que además el crecimiento o razón esté en la misma unidad que el tanto y como es más complejo efectuar cambios aplicamos directamente la expresión explicada $m \cdot \frac{i}{J_{(m)}}$.

Actividad nº 5:

Calcular el valor actual de una renta de diez años de duración valorada al 8 % efectivo anual, con pagos semestrales de 50.000 € que crecerán anualmente a razón de un 3 % en los casos lineal y acumulativo.

Solución:

- En el caso de la renta geométrica: Aplicamos la fórmula de la fraccionada:

$$V_a = 50.000 \cdot 2 \cdot \frac{1 - 1,03^{10} \cdot (1 + 0,08)^{-10}}{1 + 0,08 - 1,03} \cdot \frac{0,08}{J_{(2)}} = 769,823,14 \text{ €}$$

$$\text{El valor de } i_m = 1 - (1 + 0,08)^{1/2} = 0,03923$$

$$\text{El valor de } J_m = 0,03923 \cdot 2 = 0,07846$$

- En el caso de la renta aritmética procederemos de igual modo: La razón sería: $50.000 \cdot 0,03 = 1.500 \text{ €}$

$$V_a = \left((50.000 + \frac{1500}{0,08} + 1.500 \cdot 10) a_{10|0,08} - \frac{1.500 \cdot 10}{0,08} \right) \cdot 2 \cdot \frac{0,08}{J_{(2)}} = 763.629,25 \text{ €}$$

$$\text{El valor de } i_m = 1 - (1 + 0,08)^{1/2} = 0,03923$$

$$\text{El valor de } J_m = 0,03923 \cdot 2 = 0,07846$$

Actividad nº 6:

Calcular el valor actual de una renta de diez años de duración valorada al 4 % semestral, con pagos semestrales de 20.000 € que crecerán anualmente a razón de un 3 % en el caso lineal y acumulativo.

Solución:

- En el caso de la renta geométrica procederemos:
 - Cambiando el tanto a anual quedaría como una renta fraccionada normal, de $m = 2$, al cumplirse la condición general, $C < (i = q)$, por lo tanto calculando el interés anual

equivalente $i = (1 + 0,04)^2 - 1 = 0,0816$ y el nominal $0,04 \cdot 2 = 0,08$, aplicando la expresión general obtendremos el valor actual:

$$V_a = 20.000 \cdot 2 \cdot \frac{1 - 1,03^{10} \cdot (1 + 0,0816)^{-10}}{1 + 0,0816 - 1,03} \cdot \frac{0,0816}{J_{(2)}} = 305.726,50 \text{ €}$$

- En el caso de la renta aritmética procederemos igual: Si cambiamos el tanto a anual, y como el crecimiento nos lo dan en anual, $d = 20.000 \cdot 0,03 = 600 \text{ €}$, tenemos directamente una aritmética fraccionada de $m = 2$,

$$V_a = \left((20.000 + \frac{600}{0,0816} + 600 \cdot 10) a_{10|0,0816} - \frac{600 \cdot 10}{0,0816} \right) \cdot 2 \cdot \frac{0,0816}{J_{(2)}} = 303.277,35 \text{ €}$$

Actividad nº 7:

Una constructora vende sus pisos mediante recibos mensuales de 700 €, durante 10 años, valorados al 12 % anual efectivo. Un comprador solicita pagar cantidades mensuales que crezcan anualmente en un 5 %. Se pide calcular, el valor al contado del piso y las mensualidades a pagar en los tres primeros años si es aceptada esta propuesta.

Solución:

- El valor actual de las mensualidades que el comprador quiere abonar, será el equivalente al valor actual de la propuesta de la constructora. Como los pagos son mensuales obtenemos el interés mensual que será: $(1 + 0,12)^{1/12} - 1 = 0,0094888$. El valor al contado del piso será el valor actual de una renta constante:

$$V_a = 700 \cdot a_{120|0,0094888} = 50.018,87 \text{ €}$$

Como el comprador propone pagos mensuales crecientes y el resto de los datos de la operación están en unidad anual, tenemos una geométrica fraccionada de $m = 12$, por lo tanto aplicando directamente su expresión general:

$$50.018,87 = C \cdot 12 \cdot \frac{1 - 1,05^{10} \cdot (1 + 0,12)^{-10}}{1 + 0,12 - 1,05} \cdot \frac{0,12}{J_{(12)}}$$

Operando, $C = 582,20 \text{ €}$ mensuales en el primer año.

En el segundo año los pagos serán de: $C \cdot q = 582,20 \cdot 1,05 = 611,31 \text{ €}$ mensuales.

Y en el tercer año de: $C \cdot q^2 = 582,20 \cdot 1,05^2 = 641,88 \text{ €}$ mensuales.

Actividad nº 8:

Se va a realizar una ampliación de la capacidad productiva de una empresa con la apertura de una nueva línea de fabricación. Su coste asciende a 500.000 € con valor residual al final del sexto año de su vida útil de 25.000 €. La producción se estima que ascenderá a 2.000 unidades mensuales y su precio de venta será de 6 € en el primer año, con un crecimiento anual del 5 % en el precio.

Calcular el beneficio actualizado (costes actualizados menos beneficio actualizado) valorando la operación a un 15 % efectivo anual.

Solución:

- El valor actualizado de los costes será el montante de la inversión menos el valor residual, en los seis años de vida útil de la línea de fabricación:

$$\text{Costes: } 500.000 - 25.000 (1 + 0,15)^{-6} = 489.191,81 \text{ €}$$

- Ingresos: Forman una renta fraccionada, $m = 12$, variable en progresión geométrica de razón 1,05 anual, siendo la cuantía del primer capital anual de: $6 \text{ €} \cdot 2.000 \text{ u.} = 12.000 \text{ €}$. Utilizamos directamente la expresión general:

$$V_a = 12.000 \cdot 12 \cdot \frac{1 - 1,05^6 \cdot (1 + 0,15)^{-6}}{1 + 0,15 - 1,05} \cdot \frac{0,15}{J_{(12)}} = 646.313,94 \text{ €}$$

El beneficio actualizado será de: $646.313,94 - 489.191,81 = 157.122,13 \text{ €}$

Actividad nº 9:

Se va a realizar la ampliación de la actividad de la sociedad mediante la mejora de sus instalaciones lo que va a generar los siguientes costes:

- Los gastos de construcción ascenderán a 5.000 € mensuales con un crecimiento semestral estimado en 500 € durante los tres años que durará la construcción.
- Los gastos de mantenimiento ascenderán a 3.000 € mensuales con un incremento anual del 4 % y por tiempo indefinido.

Se pide calcular el coste actualizado de la inversión si se valora al 10 % efectivo anual.

Solución:

- Gastos de construcción. En este caso si cambiamos el tanto a semestral, quedaría una renta fraccionada al estar el tanto y la razón en la misma unidad y el capital en una inferior, $m = 6$ (seis capitales mensuales en un semestre), variable en progresión aritmética de razón semestral 500 € y seis semestres de duración. El tanto semestral será: $i_2 = (1 + 0,10)^{1/2} - 1 = 0,048808848$, por lo que el valor actual de la renta sería:

$$V_a = \left((5.000 + \frac{500}{0,048808848} + 500 \cdot 6) a_{\overline{6}|0,048808} - \frac{500 \cdot 6}{0,048808848} \right) \cdot \frac{0,048808848}{J(6)}$$

$$V_a = 192.751,03 \text{ €}$$

- En cuanto a los gastos de mantenimiento, estamos ante una renta perpetua fraccionada, $m = 12$, variable en progresión geométrica, al tener el tanto en anual, con crecimiento anual pero capitales mensuales. Su valor actual será:

$$V_a = 3.000 \cdot 12 \cdot \frac{1}{1 + 0,10 - 1,04} \cdot \frac{0,10}{J(12)} = 627.026,83 \text{ €}$$

El coste total es de: $192.751,03 + 627.026,83 = 819.777,86 \text{ €}$

Actividad nº 10:

Calcular el valor actual de las siguientes rentas a un interés del 10 % efectivo anual:

- a) Una renta de 500 € trimestrales y crecimiento anual del 2 % acumulativo durante 5 años.
- b) Una renta de 3.000 € semestrales y crecimiento semestral del 3 % no acumulativo durante los próximos 10 años.

Solución:

- a) Es una renta fraccionada, $m = 4$ (cuatro capitales en una año), variable en progresión geométrica de razón anual 1,02, y tanto anual, por lo tanto podemos aplicar directamente la expresión matemática de la fraccionada:

$$V_a = 500 \cdot 4 \cdot \frac{1 - 1,02^5 \cdot (1 + 0,10)^{-5}}{1 + 0,10 - 1,02} \cdot \frac{0,10}{J(4)} = 8.150,26 \text{ €}$$

- b) Si cambiamos el tanto a semestral, obtendremos una renta variable en progresión aritmética normal al estar todos los datos, capital, crecimiento y tanto en la misma unidad temporal, el semestre. El tanto semestral: $i_2 = (1 + 0,10)^{1/2} - 1 = 0,048808848$. La razón es de $3.000 \text{ €} \cdot 3 \% = 90 \text{ €}$, para $10 \cdot 2 = 20$ periodos.

$$V_a = \left((3.000 + \frac{90}{0,048808848} + 90 \cdot 20) a_{20|0,048808} - \frac{90 \cdot 20}{0,048808848} \right) = 46.762,14 \text{ €}$$

✱ Operaciones de rentas variables con más de una razón.

Del mismo que en las rentas constantes aprendimos a identificar cuándo una operación se componía de varias rentas, vamos con la siguiente tanda de ejercicios a analizar esta misma situación. En las operaciones formadas por rentas variables existen varias cuando se modifique el tanto o la razón, con una sucesión de capitales determinada. Cuando esto suceda habrá que proceder a separar la operación en las diferentes rentas que surjan y sumarlas en el punto indicado. Las rentas son variables porque los capitales varían de un vencimiento a otro, pero lo pueden hacer de forma lineal o acumulativa, veremos que ambas formas pueden darse simultáneamente en la misma operación. A su vez es importante la identificación y cálculo del primer término de cada una de las rentas que se originan, con la que hay que manejar con soltura el concepto del término enésimo de una sucesión.

Actividad nº 11:

Calcular el valor actual de las siguientes rentas:

- a) De una renta de 150.000 € en el primer año, con crecimiento anual previsto del 5 % en los cinco primeros años y de 5.000 € en los cinco siguientes, valorada al 6 % anual.
- b) De una renta de 2.000.000 € en el primer año con crecimiento lineal del 10 % anual, durante seis años y que en los últimos cinco años decrecerá a razón de un 10 % anual y valorada al 6 % anual.

Solución:

- a) En el primer caso, la variación de capitales es la siguiente:

$$C, Cq, Cq^2, Cq^3, Cq^4, Cq^4+d, Cq^4+2d, Cq^4+3d, Cq^4+4d, Cq^4+5d.$$

La primera renta es una variable geométrica de razón 1,05 con una duración de cinco y cuyo primer capital es de 150.000 €, mientras que la segunda renta es una variable aritmética de razón 5.000 €, con una duración de cinco periodos, y cuyo primer capital se calcula a partir del último de la renta anterior, siendo por lo tanto su importe de:

$$C_6 = Cq^4 + d = [150.000 \cdot 1,05^4] + 5.000 = 187.325,94 \text{ €}$$

Como se pide el valor actual, éste será la suma de las dos rentas, como la segunda se inicia después de terminada la primera tendrá su valor actual en $p = 5$, y tendremos que actualizarla para poder sumarlas:

$$V_a = \left((187.325,94 + \frac{5.000}{0,06} + 5.000 \cdot 5) a_{5|0,06} - \frac{5.000 \cdot 5}{0,06} \right) \cdot (1 + 0,06)^{-5} + 150.000 \cdot \frac{1 - 1,05^5 \cdot (1 + 0,06)^{-5}}{1 + 0,06 - 1,05} = 619.296 + 649.322,57 = 1.313.618,57 \text{ €}$$

- b) En este segundo caso la variación de capitales es la siguiente:

$$C, C+d, C+2d, C+3d, C+4d, C+5d, (C+5d) - d', (C+5d) - 2d', (C+5d) - 3d', (C+5d) - 4d', (C+5d) - 5d'$$

- La primera renta es una variable aritmética de razón $d = 2.000.000 \cdot 0,10 = 200.000 \text{ €}$ y cuyo primer capital es de 2.000.000 €, con una duración de seis términos, siendo el último capital, $C_6 = (C+5d) = (2.000.000 + 5 \cdot 200.000) = 3.000.000 \text{ €}$

- La segunda renta es una variable aritmética pero decreciente por valor de $d' = (3.000.000 \cdot 0,10) = - 300.000$ €, con una duración de cinco periodos siendo la cuantía del primer capital el último anterior modificado por la nueva razón. $C_7 = (C_6 - d') = 3.000.000 - 300.000 = 2.700.000$ €

El valor actual será la suma de las dos rentas, como la segunda se inicia en (6), habrá que actualizarla seis periodos:

$$V_a = \left((2.700.000 - \frac{300.000}{0,06} - 300.000 \cdot 5) a_{\overline{5}|0,06} + \frac{300.000 \cdot 5}{0,06} \right) (1 + 0,06)^{-6} + \left((2.000.000 + \frac{200.000}{0,06} + 200.000 \cdot 6) a_{\overline{6}|0,06} - \frac{200.000 \cdot 6}{0,06} \right)$$

$$V_a = 6.339.722,58 + 12.126.518,93 = 18.466.241,51 \text{ €}$$

Actividad nº 12:

Calcular el valor actual de las siguientes rentas:

- De 1.000.000 € en el primer año con crecimiento anual del 6 %, durante siete años y que decrecerá a razón del 3 % anual en los cinco siguientes, valorada al 5 % anual
- De 800.000 € el primer semestre, crecimiento semestral de 10.000 € en los cuatro primeros años y decreciendo en los tres siguientes años en 3.000 €. Valoración al 2 % semestral.

Solución:

- En este tercer caso la variación de capitales es la siguiente:

$$C, Cq, Cq^2, Cq^3, Cq^4, Cq^5, Cq^6, Cq^6q', Cq^6q'^2, Cq^6q'^3, Cq^6q'^4, Cq^6q'^5$$

- La primera renta es una variable geométrica de razón 1,06 y cuyo primer capital es de 1.000.000 €, con una duración de siete términos siendo el último pago de, $C_7 = 1.000.000 \cdot 1,06^6 = 1.418.519$ €
- La segunda renta es una variable geométrica, con una duración de cinco periodos, cuya razón es $100 \% - 3 \% = 97 \%$, es decir $q = 0,97$. el primer capital será el último de la renta anterior modificado por la nueva razón: $C_8 = C_7 \cdot q' = 1.418.519 \cdot 0,97 = 1.375.964$ €

El valor actual será la suma de las dos rentas, sabiendo que la segunda al iniciarse en (7) habrá que actualizarla, por lo tanto:

$$V_a = 1.000.000 \cdot \frac{1 - 1,06^7 \cdot (1 + 0,05)^{-7}}{1 + 0,05 - 1,06} + 1.375.964 \cdot \frac{1 - 0,97^5 \cdot (1 + 0,05)^{-5}}{1 + 0,05 - 0,97} \cdot (1 + 0,05)^{-7}$$

$$V_a = 6.860.195 + 3.999.000 = 10.859.195 \text{ €}$$

- En el último caso, la variación de capitales, al ser éstos y la razón semestrales junto con el tanto de interés, no es una renta fraccionada, por lo tanto el desglose de los capitales será:

$$C, C+d, C+2d, \dots, C+7d, (C+7d) - d', (C+7d) - 2d', \dots, (C+5d) - 6d'$$

- La primera renta es una variable aritmética de razón 10.000 € y cuyo primer capital es de 800.000 €, con una duración de ocho términos, siendo su último capital, $C_8 = (C + 7d) = (800.000 + 7 \cdot 10.000) = 870.000$ €
- La segunda renta es una variable aritmética, con una duración de seis periodos, cuyo primer capital será el último anterior modificado con la nueva razón: $C_9 = (C_8 - d') = 870.000 - 3.000 = 867.000$ €

El valor actual será la suma de las dos rentas, actualizando ocho periodos la segunda:

$$V_a = \left((800.000 + \frac{10.000}{0,02} + 10.000 \cdot 8) a_{\overline{8}|0,02} - \frac{10.000 \cdot 8}{0,02} \right) + \left((867.000 - \frac{3.000}{0,02} - 3.000 \cdot 6) \cdot a_{\overline{6}|0,02} + \frac{3.000 \cdot 6}{0,02} \right) (1 + 0,02)^{-8}$$

$$V_a = 6.109.164 + 4.109.898 = 10.219.062 \text{ €}$$

Actividad nº 13:

Se pide calcular a un tanto del 8 % anual, el beneficio actualizado del siguiente negocio:

- Gastos de explotación: En el primer año se estiman en 5.000.000 €, con incremento anual del 3 % en los primeros seis años y del 5 % en los cuatro restantes.
- Ingresos de explotación: Ingresos en el primer año de 15.000.000 €, con un incremento anual del 5 % en los siete primeros años y decreciente en un 2 % anual en los tres restantes.

Solución:

- Respecto a los **gastos** de explotación, estamos ante dos rentas variables originadas por un cambio en la ley de variación, formadas por los siguientes capitales:

$$C, Cq, Cq^2, Cq^3, Cq^4, Cq^5, Cq^5q', Cq^5q'^2, Cq^5q'^3, Cq^5q'^4$$

- La primera renta es una variable geométrica de razón 1,03 y cuyo primer capital es de 5.000.000 €, con una duración de seis periodos, siendo su último capital de $C_6 = (5.000.000 \cdot 1,03^5 = 5.796.370,37$ €
- La segunda renta es otra variable geométrica de razón 1,05 con una duración de cuatro periodos, y cuyo primer capital será el anterior por la nueva razón: $C_7 = 5.796.370,37 \cdot 1,05 = 6.086.188,89$ €

El valor de los gastos de explotación será la suma de las dos rentas, actualizando la segunda seis periodos, por lo tanto:

$$V_a = 5.000.000 \frac{1 - 1,03^6 \cdot (1 + 0,08)^{-6}}{1 + 0,08 - 1,03} + 6.086.188,89 \frac{1 - 1,05^4 \cdot (1 + 0,08)^{-4}}{1 + 0,08 - 1,05} (1 + 0,08)^{-6}$$

$$V_a = 24.754.450,98 + 13.623.945,64 = 38.378.396,62 \text{ €}$$

- Respecto a los **ingresos** de explotación, estamos también ante otras dos rentas variables originadas por un cambio en la ley de variación, cuya relación de capitales es la siguiente:

$$C, Cq, Cq^2, Cq^3, Cq^4, Cq^5, Cq^6, Cq^6q', Cq^6q'^2, Cq^6q'^3$$

- La primera renta es una variable geométrica de razón 1,05 y cuyo primer capital es de 15.000.000 €, con una duración de siete periodos, siendo el último capital: $C_7 = 15.000.000 \cdot 1,05^6 = 20.101.434,61$ €
- La segunda renta es otra variable geométrica de razón $100\% - 2\% = 98\%$, es decir $q = 0,98$ con una duración de tres periodos, y cuyo primer capital es el anterior por la nueva razón: $C_8 = 20.101.434,61 \cdot 0,98 = 19.699.405,92$ €

El valor de los gastos de explotación será la suma de las dos rentas, actualizando la segunda siete periodos, por lo tanto:

$$V_a = 15.000.000 \frac{1 - 1,05^7 \cdot (1 + 0,08)^{-7}}{1 + 0,08 - 1,05} + 19.699.405,92 \frac{1 - 0,98^3 \cdot (1 + 0,08)^{-3}}{1 + 0,08 - 0,98} (1 + 0,08)^{-7}$$

$$V_a = 89.485.209,10 + 29.063.792,31 = 118.549.001,42 \text{ €}$$

El beneficio actualizado será de: $118.549.001,42 - 38.378.395,92 = 80.170.605,50$ €

Actividad nº 14:

Los gastos de explotación de un negocio suponen unos gastos anuales de 800.000 € en el primer año con un crecimiento anual de 20.000 € en los ocho primeros años y de 50.000 € en los cuatro últimos. Si la operación se valora al 8 % anual, calcular el valor actualizado de dichos gastos.

Solución:

- Al igual que en el caso anterior estamos ante dos rentas originadas por un cambio en la ley de variación, con los siguientes capitales:

$$C, C + d, C + 2d, C + 3d, C + 4d, C + 5d, C + 6d, C + 7d, \\ (C + 7d) + d', (C + 7d) + 2d', (C + 7d) + 3d', (C + 7d) + 4d'$$

- La primera renta es una variable aritmética de primer capital 800.000 €, de ocho años de duración, con razón de 20.000 € siendo su último capital: $C_8 = 800.000 + (7 \cdot 20.000) = 940.000$ €
- La segunda es también una variable aritmética de razón 50.000 €, con cuatro años de duración y cuyo primer capital será el anterior más la nueva razón: $C_9 = 940.000 + 50.000 = 990.000$ €

- El valor de los gastos de explotación será la suma de las dos rentas, por lo tanto:

$$V_a = \left((800.000 + \frac{20.000}{0,08} + 20.000 \cdot 8) a_{8|0,08} - \frac{20.000 \cdot 8}{0,08} \right) + \\ \left((990.000 + \frac{50.000}{0,08} + 50.000 \cdot 4) a_{4|0,08} - \frac{50.000 \cdot 4}{0,08} \right) \cdot (1 + 0,08)^{-8}$$

$$V_a = 4.953.433,12 + 1.897.159,71 = 6.850.592,83 \text{ €}$$

✖ **Operaciones de rentas variables con más de un tanto de interés.**

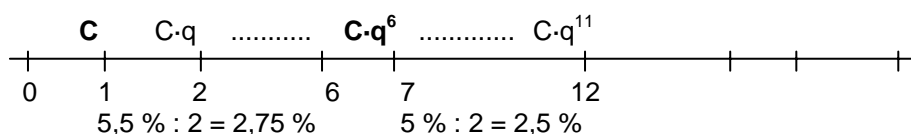
Continuamos con el análisis de operaciones formadas por más de una renta, en este caso no por modificación de las leyes de variación, sino por variación en los tantos. Su procedimiento de cálculo será el mismo, es decir habrá que comprobar el número de rentas resultantes al ir modificando las leyes de variación e ir identificando tanto su inicio o final, según se solicite calcular el valor actual o final de la operación, e identificar y calcular el primer término de cada una de ellas.

Actividad nº 15:

Una empresa estima que sus ingresos por las ventas que realice tendrán un crecimiento semestral del 3 %, siendo los del primer semestre de 15.000.000 €. Si dichos ingresos se depositan en una entidad financiera que valora la operación a un 5,5 % nominal anual en los tres primeros años y un 5 % nominal en los tres siguientes. ¿Cuál será el valor actualizado de la corriente de ingresos?

Solución:

- Al estar valorada la operación a más de un tanto, sucederá lo mismo que lo estudiado con las rentas constantes, es decir la existencia de tres tantos dará lugar a tres rentas variables de términos, crecimiento y rédito semestral, de las que necesitamos conocer sus primeros capitales, que según el esquema de la operación serían C , $C \cdot q^6$ y $C \cdot q^{12}$:



El primer capital de la primera renta es, $C_1 = 15.000.000 \text{ €}$

El primero de la segunda, $C_7 = 15.000.000 \cdot 1,03^6 = 17.910.784,45 \text{ €}$

Por lo tanto la suma de dos rentas variables geométricas, de razón $q = 1,03$, nos dará el dato buscado, actualizando la segunda seis periodos semestrales al 2,75 %:

$$V_a = 15.000.000 \frac{1 - 1,03^6 \cdot (1 + 0,0275)^{-6}}{1 + 0,0275 - 1,03} + 17.910.784,4 \frac{1 - 1,03^6 \cdot (1 + 0,025)^{-6}}{1 + 0,025 - 1,03} (1 + 0,0275)^{-6}$$

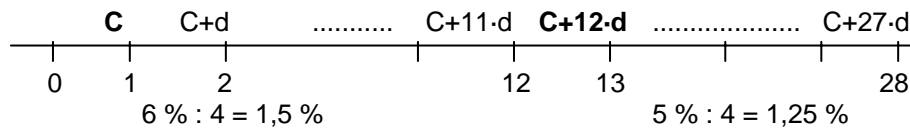
$$V_a = 88.125.765,90 + 90.188.134,68 = 178.313.900,58 \text{ €}$$

Actividad nº 16:

Se ha obtenido un préstamo a pagar mediante términos que variarán trimestralmente a razón de 50 €, ascendiendo el primer pago a 500 €. Si la entidad financiera valora la operación a un 6 % nominal anual en los tres primeros años y a un 5 % nominal en los cuatro siguientes
¿Cuál es la cuantía del préstamo recibido?

Solución:

- Al estar valorada la operación a dos tantos, dará lugar a dos rentas variables, de las que necesitamos conocer sus primeros capitales procediendo del mismo modo que hemos hecho en el problema anterior:



El primer capital de la primera renta es, $C_1 = 500 \text{ €}$

El primero de la segunda es el decimotercero, $C_{13} = 500 + (13-1) 50 = 1.100 \text{ €}$

Tenemos la suma de dos rentas variables aritméticas, de razón $d = 50$, cuyos capitales, tantos de valoración y crecimiento están expresados en la misma unidad.

$$\begin{aligned}
 V_a = & \left(500 + \frac{50}{0,015} + 50 \cdot 12 \right) \cdot a_{\overline{12}|0,015} - \frac{50 \cdot 12}{0,015} + \\
 & \left((1.100 + \frac{50}{0,0125} + 50 \cdot 16) \cdot a_{\overline{16}|0,0125} + \frac{50 \cdot 16}{0,0125} \right) \cdot (1 + 0,015)^{-12}
 \end{aligned}$$

$$V_a = 8.356,61 + 17.630,82 = 25.987,43 \text{ €}$$

* Operaciones formadas por rentas variables y constantes.

Vamos a concluir el análisis de operaciones formadas por varias rentas, con ejercicios donde una operación estará formada por rentas variables y constantes mezcladas. Su resolución seguirá el mismo esquema utilizado en los apartados anteriores. Una diferencia que se analizará es la duración, que dada una condición, tendrá una de las rentas variables que componen la operación.

Actividad nº 17:

Una empresa prevé unos ingresos de 900.000 € en el primer año con un crecimiento no acumulativo del 12 % anual hasta alcanzar la máxima facturación prevista en 1.224.000 €. Si la operación se valora a un tanto de mercado del 8 % anual, calcular el valor actualizado de los ingresos

Solución:

- Es una operación donde los ingresos van creciendo hasta alcanzar un tope máximo, por lo que habrá que calcular el tiempo que tarda en alcanzar la máxima facturación prevista. La razón es de $d = 900.000 \cdot 0,12 = 108.000$ €, y el tiempo que tarda en alcanzarla es de:

$$1.224.000 = 900.000 + (n - 1) \cdot 108.000, \text{ operando } n = 4 \text{ años}$$

Por lo que estamos ante dos rentas, la primera variable en progresión aritmética de cuatro años de duración y la segunda constante de 1.224 millones, al no variar más, y duración de seis años. El valor actual de la operación será la suma de ambas, como la segunda se inicia en (5) habrá que actualizarla cuatro periodos:

$$V_a = \left(900.000 + \frac{108.000}{0,08} + 10.800 \cdot 4 \right) a_{\overline{4}|0,08} - \frac{108.000 \cdot 4}{0,08} + 1224.000 \cdot a_{\overline{6}|0,08} \cdot (1 + 0,08)^{-4}$$

$$V_a = 3.483.124,18 + 4.159.096,38 = 7.642.220,56 \text{ €}$$

Actividad nº 18:

Una sociedad va a iniciar su actividad industrial con la fabricación de 50.000 unidades de producto, siendo su capacidad máxima de producción de 75.000 unidades, esperando que el ritmo de producción se incrementa en un 5 % anual. El estudio se realiza para un periodo de 15 años valorándose al 6 % anual. ¿Cuál sería el valor actual de la producción si su precio de venta es de 800 €?

Solución:

Como podemos comprobar existen tramos diferentes debido al tope máximo en la capacidad de fabricación, lo que dará lugar a rentas distintas, analizando una por una tendremos:

- Una primera renta variable en progresión geométrica de razón $q = 1,05$, cuyo primer capital es de $50.000 \cdot 800 = 4.000.000$ €. Como el valor máximo a alcanzar es de 75.000 unidades, la duración de esta renta será de:

$$75.000 = 50.000 \cdot 1,05^{n-1} \quad \text{operando } n = 9,3 \text{ años}$$

Es decir en el noveno año alcanzaría el máximo porque en el décimo la superaría.

- El segundo tramo lo conforma una renta constante al no producirse más aumento en la producción, de seis años de duración siendo la cuantía del capital la producción máxima alcanzada por su precio $75.000 \cdot 800 = 6.000.000$ €

El valor actual de los ingresos será la suma de las dos rentas, sabiendo que la segunda está diferida nueve años:

$$V_a = 4.000.000 \cdot \frac{1 - 1,05^9 \cdot (1 + 0,06)^{-9}}{1 + 0,06 - 1,05} + 6.000.000 \cdot \frac{1 - (1 + 0,06)^{-6}}{0,06} \cdot (1 + 0,06)^{-9}$$

$$V_a = 32.708.485,01 + 17.463.340,28 = 50.171.825,29 \text{ €}$$

Actividad nº 19:

Los ingresos previstos de una instalación lúdica se estima que ascenderán a 50.000.000 € en el primer año, con un crecimiento lineal esperado del 6 % anual hasta facturar un total de 68.000.000 €, en los tres siguientes años los ingresos se estiman constantes. ¿Cuál sería el valor actual de dichos ingresos si se valora la operación a un 5 % anual?

Solución:

Al igual que en el caso anterior se conforman tramos diferentes:

- La primera será una renta variable en progresión aritmética con variación anual, $d = 50.000.000 \cdot 0,06 = 3.000.000$ €, como el valor máximo a alcanzar es de 68.000.000 €, la duración de la renta será de:

$$68.000.000 = 50.000.000 + (n - 1) 3.000.000 \text{ operando } n = 7 \text{ años}$$

- El segundo tramo lo conforma una renta constante, de tres años de duración siendo la cuantía del capital el valor máximo alcanzado en el tramo anterior, es decir 68.000.000 €

El valor actual de los ingresos será la suma de las dos rentas, sabiendo que la segunda está habra que actualizarla al iniciarse en (7), por lo tanto:

$$V_a = (50.000.000 + \frac{3.000.000}{0,05} + 3.000.000 \cdot 7) a_{\overline{7}|0,05} - \frac{3.000.000 \cdot 7}{0,05} + 68.000.000 \cdot \frac{1 - (1 + 0,05)^{-3}}{0,05} (1 + 0,05)^{-7} = 338.014.915,06 + 131.604.584,16 = 206.410.339,22 \text{ €}$$

Actividad nº 20:

Los ingresos previstos que va a obtener una sociedad por su actividad en los próximos dieciséis años se estiman en: Los cinco primeros años 60.000.000 € anuales y en los ocho siguientes crecerán a un ritmo del 10 % anual ¿Cuál sería el valor actual de dichos ingresos si se valora la operación a un 5 % anual?

Solución:

Estamos ante una operación conformada por las siguientes rentas:

- La primera será una renta constante de 60.000.000 €, durante cinco años.
- El segundo tramo lo conforma una renta variable en progresión geométrica de razón $q = 1,1$, cuyo primer capital será el anterior ya incrementado: $C_6 = 60.000.000 \cdot 1,1 = 66.000.000$ € y con ocho años de duración, siendo su último capital de: $C_8 = 66.000.000 \cdot 1,1^7 = 128.615.328,6$ €
El valor actual de los ingresos será la suma de las dos rentas, sabiendo que la segunda está diferida cinco años:

$$V_a = 60.000.000 \cdot \frac{1 - (1 + 0,05)^{-5}}{0,05} + 66.000.000 \cdot \frac{1 - 1,1^8 \cdot (1 + 0,05)^{-8}}{1 + 0,05 - 1,1} (1 + 0,05)^{-5} +$$

$$V_a = 259.768.600,24 + 466.309.465,35 = 726.078.065,59 \text{ €}$$

Actividad nº 21:

Una sociedad que va a iniciar el lanzamiento de un nuevo producto y estima que los costes de fabricación tendrían hoy un valor actual de 1.250 millones. La producción estimada para los próximos diez años será la siguiente: Durante los primeros cuatro años se podrán fabricar 12.000 unidades anuales con un incremento anual del 10 %. Durante los tres siguientes la producción se mantendrá constante sobre el máximo alcanzado en el cuarto año. En los tres siguientes la producción se mantendrá en 12.000 unidades anuales.

¿Cuál será el precio de venta si el margen de beneficio es del 25 % sobre el coste unitario, siendo el tanto de valoración del 8 % en los 7 primeros años y del 5 % en los últimos?

Solución:

Los tramos que nos encontramos ahora serán:

- El primero lo conforma una renta variable en progresión geométrica con variación anual de $q = 1,1$, de cuatro años de duración, cuyo primer capital es de 12.000 unidades y el último de: $C_4 = 12.000 \cdot 1,1^3 = 15.972$ unidades.
- El segundo tramo lo conforma una renta constante, de tres años de duración siendo la cuantía del capital el valor máximo alcanzado en el tramo anterior, 15.972 unidades.
- Y el tercer tramo está formado por una renta constante de 12.000 unidades.

El valor actual de la producción será la suma de las tres rentas, sabiendo que la segunda está diferida cuatro años y la tercera siete años respecto el momento actual:

$$V_a = 12.000 \cdot \frac{1 - 1,1^4 \cdot (1 + 0,08)^{-4}}{1 + 0,08 - 1,1} + 15.972 \cdot \frac{1 - (1 + 0,08)^{-3}}{0,08} \cdot (1 + 0,08)^{-4} + 12.000 \cdot$$

$$\frac{1 - (1 + 0,05)^{-5}}{0,05} \cdot (1 + 0,08)^{-7} = 45.694,32 + 30.254,85 + 30.314,50 = 106.263,67 \text{ u.}$$

El coste unitario será: $1250.000.000 : 106.263,67 = 11.763,2$ €/u.

El precio de venta será: $11.763,2$ €/u $\cdot 1,25 = 14.704$ €/u.

8.- Ejercicios prácticos propuestos:

✖ Casos generales.

- 1.- Calcular el valor actual y final de una renta de 20.000 € en el primer año con crecimiento anual del 10 % durante seis años, valorada al 5 % anual, en el caso de crecimiento lineal y acumulativo.
- 2.- Calcular la cantidad que ahorrará un señor con el siguiente plan de ahorro a 10 años:
 - Realizará entregas al final de cada año de 5.000 € con un crecimiento del 2 % anual, al final de cada semestre aportará 1.000 € con un crecimiento semestral del 3 %.
 - La entidad financiera valora la operación a un interés nominal del 5 % anual
- 3.- Calcular el valor actual de una renta de diez años de duración valorada al 8 % nominal anual, con pagos semestrales de 5.000 € que crecerán semestralmente a razón de un 2 % en los casos de crecimiento lineal y acumulativo.
- 4.- Se realiza la compra de un camión acordando la siguiente forma de pago: Al contado se abonan 10.000 € y el resto mediante 36 pagos mensuales siendo el primero de 1.200 € son un decrecimiento mensual de 20 €. Se pide calcular la duración de la operación y el valor al contado del camión, si se valora la operación a un interés nominal del 6 % anual.
- 5.- Se va a adquirir una nave industrial y para ello va a dedicar lo que actualmente recibe por el alquiler de un inmueble de oficinas. El contrato se formalizó hace tres años, con pagos trimestrales de 2.500 €, con un crecimiento anual del 3 % y por un periodo de 15 años.
¿Cuál es el valor de la nave, si se valora la operación a un interés de mercado del 6 % anual?
- 6.- Calcular el valor actual de una renta de diez años de duración valorada al 8 % anual, con pagos trimestrales de 2.100 € que crecerán semestralmente un 2 %, en el caso de crecimiento lineal y acumulativo.

✖ Operaciones de rentas variables con más de una razón y más de un tanto.

- 7.-** Una sociedad ha firmado el convenio colectivo con sus empleados para los próximos 10 años, en las siguientes condiciones: El salario medio será de 915 € mensuales, con un crecimiento anual de 90 € durante cinco años y en los cinco siguientes años se incrementará en un 3 % anual. Si la operación se valora al 6 % efectivo anual, se pide calcular la corriente actual de los salarios.
- 8.-** Una sociedad quiere conocer el valor actual de sus futuros beneficios para los próximos 10 años, según los siguientes datos, valorados a un interés de mercado del 6 %:
- Los gastos de energía los estima en 15.000 € el primer año con crecimiento anual previsto del 3 % en los cinco primeros años y del 4 % en los cinco restantes.
 - Los gastos por salarios se estiman en 73.000 € en el primer año con crecimiento lineal del 3 % anual en los cinco primeros años y en los últimos cinco años decrecerá linealmente a razón de un 1 % anual.
 - Los de compra de materias primas se estiman en 6.000 € en el primer año con crecimiento anual del 4 % durante seis años y decrecerá a razón del 3 % anual en los restantes.
 - Los de mantenimiento se estiman en 5.000 € el primer semestre, con un crecimiento semestral de 100 € en los cuatro primeros años y decreciendo en los siguientes años a razón de 30 € semestrales.
 - Otros gastos de explotación: Se estiman en 25.500 €, con incremento anual del 3 % en los seis primeros años y del 5 % en los cuatro restantes.
 - Los ingresos de explotación se estiman en 105.000 €, el primer año, con un incremento anual del 5 % en los siete primeros años y decreciente en un 1 % anual en los tres restantes.
- 9.-** La media del salario de los empleados de una fábrica es de 975 € mensuales, pagas extras incluidas. En el convenio figura el incremento anual del 2 %. Su plantilla actual es de 15 trabajadores y se ha previsto su incremento en 3 trabajadores cada año hasta llegar a un máximo de 25 trabajadores. Se pide calcular el valor actual de los salarios a pagar en los próximos 10 años a un tanto del 5 % anual.
- 10.-** Una empresa estima que sus ingresos por ventas tendrán un crecimiento semestral del 3 %, ascendiendo los ingresos del primer semestre a 25.000 €. Si dichos ingresos se depositan en una entidad financiera que valora la operación a un 5,5 % nominal anual en los tres primeros años, a un 5 % nominal en los tres siguientes y a un 7 % nominal en los cuatro últimos. ¿Qué cantidad tendría ahorrada al finalizar la operación?
- 11.-** En estos momentos una sociedad ha obtenido un préstamo, acordando su pago mediante pagos trimestrales que variarán razón de 500 €, ascendiendo el primer pago a 2.500 €. Si la entidad financiera valora la operación a un 6 % nominal anual en los tres primeros años y a un 5 % nominal en los siete restantes ¿Cuál es la cuantía del préstamo que ha recibido?
- 12.-** A su vez va a iniciar un plan de ahorro a 15 años mediante la entrega al final de cada mes de 500 €, que se irán incrementando a razón de un 2 % anual. La entidad financiera acuerda con el ahorrador el pago de un interés efectivo del 6 % en los cinco primeros años y del 7 % en los cinco últimos. ¿Cuál será la cuantía del capital ahorrado al término de la operación? ¿Qué capital habrá ahorrado al finalizar el sexto año?.

✖ Operaciones formadas por rentas variables y constantes.

13.- Una sociedad va a iniciar la explotación de un yacimiento minero, realizando las siguientes estimaciones:

- Durante el primer año de instalación no tendrá producción.
- En los tres siguientes años se espera una producción media de 25.000 toneladas.
- A partir del cuarto año se espera un incremento de la producción de 5.000 toneladas (30.000 toneladas) hasta alcanzar el máximo de producción estimada en 80.000 unidades.
- En los diez restantes se estima que permanecerá constante.

Si el precio medio de venta es de 610 €/tonelada, y la operación se valora al 6 % anual, se pide calcular la corriente actual de los ingresos estimados.

14.- Una multinacional va a abrir una fábrica, realizando las siguientes estimaciones:

- Durante el primer año de instalación no tendrá producción.
- En los tres siguientes años se espera una producción media de 50.000 unidades.
- En el quinto año se espera un incremento lineal de la producción del 10 % anual hasta alcanzar el máximo de producción estimada en 80.000 unidades.
- La producción permanecerá constante en los siguientes diez años.

Si el precio medio de venta es de 800 €/unidad, y la operación se valora al 6 % efectivo anual, se pide calcular la corriente actual de los ingresos.

15.- Una sociedad va a iniciar sus actividades fabriles, con la producción de distintas líneas de productos. Quiere conocer el valor actual de sus ingresos futuros para un periodo de 15 años valorando el estudio a un interés de mercado del 6 % anual.

- a) Del producto A va a iniciar la fabricación con la producción de 50.000 unidades, siendo su capacidad máxima de producción de 75.000 unidades, esperando que el ritmo de producción se incremente un 5 % anual. El precio de venta es de 560 €.
- b) Los ingresos previstos por la fabricación del producto B se estima que ascenderán a 300.000 € en el primer año, con un crecimiento lineal esperado del 6 % anual hasta facturar un total de 390.000 €, en los siguientes años los ingresos se estiman constantes. Si el precio de venta de cada unidad es de 500 € ¿Cuál es el número de unidades que fabricará?
- c) Para el producto D, se estima que los ingresos por el proceso de producción se atenderán al siguiente esquema: En los dos primeros años no habrá producción, en los dos siguientes se estiman unos ingresos de 36.000 € anuales, en los tres siguientes se incrementarán a razón de un 5 % anual sobre el valor anterior y en los restantes se mantendrán constantes.

✖ Operaciones varias.

16.- Si obtenemos la concesión de una línea de transporte, por 10 años, se prevén los siguientes gastos:

- Se pagará un canon de 15.000 € trimestrales anticipados con crecimiento no acumulativo del 2 % trimestral.
- El gasto de combustible se estima en 3.600 € diarios con crecimiento anual del 3 %.
- El gasto de la plantilla se estima en 42.000 € mensuales y como consecuencia de la flexibilidad de la plantilla decrecerá a razón de un 1 % anual.
- Se estima una media de 5.000 viajeros diarios en el primer año y crecimiento anual en el 3 % en los cinco siguientes años, estabilizándose en los cuatro últimos. Se pide, a un tanto de valoración del 6 % anual, el precio mínimo por billete para cubrir los costes.

17.- Una empresa adquiere diverso inmovilizado que va a pagar en las siguientes condiciones:

- Una máquina por la que entregará como entrada 300.000 € y el resto lo pagará mediante entregas al final de cada semestre de 3.000 € con un crecimiento del 2 % semestral, durante cinco años. El interés de la operación es del 6 % nominal anual.
- Un camión, entregando 60.000 € al contado, y el resto con pagos trimestrales de 480 € y crecimiento anual del 3 %, durante tres años, a un interés efectivo del 5 % anual.
- Otro inmovilizado por el que abonará pagos anuales de 6.000 € y crecimiento anual de 3.000 €, durante cinco años. La entidad financiera valora la operación a un interés efectivo del 5 % anual en los dos primeros años y del 6 % anual en los tres siguientes

Se pide calcular el valor al contado de cada inmovilizado.

CAPÍTULO 7°:

LOS PRÉSTAMOS. SU AMORTIZACIÓN

Dr D. Enrique R. Blanco Richart

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Conocer el significado de la operación de amortización.
- Conocida la ecuación general establecer el significado de cada uno de sus elementos.
- Identificar como sinónimos tiempo = número de pagos.
- Identificar los distintos métodos de amortización según la condición impuesta a cada uno de los términos de la ecuación general.
- Plantear correctamente la ecuación financiera de amortización de un préstamo según cada uno de los métodos.
- Calcular la reserva matemática de la operación distinguiendo cuando coincide o no con el capital vivo.
- Conocer y aplicar las distintas relaciones de recurrencia entre los elementos de la ecuación general según el método utilizado.
- Plantear correctamente la ecuación financiera cuando existen gastos incluidos en el término constante. Aplicar las relaciones de recurrencia en las nuevas situaciones.
- Plantear la tasa efectiva de la operación para el prestatario y el prestamista.
- Identificar y calcular el valor financiero, el usufructo y la nuda propiedad a cada uno de los métodos de amortización.

1.- CONCEPTOS GENERALES:

Se denomina préstamo a la operación en la que una persona, *el prestamista*, entrega a otra, *el prestatario*, un capital, denominado *principal* de la operación, comprometiéndose éste último a devolverlo junto con sus intereses en la forma y fecha convenida. Por lo tanto se denomina amortización a la devolución del principal recibido.

Esta operación financiera es una operación de prestación única, y contraprestación generalmente múltiple, formada por n capitales que vencen al final de cada periodo de pago para así extinguir la deuda.

En cada pago que efectúa el prestatario entrega generalmente dos capitales, uno dedicado al pago de los intereses del periodo y otro dedicado a devolver parte del principal para así ir extinguiendo la deuda.

La suma de estos capitales recibe el nombre genérico de término amortizativo, por lo que la expresión general de éste será:

$$a_s = A_s + I_s$$

donde: a_s = Es la cuantía del término que se paga en cada periodo.

A_s = Es la cuota de capital, es decir la parte dedicada a extinguir la deuda.

I_s = Es la cuota de interés calculada sobre el capital pendiente de amortizar.

Por lo tanto podemos afirmar que la suma aritmética de las cuotas de amortización es igual al capital prestado y que la suma financiera de los términos amortizativos es el capital prestado, ya que como éstos se componen de capital e intereses, si calculamos su valor actual lo que estamos es eliminando los intereses futuros de cada uno de los pagos, por lo que nos quedarán solamente las cuotas de capital, por lo tanto su suma es el capital prestado C_0 .

✓ La regularidad amortizativa.

Se dice que una operación de préstamo tiene regularidad amortizativa cuando después de cada pago el capital vivo disminuye, por lo que cada una de las cuotas de amortización han de ser mayor que cero. Si alguna de las cuotas diese un valor negativo significaría que el término amortizativo no es capaz de afrontar siquiera el pago de los intereses del periodo. Esta situación es muy rara en la práctica pero sí puede darse cuando la amortización del préstamo se ha pactado con términos variables en progresión.

✓ La carencia.

Se dice que una operación de préstamo tiene carencia cuando en los primeros periodos no se realiza algún tipo de pago. Pudiendo ser:

- **Carencia total:** Cuando en esos primeros periodos no se efectúa pago alguno, es decir no existe término amortizativo. En consecuencia el valor del capital vivo aumenta al incrementarse su valor por los intereses devengados y no pagados.

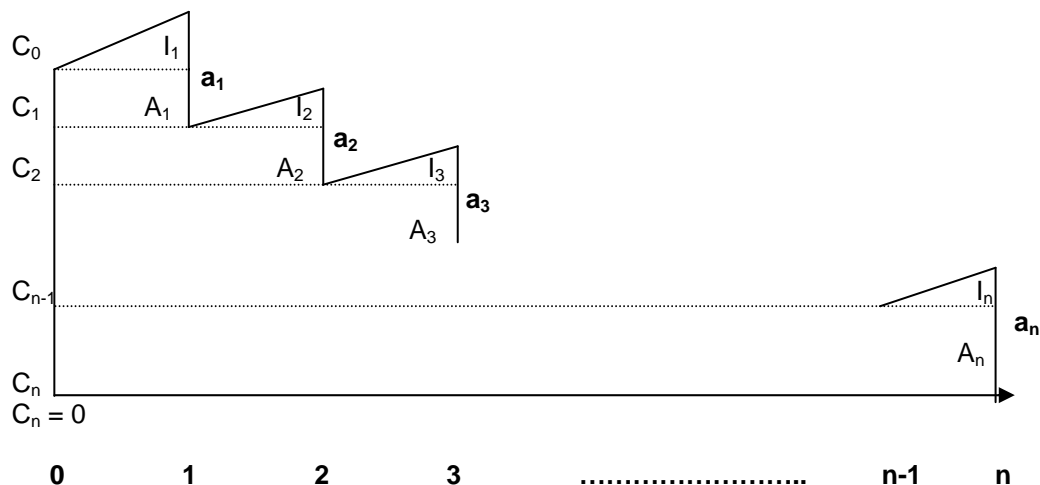
$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{\hspace{10em}} \\
 C_0 \mid \hspace{10em} \mid C_s = C_0 (1 + i)^s \\
 0 \hspace{10em} s
 \end{array}$$

- **Carencia parcial o carencia de principal:** Cuando sólo se efectúa el pago de los intereses, sin devolución de capital, en consecuencia el valor del capital vivo no varía a lo largo de esos periodos ya que los intereses devengados se pagan.

$$\begin{array}{c}
 C_0 \mid I_1 \mid I_2 \mid \dots \mid I_s \mid C_s = C_0 \\
 0 \hspace{10em} s
 \end{array}$$

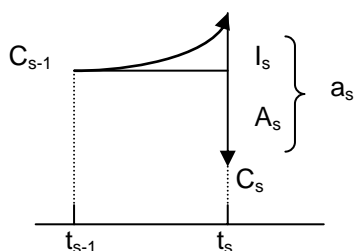
✓ La representación gráfica.

La operación de amortización normal y regular, supone el pago de intereses y la disminución del principal, en cada periodo. Su representación gráfica sería:



En cada periodo se producen dos movimientos de signo contrario:

- Uno de crecimiento por efecto de la acumulación de los intereses.
- Otro de disminución por pago del término amortizativo, es decir pagar los intereses devengados y acumulados del periodo y pagar a su vez, la cuota de capital.



✓ El cuadro de pagos.

Supone representar en una tabla la cuantía de cada uno de los pagos efectuados en cada periodo desglosándolos en su componente de capital (A) y de interés (I), además de obtener el saldo de la operación tras efectuar cada pago. Por lo tanto el formato básico sería:

Periodo	Término Amortizativo (a_s)	Cuota de Interés (I_s)	Cuota de Capital (A_s)	Capital amortizado (m_s)	Capital vivo (C_s)
0	-	-	-	-	C_0
1					
.					
.					
.					
n					

2.- CLASIFICACIÓN SEGÚN SU AMORTIZACIÓN:

El planteamiento teórico que de la operación de amortización hemos hecho, supone la consideración genérica de la existencia de términos y réditos variables. Pero en la práctica no suele ser así a priori, por lo que vamos a realizar una clasificación de los métodos de amortización en función de la condición que se va a imponer a uno de sus componentes.

- **Amortización mediante contraprestación única y rédito constante:**

Consiste en cancelar la operación mediante la entrega única en el momento n , del principal más los intereses devengados hasta ese momento. Este sistema es el más utilizado en operaciones a corto plazo y de nominal no muy elevado.

- **Amortización mediante contraprestación múltiple y rédito constante:**

Es la forma más frecuente, consistente en cancelar la operación mediante sucesivos pagos. En función de la característica de este pago tenemos:

- Extinción mediante el pago en cada periodo sólo de los intereses con devolución del principal al final de la operación. Es el conocido como método americano.
- Amortización mediante pagos constantes. En cada periodo se paga una cantidad constante que cubra los intereses y la parte de principal correspondiente. Es el sistema progresivo o francés.
- Amortización con pagos variables, pero con la condición de la cantidad que se devuelve de principal en cada periodo sea siempre la misma. Es el denominado de cuotas constantes.
- Amortización mediante pagos variables en progresión geométrica o aritmética, sin más condiciones.
- Amortización con pago fraccionado de intereses. Cuando en el periodo de amortización del principal se efectúan varios pagos de intereses. Es decir se fracciona el pago de la cuota de interés pero no de la de capital. Estos sistemas son más usuales en la amortización de empréstitos.
- Amortización con pago anticipado de intereses. Cuando los intereses se pagan al inicio de cada periodo mientras que la cuota de capital se paga al final. Estas operaciones se suponen valoradas con tantos de interés anticipados y no se dan en la práctica española.

3.- ESTUDIO PARTICULAR DE CADA MÉTODO DE AMORTIZACIÓN:

a.- Amortización mediante contraprestación única y rédito constante.

Supone la existencia de una sola prestación y una sola contraprestación por un importe del nominal más los intereses acumulados hasta el momento de la devolución, por lo que la cuantía a devolver será: $C_n = C_0 \cdot (1 + i)^n$

El cuadro de pagos para rédito constante sería:

Periodo	Término Amortizativo (a_s)	Cuota de Interés (I_s)	Cuota de Capital (A_s)	Capital amortizado (m_s)	Capital vivo (C_s)
0	-	-	-	-	C_0
1	-	-	-	-	$C_0 (1 + i)^1$
2	-	-	-	-	$C_0 (1 + i)^2$
...
n	$C_0 (1 + i)^n$	$C_n - C_0$	C_0	C_0	0

b.- Amortización mediante contraprestación múltiple y rédito constante.

✓ **El préstamo de tipo americano.**

Como ya hemos adelantando antes consiste en el pago sólo de los intereses en cada uno de los periodos y el abono al final de la operación del principal de la deuda. Por lo tanto el término amortizativo es la cuantía de los intereses excepto en el último periodo que hay que sumar a los intereses el nominal del préstamo. Por lo tanto podemos afirmar que es un préstamo con carencia de principal en (n-1) periodos. Su cuadro de pagos sería para rédito constante:

Periodo	Término Amortizativo (a_s)	Cuota de Interés (I_s)	Cuota de Capital (A_s)	Capital amortizado (m_s)	Capital vivo (C_s)
0	-	-	-	-	C_0
1	$C_0 \cdot i$	$C_0 \cdot i$	0	0	C_0
2	$C_0 \cdot i$	$C_0 \cdot i$	0	0	C_0
.
.
n	$C_0 + C_0 \cdot i$	$C_0 \cdot i$	C_0	C_0	0

✓ **El préstamo de pagos constantes. El progresivo o francés.**

* **Caso general:** Es el caso en el que los términos y réditos son constantes.

$$a = A_s + I_s$$

Si sabemos que en cada periodo vamos a devolver una parte de principal, supondrá que el capital vivo disminuya con cada pago, por lo tanto la cuota de interés, I_s , será decreciente con el tiempo. Si esta cuota es decreciente y el pago periódico es constante, forzará para mantener la igualdad anterior, que las cuotas de amortización A_s sean crecientes con el tiempo, de ahí el nombre de progresivo. **La ecuación de equivalencia** que permite el cálculo del término es el valor actual de una renta constante (suma financiera de los términos).

$$C_0 = a \cdot a_{n|i}$$

El capital vivo: Es el valor del capital o principal aún no devuelto, al ser el valor de la reserva matemática podrá calcularse de varias maneras pero utilizaremos el denominado método prospectivo (el capital vivo es la suma financiera de los pagos pendientes) por ser el más sencillo:

$$C_s = a \cdot a_{n-s|i}$$

La cuota de interés: Es la cantidad pagada en cada periodo por este concepto, será por lo tanto la deuda del periodo anterior multiplicada por el rédito, o la diferencia entre el término y la cuota de capital:

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & \\
 C_{s-1} & & I_s \\
 | & & | \\
 s-1 & & s
 \end{array}$$

$$I_s = C_{s-1} \cdot i \qquad I_s = a - A_s$$

Las cuotas de amortización: Es el valor del capital o principal devuelto en cada periodo, como ya se ha explicado, éstas son crecientes en el tiempo, lo que vamos a demostrar es si este crecimiento sigue alguna ley. Si tomamos dos términos consecutivos:

$$a = A_s + I_s$$

$$a = A_{s+1} + I_{s+1}$$

Restando ambos términos:

$$0 = A_s + I_s - A_{s+1} - I_{s+1}$$

$$0 = (A_s - A_{s+1}) + (I_s - I_{s+1})$$

Sabiendo que el interés es el capital anterior por el rédito, sustituimos:

$$0 = (A_s - A_{s+1}) + (C_{s-1} \cdot i - C_s \cdot i) \quad \text{sacando factor común a } i$$

$$0 = (A_s - A_{s+1}) + (C_{s-1} - C_s) \cdot i$$

Como la diferencia entre dos capitales vivos consecutivos es el capital devuelto en el último periodo:

$$0 = (A_s - A_{s+1}) + A_s \cdot i \quad \text{operando y sacando factor común a } A_s$$

$$0 = A_s (1 + i) - A_{s+1} \quad \text{despejando quedará}$$

$$A_{s+1} = A_s (1 + i)$$

Como podemos comprobar la cuota de capital de un periodo se obtiene multiplicando la anterior por $(1 + i)$, por lo tanto deducimos que la cuantía del capital amortizado en cada periodo varía en progresión geométrica creciente de razón $(1+i)$, si ponemos la expresión anterior en función de la primera cuota de capital:

$$A_{s+1} = A_1 (1 + i)^s$$

Al realizar el cuadro de amortización como todos los elementos pueden girar alrededor de las cuotas de amortización, las calcularemos en primer lugar con lo que conocemos el capital vivo y en consecuencia la cuota de interés y el capital amortizado.

- * **Con carencia total:** Cuando no se paga cantidad alguna durante los s periodos en que ésta existe, por lo tanto afecta a la operación incrementando el valor del capital vivo hasta que ésta termine, donde la deuda será: $C_s = C_0 (1 + i)^s$

En este caso la ecuación de equivalencia, sería:

$$C_0 (1 + i)^s = a \cdot a_{n-s} i$$

El resto de los elementos se calcularía igual en el caso general, sólo que se trabaja con C_s y no con C_0 .

- * **Con carencia de principal:** Cuando sólo se pagan los intereses durante los s periodos en que ésta existe, por lo tanto no afecta a la operación ya que el capital vivo no se ve incrementado. Como sabemos que en el momento de iniciar los pagos el capital vivo sigue siendo C_0 la ecuación de equivalencia sería:

$$C_0 = a \cdot a_{n-s} i$$

El resto de los elementos se calcularía del mismo modo que en el caso general, sólo con la particularidad de que el capital con el que hay que trabajar es C_0 .

✓ **El préstamo de cuotas de capital constantes. Método italiano.**

Es otro caso particular en el que los términos amortizativos son variables al permanecer constante la devolución de capital en cada periodo.

$$a_s = A + I_s$$

Si sabemos que en cada periodo vamos a devolver la misma parte de principal, supondrá que el capital vivo disminuya proporcionalmente con cada pago, por lo tanto la cuota de interés, I_s será decreciente con el tiempo y de forma proporcional. Si esta cuota es decreciente y la devolución de capital constante, forzará, para mantener la igualdad anterior, a que los términos amortizativos sean también decrecientes y de forma proporcional con el tiempo. El cálculo de las **cuotas de capital** se obtendrá dividiendo el capital en n partes iguales.

$$C_0 = n \cdot A$$

El capital vivo: Es el valor actual de los pagos pendientes, $C_s = (n-s) \cdot A$

Las cuotas de interés: Es el interés pagado en cada periodo, es la deuda del periodo anterior multiplicada por el rédito:

$$I_s = C_{s-1} \cdot i$$

Los términos amortizativos: Como ya hemos indicado éstos son variables y decrecientes de forma proporcional, lo que vamos a demostrar es la razón de variación de los términos. Si tomamos dos términos consecutivos:

$$a_s = A + I_s$$

$$a_{s+1} = A + I_{s+1}$$

Restando ambos términos: $a_s - a_{s+1} = 0 + I_s - I_{s+1}$

Poniendo el interés en función del capital vivo:

$$a_s - a_{s+1} = (C_{s-1} \cdot i - C_s \cdot i) \quad \text{sacando factor común a } i$$

$$a_s - a_{s+1} = (C_{s-1} - C_s) \cdot i$$

Como la diferencia entre dos capitales vivos consecutivos es el capital devuelto en el último periodo y éste siempre es el mismo

$$a_s - a_{s+1} = A \cdot i$$

$$a_{s+1} = a_s - A \cdot i$$

Con lo que comprobamos que un término se obtiene del anterior restando una cantidad fija que es $A \cdot i$, por lo tanto los términos amortizativos varían en progresión aritmética

* **Con carencia total:** Como en la carencia total la deuda se incrementa antes de iniciar el proceso de amortización, el valor de cada cuota se obtendrá dividiendo en partes iguales el capital adeudado en s : $C_s = C_0 (1 + i)^s$

$$C_0 (1 + i)^s = (n-s) \cdot A$$

* **Con carencia de principal:** Como el capital adeudado no se modifica en los s periodos al estar pagando los intereses, el importe a amortizar se reparte en un número de cuotas menor

$$C_0 = (n-s) \cdot A$$

✓ **El préstamo variable en progresión.**

Es otro caso particular en el que los términos amortizativos son variables ya sea en progresión aritmética o en progresión geométrica y a rédito constante.

$$a_s = A_s + I_s$$

En estos casos el término no es variable porque otro de los elementos de la ecuación anterior le fuerce sino porque así se impone como condición de amortización.

✗ **Que los términos varíen en progresión geométrica:**

- * *Ecuación de equivalencia* para el cálculo del término se corresponderá con el valor actual de una renta variable en progresión geométrica de razón q :

$$C_0 = a_1 \cdot \frac{1 - q^n \cdot (1+i)^{-n}}{1+i-q}$$

- * *Capital vivo*: Es el valor del principal aún no devuelto y calculada por el método prospectivo, sería el valor actual de los pagos pendientes:

$$C_s = a_{s+1} \cdot \frac{1 - q^{n-s} \cdot (1+i)^{-(n-s)}}{1+i-q}$$

- * *Cuotas de interés*: Es el interés pagado en cada periodo:

$$I_s = C_{s-1} \cdot i$$

- * *Cuotas de amortización*: Las cuotas serán crecientes con el tiempo y pueden obtenerse por diferencia entre el valor del pago y la correspondiente cuota de interés.

✗ **Que los términos varíen en progresión aritmética:**

- * *Ecuación de equivalencia* para el cálculo del término se corresponderá con el valor actual de una renta variable en progresión aritmética de razón d :

$$C_0 = \left[a_1 + \frac{d}{i} + d \cdot n \right] \cdot a_{\overline{n}|i} - \frac{d \cdot n}{i}$$

- * *Reserva matemática o capital vivo*: Calculada por el método prospectivo sería:

$$C_s = \left[a_{s+1} + \frac{d}{i} + d \cdot (n-s) \right] \cdot a_{\overline{n-s}|i} - \frac{d \cdot (n-s)}{i}$$

- * *Cuotas de interés*: Es el interés pagado en cada periodo:

$$I_s = C_{s-1} \cdot i$$

- * *Cuotas de amortización*: Las cuotas serán crecientes con el tiempo y pueden obtenerse por diferencia entre el valor del pago y la correspondiente cuota de interés.

4.- EL ARRENDAMIENTO FINANCIERO. “EL LEASING”

Es una operación financiera realizada por empresas especializadas que adquieren bienes muebles e inmuebles para arrendarlos a empresas o particulares. Son operaciones a medio y largo plazo en las que el arrendatario paga periódicamente una cuantía en concepto de alquiler, generalmente constantes y de forma anticipada, coincidiendo la primera con la firma del contrato y un pago último, denominado opción de compra, mediante el cuál el arrendatario, si la ejerce, pasa a adquirir el bien objeto del contrato.

Su esquema financiero se corresponde con la amortización de un préstamo pero con peculiaridades, siendo los casos más generales los siguientes:

- Realización de pagos constantes anticipados y abono de la opción de compra al finalizar la operación. La ecuación de equivalencia sería:

$$C_0 = C \cdot a_{n|i} (1+i) + O_c (1+i)^{-n}$$

Si la opción de compra fuese del mismo valor que las cuotas periódicas, que es el caso más frecuente, la ecuación de equivalencia se simplificaría:

$$C_0 = C \cdot a_{n+1|i} (1+i)$$

- Realización de un pago al contado y a continuación el desembolso de cantidades constantes, un periodo después del pago al contado, y abono de la opción de compra al finalizar la operación. La ecuación de equivalencia sería:

$$C_0 - C' = C \cdot a_{n-1|i} (1+i) (1+i)^{-1} + O_c (1+i)^{-n}$$

Si la opción de compra fuese del mismo valor que las cuotas periódicas,

$$C_0 - C' = C \cdot a_{n|i} (1+i) (1+i)^{-1}$$

- El cuadro de amortización: Se diferenciará del cuadro de un préstamo francés, en que los pagos son prepagables y en la confección de la primera línea. Los intereses de ésta no se calculan sobre el valor al contado del bien, sino sobre el valor a financiar que es el valor al contado menos la opción de compra. La primera cuota de capital se obtendrá restando al valor de la cuota a pagar el valor de los intereses calculados y el resto mediante las recurrencias conocidas. El cuadro además contendrá el importe del I.V.A. y el valor de la cuota total a pagar.

5.- LOS PRÉSTAMOS A INTERÉS VARIABLE.

En la práctica existen muchas operaciones de financiación en las que el tanto de valoración de ésta no es fijo, sino que se aplican diversos tantos generalmente en operaciones a largo plazo como forma de asegurarse el prestamista una rentabilidad mínima al alejarse en el tiempo las cuantías que va a recibir. Dentro de este estudio estableceremos dos casos:

a) Con intereses pactados y conocidos de antemano.

En este caso los tantos de valoración se han pactado en el origen de la operación, por lo que son conocidos y con ellos se puede establecer la ecuación financiera. Si los pagos son constantes, la ecuación financiera dará lugar a la suma de varias rentas constantes y diferidas:

$$C_0 = a \cdot a_{s|i_1} + a \cdot a_{p|i_2} (1+i_1)^{-s} + \dots + a \cdot a_{x|i_s} (1+i_1)^{-(n-x)}$$

Las recurrencias para la obtención de las cuotas de capital cuando los términos son constantes, en una operación pactada con tantos diferentes están alteradas. Lo que sí se

va a cumplir es la relación por tramos, es decir, conocida la primera cuota de amortización de un tramo valorado al tanto i_s , el resto sí crecerá en progresión de razón $(1+i_s)$ y así sucesivamente. En el primer tramo se calculará la primera cuota de amortización: $A_1 = a - C_0 \cdot i_1$ y el resto variarán respecto a ella en progresión de razón $(1+i_1)$.

$$A_s = A_1 (1 + i_1)^{s-1}$$

En el segundo tramo se ha de calcular primero la cuota de amortización: $A_{s+1} = a - C_s \cdot i_2$ y el resto se obtendrá mediante la razón $(1+i_2)$.

$$A_p = A_{s+1} (1 + i_2)^{p-1} \quad \text{Y así sucesivamente.}$$

b) Con intereses indizados.

Son operaciones en las que se ha pactado un tipo de interés variable, pero con la peculiaridad de que éste se calcula en función de otro tipo de referencia, en consecuencia los tantos de la operación no son conocidos de antemano, excepto el que se va aplicar en el primer periodo. Los tipos de referencia más utilizados son:

- E.U.R.I.B.O.R.: Es el precio del dinero en el mercado interbancario europeo a un plazo determinado, es decir, el precio al que los bancos y cajas se prestan dinero mutuamente. Este tipo de interés lo comunica el Banco de España, en sus notas informativas diarias, así como en varios de sus otros medios de comunicación.
- Asociación Hipotecaria Española: Es un índice de referencia del mercado hipotecario de periodicidad trimestral. Se calcula disminuyendo en un punto porcentual la media de los tipos de interés más utilizados en los Préstamos Hipotecarios concedidos por las entidades pertenecientes a dicha asociación para la financiación de la vivienda libre, considerando el último mes de cada trimestre natural.

El cálculo de los términos amortizativos en una operación a interés variable se establecerá en función del criterio adoptado, pudiendo dar lugar a dos situaciones:

a) Mantener constante la duración de la operación, lo que dará lugar a términos variables que se calcularán del siguiente modo:

- Calculamos el término con el tipo de interés inicial: $C_0 = a \cdot a_{n|i}$
- En el siguiente periodo el término a pagar, si se mantiene fija la duración, será la suma de dos rentas, la primera de cuantía ya calculada, a , y de un periodo de duración y otra renta diferida de cuantía a' , valorada al nuevo tanto i' durante los periodos restantes, $(n-1)$.

$$C_0 = a \cdot a_{n|i} + a' \cdot a_{n-1|i'} (1+i)^{-1}$$

- En el siguiente periodo sería:

$$C_0 = a \cdot a_{n|i} + a' \cdot a_{n-1|i'} (1+i)^{-1} + a'' \cdot a_{n-2|i''} (1+i)^{-1} (1+i')^{-1}$$

- Y así sucesivamente. Una forma de simplificar el proceso es trabajar con el capital vivo resultante al término de cada periodo:

$$\begin{aligned} C_0 &= a \cdot a_{n|i} \\ C_1 &= a' \cdot a_{n-1|i'} \\ C_2 &= a'' \cdot a_{n-2|i''} \\ &\text{Etc.} \end{aligned}$$

- b) Mantener constante el término, lo que dará lugar a una variación en la duración de la operación. Si lo que se ha acordado es mantener fijo el valor del término amortizativo, lo que se ha de calcular en cada periodo es la nueva duración resultante de la variación en el tipo de interés, si éste baja, la duración de la operación disminuirá ya que al pagar menos intereses se puede realizar una mayor amortización de capital, con lo que la operación terminará antes, o viceversa:

$$C_0 = a \cdot a_n | i$$

$$C_1 = a \cdot a_n | i', \text{ obteniendo el nuevo valor de } n$$

$$C_2 = a \cdot a_n | i'' \text{ y así sucesivamente hasta la cancelación de la operación.}$$

6.- LAS CARACTERÍSTICAS COMERCIALES EN LOS PRÉSTAMOS.

La actividad bancaria es una actividad comercial, los bancos se dedican a comprar y vender dinero o a prestar servicios financieros, esto conlleva a afirmar que el estudio de una operación de amortización tiene dos partes:

- Analizar su estructura financiera, calculando el valor de los términos, cuotas de capital o cuotas de interés, analizando en cada caso particular las recurrencias que se obtienen con su ley interna definida por el tipo de interés pactado.
- Analizar las características comerciales de la operación y estudiar en consecuencia la influencia que tienen en la operación de amortización averiguando si la ley interna es alterada, dando lugar a otra u otras nuevas (Estudio de tasas efectivas, recurrencia entre las cuotas, etc.)

* Principales características comerciales.

Son los gastos que a lo largo de toda la operación se repercuten en el prestatario y que en consecuencia van a afectar a las cantidades que ha de pagar.

- Al principio de la operación:
 - Comisiones de apertura y estudio. Porcentaje calculado sobre el capital prestado.
 - El corretaje. Si la póliza del contrato es intervenida por un Corredor de Comercio.
 - Gastos de tasación si el préstamo es hipotecario y gastos notariales en el caso de los préstamos hipotecarios por la escrituración.
 - El impuesto de Actos Jurídicos Documentados.
- Durante la operación:
 - Comisiones por realizar los pagos mediante transferencia.
 - Comisiones por apunte si se realiza con cuenta corriente abierta en la misma entidad.
 - Gastos de administración del préstamo a pagar en cada periodo, calculados generalmente sobre el término amortizativo.
- Al finalizar la operación: Se producen, generalmente, en el caso de los préstamos hipotecarios.
 - Gastos notariales para la cancelación de la hipoteca.
 - El impuesto de Actos Jurídicos Documentados.
 - Gastos de registro de la propiedad.

✱ **Estudio de la influencia de las características comerciales.**

Como ya indicábamos al inicio las características comerciales pueden afectar al desarrollo de la ley interna, esta alteración de la ley interna puede producirse de dos modos:

- Cuando las características comerciales se devengan al principio o final de la operación, sólo afectarán al cálculo de la tasa efectiva.
- Cuando las características comerciales se devengan de forma periódica pueden afectar al ritmo amortizador, a las recurrencias internas y al cálculo de la tasa efectiva.

Estas características comerciales que suponen una alteración dando lugar a la tasa efectiva o real. Al existir dos partes, el prestamista y el prestatario las tasas efectivas resultantes pueden ser iguales o no y ello va a depender del tipo de característica comercial. Para ello vamos a clasificarlas, en dos grupos:

- **Características bilaterales:** Cuando repercuten de igual modo a ambas partes, por lo que si sólo existiesen éstas, las tasas efectivas del prestamista y del prestatario serían iguales. Una característica es bilateral cuando las cantidades que paga el prestatario las recibe el prestamista.
- **Características unilaterales:** Cuando repercuten sólo en una de las dos partes. Las del prestatario serían gastos como los de notaría, tasación, etc. y los del prestamista los impuestos a pagar, etc. En este caso las tasas efectivas del prestamista y del prestatario serían diferentes.

A su vez hay que diferenciar entre la tasa efectiva o real de la operación y la T.A.E. (Tasa anual equivalente) que es la que las instituciones financieras deben publicar en sus operaciones activas conforme instrucciones emitidas por el Banco de España (Circulares) donde se especifica que el cálculo de la TAE sólo incluirá las comisiones y gastos devengados a favor de la entidad sin incluir entre ellos los suplidos (Corretajes, timbres, etc.). En consecuencia podemos afirmar que la TAE es una tasa que mide el rendimiento de la operación para el banco y no suele coincidir siempre con la del prestatario.

Además dentro de este análisis no debemos olvidar el cálculo de la que podemos denominar Tasa financiera fiscal. Es decir los impuestos alteran también el coste efectivo de la operación ya que para el prestatario disminuye su coste al poder deducirse, los intereses pagados y parte de las cuotas de capital, según la legislación fiscal en cada momento.

Resumiendo:

Operación Pura	<ul style="list-style-type: none"> • Primero se pacta el tanto a aplicar en la operación, que es el tanto nominal: $J_{(m)}$. • Después se pacta la forma de pago: Mensual, etc, lo que da origen al tanto fraccionado: i_m • Después se obtendría la tasa anual equivalente de la operación según lo pactado: i
Operación Comercial	<ul style="list-style-type: none"> • Atendiendo a lo dispuesto en la Circular, se obtendría con algunos gastos la TAE. • Incluyendo todos los gastos se obtendría el coste real para el prestatario • Incluyendo la incidencia fiscal, se obtendría su coste financiero-fiscal.

7.- ACTIVIDADES: EJERCICIOS RESUELTOS.

✓ Cuadros de amortización. Casos generales.

En este apartado vamos a aprender a manejar las tablas de amortización como herramienta en el aprendizaje del significado de sus componentes, de sus relaciones y de sus desgloses, del efecto que las carencias tienen en la evolución de la amortización, del significado de los distintos métodos de amortización, en qué afecta cada método a la amortización del capital y al pago de intereses, si en todos los casos se pagan monetariamente los mismos intereses calculados sobre el mismo capital aplicando el mismo tanto de interés, etc.

Es importante que no avancemos si este apartado no nos queda claro, porque es necesario para poder entender el funcionamiento de las operaciones, de forma que sin tener los cuadros sepamos cuál es la posible evolución de la operación, etc. Tampoco nos olvidemos que sin ellos muchas de las anotaciones contables no serían posible.

Actividad nº 1:

Realizar el cuadro de amortización de la siguiente operación:

- Préstamo de 100.000 €
- Duración de tres años a un interés del 8 % anual, pagadero semestralmente.
- Amortización mediante reintegro único y pago semestral de intereses.

Solución:

- Los intereses a pagar en cada tramo, al mantenerse vivo siempre el mismo capital, serían, para un i semestral ($8\% : 2 = 4\%$), de: $100.000 \cdot 0,04 = 4.000$ €
- La tabla de pagos sería:

n	a_s	I_s	A_s	C_s
0	-	-	-	100.000
1	4.000	4.000	-	100.000
2	4.000	4.000	-	100.000
3	4.000	4.000	-	100.000
4	4.000	4.000	-	100.000
5	4.000	4.000	-	100.000
6	104.000	4.000	100.000	-

Actividad nº 2:

Realizar el cuadro de amortización de la siguiente operación:

- Préstamo de 600.000 €
- Duración de ocho años, a un interés del 6 % anual en los cuatro primeros años, del 7 % en los dos siguientes y del 7,5 % en los restantes.
- Amortización mediante reintegro único y pago anual de intereses.

Solución:

- Los intereses a pagar en cada tramo, se calcularían siempre sobre los 600.000 €:

Durante los cuatro primeros años: $600.000 \cdot 0,06 = 36.000$ €. Durante los dos siguientes: $600.000 \cdot 0,07 = 42.000$ € y durante los dos últimos: $600.000 \cdot 0,075 = 45.000$ €.

- La tabla de pagos sería:

n	a_s	I_s	A_s	C_s
0	-	-	-	600.000
1	36.000	36.000	-	600.000
2	36.000	36.000	-	600.000
3	36.000	36.000	-	600.000
4	36.000	36.000	-	600.000
5	42.000	42.000	-	600.000
6	42.000	42.000	-	600.000
7	45.000	45.000	-	600.000
8	645.000	45.000	600.000	-

Actividad nº 3:

Realizar el cuadro de amortización de la siguiente operación:

- Préstamo de 60.000 €.
- Duración de cinco años, a un interés del 9 % anual.
- Amortización de 20.000 € de capital en el segundo año y el resto al vencimiento con pago anual de intereses.

Solución:

- Existe una amortización parcial lo que hará variar el capital vivo y en consecuencia el interés a pagar: En los dos primeros años: $I_1 = 60.000 \cdot 0,09 = 5.400$ €. En los siguientes el capital vivo es de $60.000 - 20.000 = 40.000$ €. Por lo tanto el interés de estos periodos será: $I_2 = 40.000 \cdot 0,09 = 3.600$ €.
- La tabla de pagos sería:

n	a_s	I_s	A_s	C_s
0	-	-	-	60.000
1	5.400	5.400	-	60.000
2	25.400	5.400	20.000	40.000
3	3.600	3.600	-	40.000
4	3.600	3.600	-	40.000
5	43.600	3.600	40.000	-

Actividad nº 4:

Se ha obtenido un préstamo de 400.000 € a un interés del 2 % semestral a amortizar en 5 años del siguiente modo: En los dos primeros semestres no realizará pago alguno, en los dos siguientes devolverá 60.000 € y 50.000 € de **capital**. En los tres siguientes sólo pagará los intereses y en el resto efectuará tres devoluciones de **capital** de 90.000 €, 130.000 € y en el último la cantidad necesaria para amortizar la deuda. Se pide confeccionar el cuadro de la operación.

Solución:

Pagos	Pago (a)	Interés (I)	Amortización (A)	Capital Vivo (C _s)
0	-	-	-	400.000
1	-	-	-	408.000
2	-	-	-	416.160
3	68.323,2	8.323,2	60.000	356.160
4	57.123,2	7.123,2	50.000	306.160
5	6.123,2	6.123,2	-	306.160
6	6.123,2	6.123,2	-	306.160
7	6.123,2	6.123,2	-	306.160
8	96.123,2	6.123,2	90.000	216.160
9	134.323,2	4.323,2	130.000	86.160
10	87.883,2	1.723,2	86.160	0
Σ	462.145,6	45.985,6	416.160	

Actividad nº 5:

Se ha obtenido un préstamo de 20.000 € a un interés del 5 % anual a amortizar con la entrega de los siguientes pagos: 5.000 €, 3.000 €, 6.000 €, 4.000 € y 5.160,23 €. Se pide comprobar si la operación se amortiza en su totalidad y si no fuese así efectuar las rectificaciones oportunas.

Solución:

Siguiendo el procedimiento de cálculo y comprobaremos la última fila.

Pagos	Pago (a)	Interés (I)	Amortización (A)	Capital Vivo
0	-	-	-	20.000
1	5.000	$20.000 \cdot 0,05 = 1.000$	$5.000 - 1.000 = 4.000$	16.000
2	3.000	$16.000 \cdot 0,05 = 800$	$3.000 - 800 = 2.200$	13.800
3	6.000	$13.800 \cdot 0,05 = 690$	$6.000 - 690 = 5.310$	8.490
4	4.000	$8.490 \cdot 0,05 = 424,5$	$4.000 - 424,5 = 3.575,5$	4.914,5
5	5.160,23	$4.914,5 \cdot 0,05 = 245,73$	4.914,5	0

Comprobando que la operación se amortiza con los pagos suministrados.

Actividad nº 6:

Realizar el cuadro de amortización de la siguiente operación: Préstamo de 10.000 €, a cuatro años, con un interés del 6 % anual y amortización mediante la entrega de las siguientes cantidades: 2.000 € en el primer año, 4.000 € en el segundo año, 2.500 € en el tercer año y un cuarto pago a calcular.

Solución:

- El valor del último pago valorando la operación al interés del 6 %, será el que iguale la prestación con la contraprestación

$$10.000 = 2.000 (1 + 0,06)^{-1} + 4.000 (1 + 0,06)^{-2} + 2.500 (1 + 0,06)^{-3} + C (1 + 0,06)^{-4}$$

Operando, $C = 3.098,34 \text{ €}$

- Pero desarrollando la tabla desglosando cada pago se obtendrá el mismo resultado.

Pagos	Pago (a)	Interés (I)	Amortización (A)	Capital Vivo
0	-	-	-	10.000
1	2.000	$10.000 \cdot 0,06 = 600$	$2.000 - 600 = 1.400$	8.600
2	4.000	$8.600 \cdot 0,06 = 516$	$4.000 - 516 = 3.484$	5.116
3	2.500	$5.116 \cdot 0,06 = 306,96$	$2.500 - 306,96 = 2.193,04$	2.922,96
4	$2.922,96 + 175,38 = 3.098,34$	$2.922,96 \cdot 0,06 = 175,38$	2.922,96	0

Actividad nº 7:

Se ha obtenido un préstamo de 3.500 € a un interés del 4 % anual a amortizar con la entrega de tres pagos anuales de 1.100 €, 1.500 € y 1.187,26 €. Se pide comprobar si la operación se amortiza. ¿Tiene regularidad amortizativa esta operación? Explícalo.

Solución:

- Tendrá regularidad amortizativa cuando cada pago es capaz a la vez de amortizar capital y de pagar los intereses correspondientes. Como lo cumple en todos los pagos sí la tiene.

Pagos	Pago (a)	Interés (I)	Amortización	Capital Vivo
0	-	-	-	3.500
1	1.100	$3.500 \cdot 0,04 = 140$	$1.100 - 140 = 960$	2.540
2	1.500	$2.540 \cdot 0,04 = 101,6$	$1.500 - 101,6 = 1.398,4$	1.141,6
3	1.187,26	$1.141,6 \cdot 0,04 = 45,67$	1.141,6	0

Actividad nº 8:

Realizar el cuadro de amortización de la siguiente operación: Préstamo de 60.000 € concedido el 30 de agosto del 2006 a un interés del 6 % anual y a amortizar según el plan adjunto.

Fecha de pago	Cuota de capital
30/09/2006	10.000 €
30/10/2006	15.000 €
30/03/2007	10.000 €
30/05/2007	20.000 €
30/09/2007	5.000 €

Solución:

- Estamos ante una operación irregular en cuanto a los vencimientos de los pagos, 1 mes, 1 mes, 5 meses, 2 meses y 4 meses. Por lo que desarrollaremos cada pago para obtener la tabla, partiendo de las cuotas de capital y por lo tanto del capital vivo.

Pagos	Pago (a)	Interés (I)	Amortización	Capital Vivo
0	-	-	-	60.000
1	10.000 + 300 = 10.300	60.000 · 0,06 · 1/12 = 300	10.000	50.000
2	15.000 + 250 = 15.250	50.000 · 0,06 · 1/12 = 250	15.000	35.000
3	10.000 + 875 = 10.875	35.000 · 0,06 · 5/12 = 875	10.000	25.000
4	20.000 + 250 = 20.250	25.000 · 0,06 · 2/12 = 250	20.000	5.000
5	5.000 + 100 = 5.100	5.000 · 0,06 · 4/12 = 100	5.000	0

Actividad nº 9:

Realizar el cuadro de amortización de la siguiente operación:

- Préstamo de 2.000.000 €
- Duración de tres años, con un interés nominal del 8 % anual.
- Amortización mediante pagos trimestrales constantes.

Solución:

- Al ser el término y el rédito constante, estamos ante el sistema francés. Por lo tanto a un interés trimestral del 8 % : 4 = 2 %, durante 3 años · 4 trimestres = 12 trimestres, la cuantía del pago consante será:

$$2.000.000 = a \cdot a_{\overline{12}|0,02} \quad \text{Operando, } a = 189.119,19 \text{ €}$$

- Las cuotas de capital las obtendremos por recurrencia a partir de la primera:

$$A_1 = a - I_1 = 189.119,19 - (2.000.000 \cdot 0,02) = 149.119,19 \text{ €}$$

$$A_2 = A_1 (1 + 0,02) = 152.101,57 \text{ €}$$

$$A_3 = A_1 (1 + 0,02)^2 = 155.143,61 \text{ € y así sucesivamente.}$$

- El capital vivo será la resta al capital prestado de las cuotas de amortización:

$$C_1 = 2.000.000 - 149.119,19 = 1.850.880,81 \text{ €}$$

$$C_2 = 1.850.880,81 - 152.101,57 = 1.698.779,24 \text{ €}$$

$$C_3 = 1.698.779,24 - 155.143,61 = 1.543.635,63 \text{ € y así sucesivamente.}$$

También podría obtenerse a través de la ecuación general, es decir:

$$C_1 = 189.119,19 \cdot a_{\overline{11}|0,02} = 1.850.880,81 \text{ €}$$

$$C_2 = 189.119,19 \cdot a_{\overline{10}|0,02} = 1.698.779,24 \text{ €}$$

$$C_3 = 189.119,19 \cdot a_{\overline{9}|0,02} = 1.543.635,63 \text{ €}$$

- Las cuotas de interés se pueden obtener o $I_s = C_{s-1} \cdot i$, o por diferencia $a - A_s = I_s$

$$I_1 = 2.000.000 \cdot 0,02 = 40.000$$

$$I_2 = 1.850.880,81 \cdot 0,02 = 37.017,62$$

$$I_3 = 1.698.779,24 \cdot 0,02 = 33.975,58 \quad \text{y así sucesivamente.}$$

- La tabla de pagos sería:

n	a_s	I_s	A_s	C_s
0	-	-	-	2.000.000
1	189.119,19	40.000	149.119,19	1.850.880,81
2	189.119,19	37.017,62	152.101,57	1.698.779,24
3	189.119,19	33.975,58	155.143,61	1.543.635,63
4	189.119,19	30.872,71	158.246,48	1.385.389,15
5	189.119,19	27.707,78	161.411,41	1.223.977,74
6	189.119,19	24.479,55	164.639,64	1.059.338,10
7	189.119,19	21.186,76	167.932,43	891.405,67
8	189.119,19	17.828,11	171.291,08	720.114,59
9	189.119,19	14.402,29	174.716,90	545.397,69
10	189.119,19	10.907,95	178.211,24	367.186,45
11	189.119,19	7.343,73	181.775,46	185.410,97
12	189.119,19	3.707,22	185.410,97	0

Actividad nº 10:

Realizar el cuadro de amortización de la siguiente operación:

- Préstamo de 4.500 € a ocho años a un interés del 6 % anual.
- Amortización mediante pagos constantes, con carencia de principal en los dos primeros años.

Solución:

- Al existir carencia de principal en los dos primeros años, el capital vivo es el mismo hasta el término de la carencia en dos, ya que al pagar los intereses la deuda no varía. Por lo tanto la ecuación financiera que nos permite calcular el término constante mediante la fórmula de la renta constante para $8 - 2 = 6$ pagos:

$$4.500 = a \cdot a_{8-2|0,06} \quad \text{Operando, } a = 915,13 \text{ €}$$

- Los dos pagos por intereses realizados en los dos primeros años serán de:

$$I = 4.500 \cdot 0,06 = 270 \text{ €}$$

- El resto de los elementos se calculará, con el mismo procedimiento que en el problema anterior, es decir calculamos primero las cuotas de capital:

$$\begin{aligned} A_3 &= 915,13 - 270 = 645,13 \\ A_4 &= A_3 (1 + 0,06) = 683,84 \\ A_5 &= A_3 (1 + 0,06)^2 = 724,87 \\ A_6 &= A_3 (1 + 0,06)^3 = 768,36 \text{ Y así sucesivamente.} \end{aligned}$$

- El capital vivo se obtendría con la ecuación general por el método prospectivo:

$$\begin{aligned} C_0 &= C_1 = C_2 = 4.500 \text{ €} \\ C_3 &= 915,13 \cdot a_{5|0,02} = 3.854,87 \text{ €} \\ C_4 &= 915,13 \cdot a_{4|0,02} = 3.171,03 \text{ € Y así sucesivamente.} \end{aligned}$$

- Los intereses serían cada uno de los capitales anteriores por el rédito.

- La tabla de pagos sería:

n	a _s	I _s	A _s	C _s
0	-	-	-	4.500
1	270	270	-	4.500
2	270	270	-	4.500
3	915,13	270	645,13	3.854,87
4	915,13	231,29	683,84	3.171,03
5	915,13	190,26	724,87	2.446,16
6	915,13	146,77	768,36	1.677,80
7	915,13	100,67	814,46	863,33
8	915,13	51,80	863,33	0

Actividad nº 11:

Realizar el cuadro de amortización de la siguiente operación:

- Préstamo de 600.000 € a ocho años y un interés del 7 % anual.
- Amortización mediante pagos anuales constantes realizándose el primero al final del tercer año.

Solución:

- Al realizar el primer pago en el tercer año, existe una carencia total con lo que la deuda al inicio del tercer año será los seis millones más los intereses acumulados de dos años:

$$C_2 = 600.000 \cdot (1 + 0,07)^2 = 686.940 \text{ €}$$

- El importe del término amortizativo se calculará sobre la deuda anterior, como si la operación se iniciase en (2):

$$686.940 = a \cdot a_{8-2 \mid 0,07} \quad \text{Operando, } a = 144.117,13 \text{ €}$$

- Calculada la primera cuota de capital obtendremos por recurrencia el resto:

$$A_3 = 144.117,13 - (686.940 \cdot 0,07) = 96.031,33 \text{ €}$$

$$A_4 = 96.031,33 \cdot (1 + 0,07) = 102.753,52 \text{ €}$$

$$A_5 = 96.031,33 \cdot (1 + 0,07)^2 = 109.946,27 \text{ €}$$

$$A_6 = 96.031,33 \cdot (1 + 0,07)^3 = 117.642,51 \text{ €}$$

$$A_7 = 96.031,33 \cdot (1 + 0,07)^4 = 125.877,48 \text{ €}$$

$$A_8 = 96.031,33 \cdot (1 + 0,07)^4 = 134.688,91 \text{ €}$$

- Los capitales vivos podemos obtenerlos por la ecuación general:

$$C_0 = 600.000 \text{ €}$$

$$C_1 = 600.000 \cdot (1 + 0,07) = 642.000 \text{ €}$$

$$C_2 = 642.000 \cdot (1 + 0,07) = 686.940 \text{ €}$$

$$C_3 = 144.117,13 \cdot a_{5 \mid 0,02} = 590.908,69 \text{ €}$$

$$C_4 = 144.117,13 \cdot a_{4 \mid 0,02} = 488.155,76 \text{ €}$$

$$C_5 = 144.117,13 \cdot a_{3 \mid 0,02} = 378.208,90 \text{ €} \text{ Y así sucesivamente.}$$

- Los intereses se calcularían con cada uno de los capitales anteriores por el rédito.
- La tabla de pagos sería:

n	a_s	I_s	A_s	C_s
0	-	-	-	600.000
1	-	-	-	642.000
2	-	-	-	686.940
3	144.117,13	48.085,80	96.031,33	590.908,69
4	144.117,13	41.363,61	102.753,52	488.155,76
5	144.117,13	34.170,86	109.946,27	378.208,90
6	144.117,13	26.474,62	117.642,51	260.566,39
7	144.117,13	18.239,65	125.877,48	134.688,91
8	144.117,13	9.428,22	134.688,91	0

Actividad nº 12:

Realizar el cuadro de amortización de la siguiente operación:

- Préstamo de 1.500.000 € a seis años y un interés del 7 % anual.
- Amortización mediante cuotas de capital anuales y constantes.

Solución:

- Al ser constantes las cuotas de capital su valor será: $1.500.000 \text{ €} : 6 = 250.000 \text{ €/año}$.
- El capital vivo se reducirá cada año en 250.000 €

$$C_0 = 1.500.000 \text{ €}$$

$$C_1 = 1.500.000 - 250.000 = 1.250.000 \text{ €}$$

$$C_2 = 1.250.000 - 250.000 = 1.000.000 \text{ €}$$

$$C_3 = 1.000.000 - 250.000 = 750.000 \text{ €}$$

$$C_4 = 750.000 - 250.000 = 500.000 \text{ €}$$

$$C_5 = 500.000 - 250.000 = 250.000 \text{ €}$$

$$C_6 = 250.000 - 250.000 = 0 \text{ €}$$

- El valor de los términos amortizativos variará en progresión aritmética decreciente de razón: $d = -A \cdot i = 250.000 \cdot 0,07 = -17.500 \text{ €}$. Al igual que las cuotas de interés.

$$I_1 = 1.500.000 \cdot 0,07 = 105.000 \text{ €}$$

$$I_2 = 105.000 - 1 \cdot 17.500 = 87.500 \text{ €}$$

$$I_3 = 105.000 - 2 \cdot 17.500 = 70.000 \text{ €}$$

$$I_4 = 105.000 - 3 \cdot 17.500 = 52.500 \text{ €}$$

$$I_5 = 105.000 - 4 \cdot 17.500 = 35.000 \text{ €}$$

$$I_6 = 105.000 - 5 \cdot 17.500 = 17.500 \text{ €}$$

$$a_1 = 250.000 + 105.000 = 355.000 \text{ €}$$

$$a_2 = 355.000 - 1 \cdot 17.500 = 337.500 \text{ €}$$

$$a_3 = 355.000 - 2 \cdot 17.500 = 320.000 \text{ €}$$

$$a_4 = 355.000 - 3 \cdot 17.500 = 302.500 \text{ €}$$

$$a_5 = 355.000 - 4 \cdot 17.500 = 285.000 \text{ €}$$

$$a_6 = 355.000 - 5 \cdot 17.500 = 267.500 \text{ €}$$

- La tabla de pagos sería:

n	a_s	I_s	A	C_s
0	-	-	-	1.500.000
1	355.000	105.000	250.000	1.250.000
2	337.500	87.500	250.000	1.000.000
3	320.000	70.000	250.000	750.000
4	302.500	52.500	250.000	500.000
5	285.000	35.000	250.000	250.000
6	267.500	17.500	250.000	0

✓ **Cálculo de términos amortizativos. Casos generales.**

Este apartado está muy vinculado con el correcto conocimiento y manejo de las rentas constantes ya que vamos a calcular el término amortizativo de una operación de amortización en situaciones diversas: Con más de un tipo de interés, con cantidades a pagar diferentes, con amortización forzada por el contrato de concesión etc.

Actividad nº 13:

Calcular los términos amortizativos correspondientes a los siguientes préstamos:

- a.- De un préstamo de 2.000.000 € a amortizar en ocho años, con abono sólo de los intereses en los dos primeros años, valorados al 8 % anual y con anualidades constantes valoradas al 7 % en los restantes.
- b.- De un préstamo de 1.500.000 € a amortizar en nueve años, con carencia total en los dos primeros años, con pago sólo de los intereses en los tres siguientes y con anualidades constantes en los restantes valorando la operación la 7 %.
- c.- De un préstamo de 2.000.000 € a amortizar en cuatro años mediante pagos trimestrales constantes valorados al 8 % nominal anual.

Solución:

- a.- La ecuación financiera sabiendo que el capital vivo en (2), seguirá siendo C_0 al tener carencia parcial, para el cálculo de los términos:

$$2.000.000 = a \cdot a_{\overline{6}|0,07} \quad \text{Operando, } a = 419.592 \text{ €}$$

También podía establecerse la ecuación financiera ateniéndose a los pagos que conforman la contraprestación, donde habrá que incluir los dos pagos de intereses, por un importe de: $2.000.000 \cdot 0,08 = 160.000 \text{ €}$

$$2.000.000 = 160.000 \cdot a_{\overline{2}|0,07} + a \cdot a_{\overline{6}|0,07} (1 + 0,08)^{-2} \quad \text{Operando, } a = 419.591,60 \text{ €}$$

- b.- La deuda aumenta por no pagar cantidad alguna en los dos primeros años, siendo el importe de la deuda acumulada al final de los dos años de:

$$C_2 = 1.500.000 \cdot (1 + 0,07)^2 = 1.717.350 \text{ €}$$

Los intereses a pagar en los siguientes años serían: $1.717.350 \cdot 0,07 = 120.214,5 \text{ €}$
El término lo plantearemos de las dos maneras como en el caso anterior, pero tomando como deuda la acumulada en (2):

$$1.717.350 = a \cdot a_{\overline{4}|0,07} \quad \text{Operando, } a = 507.010 \text{ €}$$

Si incluimos los intereses en la ecuación de equivalencia calculada en (2) sería:

$$1.717.350 = 120.215 \cdot a_{\overline{3}|0,07} + a \cdot a_{\overline{4}|0,07} (1 + 0,07)^{-3}$$

$$\text{Operando } a = 507.010 \text{ €}$$

- c.- Al ser los pagos trimestrales habrá que calcular el tanto trimestral: $8 \% : 4 = 2 \%$ trimestral. El número de pagos será $4 \cdot 4 = 16$.

$$2.000.000 = a \cdot a_{\overline{16}|0,02} \quad \text{Operando, } a = 147.300,25 \text{ €}$$

Actividad nº 14:

Calcular los términos amortizativos correspondientes a los siguientes préstamos:

- a.- De un préstamo de 6.000.000 € valorado al 6 % nominal anual en los dos primeros años, al 5 % efectivo anual en los dos siguientes y al 4 % nominal anual en los cuatro últimos. En los dos primeros años sólo se abonarán intereses trimestrales, en los dos siguientes no se pagará cantidad alguna y en los restantes pagos trimestrales constantes.
- b.- Para realizar una urbanización las condiciones del préstamo solicitado son: El Banco entregará 10 millones de euros en cada uno de los próximos tres años a un interés del 4 % anual, para devolverlo, junto con sus intereses, a partir de la última entrega, mediante ocho pagos anuales constantes.

Solución:

- a.- Los pagos trimestrales de los intereses en los dos primeros años al 6 % : $4 = 1,5 \%$, serán de $6.000.000 \cdot 0,015 = 90.000$ € cada uno.

En los dos siguientes periodos al no pagar nada se incrementa la deuda:

$$6.000.000 (1 + 0,05)^2 = 6.615.000 \text{ €}$$

El tanto de valoración de los pagos trimestrales restantes será: $4 \% : 4 = 1 \%$ y su valor

$$6.615.000 = a \cdot a_{16|0,01} \quad \text{Operando, } a = 449.453,91 \text{ €}$$

- e.- En este caso estamos ante un préstamo con prestación múltiple y contraprestación múltiple, cuya representación sería:



El valor de la deuda en 3, será la deuda acumulada hasta esos momentos:

$$C_3 = 10.000.000 \cdot S_{3|0,04} = 31.216.000 \text{ €}$$

El valor de los términos amortizativos sería:

$$31.216.000 = a \cdot a_{8|0,04} \quad \text{Operando } a = 4.121.782,54 \text{ €}$$

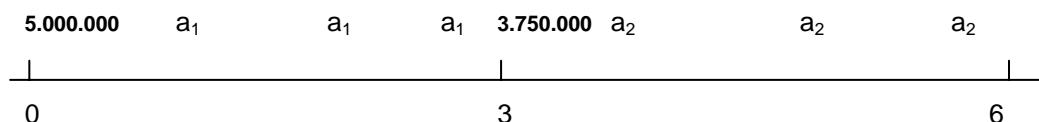
Actividad nº 15:

Calcular los términos amortizativos que amortizan un préstamo de 5 millones de euros, a devolver en 6 años, a un tanto de interés del 10 %, con las siguientes condiciones:

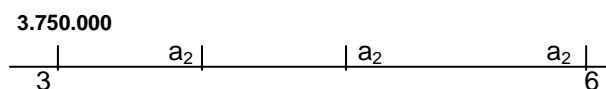
- Durante los tres primeros años ha de pagar un término constante que permita amortizar la cuarta parte del principal.
- Durante los tres años siguientes, pagará otro término constante que le permita amortizar el resto.

Solución:

- En este caso se obliga al pago de distintos términos para así cumplir el plan de amortización, de tal forma que en el primer tramo ha de amortizar $1/4$ del principal, es decir $5.000.000 \cdot 1/4 = 1.250.000$ €, quedando vivo un principal de 5 millones – 1,25 millones = 3,75 millones, para el siguiente tramo. Como lo que obtenemos al final de cada tramo es el capital vivo, podemos plantear el problema a través de su concepto:



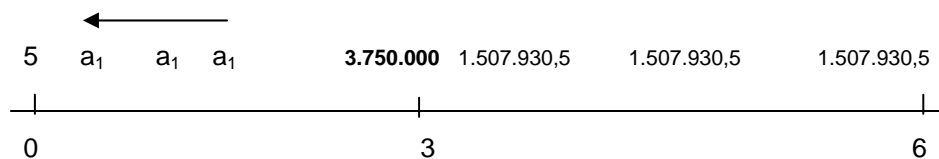
- Podemos comenzar por el último tramo ya que los 3.750.000 se han de amortizar mediante tres pagos de cuantía a_2 , cuyo importe será:



$$3.750.000 = a_2 \cdot a_{3|0,10}$$

$$\text{operando: } a_2 = 1.507.930,5 \text{ €}$$

- En origen de la operación quedan pendientes de amortizar, 5.000.000 € que se corresponden con dos rentas una de cuantía a_2 que ya conocemos (la que amortizó los 3.750.000 €), más otra de cuantía a_1 :



$$5.000.000 = a_1 \cdot a_{3|0,10} + 1.507.930,5 \cdot a_{3|0,10} (1 + 0,1)^{-3}$$

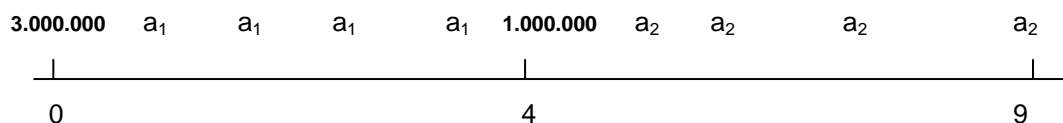
$$\text{operando: } a_1 = 877.643,50 \text{ €}$$

Actividad nº 16:

Se pide el cálculo de las anualidades que amortizan un préstamo de 3 millones de euros, para ser amortizado en 9 años, a un tanto de interés del 7 %, de manera que en los cuatro últimos años amortice 1.000.000 € y en los cinco primeros el resto.

Solución:

- Estamos ante un caso igual al anterior, es decir la amortización de la operación está condicionada a unas características de cantidad. La representación gráfica sería:



$$1.000.000 = a_2 \cdot a_{4|0,07}$$

$$\text{operando: } a_2 = 295.228,12 \text{ €}$$

- En origen de la operación quedan pendientes de amortizar, 3.000.000 € que se corresponden con dos rentas una de cuantía que ya conocemos (la que amortizó el 1.000.000 €), más otra de cuantía a_1 a calcular:

$$3.000.000 = a_1 \cdot a_{5|0,07} + 1.000.000 (1 + 0,07)^{-5} \quad \text{operando: } a_1 = 557.781,39 \text{ €}$$

Actividad nº 17:

Se ha obtenido un préstamo de 200.000 € a devolver dentro de un año a un interés del 5 % anual. Llegado el vencimiento el prestatario paga los intereses devengados y 50.000 € para devolver parte del principal pero solicitando la posibilidad de alargar la operación un año más, propuesta que es aceptada pero aumentando el interés un punto. Se pide calcular el pago a realizar para amortizar el préstamo en el siguiente año.

Solución:

- Al finalizar el primer año los intereses son de: $I_1 = 200.000 \cdot 0,05 = 10.000 \text{ €}$
- El capital que adeuda tras la amortización parcial es de $200.000 - 50.000 = 150.000 \text{ €}$
- En el siguiente año pagará:

Por intereses: $I_2 = 150.000 \cdot 0,06 = 9.000 \text{ €}$

Por el principal: 150.000 €

Total a pagar: $150.000 + 9.000 = 159.000 \text{ €}$

✓ **La problemática de los pagos en su número y cuantía.**

El objetivo fundamental de este apartado es insistir, como ya se hizo en el tema de rentas, que estamos ante operaciones que son resultado de la suma de multitud de capitales, cuando se utilizan las fórmulas del actual para efectuar estas sumas, el factor n no representa el tiempo en sí mismo sino el número de capitales que estamos sumando, eso sí asociados a un intervalo temporal. Con estos ejercicios aprenderemos a interpretar el concepto del número de pagos ante situaciones anómalas.

Actividad nº 18:

Una sociedad tiene en vigor un préstamo de 1.600.000 € a devolver en seis años con pagos mensuales constantes, valorados a un tanto nominal del 6 %. Si después de efectuado el pago número treinta, le bajan el interés al 5 % ¿Cuál sería el nuevo pago a efectuar?.

Solución:

- El interés mensual que se aplica es del: $6 \% : 12 = 0,5 \%$. El número de pagos es $6 \cdot 12 = 72$ pagos y la cuantía del pago con el que inició la amortización era:

$$1.600.000 = a \cdot a_{72|0,005} \quad \text{Operando, } a = 26.516,62 \text{ €}$$

- Efectuado el pago número treinta, la deuda viva es el importe de $72 - 30 = 42$ pagos:

$$C_s = 26.516,62 \cdot a_{42|0,005} = 1.002.283,18 \text{ €}$$

- El nuevo tipo de interés a aplicar al resto de la operación es: $5 \% : 12 = 0,416666 \%$ y el importe de la nueva mensualidad:

$$1.002.283,18 = a' \cdot a_{42|0,00416666} \quad \text{operando, } a' = 26.062,40 \text{ €}$$

Actividad nº 19:

Un préstamo de 600.000 € va a ser amortizado del siguiente modo: Dos años sin efectuar pago alguno y al finalizar éstos abonará los intereses acumulados hasta ese momento y 50.000 € para reducir el principal y seis años abonando pagos trimestrales constantes. Los tipos de interés acordados han sido del 6 % efectivo en los dos primeros años y del 7 % nominal en los siguientes. Se pide:

- Cuantía de los pagos a realizar.
- Si realizados ocho pagos trimestrales decide realizar una amortización anticipada por un importe de 200.000 € ¿Cuál sería el importe del préstamo adeudado?. ¿Cuál sería el importe del nuevo pago trimestral?.

Solución:

- El capital acumulado hasta el segundo año es: $600.000 (1 + 0,06)^2 = 674.160 \text{ €}$
- Los intereses a pagar serían: $674.160 - 600.000 = 74.160 \text{ €}$. Como en el segundo año abona los intereses acumulados queda a deber sólo los 600.000 € y como además entrega 50.000 € para reducir el principal éste quedará reducido a 550.000 €, al iniciar los pagos.
- El interés trimestral, es el $7 \% : 4 = 1,75 \%$ trimestral, por lo tanto la cuantía del pago:

$$550.000 = C \cdot a_{24|0,0175} \quad \text{Operando, } C = 28.262,11 \text{ €}$$

- En el momento de realizar el octavo pago trimestral le quedan pendientes $24 - 8 = 16$ pagos, el capital vivo será:

$$C_s = 28.262,11 \cdot a_{16|0,0175} = 391.444,23 \text{ €}$$

- Como reduce la deuda en 200.000 quedará un capital vivo de: $391.444,23 - 200.000 = 191.444,23 \text{ €}$, el importe del nuevo pago será:

$$191.444,23 = C \cdot a_{16|0,0175} \quad \text{Operando, } C = 13.822,19 \text{ €}$$

Actividad nº 20:

Para la compra de una máquina pesada, se ha solicitado un préstamo de 20.000.000 € a amortizar mediante pagos trimestrales durante los próximos 10 años, a un interés nominal del 10 %. ¿Cuál es la cuantía de los pagos trimestrales?. Si realizado el pago número 20, realiza una amortización de 5.000.000 €:

- ¿Cuál sería el importe de la deuda en esos momentos?.
- ¿Cuál sería la nueva cuantía del pago trimestral, si se mantiene la duración?.
- ¿Cuál sería el número de pagos exactos a realizar, si se mantiene la cuantía original de éstos?.

Solución:

- El valor de los pagos trimestrales, se corresponde con una renta trimestral de $10 \cdot 4 = 40$ pagos, valorada al $10 \% : 4 = 2,5 \%$ trimestral.

$$20.000.000 = C \cdot a_{40|0,025} \quad \text{Operando, } C = 796.724,66 \text{ €}$$

- La deuda pendiente después de efectuado el pago número 20, será el valor actual de los 20 pagos pendientes de abonar de 796.724,6 € cada uno.

$$V_a = 796.724,66 \cdot a_{20|0,025} = 12.420.270,07 \text{ €}$$

- El saldo vivo tras la aportación extraordinaria será:

$$12.420.270,07 - 5.000.000 = 7.420.270,07 \text{ €}$$

- Si mantiene el número de pagos pendientes, la duración de la renta, la incógnita será C:

$$7.420.270,07 = C \cdot a_{20|0,025}$$

$$\text{Operando, } C = 475.989,02 \text{ €}$$

- Si mantiene el pago de 796.724,66 €, que estaba realizando, el número de pagos a efectuar será la incógnita, por lo tanto:

$$7.420.270,07 = 796.724,6 \cdot a_{n|0,025}$$

Operando, $n = 10,73$ pagos, que exactos serán 10, si incrementamos este último pago o pueden ser 11, siendo éste menor a los anteriores.

Actividad nº 21:

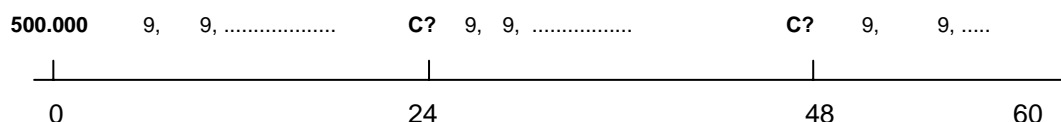
Un préstamo de 500.000 € se ha de devolver en cinco años con pagos mensuales de 9.000 € valorados al 4,8 % nominal. Se pide comprobar si con estos pagos se amortiza el préstamo y si no es así calcular el valor de 2 pagos iguales y extras a efectuar al final del segundo y cuarto año para poder amortizar la totalidad de la deuda.

Solución:

- Lo primero que tenemos que hacer es comprobar si con los sesenta pagos de 9.000 € se cancela o no la deuda. El tipo de interés mensual a aplicar sería el: $4,8 \% : 12 = 0,4 \%$

$$C_s = 9.000 \cdot a_{60|0,004} = 479.239,81 \text{ €}$$

Comprobando que no se amortiza la operación, por lo tanto vamos a calcular el valor de los pagos extras a efectuar para poder cancelarla, que se obtendrá añadiendo a la ecuación financiera anterior los dos pagos iguales de cuantía C con vencimientos en el mes 24 y 48 y actualizados.



$$500.000 = 9.000 \cdot a_{60|0,004} + C (1 + 0,004)^{-24} + C (1 + 0,004)^{-48}$$

$$\text{Operando, } C = 11.970,63 \text{ €}$$

Actividad nº 22:

Una empresa tiene en vigor un préstamo de 50.000 € obtenido hace tres años, para ser amortizado en seis años a un interés nominal del 8 % anual mediante pagos semestrales constantes. Hoy ante dificultades financieras se concierta con el banco el pago sólo de los intereses en los dos siguientes años y seguir amortizando la operación con los pagos semestrales que estaba realizando. ¿Cuál sería el número de pagos que tendrá que realizar para terminar de amortizar el préstamo?.

Solución:

- Los pagos se estaban valorando al $8 \% : 2 = 4 \%$ semestral y cuyo importe era de:

$$50.000 = C \cdot a_{12|0,04} \quad \text{Operando, } C = 5.327,61 \text{ €}$$

- Como el préstamo lo obtuvo hace tres años, el capital vivo será el valor de los seis pagos pendientes:

$$C_s = 5.327,61 \cdot a_{6|0,04} = 27.928,05 \text{ €}$$

- En los dos siguientes años efectuará sólo el pago de los intereses por un importe de:

$$I = 27.928,05 \cdot 0,04 = 1.117,12 \text{ €}$$

- El capital vivo terminado el pago de los intereses será el mismo, por lo tanto el número de pagos a realizar sería:

$$27.928,05 = 5.327,61 \cdot a_{n|0,04}$$

Operando $n = 5,999$ pagos, es decir 6 pagos.

Actividad nº 23:

Un comerciante solicitó el 18 de marzo, un préstamo de 50.000 € para amortizar en ocho años, mediante pagos mensuales constantes. Acuerda con el banco realizar los pagos el 5 de cada mes, venciendo el primero el día 5 de abril, a un interés nominal del 8 %. Se pide calcular el importe de los pagos mensuales y el valor del pago realizado el primer 5 de abril para el abono de los intereses devengados desde la concesión. Calcular dicho pago si los intereses se calculan en simple y en compuesta.

Solución:

- Desde el 18 de marzo al 5 de abril transcurren 18 días, por lo que el primer pago por el valor de los intereses devengados en ese tiempo será de:

$$\text{— Calculados en simple: } 50.000 \cdot 0,08 \cdot 18/360 = 200 \text{ €}$$

$$\text{— En compuesta, necesitamos el interés mensual del } 8 \% : 12 = 0,666 \%$$

$$I = C_n - C_0 = 50.000 (1 + 0,00666)^{18/30} - 50.000 = 199,73 \text{ €}$$

- Como en este caso ha pagado los intereses, la deuda sigue siendo de la misma cuantía y el importe de los términos constantes se obtendrá de la suma del valor actual de la renta de $12 \cdot 8 = 96$ pagos que la forman:

$$50.000 = a \cdot a_{96|0,00666}$$

$$\text{Operando, } a = 706,83 \text{ €}$$

✓ Operaciones de “leasing”.

Actividad nº 24:

Se va a adquirir un vehículo mediante “leasing” cuyo coste al contado es de 38.705 €, mediante 36 pagos constantes más una opción de compra de igual cuantía a los pagos. El interés pactado es del 5,8 % anual.

Se pide confeccionar el cuadro de pagos de la operación

Solución:

- La cuantía de los pagos se obtendrá de una renta constante anticipada de 37 cuotas, al realizarse los pagos al inicio de cada periodo, valorada a un interés del 5,8 % : $12 = 0,0483333$ mensual:

$$38.705 = a \cdot a_{37|0,048333} (1 + 0.0048333) \quad \text{Operando, } a = 1.139,42 \text{ €}$$

Los datos de la primera línea de la tabla serán:

- ✓ $I_1 = (38.705 - 1.139,42) \cdot 0,0048333 = 181,57 \text{ €}$
- ✓ $A_1 = 1.139,42 - 181,57 = 957,85 \text{ €}$, el resto se obtendrá por recurrencia.
 $A_2 = 957,85 \cdot 1,0048333 = 962,48 \text{ €}$
 $A_3 = 962,48 \cdot 1,0048333 = 967,138 \text{ €}$ y así sucesivamente.
- ✓ $C_1 = 38.705 - 957,85 = 37.747,15 \text{ €}$ pero recordando que aunque es el importe de la deuda aún no pagada, no es la cifra sobre la que se calculan los intereses ya que siempre hay que restar el importe de la opción de compra (- 1.139,42 = 36.607,73 que sería el importe de la deuda viva a efectos del cálculo de los intereses, $I_2 = 36.607,73 \cdot 0,0048333 = 176,94 \text{ €}$).

Fecha	Cuota neta	Carga financiera	Recuperación del coste	Capital pendiente	IVA	Cuota bruta
01/02/99	1139,42	181,57	957,85	37747,15	182,31	1321,72
01/03/99	1139,42	176,94	962,48	36784,67	182,31	1321,72
01/04/99	1139,42	172,29	967,13	35817,54	182,31	1321,72
01/05/99	1139,42	167,61	971,81	34845,73	182,31	1321,72
01/06/99	1139,42	162,91	976,50	33869,23	182,31	1321,72
01/07/99	1139,42	158,19	981,22	32888,01	182,31	1321,72
01/08/99	1139,42	153,45	985,97	31902,04	182,31	1321,72
01/09/99	1139,42	148,69	990,73	30911,31	182,31	1321,72
01/10/99	1139,42	143,90	995,52	29915,79	182,31	1321,72
01/11/99	1139,42	139,09	1000,33	28915,46	182,31	1321,72
01/12/99	1139,42	134,25	1005,17	27910,30	182,31	1321,72
01/01/00	1139,42	129,39	1010,02	26900,27	182,31	1321,72
01/02/00	1139,42	124,51	1014,91	25885,37	182,31	1321,72
01/03/00	1139,42	119,61	1019,81	24865,56	182,31	1321,72
01/04/00	1139,42	114,68	1024,74	23840,81	182,31	1321,72
01/05/00	1139,42	109,72	1029,69	22811,12	182,31	1321,72
01/06/00	1139,42	104,75	1034,67	21776,45	182,31	1321,72
01/07/00	1139,42	99,75	1039,67	20736,78	182,31	1321,72
01/08/00	1139,42	94,72	1044,70	19692,08	182,31	1321,72
01/09/00	1139,42	89,67	1049,75	18642,34	182,31	1321,72

01/10/00	1139,42	84,60	1054,82	17587,52	182,31	1321,72
01/11/00	1139,42	79,50	1059,92	16527,60	182,31	1321,72
01/12/00	1139,42	74,38	1065,04	15462,56	182,31	1321,72
01/01/01	1139,42	69,23	1070,19	14392,37	182,31	1321,72
01/02/01	1139,42	64,06	1075,36	13317,01	182,31	1321,72
01/03/01	1139,42	58,86	1080,56	12236,45	182,31	1321,72
01/04/01	1139,42	53,64	1085,78	11150,67	182,31	1321,72
01/05/01	1139,42	48,39	1091,03	10059,64	182,31	1321,72
01/06/01	1139,42	43,11	1096,30	8963,34	182,31	1321,72
01/07/01	1139,42	37,82	1101,60	7861,74	182,31	1321,72
01/08/01	1139,42	32,49	1106,93	6754,82	182,31	1321,72
01/09/01	1139,42	27,14	1112,28	5642,54	182,31	1321,72
01/10/01	1139,42	21,77	1117,65	4524,89	182,31	1321,72
01/11/01	1139,42	16,36	1123,05	3401,83	182,31	1321,72
01/12/01	1139,42	10,94	1128,48	2273,35	182,31	1321,72
01/01/02	1139,42	5,48	1133,94	1139,42	182,31	1321,72
Opción	1139,42	0	1139,42	0	182,31	1321,72
Totales	42.158,42	3.453,54	38.705,00		6.745,47	48.903,64

Actividad nº 25:

El 1 de febrero se ha concertado un "leasing" de maquinaria pesada con el siguiente detalle: Importe del bien: 502.500 € a pagar en 24 cuotas mensuales constantes, haciendo efectiva la primera a la firma del contrato, siendo la opción de compra del mismo importe de las cuotas. El tipo de interés de la operación es del 12,5 % nominal anual. Se pide calcular el valor de las mensualidades y la tabla de pagos.

Solución:

- La ecuación financiera, al igual que en el caso anterior, será el valor actual de una renta constante anticipada de 24 más la opción. El interés mensual de la operación sería: $12,5 \% : 12 = 1,04166 \% \text{ mensual}$:

$$502.500 = C \cdot a_{\overline{24}|0,0104166} (1 + 0,0104166) \quad \text{Operando, } C = 22.698 \text{ €}$$

- El interés o carga financiera del primer pago se calcula sobre el capital financiado que es el valor al contado del bien menos la opción de compra. La primera cuota de capital o recuperación del coste se obtendrá restando al valor de la cuota neta, la parte correspondiente a los intereses del primer pago. El resto de las cuotas se puede obtener fácilmente utilizando la ley de recurrencia del préstamo francés $(1 + i)$.
- Primera cuota de interés. $I_1 = 502.500 - 22.698 = 479.802 \text{ €} \cdot 0,0104166 = 4.998 \text{ €}$
- Primera cuota de capital: $A_1 = 22.698 \text{ €} - 4.998 \text{ €} = 17.700 \text{ €}$, el resto de las cuotas:
 $A_2 = 17.700 (1,0104166)^1 = 17.885 \text{ €}$
 $A_3 = 17.700 (1,0104166)^2 = 18.071 \text{ €}$
 $A_4 = 17.700 (1,0104166)^3 = 18.259 \text{ €}$, y así sucesivamente.
- El resto de las cuotas de interés se obtendrían por diferencia entre el pago mensual y la cuota de capital. La tabla de pagos sería:

Fecha	Cuota Neta	Recuperación del coste	Carga financiera	Capital Pendiente	I.V.A.	Cuota Bruta
1/02/09	22.698	17.700	4.998	484.800	3.632	26.330
1/03/09	22.698	17.885	4.814	466.915	3.632	26.330
1/04/09	22.698	18.071	4.627	448.844	3.632	26.330
1/05/09	22.698	18.259	4.439	430.585	3.632	26.330
1/06/09	22.698	18.449	4.249	412.136	3.632	26.330
1/07/09	22.698	18.641	4.057	393.494	3.632	26.330
1/08/09	22.698	18.836	3.862	374.659	3.632	26.330
1/09/09	22.698	19.032	3.666	355.627	3.632	26.330
1/10/09	22.698	19.230	3.468	336.397	3.632	26.330
1/11/09	22.698	19.430	3.268	316.966	3.632	26.330
1/12/09	22.698	19.633	3.065	297.333	3.632	26.330
1/01/10	22.698	19.837	2.861	277.496	3.632	26.330
1/02/10	22.698	20.044	2.654	257.452	3.632	26.330
1/03/10	22.698	20.253	2.445	237.199	3.632	26.330
1/04/10	22.698	20.464	2.234	216.736	3.632	26.330
1/05/10	22.698	20.677	2.021	196.059	3.632	26.330
1/06/10	22.698	20.892	1.806	175.166	3.632	26.330
1/07/10	22.698	21.110	1.588	154.056	3.632	26.330
1/08/10	22.698	21.330	1.368	132.727	3.632	26.330
1/09/10	22.698	21.552	1.146	111.175	3.632	26.330
1/10/10	22.698	21.777	922	89.398	3.632	26.330
1/11/10	22.698	22.003	695	67.395	3.632	26.330
1/12/10	22.698	22.233	466	45.162	3.632	26.330
1/01/11	22.698	22.464	234	22.698	3.632	26.330
Opción	22.698	22.698	0		3.632	26.330
Totales	567.453	502.500	64.953		90.793	658.246

Actividad nº 26:

El 1 de febrero se ha concertado el arrendamiento financiero de una máquina, con el siguiente detalle: Importe del bien, 1.972.500 € a pagar en 36 cuotas mensuales constantes, más la opción de compra del mismo importe, haciendo efectiva la primera a la firma del contrato. El tipo de interés acordado es del 13 % nominal. Se pide calcular el valor de las mensualidades y los seis primeros pagos de la tabla.

Solución:

- Procediendo de igual modo que en el caso anterior a un interés mensual del: $13\% : 12 = 1,08333\%$, el valor a pagar será el actual de 37 pagos al ser la opción del mismo importe que las cuotas:

$$1.972.500 = C \cdot a_{\overline{37}|0,0108333} (1 + 0,0108333) \text{ Operando, } C = 64.295 \text{ €}$$

- Primera cuota de interés. $I_1 = (1.972.500 - 64.295) \cdot 0,0108333 = 20.672 \text{ €}$
- Primera cuota de capital: $A_1 = 64.295 \text{ €} - 20.672 \text{ €} = 43.623 \text{ €}$, el resto de las cuotas:
 $A_2 = 43.623 (1,0108333)^1 = 44.095 \text{ €}$
 $A_3 = 43.623 (1,0108333)^2 = 44.573 \text{ €}$ y así sucesivamente.

- El resto de las cuotas de interés se obtendrían por diferencia entre el pago mensual y la cuota de capital. La tabla sería:

Fecha	Cuota neta	Recuperación del coste	Carga financiera	Capital Pendiente	I.V.A.	Cuota Bruta
1/02/09	64.295	43.623	20.672	1.928.877	10.287	74.582
1/03/09	64.295	44.095	20.200	1.884.782	10.287	74.582
1/04/09	64.295	44.573	19.722	1.840.209	10.287	74.582
1/05/09	64.295	45.056	19.239	1.795.153	10.287	74.582
1/06/09	64.295	45.544	18.751	1.749.609	10.287	74.582
1/07/09	64.295	46.037	18.258	1.703.572	10.287	74.582
.....

Actividad nº 27:

El 30 de diciembre se ha concertado el arrendamiento financiero de un coche, de 29.600 € y la matriculación 2.664 €. Se pagarán 48 cuotas mensuales siendo la primera de 17.504,36 € a un interés del 7,5 % nominal.

Se pide calcular el valor de las mensualidades y los seis primeros pagos de la tabla.

Solución:

- El coste del vehículo con matriculación es de: $29.600 \text{ €} + 2.664 \text{ €} = 32.264 \text{ €}$
- El tipo de interés mensual es del: $7,5 \% : 12 = 0,625 \%$ y el valor de los pagos:

$$32.264 = 17.504,36 + C \cdot a_{48|0,00625} (1 + 0,00625) \text{ donde } C = 354,66 \text{ €}$$

NOTA: Al considerarse la entrada como un primer pago, la ecuación se plantea con 48 pagos constantes (48 más la opción menos la entrada).

- La primera cuota de interés, como se ha entregado como entrada 17.504,36 €, el valor a financiar será el de contado menos la entrada menos la opción: $(32.264 - 354,66 - 17.504,36) \cdot 0,00625 = 90,03 \text{ €}$
- La primera cuota de capital: $354,66 - 90,03 = 264,62 \text{ €}$
 El resto de cuotas: $A_2 = 264,62 (1,00625)^1 = 266,28 \text{ €}$
 $A_3 = 264,62 (1,00625)^2 = 267,94 \text{ €}$
 $A_4 = 264,62 (1,00625)^3 = 266,92 \text{ €}$, y así sucesivamente.
- El cuadro de pagos sería:

Fecha	Cuota Neta	Recuperación del coste	Carga financiera	Capital Pendiente	I.V.A.	Cuota Bruta
30/12/09	17.504,36	1.750.436			2.800,7	20.305,06
30/01/10	354,66	264,62	90,03	14.495,02	56,74	411,40
28/02/10	354,66	266,28	88,38	14.228,74	56,74	411,40
30/03/10	354,66	267,94	86,71	13.960,80	56,74	411,40
30/04/10	354,66	269,62	85,04	13.691,18	56,74	411,40
30/05/10	354,66	271,30	83,35	13.419,88	56,74	411,40
30/06/10	354,66	273,00	81,66	13.146,88	56,74	411,40
.....

8.- ACTIVIDADES: EJERCICIOS PROPUESTOS.

♦ Los cuadros de amortización.

- 1.- Una sociedad obtuvo el 1/10/06 un préstamo de 60.000 € a un interés anual del 4 %. El plan de amortización supone la amortización del préstamo mediante entregas de capital de 10.000 €, 20.000 €, 20.000 € y 10.000 €. Se pide realizar el cuadro de amortización.
- 2.- De los siguientes préstamos comprobar si tienen regularidad amortizativa:
 - De 30.000 €, a un interés del 5 % anual con pagos constantes de 3.885,14 €
 - De 50.000 €, a un interés del 4 % anual, siendo el pago del primer año de 1.800 €
- 3.- Una sociedad obtuvo el 1/6/06 un préstamo de 200.000 € a un interés anual del 5 %. El plan de amortización supone la entrega de cuatro **pagos** semestrales cuyos importes son igual al 60.000 €, al 80.000 €, 20.000 € y un cuarto pago cuyo importe se desea conocer. Se pide realizar el cuadro de amortización. ¿Tiene regularidad amortizativa?
- 4.- Una sociedad obtuvo un préstamo de 80.000 € a un interés anual del 5 %. El plan de amortización supone la entrega de cuatro pagos semestrales cuyos importes son del 30 % del capital, al 40 % del capital, al 35 % del capital y un cuarto pago cuyo importe se desea conocer. Se pide confeccionar el cuadro de amortización.
- 5.- Una sociedad obtuvo un préstamo de 100.000 € a un interés del 4 % anual. El plan de amortización supone la entrega de cinco **pagos** de 3.000 €, 4.000 €, 30.000 €, 40.000 € y un quinto cuyo importe se desea conocer. Se pide confeccionar el cuadro de amortización. ¿Tiene regularidad amortizativa esta operación?
- 6.- De los siguientes préstamos contestar si tienen o no regularidad amortizativa:
 - De 30.000 €, a un interés del 5 % anual con pagos constantes de 3.885,14 €
 - De 50.000 €, a un interés del 4 % anual, siendo el pago del primer año de 1.800 €
 - De 10.000 €, a un interés del 5 % anual, si el primer pago es de 550 €
- 7.- Confeccionar el cuadro de amortización de un préstamo de 40.000 € al 2 % semestral a amortizar en 6 años del siguiente modo: En los dos primeros semestres no realizará pago alguno, en los dos siguientes devolverá 6.000 € y 5.000 € de capital y en los tres siguientes sólo pagará los intereses y en el resto efectuará tres devoluciones de **capital** de 9.000 €, 13.000 € y la cantidad necesaria para amortizar la deuda.

Pagos	Término (a)	Interés (I)	Amortización (A)	Capital Vivo (Cs)
0	-	-	-	40.000
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
Σ				

- 8.- Se ha obtenido un préstamo de 20.000 € a un interés del 5 % anual a amortizar con la los pagos que figuran en la tabla. Se pide comprobar si la operación se amortiza y en caso negativo efectuar las correcciones necesarias:

Pagos	Término (a)	Interés (I)	Amortización (A)	Capital Vivo (C _s)
0	-	-	-	
1	5.000			
2	3.000			
3	6.000			
4	4.000			
5	3.506			
Σ				

- 9.- Se pide realizar el cuadro de pagos de un préstamo de 8.000.000 € a amortizar en 8 años del siguiente modo:

- En los dos primeros semestres sólo realizará el pago de los intereses.
- En los 8 siguientes semestres realizará devoluciones constantes de principal.
- En los restantes semestres efectuará pagos constantes.
- El interés es el 6 % nominal en los cinco primeros años y el 5 % en los restantes.

Pagos	Semestralidad	Interés	Amortización	Capital Vivo
0	-	-	-	8.000.000
1				8.000.000
2				8.000.000
3			375.000	
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				5.000.000
11				
12				
13				
14				
15				
16	907.750			
Σ	10.531.500	2.531.500	8.000.000	

- 10.- Se ha obtenido un préstamo por una cuantía de 40.000 € para ser amortizado en cuatro años a un interés anual del 5 %. Se pide confeccionar el cuadro de amortización si se amortiza:
- Con cuotas de capital constantes, con carencia de principal el primer año.
 - Con cuotas de capital constantes con carencia total en el primer año.
 - Con cuotas crecientes en 1.000 € cada año, siendo la primera de 5.500 €

- 11.-** Se ha obtenido un préstamo de 50.000 € a amortizar en tres años mediante pagos semestrales a un tanto de interés del 6 % nominal anual. Se ofrecen las siguientes alternativas para su amortización:

- Pagar periódicamente los intereses, en el cuarto pago entregar 20.000 € como amortización del préstamo y el resto en el sexto pago.
- Que los pagos semestrales sean constantes.
- Que en cada pago se amortice la misma cantidad de préstamo.
- Que en el primer semestre no se abone nada, que en los dos siguientes sólo los intereses y el resto mediante cuotas constantes.
- Que en el primer semestre no se abone nada, que en los dos siguientes sólo los intereses y el resto mediante pagos constantes.

Se pide: Confeccionar los correspondientes cuadros de amortización, calculando la cuantía total de intereses a pagar en cada caso. ¿Cuál es la deuda viva después de efectuado el cuarto pago en cada caso?.

- 12.-** Se pide realizar el cuadro de la operación indicada en la tabla si el préstamo fue de 5.000.000 € a un interés nominal del 7 %:

Fecha de pago	Cuantía del pago
30/06/1998	675.000 €
30/12/1998	657.500 €
30/06/1999	740.000 €
30/12/1999	819.000 €
30/06/2000	15 % de la deuda original más los intereses devengados
30/12/2000	Se amortiza el resto de la deuda.

✓ **Cálculo de datos mediante las recurrencias.**

- 13.-** Se ha obtenido un préstamo de 30.000 € a amortizar mediante pagos trimestrales constantes en 6 años y a un interés nominal del 4 % anual en los tres primeros y del 6 % nominal en los restantes. Se pide calcular: La cuantía del pago trimestral y las cuotas de capital de los pagos números 6, 10, 18 y 22.

- 14.-** Un préstamo de 1.000.000 € se va a amortizar en 10 años mediante pagos trimestrales, en los dos primeros años sólo pagará los intereses y en los restantes con términos constantes valorados al 5 % nominal anual en los dos primeros años y del 6 % nominal anual en los restantes. Se pide la cuantía de los términos a pagar y las cuotas de amortización de los pagos números dieciocho y treinta y ocho.

- 15.-** Una sociedad tiene en vigor diversos préstamos, cuyos datos son los siguientes:
- De 500.000 € a amortizar en 6 años mediante pagos mensuales constantes, a un interés nominal del 6 % anual, con carencia de principal en el primer año.
 - De 800.000 € a amortizar en cinco años mediante pagos mensuales constantes, a un interés nominal del 9 % anual.
 - De 60.000 € a amortizar en 7 años mediante pagos mensuales constantes, valorados al 9 % nominal anual en los tres primeros años y al 6 % nominal anual en los siguientes.
 - De 100.000 € a amortizar en 8 años mediante pagos mensuales constantes con carencia total el primer año, valorado a un interés anual efectivo del 3,66 %.

Se pide calcular la cuantía de los pagos 24 y 36, las cuotas de capital 16 y 46 y las cuotas de interés 24 y 37.

- 16.-** Una sociedad tiene en vigor diversos préstamos, cuyos datos son los siguientes:

- De 50.000 € a amortizar en 4 años mediante cuotas de capital mensuales y constantes, a un interés nominal del 6 % anual, con carencia de principal en los dos primeros años.
- De 60.000 € a amortizar en cinco años mediante cuotas de capital mensuales y constantes, a un interés nominal del 9 % anual.

Se pide calcular la cuantía de los pagos 24 y 36, las cuotas de capital 16 y 46 y las cuotas de interés 24 y 37.

- 17.-** Una sociedad va a presentar su liquidación de impuestos y necesita saber la cuantía a deducirse por los intereses y capital de un préstamo de 50.000 € a amortizar en cinco años mediante pagos trimestrales constantes a un interés nominal del 4 %, con carencia de principal en el primer año. ¿Cuál es la cuantía de los intereses a deducirse en el tercer año? ¿Cuál es la cuantía del capital vivo al final de ese año?

✓ **Cálculos diversos.**

- 18.-** Calcular el valor del último pago, y su desglose, en los siguientes préstamos:

- De 120.000 € a devolver mediante pagos mensuales de 2.500 € en cuatro años, incrementando el último en la cantidad necesaria para cancelar la deuda. Se valora a un nominal del 6 % anual.
- De 300.000 € a amortizar mediante pagos trimestrales de 18.000 € al 2 % trimestral y un último pago para la amortización la deuda.

- 19.-** Una sociedad tiene, hoy 30 de junio del 2009, en vigor dos préstamos que va a proceder a cancelar:

- Uno de 80.000 € concedido el 30/06/07 para ser amortizado a un interés nominal del 4 % anual con amortización del capital en dos entregas de 30.000 € el 30 de diciembre 2008 y de 50.000 € el 30 de junio 2010 y pago semestral de intereses.
- Otro de 60.000 € concedido el 17 de marzo 2008, a un interés nominal del 6 % anual, para ser amortizado con 36 pagos mensuales constantes, más uno realizado el 30 de marzo de 2008 por sólo los intereses calculados en simple.

Calcular la cuantía total a pagar si los gastos por cancelación anticipada ascienden al 1 % de los saldos vivos..

- 20.-** Una sociedad necesita financiación por un importe de 5.000.000 €, para lo cuál estudia distintas alternativas que tienen en común la duración de la operación, cinco años, el nominal de la operación, un interés del 6 % y los gastos de formalización cifrados en 500 € que se han pagado al contado:

- a.- El banco BBVA se lo oferta a amortizar con pagos trimestrales constantes.
- b.- El BSCH se lo oferta para amortizar mediante pagos semestrales constantes.
- c.- El Popular se lo oferta igual pero con el siguiente plan de pagos:
 - En el primer año pagaría 1.03.6291,3 €
 - En el segundo año pagaría 1.116.291,3 €
 - En el tercero abonaría 1.196.291,3 €
 - En el cuarto la cantidad sería de 1.276.291,3 €
 - Y en el quinto de 1.356.291,3 €
- d.- La Caixa se lo oferta a amortizar con carencia total en el primer año y pagos semestrales constantes en el resto del tiempo.
- e.- Banesto se lo ofrece con carencia parcial en los tres primeros años y cuotas de capital constantes en los restantes.
- f.- La CAM se lo ofrece con carencia parcial en el primer año y devolución del principal de 1.000.000, 1.500.000, 500.000 y 2.000.000 € respectivamente.

Se pide calcular las cantidades a pagar en cada caso y el desglose en capital e interés de los tres primeros pagos en cada caso.

- 21.-** Una sociedad quiere en estos momentos, efectuar la liquidación de los préstamos que tiene en vigor, y cuyo detalle es el siguiente:
- Préstamo concertado, hace cuatro años de 50.000 €, en las siguientes condiciones: Abono de intereses semestrales calculados al 1,5 % semestral y en concepto de amortización del capital se entregarán al finalizar el 2º, 4º y 5º año, cantidades del 20 %, 50 % y 30 % del capital inicial.
 - Un segundo préstamo concertado hace cinco años de 60 millones para ser amortizado en diez años, con abono de intereses calculados al 5 % anual, mediante anualidades de cuantía C, en los cuatro primeros años y 2C en los restantes.
 - Un tercer préstamo de 75.000 € concertado hace cinco años para ser amortizado en 8 años mediante tres entregas de capital de 25.000 € en los años 2º, 4º y 8º, y pago anual de intereses calculados al 5 %.

Se pide:

- Calcular las cantidades periódicas que habrá que entregar para la liquidación de cada uno de los préstamos.
- Respecto del segundo préstamo el desglose del primero y segundo pago interpretando el resultado obtenido.
- Respecto del tercero desglosar los pagos números 2, 4 y 8.
- Importe a pagar hoy por la liquidación de todos los préstamos.

- 22.-** Una sociedad ha devuelto el último recibo de un préstamo que tiene en vigor por afirmar que los datos son incorrectos. El préstamo se acordó amortizar en 10 pagos semestrales constantes a un interés nominal del 5 %. El primer pago se realizó el 30/06/07. El último recibo tiene el siguiente detalle:

Préstamo concedido el 2 de enero de 2007, por un importe de 10.000 €	
•	Recibo correspondiente al 30 de junio del 2000.
•	Cuantía del pago: 1.142,59 €
•	Capital amortizado: 885,60 €
•	Interés pagado: 256,99 €
•	Capital pendiente de amortizar: 4.298,38 €
•	Pagos pendientes: 4

Se pide contestar, explicando el porqué, si la sociedad lleva razón.

- 23.-** Se va a adquirir una máquina mediante “leasing” cuyo coste al contado es de 30.270 €, mediante 25 pagos constantes incluida la opción de compra. El interés pactado es del 6 % anual. Se pide confeccionar el cuadro de pagos de la operación
- 24.-** Se va a adquirir una máquina mediante “leasing” cuyo coste es de 100.000 €, mediante 24 pagos constantes más una opción de compra del mismo importe. El interés pactado es del 6 % anual. Se pide confeccionar el cuadro de pagos de la operación

CAPÍTULO 8°:

LAS OPERACIONES DE AHORRO

Dr D. Enrique R. Blanco Richart

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar la operación de constitución de capitales con las operaciones de ahorro de entregas periódicas.
- Conocida la ecuación general de la operación establecer el significado de cada uno de sus elementos.
- Identificar como sinónimos tiempo = número de pagos.
- Identificar los distintos métodos de constitución según la condición impuesta a cada uno de los términos de la ecuación general.
- Plantear correctamente la ecuación financiera de constitución de un capital según cada uno de los métodos.
- Calcular la reserva matemática de la operación e identificar con el capital ahorrado.
- Conocer y aplicar las distintas relaciones de recurrencia entre los elementos de la ecuación general según el método utilizado.

1.- CONCEPTOS GENERALES.

Las operaciones de constitución tienen como finalidad la formación de un capital al término de la operación (C_n, t_n), mediante la entrega de imposiciones periódicas, denominadas términos constitutivos. El capital (C_n, t_n) recibe el nombre de capital constituido o capital ahorrado.

Esta operación financiera es una operación de contraprestación única al finalizar la operación y prestación múltiple, formada por n capitales que vencen al principio o al final de cada periodo de pago para así conseguir el capital C_n al finalizar la operación.

Son operaciones de crédito unilateral, puesto que el saldo de la operación en cualquier punto es siempre favorable al ahorrador.

En cada pago que se efectúa se le sumará el interés que se genera en cada periodo y así se obtendrá la cuantía que se logra ahorrar o constituir en cada periodo, esta cantidad recibe el nombre de cuota de capital, por lo que la expresión general de esta operación será:

$$A_s = a_s + I_s$$

Donde: a_s = Es la cuantía del término que se impone o deposita en cada periodo.

I_s = Es la cuota de interés del periodo generado por el capital ahorrado.

A_s = Es la cuota de capital, es decir lo ahorrado en cada periodo.

En función de la entrega de los términos impositivos existen dos modelos:

- Operaciones de ahorro con imposiciones anticipadas: Cuando los términos se depositan el inicio de cada periodo y por lo tanto el capital constituido se retira un periodo después de realizada la última imposición. Normalmente con este modelo se realizan las operaciones de ahorro más frecuentes.
- Operaciones de ahorro con imposiciones vencidas: Cuando los términos se depositan el final de cada periodo y por lo tanto el capital constituido se retira en el mismo momento en que se ha realizado la última imposición. Normalmente con este modelo se realizan las operaciones para renovación de inmovilizados.

2.- OPERACIONES DE AHORRO CON INGRESOS CONSTANTES.

✕ Con imposiciones anticipadas.

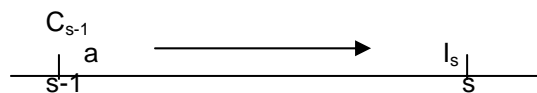
- Cuando los **términos impositivos** son iguales, la ecuación de equivalencia se corresponderá con el valor final de una renta constante, temporal y anticipada:

$$C_s = a \cdot S_{n|i} \cdot (1 + i)$$

- El **capital constituido** en s periodos será la totalidad de la cantidad ahorrada hasta dicho periodo, al ser el valor de la reserva matemática podrá calcularse por cualquiera de los tres métodos, aunque el más sencillo será siempre el retrospectivo, es decir calcular la suma financiera de los capitales ya aportados:

$$C_s = a \cdot S_{s|i} \cdot (1 + i)$$

- **Cuotas de interés:** Es el interés generado en cada periodo, será por lo tanto el montante del capital constituido del periodo anterior más el término depositado al inicio del periodo actual que ya producirá intereses, multiplicado por el rédito:



$$I_s = (C_{s-1} + a) \cdot i$$

- **Cuotas de capital:** Es el valor del capital ahorrado en cada periodo. Lo que nos interesa conocer es que las cuotas de capital guardan entre sí una relación matemática sencilla de modo que conocida la primera es fácil obtener cualquiera de ellas:

$$A_1 = a + I_1 = a + (a \cdot i) = a(1 + i)$$

La relación es que cada cuota se obtiene de la anterior multiplicando por $(1 + i)$:

$$A_{s+1} = A_1 (1 + i)^s$$

✕ Con imposiciones vencidas.

- Al ser los **términos impositivos** iguales, la ecuación de equivalencia se corresponderá con el valor final de una renta constante, temporal y vencida.

$$C_0 = a \cdot S_{n|i}$$

- El **capital constituido** en s periodos será la totalidad de la cantidad ahorrada hasta el periodo s , por el retrospectivo será la suma de los términos ya depositados hasta s :

$$C_s = a \cdot S_{s|i}$$

- **Cuotas de interés:** Es el interés generado en cada periodo, será por lo tanto el montante del capital constituido del periodo anterior, multiplicado por el rédito. El término al ser vencida no produce intereses en el periodo en que se deposita, por lo tanto:

$$I_s = C_{s-1} \cdot i$$

- **Cuotas de capital:** Cumplen la misma relación que en el caso anterior.

$$A_{s+1} = A_1 (1 + i)^s$$

3.- OPERACIONES DE AHORRO CON CUOTAS CONSTANTES.

En este caso se desea que la suma de los términos depositados más los intereses generados del periodo sea siempre la misma cantidad.

$$A = a_s + I_s$$

Si sabemos que en cada periodo vamos a ahorrar la misma cantidad, supondrá que el capital constituido crezca proporcionalmente con cada pago por lo tanto la cuota de interés, I_s será creciente con el tiempo y de forma proporcional. Si esta cuota es creciente y la constitución del capital constante, forzará, para mantener la igualdad anterior, a que los términos impositivos sean decrecientes de forma proporcional con el tiempo. Por lo tanto su ecuación financiera estará formada por una contraprestación de cuantía C_n y una prestación de n capitales de cuantía a_s , cuya suma será el valor actual de una renta variable y vencida valorada a rédito i .

- **Cálculo de las cuotas:** Como la suma aritmética de las cuotas nos da el capital constituido:

$$C_n = n \cdot A$$

- **Reserva matemática o capital constituido**, por el método retrospectivo, será el valor de las cuotas ya formadas:

$$C_s = s \cdot A$$

- **Cuotas de interés:** Es el interés recibido en cada periodo:

$$I_s = (C_{s-1} + a_s) \cdot i$$

- **Los términos impositivos:** Los podemos obtener por diferencia entre las cuotas:

$$a_s = A - I_s$$

4.- OPERACIONES DE AHORRO CON INGRESOS VARIABLES.

✖ Con imposiciones que varían en progresión aritmética.

- **La ecuación de equivalencia:** Se corresponderá con el valor final de una renta variable en progresión aritmética y anticipada:

$$C_n = \left(\left(C_1 + \frac{d}{i} \right) S_{n|i} - \frac{d \cdot n}{i} \right) \cdot (1 + i)$$

- **El capital constituido:** Será la suma de los depósitos ya realizados hasta s.

$$C_s = \left(\left(C_1 + \frac{d}{i} \right) S_{s|i} - \frac{d \cdot s}{i} \right) \cdot (1 + i)$$

- **La cuota de interés:** Se obtendrá como siempre:

$$I_s = (C_{s-1} + a_s) \cdot i$$

- **La cuota de capital:** Se obtendrá de cualquiera de las siguientes maneras:

- O por diferencia entre reservas: $A_s = C_s - C_{s-1}$
- O del término general: $A_s = a_s - I_s$

✖ Con imposiciones que varían en progresión geométrica.

- **La ecuación de equivalencia:** Se corresponderá con el valor final de una renta variable en progresión geométrica y anticipada:

$$C_n = C_1 \cdot \frac{(1+i)^n - q^n}{1+i-q} \cdot (1+i)$$

- **El capital constituido:** Será la suma de los depósitos ya realizados hasta s.

$$C_s = C_1 \cdot \frac{(1+i)^s - q^s}{1+i-q} \cdot (1+i)$$

- **La cuota de interés:**

$$I_s = (C_{s-1} + a_s) \cdot i$$

- **La cuota de capital:** Se obtendrá de cualquiera de las siguientes maneras:

- O por diferencia entre reservas: $A_s = C_s - C_{s-1}$
- O del término general: $A_s = a_s - I_s$

5.- OPERACIONES DE AHORRO EN EL MERCADO.

Las operaciones de ahorro en el mercado se corresponden con las operaciones de constitución, es decir con la entrega periódica de capitales para disponer de uno único al vencimiento de la operación, aunque se puedan efectuar disposiciones parciales sobre el capital constituido, de ahí que en sentido estricto sólo los planes de pensiones son operaciones de constitución al no permitir, en principio, acceder al capital constituido hasta la fecha prevista para ello.

Para su clasificación utilizaremos el criterio de dividir las operaciones de ahorro en el mercado atendiendo a su naturaleza:

- Operaciones de ahorro que son puramente operaciones de constitución cuyo objetivo es la formación de un capital con entregas periódicas. Son operaciones ciertas ya que el capital a constituir se determina en base a las imposiciones a realizar, el capital a constituir, el tiempo y el rédito al que se va a capitalizar la operación.
- Operaciones en las que se combina la operación de ahorro con alguna modalidad de seguro. Son las operaciones de ahorro-previsión, en las que junto al carácter financiero de la operación se une una complementaria de seguro.

También podemos establecer una serie de características de este tipo de operaciones:

- Su sensibilidad ante variaciones en los tipos de interés, que pueden condicionar mucho su resultado.
- La importancia del efecto de acumulación de intereses sobre todo en las operaciones a largo plazo.
- La importancia de la casi no existencia de características comerciales y la incidencia fiscal.

a) Los planes de pensiones:

Legalmente se definen como instituciones de previsión voluntaria y libre, cuyas prestaciones de carácter privado son complemento pero no sustituto del sistema de Seguridad Social. Se les suele llamar planes de ahorro-pensión. En estas operaciones la reserva matemática o capital ahorrado hasta un momento determinado recibe el nombre de *derecho consolidado*.

Los planes de pensiones se caracterizan por:

- El derecho de la persona a cuyo favor se constituye, a percibir rentas o capitales por jubilación, supervivencia, viudedad, orfandad o invalidez.
- Las obligaciones de contribución a los mismos.
- Las normas de funcionamiento y constitución del patrimonio.
- La existencia de un Fondo de pensiones que es el instrumento de inversión que hace posible la consecución del plan, es el patrimonio que ha de ser invertido para conseguir el plan.

Las personas que intervienen en el plan son:

- El promotor del plan, que puede ser una entidad financiera, empresa o asociación.
- El partícipe o persona titular del plan.
- El beneficiario, o persona con derecho a la prestación, que puede ser el partícipe o persona que él designe.

Las personas que intervienen en el fondo son:

- La entidad promotora del plan, que puede ser una entidad financiera, empresa o asociación.
- La entidad gestora encargada de administrar y rentabilizar el patrimonio.
- La entidad depositaria, que custodia los valores y activos financieros.

Los planes de pensiones se instrumentalizan mediante sistemas financieros y actuariales de capitalización que establecen la equivalencia financiera entre las aportaciones y las prestaciones futuras. De acuerdo con el plan estas prestaciones podrán recibirse:

- Con un capital único.

- Con una renta temporal de duración cierta.
- Con una renta vitalicia.
- Con combinación de renta y capital.

b) Las cuentas de ahorro-vivienda:

Son cuentas abiertas en bancos y demás entidades de crédito, destinadas a la adquisición o rehabilitación de la vivienda habitual. Las aportaciones deben tener como destino exclusivo la compra o rehabilitación de la vivienda habitual, se abren con esa indicación expresa y un sujeto pasivo sólo puede ser titular de una cuenta.

Financieramente son cuentas corrientes que se liquidan por el método hamburgués.

c) Otros planes de ahorro:

Son operaciones de ahorro que tienen como finalidad la constitución de un capital que complementa los ingresos en el momento de la jubilación. Se pueden diseñar fijando la cuantía de las aportaciones o definiendo el capital a constituir y calculando las aportaciones a realizar.

6.- EJERCICIOS PRÁCTICOS RESUELTOS.

* Planteamientos generales. Los cuadros de constitución.

En la parte teórica ya hemos hablado de que las cantidades que se ingresan para el ahorro de un capital determinado, que denominábamos términos impositivos, al contrario que los préstamos forma junto con los intereses devengados en cada periodo el capital ahorrado en un periodo, denominada cuota de capital o cuota de ahorro. Es decir, que continuamos con el aprendizaje, respecto al tema de las rentas, de conocer los componentes de diversas operaciones, en este caso las de ahorro, por lo tanto vamos a analizar qué contienen estos capitales, cuál es la función de cada uno de sus componentes, qué relación tienen entre ellos, etc.

En este apartado vamos a aprender a manejar las tablas de ahorro como herramienta en el aprendizaje del significado de sus componentes, de sus relaciones y de sus desgloses.

Al igual que en los préstamos, es importante que no avancemos si este apartado no nos queda claro, porque es necesario para poder entender el funcionamiento de las operaciones, de forma que sin tener los cuadros sepamos cuál es la posible evolución de la operación, etc.

Actividad nº 1:

Se desea ahorrar un capital de 10.000 € mediante imposiciones anuales constantes y anticipadas en 5 años. El banco valora la operación al 6 % anual. Se pide calcular la cuantía del término y el cuadro de ahorro.

Solución:

- La cuantía del término se obtendrá con el valor final de una renta anticipada, por lo tanto:

$$10.000 = C \cdot S_{\overline{5}|0,06} \cdot (1 + 0,06) \text{ Operando, } C = 1.673,55 \text{ €}$$

- El importe de las cuotas se obtendrá por recurrencia entre ellas, conocido el valor de la primera y conocida la razón $(1 + 0,06)$:

$$A_1 = a + I_1 = 1.673,55 + 1.673,55 \cdot 0,06 = 1.773,96 \text{ €, y por recurrencia:}$$

$$A_2 = 1.773,96 (1 + 0,06) = 1.880,40 \text{ €}$$

$$A_3 = 1.773,96 (1 + 0,06)^2 = 1.993,22 \text{ €}$$

$$A_4 = 1.773,96 (1 + 0,06)^3 = 2.112,82 \text{ €}$$

$$A_5 = 1.773,96 (1 + 0,06)^4 = 2.239,60 \text{ €}$$

- Los intereses se obtendrán por diferencia entre el término impositivo y las cuotas de capital : $I_1 = 1.773,96 - 1.673,55 = 100,41 \text{ €}$
- El cuadro de ahorro será:

n	Término	Intereses	Cuota	Capital ahorrado
0	1.673,55	-	-	-
1	1.673,55	100,41	1.773,96	1.773,96
2	1.673,55	206,85	1.880,40	3.654,36
3	1.673,55	319,67	1.993,22	5.647,58
4	1.673,55	439,27	2.112,82	7.760,40
5	-	566,05	2.239,60	10.000,00

Actividad nº 2:

Para constituir un capital de 18.400 € en 8 años se ingresan a principio de cada año imposiciones de cuantía constante valoradas a un tanto del 7 %. Se pide calcular la cuantía de la imposición y el cuadro de la operación.

Solución:

- La cuantía del término se obtendrá con el valor final de una renta anticipada, por lo tanto:

$$18.400 = C \cdot S_{\overline{8}|0,07} \cdot (1 + 0,07)$$

$$\text{Operando, } C = 1.676,08 \text{ €}$$

- El importe de las cuotas se obtendrá por recurrencia entre ellas, conocido el valor de la primera:

$$A_1 = a + I_1 = 1.676,08 + (1.676,08 \cdot 0,07) = 1.793,41 \text{ €, y por recurrencia:}$$

$$A_2 = 1.793,41 (1 + 0,07) = 1.918,95 \text{ €}$$

$$A_3 = 1.793,41 (1 + 0,07)^2 = 2.053,27 \text{ € y así sucesivamente.}$$

- Los intereses se obtendrán por diferencia entre el término impositivo y las cuotas de capital: $I_1 = 179.341 - 179.341 = 11.733 \text{ €}$
- El cuadro de ahorro será:

n	Término	Intereses	Cuota	Capital ahorrado
0	1.676,08	-	-	-
1	1.676,08	117,33	1.793,41	1.793,41
2	1.676,08	242,86	1.918,94	3.712,35
3	1.676,08	377,19	2.053,27	5.765,62
4	1.676,08	520,92	2.197,00	7.962,62
5	1.676,08	674,71	2.350,79	10.313,41
6	1.676,08	839,27	2.515,35	12.828,76
7	1.676,08	1.015,34	2.691,42	15.520,18
8	-	1.203,74	2.879,82	18.400,00

Actividad nº 3:

Se pretenden ahorrar 70.000 € en 6 años mediante el ingreso al final de cada uno de los próximos tres años de una cantidad constante y en los tres siguientes de una cantidad doble de la anterior. Si el interés es el 6 % anual, se pide calcular la cuantía de los ingresos, la cuantía de las reservas al final del 3º y 4º año y la cuantía de los intereses del 4º y 5º año.

Solución:

- Estamos ante dos rentas vencidas, de cuantía C y 2 C, valoradas al mismo interés. Por lo tanto la ecuación financiera de la operación, sabiendo que la primera renta tiene su suma en (3) y habrá que capitalizarla, será:

$$70.000 = C \cdot S_{\overline{3}|0,06} \cdot (1 + 0,06)^3 + 2 C \cdot S_{\overline{3}|0,06}$$

Operando, $C = 6.890,50 \text{ €}$ y $2C = 13.781,00 \text{ €}$

- La reserva es el capital constituido hasta ese momento, por lo tanto será la suma de los pagos entregados hasta el momento tercero y cuarto:

$$C_3 = 6.890,50 \cdot S_{\overline{3}|0,06} = 21.936,60 \text{ €}$$

$$C_4 = 6.890,50 \cdot S_{\overline{3}|0,06} \cdot (1 + 0,06) + 13.781 \cdot S_{\overline{1}|0,06} = 37.033,80 \text{ €}$$

- Al ser la operación vencida, la cuota de interés sólo se calcula sobre el capital constituido anterior: $I_s = C_{s-1} \cdot i$, por lo tanto:

$$I_4 = 21.936,60 \cdot 0,06 = 1.316,20 \text{ €}$$

$$I_5 = 37.033,80 \cdot 0,06 = 2.222,03 \text{ €}$$

Actividad nº 4:

Colocamos al final de cada año una imposición constante para disponer dentro de siete años de un capital de 9.850 €, el banco valora la operación al 7 % anual durante los 4 primeros años y al 8 % anual en los 3 restantes. Se pide calcular la cuantía de los ingresos y las cuotas de capital.

Solución:

- Estamos ante dos rentas, al ser de la misma cuantía pero valoradas a dos tantos de interés distintos y vencidas. Por lo que la ecuación financiera de la operación será:

$$9.850 = C \cdot S_{\overline{4}|0,07} \cdot (1 + 0,08)^3 + C \cdot S_{\overline{3}|0,08} \quad \text{Operando, } C = 1.114,32 \text{ €}$$

- Las cuotas de capital se obtendrán por recurrencia, una vez conocida la primera, ésta será igual al término al ser éste vencida: $A_1 = 1.114,32 \text{ €}$

$$A_2 = 1.114,32 (1 + 0,07) = 1.192,32 \text{ €}$$

$$A_3 = 1.114,32 (1 + 0,07)^2 = 1.275,78 \text{ €}$$

$$A_4 = 1.114,32 (1 + 0,07)^3 = 1.365,09 \text{ €}$$

Como en el segundo tramo cambia el tipo de interés, cambia la recurrencia entre las cuotas, por lo tanto calcularemos primero el valor de la quinta cuota y el resto por recurrencia. El capital ahorrado al finalizar el cuarto año será la suma de las cuotas calculadas, es decir $C_4 = \sum A_s = 4.947,51 \text{ €}$

$$A_5 = C + I_5 = 1.114,32 + 4.947,51 \cdot 0,08 = 1.510,16 \text{ €}$$

$$A_6 = 1.510,16 (1 + 0,08) = 1.630,93 \text{ €}$$

$$A_7 = 1.510,16 (1 + 0,08)^2 = 1.761,40 \text{ €}$$

Actividad nº 5:

Una entidad va a realizar los siguientes ingresos al inicio de cada año: 100.000 €, 186.000 €, 200.000 € y 300.000 €, si le valoran la operación a un interés del 6 % se pide: La cantidad ahorrada, confeccionar el cuadro de la operación y si en el tercer año no puede realizar el depósito ¿Qué cantidad ha de ingresar en el cuarto?.

Solución:

- La ecuación de equivalencia que nos permite calcular la cantidad ahorrada sería la suma de los cuatro capitales llevados a $p = 4$:

$$C_n = 100.000 (1 + 0,06)^4 + 186.000 (1 + 0,06)^3 + 200.000 (1 + 0,06)^2 + 300.000 (1 + 0,06)$$

$$C_n = 890.496,67 \text{ €}$$

- El cuadro de ahorro se obtendrá por líneas al igual que en el caso anterior:

$$I_1 = 100.000 \cdot 0,06 = 6.000 \text{ €}$$

$$A_1 = 100.000 + 6.000 = 106.000 \text{ €}$$

$$C_1 = 106.000 \text{ €}$$

$$I_2 = (106.000 + 186.000) \cdot 0,06 = 17.520 \text{ €}$$

$$A_2 = 186.000 + 17.520 = 203.520 \text{ €}$$

$$C_2 = 106.000 + 203.520 = 309.520 \text{ €}$$

$$I_3 = (200.000 + 309.520) \cdot 0,06 = 30.571,20 \text{ €}$$

Etc....

n	Término	Intereses	Cuota	Capital ahorrado
0	100.000	-	-	-
1	186.000	6.000,0	106.000,0	106.000,0
2	200.000	17.520,0	203.520,0	309.520,0
3	300.000	30.571,2	230.571,2	540.091,2
4	-	50.405,5	350.405,5	890.496,7

- En este caso la ecuación de equivalencia sería:

$$890.496,7 = 100.000 (1 + 0,06)^4 + 186.000 (1 + 0,06)^3 + C (1 + 0,06)$$

$$C = 512.000 \text{ €}$$

Actividad nº 6:

Una empresa necesita para dentro de cuatro años 5.000.000 €, para disponer de dicha cantidad va a iniciar un plan de ahorro de forma que al final de cada año disponga de 1.250.000 €. Si la operación se valora al 6 % anual y las imposiciones se realizan al inicio de cada año, calcular los elementos del cuadro de ahorro.

Solución:

- Como la condición es ahorrar la misma cantidad de dinero, el valor de la cuota es la cuantía del capital que se quiere disponer cada año, es decir de 1.250.000 € y los términos serán variables de razón: $d = -A \cdot i \cdot (1 + i)^{-1}$
Calculando las reservas, capital ahorrado hasta un periodo s , obtendremos el valor de los términos a imponer.

$$C_1 = 1.250.000$$

$$C_2 = 1.250.000 \cdot 2 = 2.500.000 \text{ €}$$

$$C_3 = 1.250.000 \cdot 3 = 3.750.000 \text{ €}$$

$$C_4 = 1.250.000 \cdot 4 = 5.000.000 \text{ €}$$

- El valor de los pagos e intereses:

$$a_1 = 1.250.000 \cdot (1 + 0,06)^{-1} = 1.179.245,28 \text{ €}$$

$$I_1 = (0 + 1.179.245,28) \cdot 0,06 = 70.754,72 \text{ €}$$

$$a_2 = 1.179.245,28 - 70.754,72 = 1.108.490,86 \text{ €}$$

$$a_3 = 1.179.245,28 - 2 \cdot 70.754,72 = 1.037.736,14 \text{ €}$$

$$a_4 = 1.179.245,28 - 3 \cdot 70.754,72 = 966.981,42 \text{ €}$$

- Los intereses que son crecientes en el tiempo tendrán, por lo tanto:

$$I_2 = 70.754,72 + 70.754,72 = 141.509,44 \text{ €}$$

$$I_3 = 70.754,72 + (2 \cdot 70.754,72) = 212.264,16 \text{ €}$$

$$I_4 = 70.754,72 + (3 \cdot 70.754,72) = 283.018,88 \text{ €}$$

n	Término	Intereses	Cuota	Capital ahorrado
0	1.179.245,28	-	-	-
1		70.754,72	1.250.000	1.250.000
2	-	141.509,44	1.250.000	2.500.000
3		212.264,16	1.250.000	3.750.000
4		283.018,88	1.250.000	5.000.000

Actividad nº 7:

Se desean ahorrar 6.000 € con imposiciones anticipadas en cinco años con la condición de que las cuotas de ahorro sean constantes. Si se valora la operación a un tanto anual del 5 % en los dos primeros años, del 6 % en los dos siguientes y del 7 % en el último, calcular los elementos del cuadro de la operación.

Solución:

- Como hay que ahorrar la misma cantidad cada año, el valor de la cuota será de 6.000 : 5 = 1.200 € anuales y por lo tanto los ingresos serán variables. Calculando las reservas por recurrencia obtendremos el valor de los términos a imponer.

$$C_1 = 1.200$$

$$C_2 = 1.200 \cdot 2 = 2.400 \text{ €, } C_3 = 1.200 \cdot 3 = 3.600 \text{ €, } C_4 = 1.200 \cdot 4 = 4.800 \text{ € y}$$

$$C_5 = 1.200 \cdot 5 = 6.000 \text{ €}$$

- El valor de los términos a imponer, vamos a calcularlos ahora mediante la relación entre las reservas que será más sencillo que por las recurrencias, ya que al existir tres tipos de interés existirían tres recurrencias diferentes, sabiendo que: $C_s = (C_{s-1} + a_s) (1 + i)$:

$$\begin{array}{ll} 1.200 = (0 + a_1) (1 + 0,05) & \text{operando } a_1 = 1.142,86 \text{ €} \\ 2.400 = (1.200 + a_2) (1 + 0,05) & \text{operando } a_2 = 1.085,71 \text{ €} \\ 3.600 = (2.400 + a_3) (1 + 0,06) & \text{operando } a_3 = 996,23 \text{ €} \\ 4.800 = (3.600 + a_4) (1 + 0,06) & \text{operando } a_4 = 928,30 \text{ €} \\ 6.000 = (4.800 + a_5) (1 + 0,07) & \text{operando } a_5 = 807,48 \text{ €} \end{array}$$

- Los intereses serían: $I_s = (C_{s-1} + a_s) \cdot i$

$$\begin{array}{l} I_1 = (0 + 1.142,86) \cdot 0,05 = 57,14 \text{ €} \\ I_2 = (1.200 + 1.085,71) \cdot 0,05 = 114,29 \text{ €} \\ I_3 = (2.400 + 996,23) \cdot 0,06 = 203,77 \text{ €} \\ I_4 = (3.600 + 928,30) \cdot 0,06 = 271,70 \text{ € y} \\ I_5 = (4.800 + 807,48) \cdot 0,07 = 392,52 \text{ €} \end{array}$$

n	Término	Intereses	Cuota	Capital ahorrado
0	1.142,86	-	-	-
1	1.085,71	57,14	1.200	1.200
2	996,23	114,29	1.200	2.400
3	928,30	203,77	1.200	3.600
4	807,48	271,70	1.200	4.800
5	-	392,52	1.200	6.000

EJERCICIOS PRÁCTICOS PROPUESTOS.

- 1.- Se quiere ahorrar un capital de 50.000 € en tres años mediante imposiciones constantes a un tanto de interés del 6 % anual. Se ofrecen las siguientes alternativas:
 - a) Entregar al principio del primer año 20.000 €, en el segundo 15.000 € y la cantidad necesaria en el tercer año para completar el capital.
 - b) Que sean imposiciones semestrales constantes y anticipadas.
 Se pide confeccionar los correspondientes cuadros.
- 2.- Una sociedad va a ahorrar un capital de 100.000 € a un interés del 4 % anual, con el siguiente plan: La entrega de cinco pagos cuyos importes son de 3.000 €, 4.000 €, 30.000 €, 40.000 € y un quinto cuyo importe se desea conocer. Se pide:
 - Calcular la cuantía del quinto pago y desglosar cada pago en sus componentes.
- 3.- Calcular el pago a realizar en cada uno de los siguientes casos, desglosando el último de ellos en capital e interés:
 - Ahorro de un capital a un interés anual del 5 % si el capital ahorrado en cada uno de los tres años fue de: 523.609, 549.790 y 577.279 €
 - De un plan de ahorro de 5.000 € a dos años con entregas mensuales anticipadas y constantes, valoradas a un interés del 5 % anual.
- 4.- Una sociedad tiene en vigor los siguientes planes de ahorro:
 - De 50.000 € a ahorrar en cinco años mediante imposiciones mensuales constantes, a un interés del 6 % anual.
 - De 8.000 € a ahorrar en cinco años mediante cuotas de capital mensuales y constantes, a un interés del 4 % anual.
 - De 6.000 € a ahorrar en 5 años mediante pagos mensuales constantes, valorados al 3 % en los tres primeros años y al 4 % en los siguientes.
 Se pide calcular la cuantía de los pagos 24 y 36, las cuotas de capital 16 y 46 y las cuotas de interés 24 y 37, en cada caso.
- 5.- Una sociedad realiza ingresos anticipados en una entidad para lograr un montante de 5.000.000 € dentro de ocho años. Se abonará un interés del 5 % anual con la condición de una revisión cada dos años. Si en cada revisión el interés acordado ha sido 6,5 %, del 6 % y del 5,5 % respectivamente, se pide la cuantía de los ingresos y el capital que habrá ahorrado al final del 6º año. Si se pone la condición de que la cuantía del término sea siempre la misma, calcular el capital ahorrado en el 6º año.
- 6.- Se pretende renovar una máquina dentro de 5 años y cuyo coste se estima será de 235.000 €. Para ello impondremos cantidades vencidas de tal forma que al final de cada año se haya ahorrado la misma cantidad de dinero. La entidad bancaria nos abonará un interés del 8 % anual. Se pide:
 - Cuantía de la cuota. Capital constituido al final del año 3º y pendiente de constituir al final del año 3º. Cuota de interés al final del 4º año y el término constitutivo del año 3º.
- 7.- Tenemos la siguiente operación: Ahorrar en los próximos cinco años, 15.000 € mediante imposiciones mensuales anticipadas, valorándose la operación al 6 % nominal anual en los tres primeros años y al 9 % nominal anual en los dos siguientes. Se pide calcular las cuotas de capital de los periodos 10, 30, 45 y 58.
- 8.- Se inicia una operación de ahorro, para un periodo de seis años mediante el ingreso al principio de cada semestre de cantidades constantes, valorando la operación al 6 % nominal anual, para así obtener un total de 23.000 €. Al finalizar el tercer año, el banco le comunica una revisión del tipo de interés a aplicar, dejándolo para los tres años pendientes en el 7 % nominal anual. Se pide:
 - Cuantía de la semestralidad con la que inició la operación.
 - Cuantía de la semestralidad tras el cambio en el tipo de interés.

A decorative border composed of small, stylized squares with a diagonal line, arranged in a rectangular frame around the central text.

CAPÍTULO 9°:

LOS PROYECTOS DE INVERSIÓN

Dr D. Enrique R. Blanco Richart

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Conocer el significado de proyecto de inversión.
- Identificar los gastos que se consideran inversión en el análisis de un proyecto.
- Identificar los flujos de caja que forman parte de un proyecto.
- Identificar elementos contables que formando parte del resultado no son flujos de caja.
- Enumerar los criterios más utilizados para el análisis y selección de inversiones.
- Definir el plazo de recuperación (PR).
- Distinguir entre flujos que se producen de manera continua a lo largo del año y los que se producen de manera única.
- Enumerar los Inconvenientes del criterio plazo de recuperación.
- Saber actualizar un capital.
- Saber calcular el valor actual de uno o varios capitales iguales con las fórmulas de rentas.
- Definir el valor actual neto (VAN).
- Interpretar el resultado del VAN para la selección de inversiones.
- Definir la tasa interna de rentabilidad (TIR).
- Diferenciar entre la TIR y el coste de capital.
- Explicar la relación entre el VAN y la TIR.
- Definir el plazo de recuperación de flujos descontados (PRD).
- Explicar la utilidad del PRD

1.- Los proyectos de inversión.

Definido financieramente como el acto por el que se intercambia una satisfacción inmediata y cierta por una esperanza que se adquiere y de la que el activo (real o financiero) invertido es el soporte. Es decir una inversión en la empresa es la adquisición de bienes, ya sean de carácter real (Son los bienes tangibles, como maquinaria, mobiliario, etc) o de naturaleza financiera (Adquisición de Deuda Pública, obligaciones, etc), mediante recursos propios o ajenos para obtener unas ganancias futuras.

Un proyecto de inversión supone la realización de estudios previos para analizar las necesidades de éste y su viabilidad futura. Las variables fundamentales son:

- La inversión necesaria o desembolso inicial para poder poner en funcionamiento la operación, por compras de inmovilizado, etc.
- La duración de la inversión,
- Los cobros y pagos que originará y cuya diferencia se define como los flujos netos de cada que producirá en su vida útil

Podemos establecer dos tipos de inversión:

- a) **Dependientes:** Cuando sus flujos de caja dependen de los flujos de otro proyecto, como por ejemplo lanzar una nueva línea de productos que pueden afectar a la que estamos produciendo ahora. Técnicamente dos proyectos son dependientes cuando la aceptación o rechazo de uno supone la aceptación o rechazo del otro. Por ejemplo adquirir un edificio supone, en principio, adquirir el solar.
- b) **Independientes:** Cuando los flujos no dependen de ningún otro proyecto. Técnicamente la aceptación de un proyecto supone el rechazo del otro y viceversa.

A la hora de la identificación de los flujos tenemos que tener en cuenta:

- La amortización contable no es ningún flujo, ya que no genera movimiento de tesorería.
- Sólo se tomarán aquellos que supongan un incremento. Es decir si el proyecto ya existe y lo que se va a realizar es una mejora, sólo se tomarán el incremento del flujo (Antes era de 1.200 € anuales con la renovación de 1.600 €, se tomará como flujo para el estudio la diferencia. Es decir 400 €).
- Los gastos que ocasione se tome la decisión de invertir o no forman parte del estudio, como son los estudios de viabilidad, ya que existen se tome en consideración el proyecto o no, mientras que los de lanzamiento si lo serían al formar parte del proyecto.
- Las subvenciones disminuyen el coste de la inversión.
- Hay que considerar el efecto expansión (si el nuevo proyecto amplía las ventas de otros productos de la empresa) o el efecto de erosión (lanzar un nuevo producto disminuye las ventas de otros).
- Los impuestos modifican el importe del flujo, en el caso de los ingresos los incrementan por el coste fiscal y los gastos lo disminuyen.
- Podemos establecer dos tipos de inversión:

Si se comparasen proyectos cuyas vidas son distintas habría que plantear el ciclo de reemplazamiento, es decir cuántas veces habría que realizar un proyecto para que su vida coincidiera con la del otro.

2.- Métodos utilizados para analizar la rentabilidad de un proyecto.

Los criterios a utilizar par la evaluación y selección de inversiones deben satisfacer las siguientes condiciones para poder ser utilizados:

- Resumir en un solo dato, una cifra, la información para la toma de decisiones.
- Ser aplicables a cualquier tipo de proyecto de inversión.
- Que su cálculo sea rápido e independiente de otros `proyectos de la empresa.

Sin embargo su aplicación es diferente según se trate de:

- ✓ De un proyecto aislado. Entonces el criterio debe permitir si se acepta o se rechaza.
- ✓ De un conjunto de proyectos. Entonces el criterio debe permitir su ordenación de forma que marque la preferencia entre los proyectos y que se pueda decidir cuáles de aceptan o rechazan.

A.- Plazo de recuperación o período de Retorno (PR) (Pay back): Se define como el período que tarda en recuperarse la inversión inicial a través de los flujos de caja generados por el proyecto. La inversión se recupera en el año en el cual los flujos de caja acumulados superan a la inversión inicial, es decir se suman año tras año los flujos netos de caja hasta que su suma sea igual o superior al desembolso inicial. Este criterio mide la repercusión económica que tiene el proyecto a través de la liquidez.

- Que los flujos se producen al finalizar el año, con lo que el año se toma como una unidad completa.
- Que los flujos se generan de forma continuada, con lo que hay que calcular la parte proporcional del año hasta alcanzar la inversión mínima.

Este criterio ayuda a tomar decisiones si el proyecto es aislado e incluso permite la ordenación entre varios proyectos. Si el proyecto es aislado, éste se acepta si el PR es menor que la duración del proyecto o del plazo máximo que la empresa conceda a sus inversiones. Si es un conjunto de proyectos se rechazan los que superen el plazo concedido por la empresa a sus inversiones, aceptando aquellos cuyo plazo es menor dando prioridad a los de menor plazo frente a los de mayor.

Como inconvenientes tenemos:

- No respeta el principio financiero de subestimación de capitales futuros, es decir da el mismo valor a todos con independencia del momento en que se producen.
 - No tiene en consideración los flujos que se producen después de recuperada la inversión, por lo que se pueden aceptar proyectos menos interesantes o rechazar aquellos que financieramente pueden ser mejores.
- **Ejemplo:** Un proyecto requiere una inversión de 50.000 €, estimando que los flujos netos de caja en los cinco años de la inversión son: 10.000 €, 15.000 €, 25.000 €, 25.000 € y 25.000 €

N	Inversión inicial	Flujos periódicos	Flujos acumulados
0	- 50.000		
1		10.000	10.000
2		15.000	25.000
3		25.000	50.000
4		25.000	
5		25.000	

En este ejemplo comprobamos que en el tercer año se recupera la inversión.

- **Ejemplo:** Un proyecto requiere una inversión de 34.000 €, estimando que los flujos netos de caja en los cinco años de la inversión son: 9.000 €, 5.250 €, 6.700 €, 17.000 € y 5.500 €. La empresa tiene como política no considerar aquellos proyectos cuyos plazos de recuperación sean superiores a tres años.

N	Inversión inicial	Flujos periódicos	Flujos acumulados
0	- 34.000		
1		9.000	9.000
2		5.250	14.250
3		6.700	20.950
4		17.000	37.950
5		5.500	

Comprobamos que el proyecto requiere cuatro años para recuperar la inversión por lo tanto supera lo que la empresa exige a sus proyectos (3 años), por lo que se rechaza.

- **Ejemplo:** Un proyecto requiere una inversión de 80.000 €, estimando que los flujos netos de caja en los siete años de la inversión son: 10.000 €, 25.000 €, 30.000 €, 25.000 €, 30.000 €, 30.000 € y 30.000 €.

N	Inversión inicial	Flujos periódicos	Flujos acumulados
0	- 80.000		
1		10.000	10.000
2		25.000	35.000
3		30.000	65.000
4		25.000	90.000
5		30.000	
6		30.000	
7		30.000	

Para analizar este ejemplo debemos considerar dos situaciones:

- Que los flujos se producen al finalizar el año, con lo que diremos que en este caso se necesitan 4 años para recuperar la inversión.
- Que los flujos se generan de forma continuada. En este caso se necesitan tres años y algunos meses.

25.000 ----- 12 meses
 15.000 que necesito para llegar a los 80.000 ----- X meses
 operando, X = 8 meses.

B.- Plazo de recuperación descontado (PRD): Se define como el mínimo plazo de tiempo necesario para recuperar el coste de la inversión mediante los flujos de tesorería esperados pero descontados.

Es un intento de eliminar uno de los inconvenientes del PR, que es la no valoración financiera de los flujos de tesorería.

- **Ejemplo:** Un proyecto requiere una inversión de 34.000 €, estimando que los flujos netos de caja en los cinco años de la inversión son: 9.000 €, 5.250 €, 6.700 €, 17.000 € y 5.500 €. La empresa tiene como política no considerar aquellos proyectos cuyos plazos de recuperación sean superiores a tres años siendo el coste del capital del 5 %.

N	Inversión	Flujos caja	Flujos descontados	Flujos acumulados
0	- 34.000			
1		9.000	8.571,43	8.571,43
2		5.250	4.761,90	13.333,33
3		6.700	5.787,71	19.121,04
4		17.000	13.985,94	33.106,98
5		5.500	4.309,39	38.606,98

C.- Valor Actual Neto (VAN): Consiste en actualizar los flujos de caja futuros que va a generar el proyecto, actualizados a un cierto tipo de interés (coste del capital), y compararlos con el importe inicial de la inversión. La tasa que se utiliza normalmente es el coste medio ponderado del capital de la empresa que hace la inversión. Este criterio mide la repercusión económica del proyecto a través de la variación de riqueza de la empresa que va a producir el nuevo proyecto.

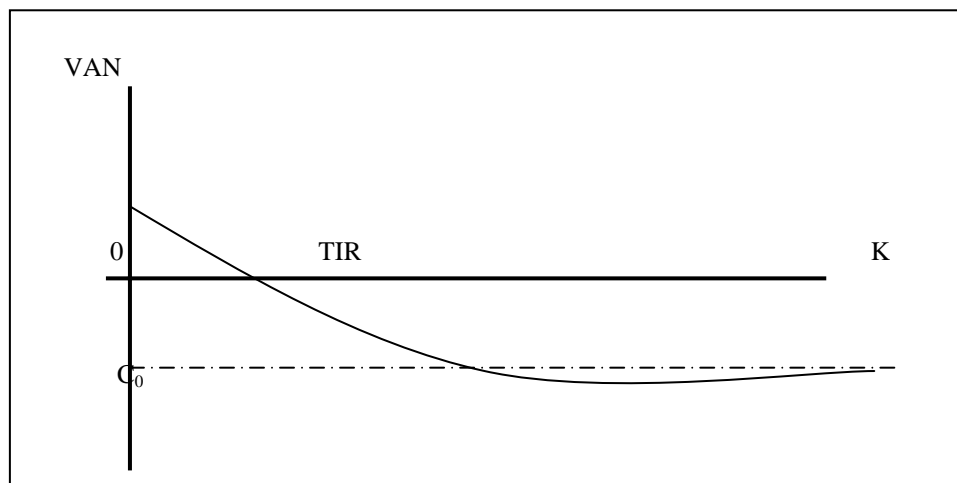
- VAN > 0: El proyecto es rentable, es decir el valor actualizado de los flujos es superior a la inversión realizada.
- Si VAN < 0: El proyecto no es rentable al no ser superior a la inversión la actualización de los flujos de caja.
- A la hora de elegir entre dos proyectos, elegiremos aquel que tenga el mayor VAN.

Este criterio sí tiene en consideración el valor temporal del dinero. Tiene como inconveniente el problema del cálculo del coste de capital de la empresa, ya que si lo sobrevalora puede rechazar proyectos interesantes que generen riqueza y viceversa.

- **Ejemplo:** Un proyecto requiere una inversión de 50.000 €, estimando que los flujos netos de caja en los cinco años de la inversión son de 20.000 €, a un coste de capital del 5 %.

$$VAN = - 50.000 + 20.000 (1 + 0,05)^{-1} + 20.000 (1 + 0,05)^{-2} + 20.000 (1 + 0,05)^{-3} + 20.000 (1 + 0,05)^{-4} + 20.000 (1 + 0,05)^{-5} = 36.589,53 \text{ € que al ser positivo se acepta.}$$

El VAN gráficamente es una función decreciente y convexa que corta al eje de ordenadas en el punto en que su coste es igual a su tasa de rentabilidad. La representación gráfica sería:



D.- Tasa interna de rentabilidad (TIR): Es la tasa o tipo de interés que hace que el VAN sea 0. Es decir el interés mínimo a partir del cual la inversión es rentable. Es el punto de intersección de la función VAN con el eje de coordenadas. Este proyecto mide la repercusión económica del proyecto a través de la rentabilidad.

- Si la TIR > tasa de actualización, el proyecto es aceptable. Es decir está obteniendo una rentabilidad anual superior a lo que le cuesta cada euro que invierte.
- Si la TIR < tasa de actualización, el proyecto no es aceptable al no obtener la rentabilidad mínima para cubrir el coste de la inversión.

Como inconvenientes está la existencia de flujos negativos de caja además del desembolso inicial lo que puede dar lugar, matemáticamente hablando, a la existencia de muchas tasas internas de rentabilidad. Y el segundo es la comparación con el coste de capital que la empresa haya adoptado.

- **Ejemplo:** Un proyecto requiere una inversión de 20.000 €, estimando que los flujos netos de caja en los dos años de la inversión son de 13.000 € cada uno.

$$0 = -20.000 + 13.000 (1 + i)^{-1} + 13.000 (1 + i)^{-2}$$

$$0 = -20.000 + 13.000 / (1 + i) + 13.000 / (1 + i)^2$$

$$0 = -20.000 (1 + i)^2 + 13.000 (1 + i) + 13.000 \text{ operando los binomios}$$

$$0 = -20.000 - 20.000 i^2 - 40.000 i + 13.000 + 13.000 i + 13.000$$

resolviendo la ecuación de segundo grado y tomando su valor positivo el valor de la TIR es del 19,43 %. Si esta rentabilidad es superior al coste de capital se aceptará si no es así se rechazará.

Si hubiese más flujos la forma rápida de cálculo es la utilización de una hoja de cálculo.

E.- Índice de rentabilidad (IR): Se define como el cociente entre el valor actual de los flujos que genera el proyecto y el desembolso inicial. Es una medida relativa que informa sobre lo que el proyecto genera por unidad invertida. Este proyecto mide la repercusión económica del proyecto a través de la rentabilidad.

- **Ejemplo:** Un proyecto requiere una inversión de 50.000 €, estimando que los flujos netos de caja en los cinco años de la inversión son de 20.000 €, a un coste de capital del 5 %.

$$Va = 20.000 (1 + 0,05)^{-1} + 20.000 (1 + 0,05)^{-2} + 20.000 (1 + 0,05)^{-3} + 20.000 (1 + 0,05)^{-4} + 20.000 (1 + 0,05)^{-5} = 86.589,53 \text{ €}$$

$$IR = 86.589,53 : 50.000 = 1,73, \text{ es decir el proyecto genera por cada euro invertido } 1,73.$$

3.- Actividades: Ejercicios resueltos.

Actividad nº 1:

Si la tasa de interés de mercado es del 10 % anual. Se pide calcular:

- El valor de 11.500 € dentro de un año.
- El valor actual de 18.000 que se recibirán dentro de un año.
- El valor actual de los ingresos de un individuo que hoy recibe 10.000 € y de 15.000 € en el próximo año.

Solución:

- Hay que calcular el valor final de un capital: $11.500 (1 + 0,10)^1 = 12.650 \text{ €}$
- Hay que calcular el valor actual de un capital: $18.000 (1 + 0,10)^{-1} = 16.363,64 \text{ €}$
- Hay que calcular el valor actual: $10.000 + 15.000 (1 + 0,10)^{-1} = 23.636,36 \text{ €}$

Actividad nº 2:

Una empresa tiene la posibilidad de invertir en una máquina que cuesta 5.000.000 €. Los flujos netos de caja previstos serían de 2.000.000 € anuales por un periodo de seis años. Si el interés es del 5 % anual, calcular el valor presente neto de la inversión (VAN). ¿Debería hacerse la inversión?

Solución:

- En este caso estamos ante varios capitales iguales, por lo tanto en vez de actualizar uno a uno emplearemos la fórmula de la renta para ello:

$$VAN = - 5.000.000 + 2.000.000 \cdot a_{6|0,05} = 24.848.615,87 \text{ €}$$
 La inversión debería llevarse a cabo ya que la contribución neta del proyecto en la riqueza del inversionista es positiva.

Actividad nº 3:

Una empresa está considerando invertir en un proyecto que genera flujos anuales de 22.000 € por tres años. La inversión inicial es de 50.000 €. ¿Cuál es el valor actual neto de los flujos generados por el proyecto, si la tasa a aplicar es del 8 % anual? ¿Le conviene a la empresa invertir en este proyecto?. Si la tasa de descuento es ahora de un 11 % anual, ¿Conviene llevar a cabo el proyecto?

Solución:

- En este caso estamos ante varios capitales iguales, por lo tanto en vez de actualizar uno a uno emplearemos la fórmula de la renta para ello: $VAN = - 50.000 + 22.000 \cdot a_{3|0,08} = 6.696,13 \text{ €}$
- Vamos a comprobar el efecto que tiene la elección del coste del capital en el análisis de un proyecto de inversión, disminuyendo en este caso su valor al ser mayor la tasa de actualización escogida: $VAN = - 50.000 + 22.000 \cdot a_{3|0,11} = 3.761,72 \text{ €}$

Actividad nº 4:

Averiguar el tanto de rendimiento interno (TIR), de una inversión que supone un desembolso de 200.000 € en el momento cero y reportará unos rendimientos de 135.000 € dentro de un año y 100.000 € dentro de dos años.

Solución:

- El valor de la TIR será aquel que haga el VAN cero:

$$0 = -200.000 + 135.000 (1+i)^{-1} + 100.000 (1+i)^{-2}$$

$$0 = -200.000 + 135.000 / (1+i) + 100.000 / (1+i)^2$$

$$0 = -200.000 (1+i)^2 + 135.000 (1+i) + 100.000$$

$$0 = -200.000 - 200.000 i^2 - 400.000 i + 135.000 i + 100.000$$

resolviendo la ecuación de segundo grado y tomando su valor positivo el valor de la TIR es del 12,10 %. Si esta rentabilidad es superior al coste de capital se aceptará si no es así se rechazará.

Actividad nº 5:

Calcula el TIR de un proyecto de inversión que en el momento actual supone un desembolso de 200.000 € y del que se va a obtener un único rendimiento de 349.801,24 € dentro de cuatro años.

Solución:

- El valor de la TIR será aquel que haga el VAN cero:

$$0 = -200.000 + 349.801,24 (1+i)^{-4}$$

$$0 = -200.000 + 349.801,24 / (1+i)^4$$

llamando a $(1+i)^4 = (1+z)^2$ y operando

$$0 = -200.000 (1+z)^2 + 349.801,24$$

$0 = -200.000 - 200.000 z^2 - 400.000 i + 349.801,24$ resolviendo la ecuación y deshaciendo el cambio de variable, $i = 15\%$

Actividad nº 6:

Una empresa estudia un proyecto de inversión a cinco años con un coste medio del capital del 6 % y que presenta las siguientes características:

- Desembolso inicial: 80.000 €
- Flujo de caja del primer año: 30.000 €, para el resto del año se espera que flujo de caja sea un 10 % superior al del año anterior.
- Valor residual: 20.000 €

Según el criterio del VAN, ¿se puede llevar a término esta inversión?

Solución:

- El cuadro con los flujos de caja sería:

0	1	2	3	4	5
-80.000	30.000	33.000 (30.000 · 110 %)	36.300 (33.000 · 110 %)	39.930 (36.300 · 110 %)	63.923 (39.930 · 110 %) + 20.000

- El VAN de la operación:

$$VAN = -80.000 + 30.000 (1 + 0,05)^{-1} + 33.000 (1 + 0,05)^{-2} + 36.300 (1 + 0,05)^{-3} + 39.930 (1 + 0,05)^{-4} + 63.923 (1 + 0,05)^{-5} = 87.545,2 \text{ € al ser } > 0 \text{ se aceptará la propuesta.}$$

Actividad nº 7:

Una Maquina tiene un coste de 110.000 y una vida útil de 6 años, al cabo de los cuales su valor residual es de 10.000 €. Los costes de mantenimiento son de 3.000 € al año y se espera que los ingresos que obtengamos sean de 30.000 € al año. ¿Cuál es el VAN del proyecto con un coste de capital del 10 %? ¿Y si queremos una rentabilidad del 15 %?. ¿Cuál es la TIR de este proyecto de inversión?

Solución:

- El cuadro con los flujos de caja sería:

Año	0	1	2	3	4	5	6
Inversión	- 110.000						10.000
Ingresos	-	30.000	30.000	30.000	30.000	30.000	30.000
Costes	-	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000
Flujos	- 110.000	27.000	27.000	27.000	27.000	27.000	37.000

- El VAN de la operación en el primer caso:

$$VAN = -110.000 + 27.000 (1 + 0,10)^{-1} + 27.000 (1 + 0,10)^{-2} + 27.000 (1 + 0,10)^{-3} + 27.000 (1 + 0,10)^{-4} + 27.000 (1 + 0,10)^{-5} + 37.000 (1 + 0,10)^{-6} = 131.900 \text{ € al ser } > 0 \text{ se aceptará la propuesta de inversión.}$$

- El VAN de la operación en el segundo caso:

$$VAN = -110.000 + 27.000 (1 + 0,15)^{-1} + 27.000 (1 + 0,15)^{-2} + 27.000 (1 + 0,15)^{-3} + 27.000 (1 + 0,15)^{-4} + 27.000 (1 + 0,15)^{-5} + 37.000 (1 + 0,15)^{-6} = -34.900 \text{ € al ser } < 0 \text{ se rechazará la propuesta de inversión.}$$

- La TIR de la operación:

$$110.000 = 27.000 (1 + i)^{-1} + 27.000 (1 + i)^{-2} + 27.000 (1 + i)^{-3} + 27.000 (1 + i)^{-4} + 27.000 (1 + i)^{-5} + 37.000 (1 + i)^{-6} \text{ .operando } i = 13,952 \%$$

Actividad nº 8:

De los dos siguientes proyectos de inversión, calcular ¿Cuál sería más rentable sabiendo que el tipo de interés anual es del 3,5 %? Resolverlo por los criterios de V.A.N., Plazo de Recuperación (PR) y Tasa interna de rentabilidad (TIR) si los flujos se producen al final de cada año.

Proyecto	Inversión	Flujos	Flujos	Flujos
Primero	-80.000	40.000	40.000	40.000
Segundo	-68.000	50.000	40.000	10.000

Solución:

- El VAN en cada caso según los flujos de caja sería:

$$VAN = - 80.000 + 40.000 (1 + 0,035)^{-1} + 40.000 (1 + 0,035)^{-2} + 40.000 (1 + 0,035)^{-3} = 32.065,48 \text{ €}$$

al ser > 0 se aceptará la propuesta de inversión.

$$VAN = - 68.000 + 50.000 (1 + 0,035)^{-1} + 40.000 (1 + 0,035)^{-2} + 10.000 (1 + 0,035)^{-3} = 26.669,03 \text{ €}$$

al ser > 0 se aceptará la propuesta de inversión.

- El plazo de recuperación en cada caso sería:

N	Inversión inicial	Flujos periódicos	Flujos acumulados
0	- 80.000		
1		40.000	40.000
2		40.000	80.000
3		40.000	

N	Inversión inicial	Flujos periódicos	Flujos acumulados
0	- 68.000		
1		50.000	50.000
2		40.000	90.000
3		10.000	

- La TIR en cada caso sería más rentable la segunda:

$$0 = - 80.000 + 40.000 (1 + i)^{-1} + 40.000 (1 + i)^{-2} + 40.000 (1 + i)^{-3}$$

operando con la hoja de cálculo, $i = 23,38 \%$ anual.

$$VAN = - 68.000 + 50.000 (1 + i)^{-1} + 40.000 (1 + i)^{-2} + 10.000 (1 + i)^{-3}$$

operando con la hoja de cálculo, $i = 28,31 \%$ anual.

Actividad nº 9:

De los dos siguientes proyectos de inversión, calcular ¿Cuál sería más rentable sabiendo que el tipo de interés anual es del 7 %? Resolverlo por los criterios de V.A.N. y el Plazo de Recuperación (PR) si los flujos se producen al final de cada año.

Proyecto	Inversión	Flujos	Flujos	Flujos
Primero	10.500.000	2.500.000	5.000.000	4.000.000
Segundo	12.000.000	4.500.000	4.500.000	4.500.000

Solución:

- El VAN en cada caso según los flujos de caja sería:

$$VAN = - 10.500.000 + 2.500.000 (1 + 0,07)^{-1} + 5.000.000 (1 + 0,07)^{-2} + 4.000.000 (1 + 0,07)^{-3} = 531.166,25 \text{ €}$$

$$VAN = - 12.000.000 + 4.500.000 (1 + 0,07)^{-1} + 4.500.000 (1 + 0,07)^{-2} + 4.500.000 (1 + 0,07)^{-3} = 190.577,8 \text{ €}$$

- El plazo de recuperación en cada caso sería:

N	Inversión inicial	Flujos periódicos	Flujos acumulados
0	- 10.500.000		
1		2.500.000	2.500.000
2		5.000.000	7.500.000
3		4.000.000	11.000.000

N	Inversión inicial	Flujos periódicos	Flujos acumulados
0	- 12.000.000		
1		4.500.000	4.500.000
2		4.500.000	9.000.000
3		4.500.000	13.500.000

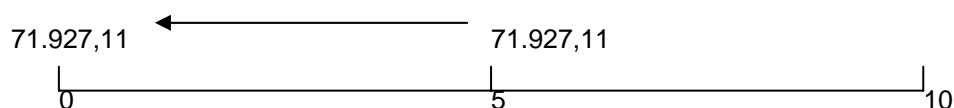
Actividad nº 10:

Sean dos proyectos de inversión: el P1 que requiere un desembolso inicial de 250.000 €, con flujos netos anuales de 50.000 € durante 5 años y el P2, que requiere un desembolso inicial de 360.000 €, con flujos netos anuales de 60.000 € durante 10 años. Se pide seleccionar el mejor proyecto de inversión según el criterio del VAN para un coste de capital del 4 % anual.

Solución:

- El VAN en el primer caso según los flujos de caja sería:

$VAN = - 250.000 + 50.000 \cdot a_{5|0,04} = 71.927,11 \text{ €}$. Pero la vida de este proyecto es de cinco años y del otro de diez años con lo que no serían comparables con este criterio para ello necesitamos igualar los tiempos. Si el segundo proyecto dura 10 años significa que éste se realizará dos veces (5 años y 5 años). Por lo tanto tendremos dos valores actuales según el siguiente gráfico, por lo que la inversión a diez años sería:



$$VAN = 71.927,11 + 71.927,11 (1 + 0,04)^{-5} = 131.046 \text{ €}$$

- El VAN en el segundo caso sería:

$$VAN = - 360.000 + 60.000 \cdot a_{10|0,04} = 126.653,75 \text{ €}$$

- La inversión más rentable sería la primera al tener el VAN más alto.

Actividad nº 11:

Una empresa estudia dos proyectos de inversión con un coste medio del capital del 3 % anual y que presentan las siguientes características:

- Plan A, tiene un coste inicial de 250.000 € y requiere inversiones adicionales de 50.000 € al final del tercer año y de 80.000 € al final del séptimo año. Esta inversión tiene 12 años de vida y se estiman unos ingresos anuales de 120.000 € y unos costes anuales de 20.000 €.
- Plan B, tiene un coste inicial de 200.000 € con valor residual de 120.000 € y requiere una inversión adicional de 100.000 € al final del octavo año. Durante sus 12 años de vida, esta inversión se estima que producirá 90.000 € anuales de ingresos y 10.000 € anuales de costes.

Determinar cual se escogerá mediante el VAN y la TIR.

Solución:

- El VAN en el primer caso según los siguientes flujos de caja sería:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Inversión	- 250			- 50				- 80					
Ingresos		120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120
Costes		20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
Flujo neto		100	100	50	100	100	100	20	100	100	100	100	100

$$\text{VAN} = - 250.000 - 50.000 (1 + 0,03)^{-3} - 80.000 (1 + 0,03)^{-7} + 100.000 \cdot a_{12|0,03} = 634.596 \text{ €}$$

- La TIR en este primer caso sería:

$$110.000 = - 250.000 - 50.000 (1 + i)^{-3} - 80.000 (1 + i)^{-7} + 100.000 \cdot a_{12|i}$$

Operando $i = 34,65 \%$

- El VAN en el segundo caso según los siguientes flujos de caja sería:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Inversión	- 200								- 100				120
Ingresos		90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
Costes		10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
Flujo neto		80	80	80	80	80	80	80	- 20	80	80	80	200

$$\text{VAN} = - 200.000 - 100.000 (1 + 0,03)^{-8} + 120.000 (1 + 0,03)^{-12} + 80.000 \cdot a_{12|0,03}$$

= 545.430 € al ser > 0 se aceptará la propuesta de inversión.

- La TIR en este segundo caso sería:

$$200.000 = - 100.000 (1 + i)^{-8} + 120.000 (1 + i)^{-12} + 80.000 \cdot a_{12|i}$$

Operando $i = 29,738 \%$

Se escogería la primera inversión al tener el VAN y la TIR más alta.

Actividad nº 12:

Al hacer el análisis de un proyecto se ha encontrado que el coste es del 12 %. Los ingresos y gastos estimados se muestran en la tabla adjunta. Se pide calcular el VAN, el TIR y decidir si se invierte o no

Proyecto A	0	1	2	3	4	5
Costes	- 50.000	2.000	2.500	3.000	3.000	3.000
Ingresos	-	20.000	22.000	25.000	25.000	25.000
Proyecto B	0	1	2	3	4	5
Costes	- 50.000	3.000	3.200	3.500	3.500	3.500
Ingresos	-	15.000	16.000	18.000	18.000	18.000
Proyecto C	0	1	2	3	4	5
Costes	- 50.000	2.500	2.500	2.500	2.500	2.500
Ingresos	-	17.000	17.000	17.000	17.000	17.000

Solución:

- El VAN y la TIR del **PROYECTO A** con unos flujos netos de:

Proyecto A	0	1	2	3	4	5
Flujos	- 50.000	18.000	19.500	22.000	22.000	22.000

$$\text{VAN} = - 50.000 + 18.000 (1 + 0,12)^{-1} + 19.500 (1 + 0,12)^{-2} + 22.000 \cdot a_{3|0,12} (1 + 0,12)^{-2}$$

$$\text{VAN} = 23.740,66 \text{ € al ser positivo se aceptaría.}$$

- La TIR sería: $0 = - 50.000 + 18.000 (1 + i)^{-1} + 19.500 (1 + i)^{-2} + 22.000 \cdot a_{3|i} (1 + i)^{-2}$
Operando $i = 32,08\% > 12\%$ al ser mayor que el coste se aceptaría.

- El VAN y la TIR del **PROYECTO B** con unos flujos netos de:

Proyecto A	0	1	2	3	4	5
Flujos	- 50.000	12.000	12.800	14.500	14.500	14.500

$$\text{VAN} = - 50.000 + 12.000 (1 + 0,12)^{-1} + 12.800 (1 + 0,12)^{-2} + 14.500 \cdot a_{3|0,12} (1 + 0,12)^{-2}$$

$$\text{VAN} = - 1.318,12 \text{ € al ser negativo se rechazaría.}$$

- La TIR sería: $0 = - 50.000 + 12.000 (1 + i)^{-1} + 12.800 (1 + i)^{-2} + 14.500 \cdot a_{3|i} (1 + i)^{-2}$
Operando $i = 10,31\% < 12\%$ al ser menor que el coste se rechazaría.

- El VAN y la TIR del **PROYECTO C** con unos flujos netos de:

Proyecto A	0	1	2	3	4	5
Flujos	- 50.000	12.000	12.800	14.500	14.500	14.500

$$\text{VAN} = - 50.000 + 14.500 \cdot a_{5|0,12} = 2.269,25 \text{ € al ser positivo se aceptaría.}$$

- La TIR en este caso sería: $0 = - 50.000 + 14.500 \cdot a_{5|i}$ operando $i = 8,82\% < 12\%$ por lo que se aceptaría.
- Si tuviésemos que escoger, sería el primer proyecto al tener el VAN y la TIR más alta.

4.- Actividades: Ejercicios propuestos.

- 1.- A una empresa se le plantea tres alternativas de inversión, que suponen un desembolso y los flujos netos de caja indicados en el siguiente cuadro:

Proyecto	0	Flujo 1	Flujo 2	Flujo 3	Flujo 4
Primero	- 10.000	5.000	4.000	10.000	2.000
Segundo	- 15.000	4.000	9.000	8.000	-
Segundo	- 4.000	3.000	-1.000	6.000	800

Calcular cuál de estas inversiones es más rentable según los criterios de:

- Valor Actual Neto (**VAN**) de cada una de las inversiones, si el interés es del 8%, ordenando las mismas por preferencias de realización.
 - Plazo de recuperación (**PR**) de cada una de ellas, ordenándolas por preferencia.
- 2.- La señora López quiere comenzar un negocio de confección de ropa deportiva. Para ello necesita comprar varias máquinas, que representan un importe de 19.000 €. También necesita comprar un edificio valorado en 20.750 € y una furgoneta que cuesta 7.509 €. Además, debe adquirir materia prima (hilo, tela, botones, etc.) por un total de 3.300 € y el utillaje necesario (tijeras, agujas, etc.) por un importe de 3.000 €.
- Para financiar esta inversión tiene que pedir un préstamo a una entidad financiera. La entidad financiera sólo le dará el préstamo si el proyecto resulta rentable económicamente. Conocemos los siguientes datos: Coste medio del capital: 5 %. Flujos netos de caja anuales esperados: 10.000 € y duración de 4 años.
- La empresa se liquidará al final del cuarto año, con un valor para los activos en este momento de 22.000 €. Aplicando el criterio del **VAN**, razone si la señora López conseguirá la financiación que necesita, es decir, si su proyecto es rentable económicamente.
- 3.- En una empresa se plantean dos proyectos de inversión (Alfa y Omega). El proyecto Alfa supone invertir inicialmente 125.000 €, esperándose obtener en los 5 años de vida del proyecto unos flujos de caja de 30.000 €. El proyecto Omega supone la misma inversión inicial, pero los flujos de caja esperados en los cinco años de su vida son: 24.000 € el primer año, 36.000 € el segundo, 40.000 € el tercero, 38.000 € el cuarto y 42.000 € el quinto año. Siendo el coste del capital del 5 %, ¿qué inversión de las dos es más aconsejable valorándolas por el método del **VAN**?
- 4.- Sean dos proyectos de inversión: el **PR1** que requiere un desembolso de 2.500.000 €, con flujos netos anuales de 500.000 € durante 10 años y el **PR2**, que requiere un desembolso inicial de 3.660.000 €, con flujos netos anuales de 610.000 € durante 11 años. Se pide seleccionar el mejor proyecto de inversión según el criterio del plazo de recuperación (**PR**).
- 5.- En una empresa se están estudiando dos proyectos de inversión: el A y el B. El proyecto A supone una inversión inicial de 1.000.000 € y se espera obtener, cada uno de los 5 años que se considera será efectiva, un flujo neto de caja de 300.000 €. El proyecto B supone también una inversión inicial de 1.000.000 €, pero los flujos netos de caja que de ella se esperan durante los 5 años de vida del proyecto son, sucesivamente: 150.000 € el 1º año, 250.000 € el 2º año, 450.000 € el 3º, 400.000 € el 4º año y 350.000 € el último año. Siendo el coste del capital de 5% de interés anual, determine qué inversión es la más aconsejable, evaluándolas por el método del **VAN** y del plazo de recuperación (**PR**).
- 6.- En el cuadro adjunto se facilitan los datos relativos a tres proyectos de inversión que una empresa quiere evaluar:

DESEMBOLSO INICIAL	Flujo año 1	Flujo año 2	Flujo año 3	Flujo año 4
PA: - 25.000	0	0	30.000	12.000
PB: - 20.000	- 5.000	- 2.000	15.000	15.000
PC: - 16.000	5.000	6.000	7.000	8.000

Si el tipo de actualización es del 6,5 % anual. Se pide calcular el plazo de recuperación (**PR**) normal y el **VAN** indicando la más ventajosa.

- 7.- En el cuadro adjunto se facilitan los datos relativos a tres proyectos de inversión que una empresa quiere evaluar, expresados en unidades monetarias:

Proyecto	Inversión	Flujo año 1	Flujo año 2	Flujo año 3	Flujo año 4
A	- 4.000.000	- 500.000	2.000.000	2.000.000	2.000.000
B	- 12.000.000	0	3.000.000	6.000.000	10.000.000
C	- 15.000.000	6.000.000	5.000.000	4.000.000	1.000.000

Ordenar las inversiones anteriores aplicando el criterio del VAN. Con un tipo de actualización del 7 % anual.

- 8.- Obtener el Valor Actual Neto (**VAN**) (a un 5 % anual) de una inversión con una vida útil de 5 años, cuyo desembolso inicial es de 1.500.000 € que se pagan de una sola vez y que producen las corrientes de cobros y pagos que se indican a continuación:

Años	Cobros	Pagos
1	600.000	300.000
2	700.000	400.000
3	1.000.000	500.000
4	1.000.000	500.000
5	1.000.000	500.000

- 9.- Una empresa se plantea la adquisición de una máquina que tiene una vida útil de 4 años. La inversión supone desembolsar inicialmente 3.000 € y 1.000 € cada uno de los años; de la misma se van a derivar unos cobros de 2.000 € cada año. Sabiendo que el valor residual de la máquina es de 200 € y la tasa de actualización es del 5 %, calcular el **VAN**.
- 10.- Una empresa dispone de la siguiente información sobre dos proyectos de inversión y se quiere saber cuál de las dos inversiones es preferible según el criterio del plazo de recuperación (**PR**).

	Inversión 1	Inversión 2
Desembolso inicial	1.500 €	1.500 €
Flujo del primer año	1.000 €	100 €
Flujo del segundo año	600 €	1.000 €
Flujo del tercer año	0 €	10.000 €

- 11.- PERFUMASA se está planteando realizar una nueva inversión. Para ello tiene varias opciones: diversificarse hacia otra línea de productos o ampliar la ya existente. Los datos para el estudio de la rentabilidad de la inversión aparecen en la siguiente tabla (en euros):

	Inversión inicial	Cobros año 1	Pagos año 1	Cobros año 2	Pagos año 2	Cobros año 3	Pagos año 3
Diversificación	90.000	50.000	60.000	140.000	100.000	150.000	90.000
Ampliación	78.000	180.000	120.000	180.000	120.000	180.000	120.000

Qué inversión preferiría y por qué, según los criterios del **VAN** y el **PR**, si el tipo de interés considerado es del 7 % anual.

- 12.- Una empresa está estudiando comprar activos para un proyecto de inversión. Para ello se necesita una inversión inicial de 300.000 €. Los flujos anuales de caja serán de 100.000 € por tres años consecutivos. Al finalizar el tercer año se venderán los activos por 50.000 €. Suponiendo el coste del capital al 7 %. Determinar si será rentable el proyecto por los criterios **VAN** y Plazo de recuperación descontado (**PRD**).

- 13.-Una empresa estudia la posibilidad de efectuar las siguientes inversiones:

Proyecto	Inversión	Flujos	Flujos	Flujos	Flujos
A	-25.000	8.000	8.000	8.000	8.000
B	-80.000	50.000	30.000	10.000	-
C	-120.000	35.000	35.000	35.000	35.000

Calcular qué inversión es más aconsejable según los criterios del Plazo de recuperación normal (PR), el descontado (PRD) y del VAN si el tipo de interés es del 5 %.

- 14.-A una empresa se le plantean dos posibles proyectos de inversión, con los desembolsos y rendimientos anuales expresados en euros:

Proyecto	Inversión	Flujos	Flujos	Flujos	Flujos
A	- 10.000	3.500	3.500	4.000	4.000
B	- 12.000	7.000	7.000	6.000	5.000

Sabiendo que el tipo de interés es del 5 %, ¿qué proyecto elegirá aplicando el VAN? ¿y cuál si aplica el criterio del plazo de recuperación normal PR y descontado PRD?

- 15.-Se pide ordenar los siguientes proyectos de inversión según el VAN, si el rendimiento mínimo esperado es del 6 %:

Proyecto	Inversión	Año 1	Año 2	Año 3
A	- 1.000.000	1.000.000	-	-
B	- 1.000.000	500.000	500.000	500.000
C	- 1.000.000	200.000	400.000	1.200.000
D	- 1.000.000	1.000.000	300.000	300.000

- 16.-Una empresa planea invertir en uno de los siguientes proyectos. ¿Cuál le recomendaría según los métodos de selección que conoces, a un rendimiento mínimo del 7 %?

Proyecto	Inversión	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4
A	- 3.000.000	1.500.000	1.500.000	-	-
B	- 3.000.000	2.000.000	500.000	500.000	2.000.000
C	- 3.000.000	-	-	3.000.000	2.000.000

- 17.-Una empresa está planteándose la renovación de sus equipos informáticos y ello le supondría un coste de 3.000 €. Para ello le ofrecen dos posibles marcas cada una de las cuales le permiten reducir sus gastos de gestión administrativa de la siguiente forma en los cinco años en que se estima la vida útil de los equipos:.

MARCA	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
H	500	1.200	1.300	1.000	900
J	700	950	1.600	1.100	870

Con estos datos y considerando un coste de capital del 5 %, indicar cuál de las dos marcas que se le proponen es más conveniente adquirir, de acuerdo con el criterio del VAN.

- 18.-La empresa Canarias S.A. debe elegir uno de los tres proyectos de inversión siguientes:

Proyecto	Inversión	Año 1	Año 2	Año 3
A	24.000.000	4.160	80.112	9.000
B	17.500.000	624	5.408	15.000
C	20.000.000	- 2.080	13.520	14.000

Se pide seleccionar un proyecto aplicando el criterio del Valor Actual Neto (VAN), siendo la tasa de actualización del 4%. Justificar la respuesta.

19.-La empresa Inversiones Calpe debe elegir entre uno de los siguientes proyectos:

Proyecto	Inversión	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4
A	- 30.000.000	2.070	8.500	10.400	15.800
B	- 32.000.000	- 4.140	560	15.200	32.800

Partiendo de los datos anteriores, seleccionar la inversión más conveniente para la empresa aplicando el criterio **VAN**, siendo la tasa de actualización del 3,5 %.

20.- Averigua el **TIR** de una inversión que supone un desembolso de 750.000 € y unos rendimientos netos de 420.000 € dentro de un año y de 430.000 € dentro de dos años.

21.- Una empresa tiene que elegir entre las siguientes opciones: Invertir 120.000 € en un proyecto que reportará un rendimiento único de 201.252,02 € a los 6 años, o invertir los 120.000 € en otro proyecto que reportaría un rendimiento único de 176.319,37 € a los 5 años. ¿Cuál debería elegir según el criterio **TIR**?

22.- ¿Cuál de estos dos proyectos de inversión elegirá una empresa según el criterio **TIR** o tasa interna de retorno?:

- Desembolso en el momento actual de 90.000 € que reportaría un rendimiento único de 125.000 € a los 3 años.
- Desembolso en el momento actual de 80.000 € que reportaría un rendimiento de 40.000 € al finalizar el primer año y 50.000 € al finalizar el segundo año.

23.-Una empresa fabricante de muebles de cocina desea adquirir una sierra para realizar las tareas de corte de planchas. Su precio de adquisición es de 15.000 €, y se prevé que generará unos ingresos anuales de 4.700 € el primer año y de 34.000 € durante el segundo, al término del cual habrá que sustituirla por desgaste de las partes mecánicas. Los gastos que genera la sierra son de consumo eléctrico durante el primer año es de 1.700 € y de consumo eléctrico y mantenimiento por valor de 16.000 € durante el segundo año. Si la rentabilidad requerida es del 12%. ¿Es una inversión recomendable o no? ¿Por qué?. Utilizar el **VAN** y el **TIR** para el análisis.

24.-De las siguientes inversiones que se presentan a una empresa decidir qué inversión sería más beneficiosa según el **VAN**, ($i = 7,2$ % anual) y por el Plazo de recuperación (**PR**):

Proyecto	Inversión	Flujos	Flujos	Flujos	Flujos	Flujos
A	- 5.000	3.000	3.000	3.000	3.000	-
B	- 17.000	10.000	5.000	3.000	5.000	10.000
C	- 8.000	6.000	5.000	5.000	1.000	-

25.- A una empresa se le plantean dos posibles proyectos de inversión, cuyos datos son los que figuran en la siguiente tabla. ¿Qué proyecto escogería si aplica el **VAN** a un interés del 6 %? ¿y si aplica el criterio del plazo de recuperación descontado **PRD**?:

Proyecto	Inversión	Flujos	Flujos	Flujos
A	- 60.000	24.000	25.000	24.000
B	- 70.000	40.000	40.000	-

26.-A la empresa TABLASA, que realiza trabajos en el sector de la madera, se le presenta la posibilidad de acometer un proyecto de inversión con las siguientes características:

- Duración del proyecto: 2 años, con un inversión inicial de 1.100.000 €, con un coste de financiación del 4% anual.
- Flujos de caja esperados: 450.000 € en el primer año y 800.000 € en el segundo año.

Se pide: Calcular el **VAN**, el plazo de recuperación **PR** y la **TIR**.

- 27.-A una empresa se le presenta la oportunidad de elegir entre dos proyectos de inversión. Los ingresos y los costes que origina cada uno de ellos son los siguientes:

Proyecto	Inversión	Año 1	Año 2	Año 3
A	40.000.000	20.000.000	10.000.000	30.000.000
		- 2.000.000	- 3.000.000	- 5.000.000
B	30.000.000	17.000.000	20.000.000	-
		- 2.000.000	- 3.000.000	-

Se pide, para un coste del capital del 9 % anual constante para los tres años:

- Analizar la viabilidad de los proyectos según el plazo de recuperación **PR**.
- Calcular el **VAN** de los proyectos de inversión y ordenar las inversiones.
- Calcular la tasa **TIR** de cada proyecto.

- 28.- A una determinada sociedad se le plantean varias inversiones:

Proyecto	Inversión	Flujos	Flujos	Flujos	Flujos	Flujos
A	-250.000	65.000	65.000	65.000	65.000	65.000
B	- 780.000	275.000	275.000	275.000	275.000	275.000
C	- 450.000	180.000	180.000	180.000	180.000	180.000

Atendiendo a los criterios del Plazo de recuperación **PR** y el **VAN** señalar el orden de prioridad en cada uno de los criterios anteriores.

- 29.- A una empresa, en el momento actual se le ofrecen 3 posibles proyectos de inversiones.
- Adquisición de una máquina de 200 millones de la que espera obtener 60 millones cada año durante los próximos 5 años.
 - Adquisición de un negocio por 500 millones, obteniendo 200 millones para los años tercero, cuarto y quinto.
 - Compra de un terreno, ahora, por 700 millones y venderlo el próximo año por 750 millones.
- Si se aplica un interés del 4,25 %, clasificar los proyectos de inversión según los criterios del plazo de recuperación **PR** y el **VAN**.

- 30.-Una empresa está estudiando la compra de un nuevo equipo productivo del que tiene la información siguiente:

- Coste de adquisición: 5.950.000 €, con valor residual estimado en 150.000 €
- Costes fijos anuales: 2.482.000 € y costes variables unitarios: 160 €/u.
- Precio de venta unitario: 200 €/u.
- Vida útil de 4 años con una producción de: 90.000, 100.000, 150.000 y 250.000 unidades cada año.

Se pide evaluar la inversión según el **VAN**.

- 31.-La empresa TRACESA se dedica a la reforestación de parques naturales y explotaciones agrícolas privadas. Se le plantea la posibilidad de renovar la maquinaria vieja por otra más ecológica u eficiente. El precio de adquisición es de 400.000 € y su vida útil de 5 años. Para realizar la valoración de la inversión se dispone de la siguiente información adicional:

- Se vende un tractor viejo por 60.000 €, a cobrar la mitad en el momento inicial y el resto al final del primer año. Costes fijos anuales de 12.500 €. Los ingresos anuales por sus servicios: 20.000 € el primer año, 30.000 € el segundo año, 35.000 € el tercer año, 45.000 € el cuarto año y 47.000 € el último año. Se cobran al contado y al final de cada año.
- Valor de actualización o descuento: 6%.
- Se pide, interpretando siempre los resultados: El **VAN**, **TIR** y plazo de recuperación. ¿La inversión es recomendable o no?

32.-El Ayuntamiento de una ciudad está considerando la posibilidad de instalar una depuradora de agua marina, para lo cual encarga un estudio. Los datos son los siguientes:

- El coste de instalación y equipo supone un desembolso inicial de 20.000.000 €
- Para instalar la depuradora será necesario expropiar 250.000 m² de terreno a razón de 20 €/m², que se recuperan al final de la inversión.
- La vida útil estimada para la instalación es de 5 años.
- Los costes fijos se pueden considerar constantes a razón de 2.000.000 € al final de cada año y los variables se estiman en 3 €/m³ de agua depurada.
- La producción y venta anual de agua depurada es de 1.000.000 m³.

Sabiendo que el coste de capital para el Ayuntamiento es del 8 %, se desea conocer el precio mínimo de venta del metro cúbico de agua depurada, con objeto de que la instalación resulte rentable.

33.-Un comerciante dispone de 100.000 €. Con el objetivo de obtener la máxima rentabilidad, tiene que decidir entre dos posibilidades de inversión:

- Participar con otros comercios en la apertura de una sucursal de venta en un nuevo centro comercial, lo que le supone un desembolso inicial de 100.000 € y unos flujos de caja de 46.500 € y 70.000 € respectivamente.
- Invertir los 100.000 € durante dos años en un fondo de inversión, con una rentabilidad anual del 8 %.

¿Qué alternativa elegiría a un interés del 8 %?. En el caso del fondo de inversión, suponiendo unos flujos de caja de 8.000 € y 108.000 € al final de cada año, obtenga el valor actualizado neto con un coste del capital

34.- La señora Eulalia ha de elegir entre dos proyectos:

- El primero supone un desembolso inicial de 1.000.000 €, genera un flujo neto de caja anual de 600.000 € durante dos años y el valor residual es de 250.000 €
- En el segundo es invertir 1.000.000 € durante dos años en un depósito bancario que ofrece una rentabilidad anual libre de impuestos del 3,5%.

¿Qué proyecto recomienda elegir en términos de rentabilidad? ¿Por qué?

35.- Supuesto un proyecto de inversión definido por los siguientes datos: Desembolso inicial de 40.000 €, flujo neto de caja del primer año, 35.000 €; de los años segundo y tercero, 15.000 € cada uno; el coste de capital del 3 % anual. Se desea conocer:

- El Valor Actual Neto (**VAN**) y el tanto interno de rendimiento (**TIR**).
- ¿Merece la pena llevar a cabo la inversión? Razone la respuesta

36.- A una empresa se le ofrecen en el momento actual dos posibles proyectos de inversión. El primero consiste en la adquisición de una máquina por 120.000 €, de la que obtendrá 50.000 € netos cada año durante los tres próximos años; el segundo proyecto consiste en adquirir un negocio por 100.000 €, del que obtendrá unos rendimientos netos de 30.000, 40.000 y 50.000 € respectivamente en cada uno de los próximos tres años. Calcular qué proyecto sería el mejor, según el criterio del plazo de recuperación **PR**, y según el valor actual neto, **VAN**, si el tipo de interés es del 5%.

37.- En el cuadro adjunto se facilitan los datos, en unidades monetarias, relativos a tres proyectos de inversión que una empresa quiere evaluar:

Proyecto	Desembolsos	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄
P ₁	25.000	0	0	30.000	12.000
P ₂	20.000	-5.000	-2.000	15.000	15.000
P ₃	16.000	5.000	6.000	7.000	8.000

Si el tipo de actualización o descuento es del 6,5% anual, se pide calcular el plazo de recuperación de cada inversión indicando la más ventajosa.

38.- Un fabricante de envases de arcilla para la alimentación está analizando la posibilidad de instalar una nueva planta de producción. Su mercado es el francés, y en las dos localizaciones que estudia tiene próxima la materia prima. La elección está, por tanto, en función de los datos siguientes:

- **Opción 1.** Localizarse en Girona, lo que le supone un desembolso inicial de 500.000 €, generándose unos flujos de caja de 275.000 € y de 312.000 € en el primer y segundo año respectivamente.
- **Opción 2.** Localizarse en Badajoz lo que le supone un desembolso inicial de 400.000 €, generándose unos flujos de caja de 250.000 € y de 500.000 € en el primer y segundo año respectivamente.

El coste del capital es en ambos casos del 10 % anual. Se pide:

- a) Determinar el Valor Actualizado Neto (**VAN**) en cada una de las inversiones.
- b) Calcular la tasa interna de rentabilidad (**TIR**) para ambas opciones.
- c) Explicar qué opción elegiría razonando la respuesta.

39.- Un fabricante de automóviles está analizando la posibilidad de instalar una nueva planta de producción. Se le plantean dos opciones:

- **Opción 1:** Localizarse en Madrid. Esto le supone un desembolso inicial de 1.000.000 €, generándose unos flujos de caja de 550.000 € y de 625.000 € en el primer y segundo año respectivamente.
- **Opción 2:** Localizarse en Barcelona: Esto le supone un desembolso inicial de 800.000 €, generándose unos flujos de caja de 250.000 € y de 700.000 € en el primer y segundo año respectivamente.

El coste del capital es en ambos casos del 10 %. Calcular el **VAN** de cada una de las inversiones escogiendo la mejor inversión y cuál sería preferible si se utiliza el criterio del plazo de recuperación **PR**. ¿Cuál es preferible según la **TIR**?

40.- A la empresa ARDONA S.A., que realiza trabajos en el sector del turismo rural, se le presenta la posibilidad de realizar un proyecto de inversión caracterizado por:

- Duración del proyecto: 2 años.
- Inversión inicial: 2.100 millones de euros.
- Coste del dinero: 5% anual.
- Flujos de caja esperados: 750 millones de euros en el primer año y 900 millones de euros en el segundo año.

Se pide:

- a) Calcular el Valor Actual Neto.
- b) Calcular el plazo de recuperación.
- c) Calcular la TIR. Razone si el proyecto se debe llevar adelante teniendo en cuenta los criterios utilizados.

CAPÍTULO 10º:

EL PERIODO MEDIO DE MADURACIÓN.
EL COSTE DE CAPITAL.

Dr D. Enrique R. Blanco Richart

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Definir el concepto de coste de capital.
- Explicar la influencia que tienen los impuestos en el coste real de una financiación ajena.
- Explicar que es una ponderación.
- Saber calcular el coste de capital de la financiación propia con dividendos constantes.
- Saber calcular el coste de capital de la financiación propia con dividendos crecientes.
- Saber calcular el coste de capital de la financiación ajena con la influencia de los impuestos.
- Definir el concepto de periodo medio de maduración.
- Explicar la utilidad de este concepto.

1.- Las fuentes de financiación de la empresa

El balance de situación es un estado que representa la situación y estructura financiera de la empresa. Los recursos con que la empresa cuenta para realizar su actividad productiva, se recogen en el activo clasificados por orden de liquidez creciente: inmovilizado, existencias, deudores, inversiones financieras temporales y disponible. Esos mismos recursos se recogen igualmente en el pasivo clasificados por orden de exigibilidad creciente, representando la procedencia de los recursos:

- Capital: Recursos aportados por los propietarios,
- Reservas: Recursos generados por la propia empresa,
- Exigible a largo o corto plazo: Recursos aportados por terceros.

El capital y el exigible se consideran **recursos externos**; ya que provienen del entorno externo a la propia empresa: ya sean los propietarios, ya sean terceras personas; las reservas son consideradas **recursos internos** ya que provienen del interior mismo de la empresa. Por ello reciben también el nombre de *autofinanciación*.

2.- El coste del capital

En primer lugar, dado que las inversiones en activo fijo son de gran importancia para la empresa, una parte esencial de la toma de decisiones es el conocimiento del coste de su financiación.

Se debe distinguir entre el coste de capital de la empresa en su conjunto y el coste de los distintos componentes de su financiación: De sus recursos ajenos (préstamos), de las acciones (la rentabilidad que exigen sus accionistas, que son los propietarios de la empresa) y recursos propios (Lo que es capaz de ahorrar y no le entrega a los accionistas).

El coste de capital de una empresa **es la tasa de beneficio que se debe obtener, dado un determinado nivel de riesgo, para satisfacer a los inversores que adquieren los títulos emitidos por la empresa.**

Si la empresa, al emprender un proyecto de inversión, gana exactamente el coste del capital que financia dicho proyecto, el precio de la empresa (sus acciones) no variará. Sin embargo, en caso de obtener una rentabilidad distinta del coste de capital, es de esperar que varíe el precio de sus acciones, si es mayor el valor subirá y si es menor el valor bajará.

3.- El coste del capital de los recursos financieros en general

El coste de una fuente de financiación, se define como **la tasa de actualización que iguala el valor actual de los fondos netos recibidos por la empresa, con el valor actual de los flujos futuros.**

a) El coste de capital de los recursos ajenos (K_p).

El coste de los recursos ajenos es igual a la tasa de interés que iguala el flujo de pagos futuros, intereses más devolución del principal, con el total de recursos recibidos por la empresa en el momento actual. *Los flujos de entrada* se corresponderán con el nominal del préstamo o del empréstito y se han de considerar los *Gastos de formalización de la deuda* (comisiones, impuestos, publicidad, etc).

Los flujos de salida se corresponderán con los *Intereses*, que se pagan al final de cada período, con la *devolución del principal*, que según las condiciones de la emisión puede producirse de una sola vez al final de la vida del préstamo o del empréstito, o bien de forma escalonada por partes alícuotas durante la vida del mismo. También los flujos de salida se han de considerar *netos* lo cual nos lleva a tener en cuenta el ahorro fiscal.

$$C = G + F_1 (1 + k_p)^{-1} + F_2 (1 + k_p)^{-2} + \dots + F_n (1 + k_p)^{-n}$$

- C = Importe del préstamo recibido por la empresa.
- G = Gastos de formalización de la operación.

- F = Flujos netos para reembolso del principal e intereses.
- K_p = Coste de capital del préstamo.
- n = Número de pagos de la operación financiera.

b) El coste de capital de los recursos ajenos después de impuestos.

Como los intereses son deducibles en la declaración tributaria, el coste del capital ajeno disminuye, por lo tanto el coste después de impuestos sería menor, ya que es como si Hacienda me devolviese parte de los intereses pagados:

Coste = $K_p (1 - t)$, siendo t la tasa impositiva.

c) El coste de las aportaciones de capital (K_c)

La captación de recursos financieros mediante acciones, (el valor de éstas en el mercado) da lugar a unas salidas futuras, constituidas por los *dividendos a pagar* a los accionistas. *La tasa de interés que iguale los dos términos de la ecuación será el costo de capital.* Que será el interés que los accionistas exigen como rendimiento de su inversión. Por lo tanto la prestación será el valor de mercado de la acción y la contraprestación los dividendos prometidos. Si consideramos que éstos son constantes en el tiempo, será el valor actual de una renta indefinida.

$$C_0 = d / k_c \quad \text{Despejando } k_c = \frac{d}{C_0} \quad \text{siendo } C_0 \text{ el valor de la acción}$$

Si los dividendos crecen de forma constante será el valor actual de una renta variable en progresión geométrica, siendo g el porcentaje de crecimiento:

$$C_0 = d / (1 + k_c - g) \quad \text{Despejando } k_c = \frac{d}{C_0} + g - 1$$

4.- El coste ponderado del capital

La estructura financiera de una empresa es la relación existente entre los recursos propios. (Lo que obtiene de los accionistas, el capital, y lo que ahorra, reservas) y los recursos ajenos (las deudas por préstamos, compras, etc.) y esta relación suele mantenerse a largo plazo.

Veamos con un ejemplo como se efectuaría su cálculo:

La empresa Tablex, S.L., tiene los siguientes recursos ajenos a largo plazo: Un préstamo hipotecario por valor de 8.000.000 €, a un interés del 13 %. Sus recursos propios están conformados por 20.000 acciones de 100 € de valor nominal, totalmente desembolsadas y cuyo valor de mercado es de 750 € cada una, esperando los accionistas una rentabilidad de alrededor del 18 %. La empresa paga por Impuesto de Sociedades un 35 % de su Beneficio.

- ✗ Lo primero sería calcular el coste de cada fuente ajena después de impuestos, recordando que si me permiten deducirme los intereses, que son gastos, la empresa declara menos beneficios y por lo tanto paga menos impuestos, lo que hace que el coste de sus préstamos sea menor en la cuantía del % del impuesto, en nuestro caso

$$0,13 \cdot (1 - 0,35) = 8,45 \%$$

- ✖ El coste del capital propio es del **18 %** y como no es gasto no está afectado por el impuesto.
- ✖ El siguiente paso será calcular la ponderación de cada partida: Recordamos que ponderar es calcular el peso o porcentaje de algo particular sobre un valor total. En nuestro caso el total de los recursos propios y ajenos es:

$$8.000.0000 \text{ (préstamo)} + (20.000 \cdot 750 = 15.000.000) \text{ de las acciones} = 23.000.000 \text{ €}$$

- Porcentaje de los recursos ajenos (8.000.000) sobre los recursos totales: $8.000.000 / 23.000.000 = 0,348$, es decir el 34,8 %.
- Porcentaje de los recursos propios (15.000.000) sobre los recursos totales: $15.000.000 / 23.000.000 = 0,652$, es decir el 65,2 %.
- ✖ El siguiente paso será calcular el coste medio de cada partida, siendo la suma de todas las partidas el coste medio ponderado de la sociedad:
 - De los recursos ajenos: $0,0845 \cdot 0,348 = 2,942 \%$.
 - De los recursos propios: $0,18 \cdot 0,652 = 11,736 \%$.
 - El coste ponderado del capital será: $2,942 + 11,736 = 14,678 \%$

5.- Actividades: Ejercicios resueltos

Actividad nº 1:

El pasivo de una empresa está constituido en un 50 % por recursos propios y un 50 % de ajenos. El coste de capital de los recursos propios es el **16 %**, y el de los recursos ajenos el **10 %**.

La empresa tiene dos factorías A y B. El director de la factoría A propone adquirir unos equipos por un coste de 10 millones, justificando su petición con un estudio económico donde se asegura una rentabilidad de la inversión del 12 % y se va a financiar con un crédito bancario a un coste del 10 %. En la factoría B, también va a realizarse una inversión de 10 millones. La rentabilidad del proyecto es del 14 %, este proyecto va a ser financiado mediante la emisión de acciones. Analizar la elección de cada proyecto.

Solución:

- El coste medio ponderado del capital será, al tener la misma proporción en la financiación, es decir mitad y mitad cada una, del: $(16 \% + 10 \%) : 2 = 13 \%$.
- Respecto a la primera inversión como el coste de capital es del 10 % y la inversión tiene una rentabilidad del 12 %, habría que aprobarlo.
- Mientras que en el segundo caso aún siendo su rentabilidad mayor, el 14 %, debería ser rechazado ya que se quiere financiar con recursos propios que tienen un coste del 16 %, lo que no nos permitirá con la inversión pagarles dicha rentabilidad.

Actividad nº 2:

Una empresa tiene las siguientes fuentes de financiación, con su coste efectivo correspondiente, calcular el coste ponderado de financiación.

Concepto	Importe	Coste
Capital.	10.000.000	10 %
Reservas.	15.000.000	18 %
Préstamos.	20.000.000	15 %
	45.000.000	

Solución:

- Lo primero que tenemos que calcular es la ponderación de cada partida respecto del total:
 - $10.000.000 / 45.000.000 = 0,2222$ es decir el 22,22 %.
 - $15.000.000 / 45.000.000 = 0,3333$ es decir el 33,33 %.
 - $20.000.000 / 45.000.000 = 0,4445$ es decir el 44,45 %.
- El siguiente paso será calcular el coste ponderado de cada partida:
 - $0,2222 \cdot 0,10 = 0,02222$ es decir el 2,222 %.
 - $0,3333 \cdot 0,18 = 0,05999$ es decir el 5,999 %.
 - $0,4445 \cdot 0,15 = 0,06667$ es decir el 6,667 %.
- El coste ponderado total será $= 2,222 \% + 5,999 \% + 6,667 \% = 14,89 \%$

Actividad nº 3:

Un Director Financiero dispone de los siguientes datos de dos de sus empresas que cotizan en bolsa y desea saber el coste de los capitales propios:

	Sociedad A	Sociedad B
Cotización actual de la acción	4.250	3.750
Dividendo por acción	510	50
Crecimiento esperado del dividendo	-	2 %

Solución:

- El coste de cada partida sería el porcentaje que iguala el coste de las acciones, su valor hoy, con los flujos futuros. En este caso la primera es una renta constante indefinida y en el segundo caso una renta geométrica indefinida:

Para A: $4.250 = 510 \cdot 1/K_c$ despejando $K_c = \frac{510}{4250} = 0,12$, es decir el 12 %.

Para B: $3.750 = 50 \cdot (1/1 + K_c - 1,02)$ despejando, $K_c = 0,0333$ es decir el 3,33 %.

Actividad nº 4:

Las acciones de una empresa tienen un valor en bolsa de 4.000 €. El dividendo a pagar es de 212 € y éste va a seguir creciendo con una tasa anual del 6 %. Los gastos de emisión fueron del 8 %.

Además tiene acciones preferentes en circulación, cuyo valor de mercado es de 10.000 € coincidente con su valor nominal. El dividendo anual de estas acciones es de 600 € y los gastos son del 4 %.

Por último, existe una deuda de 16.000.000 € en obligaciones que se cotizan a la par y con un interés del 8 %.

Se pide calcular el coste de cada partida.

Solución:

- Coste de las acciones ordinarias: Los gastos de emisión son del 8 % por lo tanto se reciben netos: $4.000 - 8\% \text{ de } 4.000 = 3.680 \text{ €}$, por lo tanto:

$$3.680 = 212 \cdot 1 / (1 + K_a - 0,06) \text{ operando } K_a = 0,1176 \text{ es decir el } \mathbf{11,76 \%}.$$

- Coste de las acciones preferentes: Se reciben netos $10.000 - 4\% = 9.600 \text{ €}$

$$9.600 = 600 \cdot 1 / K_{ap} \text{ operando } K_{ap} = 0,0625 \text{ es decir el } \mathbf{6,25 \%}.$$

- Coste de los recursos ajenos: $0,08 \cdot (1 - 0,35) = \mathbf{5,2 \%}$

Actividad nº 5:

Una sociedad tiene su capital dividido en 140.000 acciones ordinarias, cuyo nominal es de 50 € con cotización en bolsa al 1.000 %, pagando un dividendo de 20 € en el presente año, siendo su crecimiento anual del 8 %, y en 100.000 acciones preferentes, de 50 € nominales con cotización en bolsa al 100 %; recibiendo un dividendo fijo de 3,5 €. Sus reservas disponibles ascienden a 9.270.000 € y sus recursos ajenos a largo plazo ascienden a 25.000.000 € con un coste medio del 6 %. El impuesto de sociedades es del 35 %.

Solución:

- El importe de cada fuente de financiación y su porcentaje de participación sobre el total de la financiación propia y ajena sería:

- Acciones ordinarias: $140.000 \cdot 50 \cdot 1000\% = 70.000.000 \text{ €}$
- Acciones preferentes: $100.000 \cdot 50 \cdot 100\% = 5.000.000 \text{ €}$
- Reservas: 9.270.000 €
- Recursos ajenos: 25.000.000 €
- El total de los recursos es de: 109.270.000 €

- El porcentaje de participación de cada fuente sobre el total de la financiación:

- Acciones ordinarias: $70.000.000 / 109.270.000 = 0,64$ es decir el 64 %.
- Acciones preferentes: $5.000.000 / 109.270.000 = 0,046$ es decir el 4,6 %.
- Reservas: $9.270.000 / 109.270.000 = 0,0849$ es decir el 8,5 %.
- Recursos ajenos: $25.000.000 / 109.270.000 = 0,2288$ es decir el 22,9 %.

- Sus costes actuales serían:

- Coste de las acciones ordinarias:

$$500 = 20 \cdot 1 / (1 + K_a - 1,08)$$
 operando $K_a = 0,12$ es decir el **12 %**.
- Coste de las acciones preferentes:

$$50 = 3,5 \cdot 1 / K_{ap}$$
 operando $K_{ap} = 0,07$ es decir el **7 %**.
- Coste de las reservas: Se corresponde con el mismo que el de las acciones ordinarias ya que las reservas pertenecen a los accionistas. **12 %**.
- Coste de los recursos ajenos: $0,06 \cdot (1 - 0,035) = \mathbf{3,9 \%}$

El coste ponderado sería:

$$\mathbf{CMP = (0,12 \cdot 64 \%) + (0,07 \cdot 4,5 \%) + (0,039 \cdot 23 \%) + (0,12 \cdot 8,5 \%) = 9,912 \%}$$

Actividad nº 6:

Una sociedad va a emitir 100.000 acciones preferentes de 100 € nominales cada una. Los costes de emisión ascienden a un 3 % del nominal y el dividendo anual será de 7 €. Calcular la cantidad de dinero que recibirá la empresa y el coste porcentual de la misma.

Solución:

- La sociedad recibirá netos: $(100.000 \cdot 100) - 3 \% = 9.700.000 \text{ €}$

Su coste sería: $9.700.000 = 700.000 \cdot 1 / K_a$ operando, $K_a = 0,0722$, es decir **7,22 %**.

PERÍODO MEDIO DE MADURACIÓN DE LA EMPRESA. (PMM)

Es la duración media del ciclo a corto plazo, también llamado ciclo de explotación o ciclo "dinero-mercancías-dinero" de ahí que sea el periodo delimitador de las operaciones a largo y corto plazo de una empresa en el ámbito del análisis contable. El periodo medio de maduración es el tiempo que, por término medio, tarda en volver a caja el dinero que ha salido de la misma para hacer frente a las exigencias del proceso productivo; es decir es el tiempo que, por término medio, tarda en dar una vuelta el activo circulante. Se mide en días y podemos diferenciar entre:

El periodo medio de maduración económico que es el tiempo que dura todo el ciclo de explotación desde que se produce la entrada de los materiales en el almacén hasta que se cobran las facturas de los clientes. (El de materias primas, fabricación, de venta y de clientes).

Mientras que el **periodo medio de maduración financiero** es el tiempo que la empresa tarda en recuperar el dinero que ha invertido en el proceso productivo, es decir el tiempo que ha de financiar totalmente la empresa. (El de materias primas, fabricación, de venta, de clientes y el de proveedores).

El ciclo de explotación de la empresa se realiza en las cinco siguientes fases, que configuran el periodo medio de maduración de la empresa:

*** Periodo medio de almacenamiento de las materias primas. (Pa)**

Su cuantificación se define como el tiempo, expresado en días, que por término medio permanecen las materias primas almacenadas, es decir, el tiempo que tarda en utilizarse las materias primas. Es decir el período de almacenamiento de las materias primas nos indica los días que transcurren desde que las compramos hasta que son utilizadas en la empresa para la producción y se produce la salida del almacén.

La permanencia de las materias primas en el almacén es importante porque repercute en la liquidez de la empresa. Por ello, en un principio sería conveniente disminuir ese período al mínimo, pero teniendo siempre presente que no debemos quedar desabastecidos de materias primas, ya que nos perjudicaría al tener que efectuar posteriormente gastos excesivos. La reducción de este período evita gastos producidos por mermas, roturas y obsolescencia.

*** Periodo medio de fabricación. (Pf)**

Representa la duración que por término medio transcurre entre la entrada de las materias primas en los procesos de producción hasta que salen los productos terminados. Es también importante a la hora de analizar la liquidez de la empresa, siendo necesario disminuir este proceso al máximo.

Los dos períodos que hemos analizado solamente se producen en las empresas de carácter industrial, no existiendo en las empresas de carácter comercial, que carecen de materias primas y de fabricación.

*** Periodo medio de venta (Pv). Periodo medio de almacenamiento de productos terminados.**

Este período se desarrolla desde que los productos entran en el almacén, después de haber finalizado la fabricación, hasta que se produce su venta. Los días que tarda un producto en venderse y permanece en el almacén afecta negativamente a la liquidez de la empresa y, por tanto, sería conveniente disminuir este período al mínimo.

*** Periodo medio de clientes (Pc)**

Es el tiempo que transcurre desde que procedemos a la venta de los productos de la empresa y el cobro de los mismos. Se podrá calcular el saldo medio de los créditos comerciales a través de una media aritmética entre los saldos iniciales y finales del ejercicio.

A la empresa le interesa disminuir el período medio de cobro a los clientes, puesto que con esta medida se produce un aumento de la tesorería y disminuye su necesidad de endeudamiento.

Los clientes de dudoso cobro se incluyen y consideran cuentas a cobrar mientras que las provisiones, su saldo no debe minorar el de las cuentas a cobrar.

Respecto de los anticipos de clientes se tratarán como una minoración de su saldo.

Respecto de los efectos, ya estén en gestión, descontados o impagados forman parte del saldo de las cuentas a cobrar.

✖ Período medio de pago a proveedores (Pp)

Tiene un significado financiero y se refiere al tiempo que media entre que efectuamos una compra y su pago.

En este caso, al contrario que lo analizado en los casos anteriores, interesa aumentar el período medio de pago.

Por lo tanto, resumiendo en una expresión matemática:

$$\text{Período medio de maduración económico: } PMM = Pa + Pf + Pv + Pc$$

$$\text{Período medio de maduración financiero: } PMM = Pa + Pf + Pv + Pc - Pp$$

✓ **Rescapitulando:**

- A la empresa le interesa elevar la rotación de todas las fases, reduciendo el período de maduración.
- A mayor velocidad, menor será el periodo medio y menos recursos tendrá que destinar a financiar el ciclo a corto. **Para este objetivo la empresa dispone de una serie de políticas:**
 - a) Sobre las compras: reducir el stock de materias primas y mejorar su financiación.
 - b) Sobre la producción o fabricación: invertir en tecnología, maquinaria..., incentivos a la producción, planificación de tareas.
 - c) Sobre las ventas: descuentos, rebajas, publicidad.
 - d) Sobre los cobros: descuentos pronto pago y cualquier práctica que mejore la gestión de cobro.

Llevando a cabo estas políticas, la empresa podrá conseguir:

- a) Incremento de productividad y rentabilidad.
- b) Aceleración del proceso de amortización de la estructura técnica.
- c) Renovación y mejora de la estructura fija.
- d) Incremento del tamaño de la empresa.
- e) Aumento de los recursos propios.

✓ **Calculando: Tomando el año comercial de 360 días.**

- a) Período medio de almacenamiento de materias primas: $360 / \text{rotación materias primas}$.
- b) Período medio de fabricación: $360 / \text{rotación productos en curso}$.

- c) Periodo medio de almacenamiento de productos terminados: 360 / rotación productos terminados.
- d) Periodo medio de cobro a clientes. 360 / rotación de las ventas.
- e) Periodo medio de pago a proveedores. 360 / rotación de compras.

✓ **Concepto de rotación.**

- **Rotación de materias primas:** Consumo = Ex. iniciales + compras – Ex. finales

$$R_{mp} = \text{Consumo materias primas} / \text{Existencias medias materias primas.}$$

- **Rotación de productos en curso:**

$$R_{pc} = \text{Coste anual de producción} / \text{Ex. medias de productos en curso.}$$

- **Rotación de productos terminados:** Coste de las ventas = Ex. iniciales productos terminados + coste producción de productos terminados – Ex. finales de productos terminados.

$$R_{pt} = \text{Coste de ventas} / \text{Existencias medias productos terminados.}$$

- **Rotación de ventas o clientes:**

$$R_v = \text{Ventas} / \text{Saldo medio de clientes.}$$

- **Rotación de compras o proveedores:**

$$R_c = \text{Compras} / \text{Saldo medio de proveedores.}$$

Esta claro que existen mil matices a esta formulación (impagados, el juego del IVA, etc...) pero no debemos interpretarlo como un valor absoluto. Es una herramienta que nos permite determinar si vamos en la buena dirección o no, si mejoramos o empeoramos, y que puede explicarnos nuestras necesidades de liquidez.

De entrada podemos afirmar que son escasísimas las empresas afortunadas que gozan de periodos medios de maduración negativos, es decir, que cobran antes que pagan. Por ejemplo, los centros comerciales.

Uno de los grandes problemas de las empresas, es **la gestión de su tesorería**. En primer lugar, hay que estudiar si la empresa genera beneficios o no. Si la empresa genera pérdidas, como es lógico, significa que tiene más gastos que ingresos, y evidentemente, a un plazo relativamente corto, va a tener problemas para afrontar sus pagos. La solución es obvia, ampliar su capital.

Pero el caso contrario, sucede cuando una empresa genera beneficios, y pasa por verdaderas dificultades para afrontar sus pagos a corto plazo. Para poder solucionar dichas situaciones, lo primero que debemos hacer es identificar los motivos, que son de muy diversa índole y variados.

- **Financiar activos fijos mediante la tesorería de la empresa o el circulante.** Si una empresa compra un coche (activo fijo), y paga al contado dicha adquisición, como es obvio, ese dinero va a hacer falta para afrontar los pagos corrientes (normales) de la empresa. La solución si no se dispone de la liquidez suficiente para realizar una compra al contado, debemos recurrir a las fórmulas habituales de financiación, dígame préstamos de duración mínima de dos años, leasing, renting...
- **Periodo del flujo de caja.** Este periodo es el que transcurre desde que invierto un euro en comprar mis artículos, hasta que lo recupero vía cobro de una venta. Si mis

principales clientes me pagan a 120 días, y yo le pago a mis principales proveedores a 90 días, es evidente que tenemos que un desfase de tesorería muy importante. Las soluciones a este problema pasan por acortar los plazos de cobro y alargar los plazos de pago. Si aún así no consiguiéramos restablecer un equilibrio adecuado, no tenemos más remedio que ampliar capital, o financiar los pagos vía póliza de crédito, por ejemplo.

- **Gestión de las cuentas de IVA.** Es una particularidad que se da en las empresas que tienen un crecimiento muy rápido, o trabajan en sectores con tipos de IVA distintos, para compras y ventas. Por ejemplo, supongamos una constructora que le trabaja fundamentalmente a promotores de viviendas. Sus facturas de venta repercuten el 7% de IVA, y en sus facturas de compra, soportan el 16%. Si el volumen de dicho desfase es muy importante, tendremos una cuota a devolver de IVA bastante sustanciosa, en algunos casos, minorando bastante la tesorería de la empresa. Las fórmulas para evitar este desfase, son bastante pocas, puesto que como bien sabemos Hacienda liquida las devoluciones de los impuestos, en el año siguiente.
- **Análisis de los activos corrientes de la empresa.** Y particularmente, las existencias. En muchas empresas se suelen realizar grandes compras de artículos destinados a la venta, con objeto de obtener un menor precio de adquisición. Si no gestionamos adecuadamente las cantidades necesarias de stock, originaremos unos desembolsos terribles en compras, disminuyendo mucho la tesorería de la empresa. Gestionar una adecuada política de compras, no es sólo comprar barato, sino la cantidad adecuada que se va a vender en el plazo de reposición de la compra.

6.- Actividades: Ejercicios resueltos

Actividad nº 1:

Si los Períodos Medios de la empresa LOGI, S. A., son:

- Período Medio Existencias: 30 días.
- Período Medio de Cobro: 30 días.
- Período Medio de Pago: 75 días.

¿Cuáles serían los Períodos Medios de Maduración?

Solución:

- a) Técnico $30 + 30 = 60$ días
- b) Financiero, $60 + 60 - 75 = 45$ días.

Actividad nº 2:

Una empresa compró y consumió el pasado año, para la fabricación de su producto, 20.000 € de materias primas y, por término medio, mantuvo un nivel de existencias de las mismas en almacén de 2.000 €. ¿Cuál es su período medio de almacenamiento?

Solución

- $R_{mp} = \text{Consumo materias primas} / \text{Existencias medias materias primas}.$

$$20.000 / 2.000 = 10$$

- Periodo medio de almacenamiento de materias primas: 360 / rotación materias primas.

$$360 / 10 = 36 \text{ DÍAS}$$

Actividad nº 3:

Una empresa ha realizado en el ejercicio compras a crédito a proveedores por valor de 10.800 €, manteniendo un saldo medio de 1.800 €. La misma empresa ha efectuado ventas a crédito por 153.000 € con un saldo medio de 12.750 €. Teniendo en cuenta los datos anteriores, se pide: Calcular el periodo medio de maduración de clientes y proveedores

Solución

- Periodo medio de maduración de clientes: $153.000 / 12.750 = 12$

$$\text{Rotación} = 360 / 12 = 30 \text{ días}$$

- Periodo medio de maduración de proveedores: $10.800 / 1.800 = 6$

$$\text{Rotación} = 360 / 6 = 60 \text{ días}$$

Actividad nº 4:

Una empresa realizó en el ejercicio compras al contado por valor de 100.000 €, manteniendo un saldo medio de 10.000 €. El coste total de la fabricación realizada en ese año fue de 300.000 € y la media del stock de productos en curso de fabricación fue de 15.000 €. Durante ese año vendió toda la producción que fabricó y el nivel medio de existencias que mantuvo fue de 10.000 €. Los ingresos totales por ventas que obtuvo fueron 500.000 € y el saldo de clientes de 125.000 €. Teniendo en cuenta los datos anteriores, se pide: Calcular el periodo medio de maduración de la empresa. y si la política de la empresa era conceder a sus clientes un plazo medio de pago de 60 días, explicar si la ha mantenido.

Solución

- Teniendo en cuenta los subperiodos que componen el periodo medio de maduración y los datos que se ofrecen en el enunciado, la organización de estos datos es la siguiente:
 - Compras (consumo anual de materias primas): 100.000 €
 - Nivel medio de existencias: 10.000 €
 - Coste de fabricación: 300.000 €
 - Media del stock de productos en curso: 15.000 €
 - Ventas (volumen anual a precio de coste): 300.000 € (todo lo fabricado)
 - Nivel medio de existencias (productos acabados): 10.000 €
 - Ventas (volumen anual a precio de venta): 500.000 €
 - Saldo de clientes: 125.000 €
- Periodo medio de aprovisionamiento: $100.000 / 10.000 = 10$

$$\text{Rotación} = 360 / 10 = 36 \text{ días}$$

- Periodo medio de fabricación $300.000 / 15.000 = 20$

$$\text{Rotación} = 360 / 20 = 18 \text{ días}$$

- Periodo medio de ventas: $300.000 / 10.000 = 30$

$$\text{Rotación} = 360 / 30 = 12 \text{ días}$$

- Periodo medio de clientes: $500.000 / 125.000 = 4$

$$\text{Rotación} = 360 / 4 = 90 \text{ días}$$

$$\text{PMM} = 36 + 18 + 12 + 90 = 156 \text{ días.}$$

La empresa no ha mantenido la política de crédito a clientes porque el periodo medio de cobro es de 90 días, es por tanto superior al plazo medio fijado por la empresa de 60 días.

Actividad nº 5:

Si en el primer año de funcionamiento una empresa compró y consumió materia prima por valor de 10.000 € generando un nivel medio de existencias de estas materias de 2.000 €. La media de existencias de productos en curso de fabricación fue de 3.000 € y la media de productos acabados de 6.000 €. Los gastos directos de fabricación fueron de 5.000 € y la amortización de 1.000 €. Los gastos generales ascendieron a 1.600 €. A lo largo del año la empresa vendió 24.000 €. La media de saldo de los derechos de cobro de la empresa fue de 4.000 €, mientras que la media del saldo de proveedores fue de 1.000€. Teniendo en cuenta los datos anteriores, se pide calcular el periodo medio de maduración económico y financiero de la empresa..

Solución

- Teniendo en cuenta los subperiodos que componen el periodo medio de maduración y los datos que se ofrecen en el enunciado, la organización de estos datos es la siguiente:
 - Compras (consumo anual de materias primas): 10.000 €
 - Nivel medio de existencias: 2.000 €
 - Coste de fabricación: 16.000 € (compras: 10.000 + gastos fabricación: 5.000 + amortización: 1.000)
 - Media del stock de productos en curso: 3.000 €
 - Ventas (volumen anual a precio de coste): 17.600 € (compras: 10.000 + gastos fabricación: 5.000 + amortización: 1.000 + gastos generales: 1.600)
 - Nivel medio de existencias (productos acabados): 6.000 €
 - Ventas (volumen anual a precio de venta): 24.000 €
 - Saldo de clientes: 4.000 €
 - Compras realizadas en el ejercicio: 10.000 €
 - Saldo medio de proveedores: 1.000 €
- Periodo medio de aprovisionamiento: $10.000 / 2.000 = 5$

$$\text{Rotación} = 360 / 5 = 72 \text{ días}$$

- Periodo medio de fabricación $16.000 / 3.000 = 5,33$

$$\text{Rotación} = 360 / 5,33 = 67,54 \text{ días}$$

- Periodo medio de ventas: $17.000 / 6.000 = 2,93$

$$\text{Rotación} = 360 / 2,93 = 122,87 \text{ días}$$

- Periodo medio de clientes: $24.000 / 4.000 = 6$

$$\text{Rotación} = 360 / 6 = 60 \text{ días}$$

$$\text{PMM económico} = 72 + 67,54 + 122,87 + 60 = 322,4 \text{ días.}$$

- Periodo medio de proveedores: $10.000 / 1.000 = 10$

$$\text{Rotación} = 360 / 10 = 36 \text{ días}$$

$$\text{PMM financiero} = 72 + 67,54 + 122,87 + 60 - 36 = 286,4 \text{ días.}$$

Actividad nº 6:

El gerente de Manufacturas de la Bahía, S.A. desea mejorar la productividad de su empresa, por lo que antes de iniciar el programa de mejora quiere conocer el "periodo medio de maduración" de la empresa. Los datos facilitados son:

- Existencias medias de materias primas: 63.000 €
- Compras de materiales: 977.000 €
- Coste total de la producción: 2.104.000 €
- Existencias medias de productos en curso: 48.000 €
- Coste de las ventas: 2.012.000 €
- Existencias medias de productos terminados: 115.000 €
- Ventas totales: 2.415.000 €
- Saldo medio de clientes: 138.000 €

Calcula la información que necesita el gerente relativa al período medio de maduración.

Solución

- Periodo medio de aprovisionamiento: $977.000 / 63.000 = 15,51$

$$\text{Rotación} = 360 / 15,51 = 23,21 \text{ días}$$

- Periodo medio de fabricación $2.104.000 / 48.000 = 43,83$

$$\text{Rotación} = 360 / 43,83 = 8,22 \text{ días}$$

- Periodo medio de ventas: $2.012.000 / 115.000 = 17,5$

$$\text{Rotación} = 360 / 17,5 = 20,57 \text{ días}$$

- Periodo medio de clientes: $2.415.000 / 138.000 = 17,5$

$$\text{Rotación} = 360 / 17,5 = 20,57 \text{ días}$$

$$\text{PMM} = 23,21 + 8,22 + 20,57 + 20,57 = 72,57 \text{ días.}$$

7.- Actividades: Ejercicios propuestos

- 1.- La empresa MADURA SA compró y consumió el pasado año, para la fabricación de su producto, 20.000 € de materias primas y, por término medio, mantuvo un nivel de existencias de las mismas en almacén de 2.000 € ¿Cuánto vale su período medio de almacenamiento?

- 2.- La empresa LACA SA compró y consumió el pasado año, para la fabricación de su producto, 10.000.000 € de materias primas y, por término medio, mantuvo un nivel de existencias de las mismas en almacén de 1.000.000 € (ambas cantidades valoradas a precio de adquisición). El volumen de ventas fue de 30.000.000 € y, por término medio, los clientes tuvieron una deuda con la empresa de 1.500.000 €. Otros datos relativos a esta empresa, valorados a precio de coste, son:
 - Valor de la producción anual: 20.000.000 €
 - Valor de los productos en curso de elaboración, por término medio: 1.000.000 €
 - Ventas anuales: 24.000.000 €
 - Nivel medio de existencias en el almacén de productos terminados: 2.000.000 €

- Se pide: período medio de maduración de esta empresa y sus componentes.

- 3.- La empresa LACA SA del problema anterior paga al contado todos sus gastos salvo las materias primas, por las que mantiene un saldo medio de deuda con sus proveedores de 2.000.000 €. Además, mantiene un nivel medio de tesorería de 2.000.000 €. Se desea conocer el período medio de maduración financiero de esta empresa y su fondo de maniobra medio.

- 4.- La empresa NEMO SL, cuyo período de maduración económico es de 103 días, paga al contado todos sus gastos salvo las materias primas, de las que adquiere y consume 20.000.000€ al año. Se desea conocer su período medio de maduración financiero, sabiendo que mantiene una deuda media con sus proveedores de 4.000.000€.

- 5.- La empresa SOLETE SA, dedicada a la fabricación de helados, proporciona los siguientes datos relativos a su actividad económica:
 - Existencias de materia prima a 1 de Enero: 2.000 €
 - Compras de materia prima durante ese año: 21.000 €
 - Nivel medio de existencias en el almacén de materia prima: 2.000 €
 - Nivel medio de existencias de productos terminados: 2.000 €
 - Nivel medio de existencias de productos en curso de fabricación: 1.500 €
 - Volumen anual de ventas: 60.000 €
 - Coste total de la producción anual: 40.000 €
 - Deuda media con clientes: 3.000 €
 - Volumen anual de ventas (a precio de coste): 45.000 €
 - Existencias de materia prima a 31 de Diciembre: 3.000 €

Se pide calcular el período medio de maduración

CAPÍTULO 11º:

LAS TASAS EFECTIVAS DE UNA OPERACIÓN FINANCIERA.

Dr D. Enrique R. Blanco Richart

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Definir el concepto de concepto de tasa efectiva.
- Diferenciar entre la tasa oficial y las reales.
- Identificar el efecto que los impuestos ejercen sobre el rendimiento o coste financiero de una operación.
- Diferenciar entre tasa efectiva y tasa financiero fiscal.
- Explicar como el fraccionamiento de los flujos afecta al cálculo de la tasa.
- Saber plantear la tasa efectiva de una operación cualquiera

LAS TASAS EFECTIVAS

1.- Introducción.

El tema que proponemos tiene como finalidad el que podamos contestar preguntas como:

- * ¿Podemos conocer cuánto nos cuesta realmente una operación de financiación o cuál es el rendimiento real de una inversión?
- * ¿Siempre se pueden comparar las ofertas de préstamos de dos bancos diferentes?
- * ¿La TAE siempre tiene el mismo significado en cualquier operación?
- * ¿Tiene la TAE en cuenta los impuestos en su cálculo?
- * ¿La forma de pagar, mensual, semestral, etc, afecta al valor de la TAE?
- * ¿Puedo calcular de forma sencilla lo que voy a pagar en un préstamo?
- * La TAE ¿Coincide con la tasa efectiva de la operación?
- * Etc.

Para ello vamos a efectuar un recordatorio de los conceptos que se supone hemos aprendido a lo largo del temario de manera que podamos interpretar los resultados de anuncios extraídos de la prensa diaria que hemos escogido en función de su variedad.

2.- Recordatorio de conceptos financieros.

En toda operación financiera, ya sea la solicitud de un préstamo de tipo personal o hipotecario o la financiación de la compra de un coche, etc. o ya sea una inversión que se vaya a realizar, como una cuenta especial, un plan de ahorro, etc., intervienen dos personas: Quién presta el dinero (Prestamista) y quién lo recibe (Prestatario), así en un préstamo el prestamista es el banco y el prestatario es el consumidor y en una inversión el prestamista es el consumidor y el prestatario el banco.

En las operaciones financieras el tipo de interés refleja lo que se va a cobrar o pagar por **el alquiler** del dinero. Este interés, expresado en tanto por ciento, lo que nos dice es la cuantía que por cada cien euros de préstamo se van a pagar de intereses en cada periodo y en el caso de una inversión será lo que vamos a cobrar por cada cien euros invertidas en cada periodo.

Al tipo de interés que se va a aplicar para dicho cálculo se le denomina **tanto nominal** de la operación. Dicho tanto es la unidad de medida del interés y se utiliza como término de referencia al igual que en las medidas de superficie es el metro cuadrado, en las de velocidad el kilómetro, o en las de capacidad el litro. Este tanto viene expresado en *unidad anual*, pero generalmente las devoluciones de un préstamo o en muchas de nuestras inversiones, el cálculo de los intereses se realiza en periodos inferiores al año, por lo que es necesario calcular el tipo de interés que se corresponde con el periodo de pago o cobro. Veamos un ejemplo con un préstamo:

- Si el banco dice que nos va a cobrar un interés del 6 % anual y vamos a realizar pagos mensuales, el interés mensual, denominado i_m , que nos van a cobrar será:
 $i_{12} = 6 \% : 12 = 0,5 \% \text{ mensual.}$
- Si en vez de mensuales se realizasen pagos trimestrales, el interés trimestral sería:
 $i_4 = 6 \% : 4 = 1,5 \% \text{ trimestral.}$
- Si fuesen semestrales los pagos el interés semestral a pagar sería:
 $i_2 = 6 \% : 2 = 3 \% \text{ semestral.}$

Es decir el **tanto fraccionado** se obtiene dividiendo el **tanto nominal** pactado entre el **número de pagos** a realizar cada año

Conocido el tipo de interés que nos van a cobrar ya podemos calcular los intereses que hemos de pagar en cada periodo. Como el tipo de interés expresado en tanto por cien, lo que nos dice es la cuantía que por cada cien euros se va a cobrar o pagar en cada periodo, bastará con multiplicar los euros prestados o invertidos por el interés en tanto por uno, por lo tanto:

$$I = \text{Capital} \cdot i/100$$

Si la devolución no fuese de una sola vez, la fórmula anterior se multiplicaría por el número de veces que hay que pagar los intereses:

$$I = \text{Capital} \cdot i/100 \cdot n$$

Vamos a calcularlo para una financiación de 1.000 €

- En el caso anual pagaremos: $I = 1.000 \cdot 6/100 = 60$ € en un año.
- En el caso trimestral: $I = 1.000 \cdot 1,5/100 = 15$ € cada trimestre, y en total:
 $I = 1.000 \cdot 1,5/100 \cdot 4 = 60$ €
- En el caso mensual: $I = 1.000 \cdot 0,5/100 = 5$ € cada mes.
 $I = 1.000 \cdot 0,5/100 \cdot 12 = 60$ €
- En el caso semestral: $I = 1.000 \cdot 3/100 = 30$ € cada semestre.
 $I = 1.000 \cdot 3/100 \cdot 2 = 60$ €

3.- Primera aproximación al coste o rentabilidad de una operación.

Pero de entrada este tipo de interés nominal que nos van a aplicar para el cálculo de los intereses no va a reflejar el coste o la rentabilidad de la operación. Para afirmar lo anterior nos basamos en que para un consumidor no supone lo mismo abonar los pagos de forma anual, mensual o trimestral, ya que el esfuerzo a realizar no es el mismo. Siguiendo el ejemplo propuesto, anualmente pagaríamos 60 euros, semestralmente 30 €, trimestralmente pagaríamos 15 euros y mensualmente 5 euros, al final siempre pagaremos un total de sesenta euros pero de forma diferente.

- En el primer caso, al esperar un año para pagar las sesenta euros, podemos iniciar un plan de ahorro de tal forma que al finalizar el año tengamos ahorrado dicho importe, pero como el ahorro nos va a generar intereses supondrá que la cantidad que debemos desembolsar realmente será menor a los sesenta euros que se necesitan ya que el resto se obtendrá de los intereses que la operación de ahorro nos generaría. Otra forma de enfocar el problema es que en este caso disponemos de los sesenta euros durante todo un año para utilizarlas como queramos.
- En el segundo caso necesitamos ahorrar 15 euros al final del primer trimestre, lo que supondría desembolsar una cantidad menor ya que el resto serán los intereses obtenidos, pero al tener que desembolsarlas al finalizar el trimestre dejaremos de percibir los intereses que nos reportaría tener dicho dinero en el banco hasta finalizar el año como en el caso anterior, es decir estamos pasando al prestamista el disfrute de dicho dinero y los intereses que le reportará el tenerlo invertido, lo que nos supone un coste.
- Para el caso mensual el razonamiento es el mismo, pero aquí se evidencia que el desembolso del dinero se hace más pronto, lo que nos supondrá un coste mayor que en los casos anteriores ya que el prestamista tiene a su disfrute y disposición cantidades de dinero más pronto, disfrute que dejamos de percibir nosotros.
- El razonamiento para el caso de una inversión sería el mismo pero desde la perspectiva contraria ya que no es lo mismo esperar todo un año a recibir los 60 € que ir recibiendo los 15 € cada trimestre o los 5 € cada mes ya que podemos reinvertirlos y obtener así un mayor rendimiento

En consecuencia como la forma de pago nos va a suponer un coste podemos afirmar que:

El **número de pagos** que se vaya a realizar cada año para la devolución de un préstamo afecta al **coste** de dicha operación.

A **mayor fraccionamiento** en los pagos **mayor coste real** nos supondrá la operación

Del mismo modo podemos razonar en una inversión:

El **número de cobros** que se vaya a recibir cada año para la inversión afecta al **coste** de dicha operación.

A **mayor fraccionamiento** en los cobros **mayor rentabilidad real** nos supondrá la operación

4.- ¿Cómo podemos calcular, en principio, dicho coste o rentabilidad?.

Aplicando la fórmula conocida podemos calcular como afecta a la operación el fraccionamiento de los pagos, la ecuación sería:

$$(1 + i) = (1 + i_m)^m$$

donde:

- ✖ i_m es el tanto fraccionado, respecto al tanto nominal anual pactado en la operación.
- ✖ i es el tanto de interés efectivo anual teniendo en cuenta el número de pagos.
- ✖ m es el número de pagos a efectuar cada año.

Ahora vamos a continuar con el ejemplo propuesto para comprobar lo explicado antes. El tanto nominal o tanto de interés pactado era del 6 % anual, en tanto por uno, $6 \% : 100 = 0,06$:

- Si los pagos son anuales al ser $m = 1$, el valor de i_m es igual a i

$$\begin{aligned}
 (1 + i) &= (1 + 0,06)^1 \\
 i &= (1 + 0,06)^1 - 1 = 1,06 - 1 = 0,06 \\
 &\text{multiplicando por 100, el interés anual es del } \mathbf{6 \% \text{ anual}}
 \end{aligned}$$

- Si los pagos son semestrales. El interés semestral sería $i_m = 6 \% : 2 = 3 \%$, expresándolo en tanto por uno y sustituyendo en la fórmula propuesta al igual que antes:

$$\begin{aligned}
 (1 + i) &= (1 + 0,03)^2 \\
 i &= (1 + 0,03)^2 - 1 = 1,0609 - 1 = 0,0609 \\
 &\text{multiplicando por 100, el interés anual es del } \mathbf{6,09 \% \text{ anual}}
 \end{aligned}$$

- Si los pagos son trimestrales. El interés trimestral sería $i_m = 6 \% : 4 = 1,5 \%$, expresándolo en tanto por uno y sustituyendo en la fórmula propuesta al igual que antes:

$$\begin{aligned}
 (1 + i) &= (1 + 0,015)^4 \\
 i &= (1 + 0,015)^4 - 1 = 1,06136355 - 1 = 0,06136355 \\
 &\text{multiplicando por 100, el interés anual es del } \mathbf{6,13 \% \text{ anual}}
 \end{aligned}$$

- Si los pagos son mensuales. El interés mensual sería $i_m = 6\% : 12 = 0,5\%$, sustituyendo:

$$(1 + i) = (1 + 0,005)^{12}$$

$$i = (1 + 0,005)^{12} - 1 = 1,0616778 - 1 = 0,0616778$$

multiplicando por 100, el interés anual es del **6,16 % anual**

Como podemos comprobar el coste efectivo aumenta conforme el número de pagos por año se incrementa, tal como habíamos afirmado. Lo que equivaldría a decir que si pagamos de forma anual el coste real es del 6 %, pero si pagamos de forma fraccionada el coste se incrementa al adelantar al prestamista cantidades de dinero pasando a ser del 6,09 %, 6,13 % o 6,16 %.

En el primer caso el exceso del 6 %, es decir el 0,09 % supone lo que dejamos de percibir al tener que efectuar un primer pago a los seis meses en vez de invertir dicho dinero durante el resto del año, en el segundo caso supondría un 0,13 %, con lo que se comprueba financieramente la afirmación de que a mayor fraccionamiento mayor coste para el prestatario.

Este hecho supone lo que en el lenguaje financiero se denomina **productividad** de los intereses, y podemos comprobarlo con el ejemplo propuesto:

- Los 1.000 € al 6 % y a un año, suponen: $I = 1.000 \cdot 0,06 = 60$ € que se cobran o pagan de una sola vez.
- Si fuesen semestrales tendríamos que cobrar o pagar cada semestre un 6 % : 2 = 3 %, que en euros serían: $I = 1.000 \cdot 0,03 = 30$ €, pero si los primeros 30 euros se invirtiesen al mismo tipo de interés durante el segundo semestre hasta el fin de la operación rentarían: $I = 30 \cdot 0,03 = 0,9$ €. Por lo que el total que hubiésemos ganado sería de: $30 + 0,9 + 30 = 60,9$ € en lugar de las 60 € si se hubiesen cobrado de una sola vez.

Para que hubiese sido indiferente cobrar al año o al semestre, el tipo de interés efectivo anual que deberían habernos pagado sería del 6,09 % como ya habíamos calculado antes y que en euros serían: $I = 1.000 \cdot 0,0609 = 60,9$ €. El mismo razonamiento sirve para un préstamo, a nosotros por adelantar el pago un semestre nos supone un coste, es decir el dinero que dejamos de ganar por no poder invertir los 30 € pagados, ese dinero son 0,9 € que pasa a disfrutar el prestamista y no nosotros.

5.- El coste efectivo de una operación de financiación.

Pero este tipo de interés calculado aún sigue sin representar el coste real de una operación de financiación debido a que generalmente toda operación financiera que se realice llevará aparejada el desembolso de ciertas cantidades en concepto de comisiones, gastos de estudio y apertura, etc. Lo que supondrá que realmente vamos a pagar más cantidad por solicitar la financiación. Si hablamos de inversión lo que nos supone la existencia de gastos, impuestos, etc. es al contrario, es decir una disminución de nuestra rentabilidad.

Veamos la repercusión de los gastos en un ejemplo sencillo:

Supongamos un préstamo de 100.000 € a devolver dentro de un año junto con sus intereses calculados al 5 % anual. Los gastos de la operación han supuesto el desembolso de 500 € en concepto de comisiones.

- El interés a pagar por el préstamo es del 5 % cada año, como la operación sólo dura un año, el importe a pagar por los intereses será de:

$$100.000 \cdot 0,05 \cdot 1 = 5.000 \text{ €}$$

Es decir por tener alquilado el dinero durante un año hay que desembolsar 5.000 € en concepto de intereses, pero el coste real no es ese 5 % ya que por el alquiler del dinero realmente hemos desembolsado un total de: $5.000 + 500 = 5.500$ € lo que supondría en principio afirmar que el coste real ha sido del 5,5 %.

Por lo tanto de momento sabemos que el coste real de una operación de financiación está sujeto a una doble influencia:

- * Por una parte al **fraccionamiento** de los pagos.
- * Y por otra parte a la aparición de **los gastos**.

Del mismo modo podríamos razonar para una inversión.

6.- El concepto de la Tasa Anual Equivalente (TAE).

Como ya hemos dicho en toda operación financiera hay que distinguir entre las dos partes que intervienen: Al prestamista (El banco) y al prestatario (El consumidor) o viceversa si es una inversión, ya que la influencia del coste de la operación es diferente para cada uno:

- Para el banco existe una normativa legal (Circulares del Banco de España) que le obliga a publicar el tanto efectivo de la operación desde su punto de vista, es lo que conocemos por T.A.E., y en su cálculo no se incluyen todos los gastos en los que incurre el consumidor al solicitar una financiación, sino solamente aquellos que se especifican en dichas Circulares, y que afectan directamente al banco que los cobra en beneficio propio, ya que hay gastos que el banco cobra pero no son ingreso suyo sino que ha de rembolsar (Por ejemplo impuestos que ha de ingresar a la Hacienda Pública).
- Mientras que para el consumidor el coste de la operación puede ser distinto y lo será en cuanto tenga que hacer frente a gastos no relacionados directamente con el banco, como por ejemplo los gastos de tasación de una vivienda, Timbres, etc.

Por lo tanto podemos resumir en un cuadro (caso de financiación) la aparición de los distintos tantos en función del análisis que vayamos a efectuar de la operación y desde que punto de vista se realice:

Tanto pactado con la entidad financiera.	Tanto nominal
Tanto a calcular según los pagos a realizar en cada año.	Tanto fraccionado
Tanto anual equivalente, obtenido sólo en función de los pagos a realizar sin gastos.	Tanto efectivo anual
Tanto anual equivalente para el banco obtenido en función de los pagos e incluyendo los gastos que legalmente corresponden.	Tasa anual equivalente (T.A.E.)
Tanto anual equivalente para el consumidor obtenido en función de los pagos e incluyendo todos los gastos que realmente desembolsa.	Coste efectivo del consumidor

Del mismo modo resultaría si el análisis se efectuase en una operación de inversión.

A modo de resumen para el cálculo de la tasa efectiva de una operación o de su T.A.E. hay que comprobar primero si la operación tiene o no gastos.

<p>Sin gastos</p> <p><i>Operación pura</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> – La tasa efectiva (i) coincide con la T.A.E. – Por lo tanto su valor se obtendrá directamente de la expresión general de los tantos. $(1 + i) = (1 + i_m)^m \text{ al ser } i = \text{T.A.E.}$ <ul style="list-style-type: none"> – Por lo tanto la tasa efectiva (T.A.E.) será mayor que el nominal (J_m) de la operación. – En este tipo de operaciones ni el nominal de ésta, ni el tiempo influyen en la tasa efectiva o T.A.E.
<p>Con gastos</p> <p><i>Operación comercial</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> – La tasa efectiva no coincidirá con la T.A.E. – Por lo tanto su valor se obtendrá planteando la ecuación financiera al igualar la prestación con la contraprestación, y no a través de la ecuación de equivalencia de los tantos. – La tasa efectiva (T.A.E.) será mayor que el nominal de la operación. – En este tipo de operaciones, en las mismas condiciones, influye el nominal y el tiempo modificando el valor de la T.A.E.

7.- Cálculo de distintas operaciones financieras y su tasa efectiva.

Para obtener una respuesta financieramente correcta al problema de cálculo de la T.A.E. vamos a recordar la realización cierto tipo de cálculos financieros.

1.- Cómo calcular la cantidad final que hay que pagar por un solo capital inicial, después de transcurrido un cierto tiempo y con un determinado interés.

El cálculo se efectuaba a través del concepto del *montante*, es decir calcular la cantidad total más los intereses que producirá hasta el final de la operación.

$$C_n = C_0 (1 + i)^n$$

- Si aplicamos la fórmula al ejemplo propuesto, para el cálculo del montante de 100.000 € a un año tendríamos que el capital a pagar sería:

$$C_n = 100.000 \cdot (1 + 0,05)^1 = 100.000 \cdot 1,05 = 105.000 \text{ €}$$

Y el total de intereses a pagar sería de: $I = 105.000 - 100.000 = 5.000 \text{ €}$

- Si la operación fuese a dos años la cantidad a devolver sería:

$$C_n = 100.000 \cdot (1 + 0,05)^2 = 110.250 \text{ €}$$

Y el total de intereses a pagar sería de: $I = 110.250 - 100.000 = 10.250 \text{ €}$

• ¿Podríamos calcular el coste efectivo de la operación antes propuesta?

Como la operación tiene gastos (500 €) no podemos calcular el coste a través de la equivalencia de los tantos, y se ha de hacer a través de la necesaria ecuación financiera que iguale, lo que hemos recibido con lo que hemos entregado.

Recibido	Entregado
100.000 € (0)	500 € (0)
	105.000 € (1)

Como 100.000 € y 500 € están en el mismo momento del tiempo es como si hubiésemos recibido netos, $100.000 - 500 = 99.500$ € en (0), por lo que el tanto efectivo aplicando la expresión del montante valorado en (1) será:

$$\begin{aligned}
 105.000 &= 99.500 \cdot (1 + i)^1 && \text{operando:} \\
 105.000 : 99.500 &= (1 + i) \\
 1,055276 &= 1 + i \\
 \text{de donde } i &= 1,055276 - 1 = 0,055276
 \end{aligned}$$

El tanto efectivo o T.A.E. de la operación expresado en tanto por cien será el **5,5276 %**, es decir por cada 100 € recibidos hemos pagado realmente al finalizar el año 5,52 € y no 5 €. A este valor se le denomina T.A.E. (Tasa anual equivalente) y en este caso es la misma para el banco y para el consumidor ya que es el único gasto que ha ocasionado la operación, que paga el consumidor y cobra el banco.

• La influencia del tiempo en el coste de una operación con gastos.

Vamos a resolver las mismas cuestiones que en el problema anterior pero en el caso en que de la operación a dos años.

Recibido	Entregado
100.000 € (0)	500 € (0)
	110.250 € (2)

Procediendo del mismo modo el tanto efectivo aplicando la expresión del montante será:

$$\begin{aligned}
 110.250 &= 99.500 \cdot (1 + i)^2 && \text{operando:} \\
 1,052634884 &= (1 + i) \\
 \text{de donde } i &= 1,052634884 - 1 = 0,05263
 \end{aligned}$$

El tanto efectivo de la operación expresado en tanto por cien será el **5,263 %**, es decir menor que en la misma operación a un año. La razón radica en que para el consumidor no es lo mismo un gasto de 500 € a asumir en un solo año que esos mismos 500 € a repartir en dos años lo que supondrá un esfuerzo menor, de ahí que el coste efectivo disminuya. Por lo tanto podemos resumir:

En toda operación de préstamo que lleve **gastos**, a mayor plazo de devolución el coste efectivo (TAE) de dicha operación **disminuye**.
Es decir en operaciones de financiación que tengan las mismas condiciones de interés y gastos, a **mayor** tiempo **menor** coste.

Por lo tanto repasando sabemos ya que:

- A mayor número de pagos a realizar cada año, mayor coste efectivo tiene la operación
- Una operación con gastos tiene un coste efectivo mayor que la misma operación sin gastos
- En una operación con gastos el coste efectivo disminuye si aumenta el plazo de devolución

2.- Cómo calcular la cantidad final que hay que pagar por dos o más capitales, distintos transcurrido un cierto tiempo y con un determinado interés.

Cuando una operación financiera se compone de dos o más capitales en tiempos distintos que hay que devolver a la misma fecha, producirán intereses distintos ya que el tiempo que se adeuda cada uno de ellos es diferente, un ejemplo serían los capitales dispuestos a través de una tarjeta de crédito.

Supongamos que nos prestan hoy 1.000 € a devolver dentro de 14 meses, y cinco meses después nos prestan otros 800 € a devolver a la misma fecha y a un interés del 6 % anual. Gastos al vencimiento de 25 €.

Como podemos comprobar el primer capital vence 14 meses después de prestado y el segundo vence: $14 - 5 = 9$ meses después de prestado, por lo tanto utilizando la fórmula del montante y pasando el interés a mensual, hemos de pagar:

- Interés mensual: $6\% : 12 = 0,5\%$ mensual, en tanto por uno $0,5\% : 100 = 0,005$.
- Cantidad a pagar: $C_n = 1.000 (1 + 0,005)^{14} + 800 (1 + 0,005)^9$
Operando: $C_n = 1.072,32 + 836,73 = 1.909,05$ €

- ¿Cómo calcularíamos el coste efectivo de la operación?

El cálculo de la tasa efectiva ha de tener en cuenta los gastos y los capitales, por lo tanto:

Recibido	Entregado
1.000 € (0)	25 € (14)
800 € (5)	1.909,05 € (14)

Procediendo del mismo modo el tanto efectivo aplicando la expresión del montante será:

$$1.000 (1 + i)^{14/12} + 800 (1 + i)^{9/12} = 25 + 1.909,05$$

Al tener la incógnita en dos factores, no se puede despejar, tenemos que utilizar la hoja de cálculo para resolverlo de forma rápida, colocaremos en columna los datos, en positivo las cantidades recibidas y en negativo las entregadas, en la primera casilla iría 1.000 €, en las tres siguientes 0, la no devengarse ningún capital, en la 5ª los 800 €, desde ésta a la decimotercera irían 0, al no existir capitales y en la última en negativo la suma de $25 + 1.909,05$, nos colocamos en la casilla siguiente pinchamos en la tecla de función seleccionamos funciones financieras y en ellas TIR, aparece una pantalla que nos pide valores, seleccionamos la columna y los copia directamente, y nos aparece la solución, que en este caso es de 0,00641395 mensual, utilizando la equivalencia de tantos

$$(1 + i) = (1 + 0,00641395)^{12} \text{ operando, } i = 7,9741\% \text{ anual.}$$

El tanto efectivo del **7,9741 %**.

3.- Cómo calcular la cantidad constante y periódica a pagar para cancelar un préstamo con un determinado tipo de interés.

En este caso estamos utilizaremos las expresiones de la renta en su **valor actual** que nos permite sumar muchos capitales iguales a la fecha de hoy es:

$$C_0 = C \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

Si continuando con el ejemplo anterior decidimos devolver los 100.000 € en cuatro pagos trimestrales, su valor se calcularía del siguiente modo:

- Primero al vencer los capitales trimestralmente, necesitamos el tanto de interés en la misma unidad, al ser éste anual hay que dividirlo en cuatro partes:

$$i_m = 5\% : 4 = 1,25 \% \text{ trimestral}$$

- El número de pagos será cuatro.
- El valor de cada pago, se obtendrá sustituyendo en la expresión anterior:

$$100.000 = C \cdot \frac{1 - (1 + 0,0125)^{-4}}{0,0125} \quad \text{operando}$$

$$C = 25.786,10 \text{ €}$$

- La cantidad total pagada sería de: $25.786,10 \cdot 4 = 103.144,4 \text{ €}$ con lo que los intereses pagados ascienden a un total de $3.144,4 \text{ €}$. Esta cantidad ($103.144,4$) es menor que la cantidad obtenida cuando el pago se realiza de una sola vez en un año (105.000), ya que al ir anticipando dinero (devolviendo parte de la deuda) los intereses van disminuyendo al calcularse sobre una deuda cada vez menor.

- ¿Cómo calcularíamos en este caso el coste efectivo o T.A.E. de la operación?

Procediendo del mismo modo: Nos han prestado 100.000 € en (0) y como en ese momento hemos abonado 500 € en concepto de gasto, realmente hemos recibido 99.500 €. Hemos entregado cuatro capitales iguales de 25.786 € al final de cada trimestre:

Recibido	Entregado
100.000 € (0)	500 € (0)
	25.786,10 € (1)
	25.786,10 € (2)
	25.786,10 € (3)
	25.786,10 € (4)

para su obtención recurriríamos a la hoja de cálculo como en el caso anterior y ahora más sencillo al no existir capitales 0. introducidos los datos, el tanto trimestral sería del 0,0145458, su anual equivalente:

$$(1 + i) = (1 + 0,0145458)^4$$

$$i = 0,059465, \text{ es decir el } \mathbf{5,9465 \% \text{ anual}}$$

8.- Ejercicios resueltos.

Actividad nº 1:

Un préstamo de 50.000 € se va a amortizar en seis años, valorado a un tanto nominal del 6 % en los dos primeros años, con carencia total y al 7 % nominal en los cuatro restantes donde se pagarán términos trimestrales constantes. Los gastos de apertura de la operación ascienden a 150 €. y las comisiones de estudio al 0,5 % del nominal. Se pide calcular la tasa efectiva.

Solución:

- Los tantos de la operación serán: $6\% : 4 = 1,5\%$ trimestral en los dos primeros años y del $7\% : 4 = 1,75\%$ trimestral en los siguientes. Al existir carencia total en los dos primeros años el valor de la deuda se incrementa, por lo tanto el capital a amortizar será:

$$50.000 (1 + 0,015)^8 = 56.324,63 \text{ €, el valor de la trimestralidad será:}$$

$$56.324,63 = C \cdot a_{16|0,0175}, \text{ operando, } C = 4.066,61 \text{ €}$$

- El planteamiento de la tasa efectiva, sería:

Prestación	Contraprestación
50.000 € (0)	150 € (0)
	$50.000 \cdot 0,005 = 250 \text{ €}$ (0)
	4.066,61 € (9 – 16)

$$50.000 = 400 + 4.066,61 a_{16|ie} (1 + i_e)^{-8}$$

Operando, $i_e = 1,676586\%$ trimestral y el anual equivalente sería del $6,877\%$

Actividad nº 2:

Un préstamo de 32.000 € se va a amortizar en nueve años y a un interés del 7 % de interés anual, con gastos de apertura de 60 €, y comisión de cancelación de 100 €. Se pide calcular la tasa efectiva en cada caso:

- Durante los tres primeros años no va a pagar nada y en los restantes años pagos anuales constantes.
- Durante los cuatro primeros va a pagar sólo los intereses y en el resto del tiempo anualidades constantes.
- Durante los dos primeros no va a abonar nada, en los tres siguientes sólo intereses y en el resto anualidades constantes.

Solución:

- Al tener carencia total en los tres primeros años el capital adeudado aumenta de valor:

$$C_3 = 32.000 \cdot (1 + 0,07)^3 = 39.201,38 \text{ € y el valor de los pagos será:}$$

$$39.201,38 = C \cdot a_{6|0,07} \text{ y operando, } C = 8.224,28 \text{ €}$$

Su tasa efectiva sería:

Prestación	Contraprestación
32.000 € (0)	60 € (0)
	8.224,28 € (4 - 9)
	100 € (9)

$$32.000 = 60 + 8.224,28 \cdot a_{\overline{6}|i_e} (1 + i_e)^{-3} + 100 (1 + i_e)^{-9}$$

Operando saldría $i_e = 7,11\%$

- b.- Al existir carencia de principal se pagan durante los cuatro primeros años sólo los intereses que ascienden a: $32.000 \cdot 0,07 = 2.240$ €. Como el capital vivo no aumenta, el término se calculará para la cuantía de 32.000 € a cinco pagos:

$$32.000 = a \cdot a_{\overline{5}|0,07}, \text{ operando, } a = 7.804,50 \text{ € y su tasa efectiva sería:}$$

Prestación	Contraprestación
32.000 € (0)	60 € (0)
	2.240 € (1 - 4)
	7.804,50 € (5 - 9)
	100 € (9)

$$32.000 = 60 + 2.240 \cdot a_{\overline{4}|i_e} + 7.804,50 \cdot a_{\overline{5}|i_e} (1 + i_e)^{-4} + 100 (1 + i_e)^{-9}$$

Operando saldría $i_e = 7,06 \%$

- c.- Al tener carencia total el capital adeudado: $C_2 = 32.000 \cdot (1 + 0,07)^2 = 36.636,80$ €. Al existir carencia de principal en los tres siguientes, se pagan sólo los intereses que ascienden a: $36.636,80 \cdot 0,07 = 2.564,58$ €. Como el capital vivo ya no aumenta, el término se calculará para el valor del capital acumulado a cuatro pagos:

$$36.636,80 = a \cdot a_{\overline{4}|0,07}, \text{ operando, } a = 10.816,21 \text{ € y su tasa efectiva sería:}$$

Prestación	Contraprestación
32.000 € (0)	60 € (0)
	2.564,58 € (3 - 5)
	10.816,21 € (6 - 9)
	100 € (9)

$$32.000 = 60 + 2.564,58 \cdot a_{\overline{3}|i_e} (1 + i_e)^{-2} + 10.816,21 \cdot a_{\overline{4}|i_e} (1 + i_e)^{-5} + 100 (1 + i_e)^{-9}$$

Operando saldría $i_e = 7,05 \%$

Actividad nº 3:

Un inversor adquiere un pagaré de 500.000 € nominales emitido al descuento del 10 % anual, abonando 450.000 €, a los 6 meses lo vende recibiendo 473.684 €. Se pide la rentabilidad obtenida si la comisión de custodia es del 1 % y la retención fiscal al 25 % sobre el beneficio.

Solución:

- Por impuestos pagará el 25 % de los intereses: $(473.684 - 450.000) \cdot 25 \% = 5.921 \text{ €}$
- Los gastos de custodia pagaderos al finalizar la inversión: $500.000 \cdot 1 \text{ ‰} = 500 \text{ €}$
- El planteamiento de la tasa efectiva, a los seis meses, será:

Prestación	Contraprestación
450.000 € (0)	473.684 € (6)
5.921 € (6)	
500 € (6)	

$$450.000 (1 + i \cdot 6/12) + 500 + 5.921 = 473.684$$

$$\text{Operando, } i = 7,67244 \%$$

Actividad nº 4:

Operación pura de contraprestación única y liquidación mensual de intereses.

Ahora, la **CUENTA NARANJA**

Te da el **3,25 %^(*) T.A.E.**,

Y, como siempre pudiendo disponer de tu dinero

Cuando quieras

CUENTA NARANJA

3,25 % T.A.E.

(*) T.A.E. calculada para cualquier importe superior a un euro.
Abono mensual de intereses. Interés nominal anual 3,20 %.

La cuenta NARANJA no admite domiciliación de recibos.
Llámanos y te contaremos las ventajas de la cuenta NARANJA.

Solución:

- Estamos ante una operación sin gastos, por lo tanto es una operación pura, con liquidación mensual de intereses. La T.A.E. será igual al tanto efectivo i , por lo que podemos obtenerla directamente con la ecuación de equivalencia de los tantos. Una vez calculado comprobaremos que el interés efectivo (compuesta) $>$ que el nominal (simple).
- De la operación: $3,20 \% : 12 = 0,26666 \% \text{ mensual}$.
- Interés efectivo anual: $(1 + i) = (1 + 0,0026666)^{12}$ operando $i = 0,03248$, es del **3,248 % ~ 3,25 %**

Actividad nº 5:

Operación pura con interés nominal a más de un año.



CAJA RURAL DE ALBACETE

“Depósito pago a vencimiento”

Plazo:	3 años
Fecha de inicio:	22 de diciembre de 1999
Fecha de finalización:	22 de diciembre del 2002
Capital garantizado al vencimiento:	100 %
Tipo de interés:	Un 13,00 % sobre el nominal, pagadero de una sola vez al vencimiento (TAE: 4,16 %)
Ventajas fiscales:	(18 % de retención sobre el 70 % de los rendimientos) (30 % de los rendimientos exentos de tributación)

Solución:

- Estamos ante una operación sin gastos, operación pura, con la particularidad de que el interés es pagadero de una sola vez al término de la operación y como ésta es a tres años, el interés ofrecido es trienal. Por lo tanto lo primero será calcular el interés nominal anual: $13 \% : 3 = 4,3333 \% \text{ anual}$.
- El siguiente paso es comprobar que el tipo de interés efectivo TAE, es menor que el interés de la operación, eso significa que al ser la operación pura no existen gastos que hagan disminuir la rentabilidad, sino que la entidad ha calculado los intereses en simple, y al ser la duración de tres años (> 1 año) el interés simple es menor que el compuesto por el problema de la acumulación de los intereses. Capital a percibir en el tercer año, suponiendo una imposición de 1.000 € sería:

$$I = 1.000 \cdot (1 + 0,0433333 \cdot 3) = 1.130 \text{ €}$$

La TAE, será el tipo de interés que iguale lo que se da, 1.000 € en (0), con lo que se recibe, 1.130 € en (3). Por lo tanto, como la TAE ha de ser calculada en compuesta:

$$1.000 (1 + i)^3 = 1.130 \quad \text{operando } i = 0,04158$$

multiplicando por 100, el interés anual es del **4,158 % ~ 4,16 %**, con lo que comprobamos que el dato suministrado es el correcto y que la razón por la que la TAE anunciada es menor que el nominal de la operación se debe a que los intereses, en una operación a más de un año, deberían haber sido calculados en compuesta en vez de en simple como se ha hecho en perjuicio del inversionista en este caso.

Actividad nº 6:

Operación pura con contraprestación múltiple.

BONO DE RESERVA PREFERENTE	
<p>Aproveche cuanto antes las condiciones especiales de adquisición que le ofrecemos como cliente del Banco Bilbao Vizcaya.</p> <p>Rellene este bono con sus datos personales, eligiendo la opción de pago que más le interese.</p>	
DATOS DEL CLIENTE:	
NOMBRE	
DIRECCIÓN	POBLACIÓN
D.N.I.	
FORMA DE PAGO:	
Con cargo a mi cuenta corriente Nº :	
<ul style="list-style-type: none"> • En un solo pago de 480 € 	
Con mi tarjeta VISA BBVA, Nº:	
<ul style="list-style-type: none"> • En un solo pago de 480 € • En seis mensualidades de 83,78 € cada una. • Interés nominal 16 %. 	
T.A.E. : 17,22 %	

Solución:

- Ahora estamos ante una operación de prestación única, 480 € y contraprestación múltiple, seis pagos.
La operación es pura por no tener gastos.
El valor del pago mensual se puede comprobar que es correcto, para un interés mensual del 16 % : $12 = 1,333333$ %, como el valor actual de una renta constante:

$$480 = C \cdot a_{\overline{6}|0,01333333} \quad \text{operando } C = 83,78 \text{ €}$$

- Al ser pura la operación, la TAE coincide con el tanto efectivo, por lo tanto a través de la ecuación de equivalencia de éstos podremos obtenerlo directamente:

$$(1 + i) = (1 + 0,01333333)^{12} \quad \text{despejando } i = 0,17227$$

multiplicando por 100, el interés anual es del **17,227 %** ~ **17,22 %**, con lo que comprobamos que el dato es el correcto.

Actividad nº 7:

Operación pura con contraprestación múltiple.

BBVA

Javier Bernal
Director Blue Joven

Estimado cliente:

¿Qué mejor regalo podrías pedir esta Navidad? Por ser Blue Joven te ofrecemos un crédito de 1.000 € para que compres lo que te apetezca.

Puedes conseguir 1.000 €

- **A devolver hasta en dos años.**
- **“mini cuotas” de 44,52 € al mes (TAE 8,23 %).**
- **6,45 % de interés nominal.**
- **Comisión apertura de 15 €**
- **TAE a un año: 9,68 %.**

Y si necesitas algo más de dinero sólo tienes que decirlo. Porque este año la Navidad es azul y tú eres Blue Joven.

Un saludo y hasta pronto.

Solución:

- Ahora estamos ante una operación de prestación única, 1.000 €, y contraprestación múltiple, veinticuatro pagos de 44,52 €. La operación es comercial por tener gastos de apertura de 15 €
El valor del pago mensual se puede comprobar que es correcto, para un interés mensual del 6,45 % : $12 = 0,5375 \%$, mediante la expresión del valor actual de una renta:

$$1.000 = C \cdot a_{\overline{24}|0,005375} \text{ operando } C = 44,52 \text{ €}$$

- Al ser comercial la operación, la TAE no coincide con el tanto efectivo, sino que será mayor, ya que los gastos actuarán como mayor interés a pagar. La TAE se obtendría con la ecuación de equivalencia de la prestación (1.000 – 15) y las 24 contraprestaciones de 44,52 €

$$985 = 44,52 \cdot a_{\overline{24}|i}$$

Operando con calculadora financiera, o utilizando hoja de cálculo, obtendríamos que el interés mensual sería del 0,6613 %, por lo que el anual sería: $(1 + 0,006613)^{12} - 1 = 0,0823$. Es decir el **8,23 %**,

¿Porqué la TAE a un año es mayor?. Aunque los intereses son los mismos, y los gastos también, la diferencia radica en la distribución de los gastos en el tiempo. Es decir no es lo mismo distribuir 15 € en 24 meses, que distribuir la misma cantidad en 12 meses, que daría un porcentaje por mes mayor, de ahí que como ya sea explico en la parte teórica, a menor tiempo, aumente la TAE.

Actividad nº 8:

Operación de descuento comercial.

Caja Murcia CENTRAL DE DESCUENTO										
ADEUDAMOS en su estimada cuenta el total de gastos correspondientes a la remesa, cuyo detalle se adjunta.										
OFICINA: 2043 Novelda			CUENTA Nº: 04000511223			FECHA LIQUIDACIÓN: 04/02/08				
Efecto	Librado	Plaza	Nominal	Vencimiento	Días	Intereses		Comisiones		Suplido
						%	Importe	%	Importe	
5643	Fulgasa	Peter	20.000	30/03/08	29	14 %	225,6	0,4	80	2,6
2620	Trona S.L.	Elche	30.000	16/04/08	46	15 %	575	0,4	120	2,6
3453	Polpasa	Alhama	4.000	25/05/08	85	16 %	151,1	0,9	80	3,5
Nominal remesa			Intereses		Comisiones		Otros gastos		Total gastos	
54.000			951,7		280		8,7		1.240,4	

Mínimos de comisión: Para el 0,4 % 40 € para el 0,9 % 80 €

T.A.E. calculada con los anteriores datos: **18,48 %**
Solución:

- Para el cálculo de la T.A.E. de una operación de descuento comercial hay que seguir las instrucciones de la Circular del Banco de España 8/1990 de 7 de septiembre, que en su norma octava, apartado 4.d dice:
- El coste efectivo se cumplimentará por cada factura liquidada como sigue:
 - Sólo se integrará en el coste el importe de las comisiones que, por cada efecto, exceda de los mínimos tarifados por cada entidad. Esta circunstancia debe quedar expresamente señalada en la liquidación.
 - Los efectos a menos de quince días no se entenderán descontados a estos fines considerándose todos sus costes como inherentes al servicio de cobranza. Serán liquidados separadamente.

Siguiendo las instrucciones:

Cantidad recibida	Cantidades entregadas
El nominal de los efectos en (0): 54.000 €	<ul style="list-style-type: none"> Intereses en (0) : 951,7 € Comisiones en (0): Sólo lo que exceda del mínimo: 280 - (40+40+80) = 120 €. Los tres efectos con vencimientos: <ul style="list-style-type: none"> 20.000 (29) 30.000 (46) y 4.000 (85)

$$54.000 = 951,7 + 120 + 20.000 (1 + i)^{-29/360} + 30.000 (1 + i)^{-46/360} + 4.000 (1 + i)^{-85/360}$$

i = 0,04712938 % diario, por lo tanto el anual equivalente sería:

$$(1 + i) = (1 + 0,0004712938)^{360} \quad \text{operando T.A.E. = 18,48 \%}$$

Actividad nº 9:

Operación con 14 pagos constantes al año y gastos.

BBVA		Jaime Ibarra Director
PARA USTED, ESTO ES UNA VARITA MÁGICA		

Apreciado cliente:

Dada la relación que usted mantiene con nuestra Entidad hemos reservado para usted un Crédito BBVA del que ya puede disponer con unas condiciones muy especiales:

- Desde 10.422 pts por cada 6.000 €, para créditos a 10 años en 14 cuotas anuales (TAE 8,81 %)*.
- Concesión inmediata, incluso por teléfono.
- Hasta 10 años de plazo para créditos a partir de 6.000 €

Si está interesado venga a su oficina del Banco con el título de reserva que acompaña a esta carta o llame a Línea BBVA 902 22 44 66.

Si desea otra cantidad diferente a la que ya tiene concedida, no dude en solicitarla. En espera de su pronta visita, reciba nuestro más cordial saludo.

*TAE calculada para créditos a 10 años. Incluye comisiones de apertura 1,70 % (mínimo 42 €) y 0,50 % de estudio (Mínimo 30 €). Tipo de interés nominal 7,955 %. A un año en 14 cuotas, TAE 13,20 %.

Solución.

- Para que existan las 14 cuotas anuales se ha de corresponder con una operación de contraprestación múltiple, pero formada por 12 pagos anuales y 2 semestrales (total 14 pagos anuales de igual cuantía).
- La operación es comercial por tener gastos de apertura de $6.000 \cdot 0,017 = 102$ € y de estudio de $6.000 \cdot 0,005 = 30$ €. El valor del pago mensual se puede comprobar que es correcto, para un interés mensual del 7,955 % : $12 = 0,66625$ %, y semestral del $(1 + 0,0066625)^6 - 1 = 0,0406467$, mediante la expresión del valor actual de una renta:

$$6.000 = C \cdot a_{120|0,0066625} + C \cdot a_{20|0,0406467}, \text{ operando } C = 62,83 \text{ € por cada 6.000 €}$$

Al ser comercial la operación, la TAE no coincide con el tanto efectivo, sino que será mayor, y la obtendremos planteando la ecuación financiera:

$$6.000 = 102 + 30 + 62,83 \cdot a_{120|i_{12}} + 62,83 \cdot a_{20|i_{12}}$$

operando $i = 8,81$ %.

Actividad nº 10:

Operación con gastos y regalo de cuotas.

LAS SORPRESAS EN LA VIDA PUEDEN LLEGAR EN CUALQUIER MOMENTO

RENAULT TE REGALA LAS 3 PRIMERAS CUOTAS

<ul style="list-style-type: none"> Puedes quedártelo. Es el coche de tus sueños. Estupendo. Pagas la última cuota o bien la refinancias en cómodos plazos. Devolverlo. Tu situación después de un tiempo ha cambiado. No te preocupes. Olvídate de pagar la última cuota, nosotros lo haremos. Cambiarlo por otro. ¿Necesitas, por ejemplo, más espacio? Tienes un valor garantizado por tu coche. 	Megane Rt. 1,4 16 V.
	PVP recomendado:
	12.620 €
	Entrada:
	2.045 €
	Importe aplazado:
	10.575 €
	33 cuotas de:
	228,36 €
	Última cuota de:
	3.923 €
Interés nominal del 6,92 %. TAE del 8,46 %, calculada para una operación de 37 pagos con gastos de apertura del 2 %. TAE con regalo 5,37 %.	

Solución:

- En este caso la noticia se centra en el regalo de las tres primeras cuotas con una T.A.E. del 5,37 % calculada en función de dicho regalo, mientras que en condiciones normales la T.A.E. sería para 37 cuotas del 8,46 %.
- Lo primero que se ha hecho es calcular el valor de cada cuota como si no hubiese regalo, es decir 36 pagos iguales y un último pago de 3.923 €, el interés mensual sería: 6,92 % : 12 = 0,576666 % y el valor de cada pago de:

$$10.575 = C \cdot a_{36|0,00576666} + 3.923 (1 + 0,00576666)^{-37}$$

Operando C = 228,36 € mensuales.

- El planteamiento de la tasa efectiva sin regalo, con gastos del 2 % s/12.620 € sería.

$$10.575 = 252,4 + 228,36 \cdot a_{36|i} + 3.923 (1 + i)^{-37} \quad \text{Operando } i = 8,46 \%$$

- El planteamiento de la tasa efectiva con regalo, sería.

$$10.575 = 252,4 + 228,36 \cdot a_{33|i} (1 + i)^{-3} + 3.923 (1 + i)^{-37} \quad \text{Operando } i = 5,37 \%$$

Actividad nº 11:

Operación de préstamo a interés variable.

HIPOTECA A INTERÉS VARIABLE BANCO PASTOR	
<p>Antes de compartir piso, pida referencias:</p> <p>MIBOR * + 0,75 %</p> <p><i>REVISIÓN ANUAL DE INTERESES</i></p> <p>4,98 % T.A.E.**</p>	<p>Con domiciliación de nómina</p> <p>* Mibor medio a un año del mes anterior publicado en el B.O.E., redondeado al alza a múltiplo de 0,05 %. Último Mibor publicado: 4,066 %.</p> <p>** T.A.E. de un préstamo a 12 años con un interés el primer año del 4,95 %. 0 % comisión.</p>

Solución:

- Estamos ante una operación a interés variable pero el interés a aplicar el primer año, no está referenciado respecto al MIBOR sino que es el impuesto por el banco: 4,95 % anual. En todo préstamo a interés variable supone que cada año si cambia el tipo de interés ha de cambiar la cuantía del pago por lo que la TAE que se obtiene es una aproximación ya que al no saber lo que va a suceder en los años posteriores no podemos conocer como van a evolucionar los tipos de interés y en consecuencia no sabemos como va a afectar a la TAE.
- Primero se calculan los pagos según el interés del primer año y como si éste no fuese a cambiar, siendo el interés mensual del 4,95 % : 12 = 0,4125 %.

$$1.000 = C \cdot a_{144|0,004125}, \text{ Operando } C = 9,224 \text{ € mensuales por cada mil euros.}$$

- En el siguiente año se calcula el nuevo tipo de interés a aplicar en la operación según el índice de referencia, es este caso el MIBOR y el nuevo pago sabiendo nos quedan por efectuar $144 - 12 = 132$ pagos, valorados al nuevo tipo de interés que será en este caso del: $4,066 \% + 0,75 \% = 4,816 \%$ y redondeado al alza quedará en el 4,85 %. El interés mensual será: $4,85 \% : 12 = 0,404166 \%$

$$1.000 = 9,224 \cdot a_{12|0,004125} + C \cdot a_{144|0,00404166} (1 + 0,004125)^{-12}$$

$$\text{Operando } C = 9,178 \text{ € mensuales por cada mil euros.}$$

- Para el cálculo de la TAE se procederá según lo dispuesto por el Banco de España, es decir supone que no habrá futuras alteraciones del tipo de interés. Como no existen comisiones:

$$1.000 = 9,224 \cdot a_{12|i} + 9,178 \cdot a_{144|i} (1 + i)^{-12} \quad \text{Operando } i = \mathbf{4,98 \%}.$$

9.- Ejercicios propuestos.

1.- Smart solución.

>> smart solución 0 % T.A.E.:



smart & pure: 8.880 pts./mes. (48 cuotas).

Entrada: 382.284 pts. Última cuota: 465.750 ptas

(*) **Ejemplo de financiación:** Modelo smart & pure. P.V.P. desde 1.274.280 pts. Tipo nominal: 0 %. Comisión de apertura: 0 %. Intereses subvencionados por MCC smart GmbH. Condiciones válidas para el modelo smart & pure en stock y hasta fin de existencias. I.V.A. e impuesto de matriculación incluidos.

- ¿Es una operación pura o comercial? ¿Porqué?
- ¿Es una operación financiera? ¿Porqué?
- Si en vez de pagar 24 plazos, lo pagásemos en 12 plazos ¿Cuál sería la cuantía a pagar?
- ¿Porqué la TAE es 0 %?

2.- Cuenta uno.e

Le proponemos 5 pistas para que recuerde la
TAE de la **CUENTA uno-e**

<p>CUENTA uno-e</p> <p>5 % TAE *</p>	<p>Presentamos la CUENTA uno.e que le ofrece un alto interés (4,89 % tipo de interés nominal anual) desde el primer euro. Sin comisiones y con total disponibilidad de su dinero.</p>
--	---

* T.A.E. calculada para cualquier importe superior a un euro.
Abono mensual de intereses. Interés nominal anual 4,89 %.

- ¿Es una operación financiera? ¿Porqué?
- ¿Cómo se calcularía la TAE?. ¿Porqué?
- Calcular el interés al finalizar la operación para una inversión de 6.000 €
- ¿Cuál sería la TAE si se abonasen los intereses trimestralmente?

3.- Depósito creciente Santander.

Depósito creciente Santander a 2 años

Desde 1.000 € su dinero va a crecer.... y a crecer

¿Va a dejar que su dinero se quede pequeño?

Con Depósito Creciente Santander, lo verá crecer un **4 %** en el primer año y el **4,40 %** el segundo año. Y sólo desde 6.000 euros. Liquidación trimestral de intereses.

4,00 %
primer año

4,40 %
segundo año

T.A.E. 4,266 %

- ¿Es una operación financiera? ¿Porqué?
- ¿Es una operación de capitalización simple o compuesta?. ¿Porqué?
- Calcular el interés al finalizar la operación para una inversión de 6.000 € ¿Cuál sería el importe de los intereses calculados en capitalización simple y compuesta?.
- Si se capitalizase mensualmente ¿Daría la misma TAE?. Explícalo.

4.- Citifondo. Citibank.

Ascienda a una alta cota de rentabilidad Con la
Fórmula Ahorro - Inversión de Citibank

Depósito a un año + Citifondo Renta
Variable

(*) El nuevo Depósito a un año le ofrece un interés Nominal Anual del 5,87 % (**6 % TAE**), con liquidación trimestral de intereses, desde el primer euro y con posibilidad de recuperar su dinero en el momento que desee, sin comisiones de entrada y cancelación.

- ¿Cómo se calcularía la TAE?. ¿Porqué?
- Calcular el interés al finalizar la operación para una inversión de 6.000 €
- ¿Cuál sería la TAE si se abonasen los intereses semestralmente?

5.- Depósito Multiplus. Caja Duero.

DEPÓSITO MULTIPLUS A 25 MESES (*)	
<p>El 30 % de los intereses percibidos está libre de impuestos y de retención. (**)</p> <p>3,05 % nominal 3 % T.A.E.</p> <p>A partir de 6.000 €</p>	
<p>(*) Con abono de intereses al vencimiento.</p> <p>(**) En aplicación de la nueva Ley del I.R.P.F.</p>	<p><u>CREDIT LYONNAIS ESPAÑA</u></p> <p>Caja Duero</p>

- ¿Es una operación pura o comercial? ¿Porqué?
- Calcular el interés a recibir al final de la operación.
- ¿Porqué la TAE es menor que el interés ofertado?
- Comprobar que la TAE es del 3 %.

6.- Jubilación Santander.

JUBILACIÓN SANTANDER	
Aún está a tiempo de Multiplicar el dinero de su Jubilación	
<p><i>Por 2</i></p> <p>en 9 años</p>	<p><i>Por 3</i></p> <p>en 14 años</p>
<input type="checkbox"/> Plan de Pensiones	

- ¿Cuál de las dos ofertas es mejor? ¿Porqué?
- Calcular el montante que se percibiría si se invierten 12.000 €

7.- Banco Santander.

Banco Santander	Cesar Mora Director General
<p>Estimado cliente:</p> <p>Quiero informarle que Banco Santander pone a su disposición un crédito que le va a permitir pagar en cómodas cuotas sin intereses* sus gastos extraordinarios. Tome nota:</p> <ul style="list-style-type: none"> – 500.000 pts. a su disposición. – 6 cómodos plazos. – Sin intereses, 0 %. – Comisión apertura: 3 % (T. A. E, 11,05 %). <p>Para disponer de este crédito tan sólo tiene que acercarse a su oficina de Banco Santander con el título de reserva de crédito que tiene en la parte inferior de esta carta. Para cualquier consulta diríjase a su oficina.</p>	

- ¿Es una operación pura o comercial? ¿Porqué?
- Si en vez de pagar 6 plazos, lo pagásemos en 12 plazos ¿Variaría el valor de la TAE?.
- Plantear la ecuación de la tasa efectiva.
- Si los pagos fuesen trimestrales en vez de mensuales. ¿Cambiaría la TAE? Explícalo.

8.- Préstamos Deutsche Bank.

Préstamos Confianza DEUTSCHE BANK

8'40 % T.A.E.	0% COMISIÓN DE APERTURA
Tipo Nominal: 8,10 %.	Hasta 30.000 € y hasta 5 años.
CONDICIONES: CON NÓMINA Y 2 RECIBOS DOMICILIADOS.	

- ¿Es una operación pura o comercial? ¿Porqué?
- Para un préstamo de 30.000 € a 5 años ¿Cuál sería el valor de la mensualidad a pagar?
- Si el préstamo fuese de 12.000 € ¿Cambiaría el valor de la TAE? Explícalo.
- Si modificásemos el número de pagos a efectuar ¿Cambiaría? Explícalo.
- Plantear la ecuación de la tasa efectiva.

9.- Financiación con cuota final

CRÉDITO AUTOMÓVIL			
Ejemplo para un vehículo totalmente financiado de 10.000 €			
Años	CUOTA FINAL (**)	CUOTA MENSUAL (*)	T.A.E.
3	4.500	222,28	12,54 %
4	4.000	192,35	12,36 %
5	3.500	173,81	12,24 %
6	3.000	161,01	12,17 %
(*)Tipo de interés nominal 11 %. T.A.E. comisión de apertura 1,50 %, mínimo 40 € y comisión de estudio 0,20 %, mínimo 20 € (**) El vencimiento de la cuota final es al mes siguiente de transcurridas las cuotas mensuales indicadas.			

- Comprobar que las cuantías a pagar son correctas.
- ¿Porqué en este caso siendo los plazos de pago distintos la TAE cambia? Explícalo.
- ¿La TAE del consumidor es la misma que la del banco? Explícalo.
- Plantear la ecuación de la tasa efectiva.

10.- Hipoteca a interés fijo.

Nosotros le aseguramos
que nunca volverán a subir.

HIPOTECA PLUS

5,95 % NOMINAL **6,28 %** T.A.E. (*)

TIPO FIJO HASTA 15 AÑOS

(*) T.A.E. CALCULADO PARA UN PRÉSTAMO A 15 AÑOS DE 100.000 EUROS. COMISIÓN DE APERTURA: 1 % (MÍNIMO 7.500 €.)

Llame al 902 211 200
CREDIT LYONNAIS

- Calcular la cuantía de la mensualidad a pagar..
- Si se decidiese pagar trimestralmente ¿Cuál sería el valor a pagar? ¿Cambiaría el valor de la TAE? ¿Porqué?.
- ¿La TAE anunciada sería el coste de la operación para el consumidor? Explícalo.
- Plantear la ecuación de la tasa efectiva.

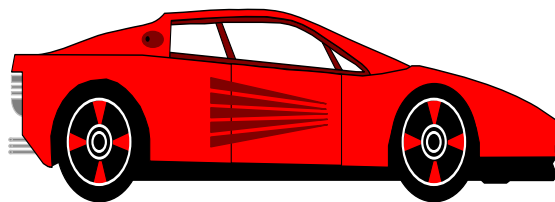
11.- Reloj señora/caballero.

Reloj de Platino de Oro “Rosa de los Vientos” que incluye además, una correa de cocodrilo negra con hebilla de Plata de 1ª Ley chapada en Oro de 1ª Ley 18K, la garantía que certifica la autenticidad del reloj y la garantía de 5 años.			
ARAMIS ORO	MODELO SEÑORA	MODELO CABALLERO	AMBOS MODELOS
	3.200 €	3.900 €	7.100 €
FINANCIADO			
Plazo	48 meses	48 meses	48 meses
Cuota Mensual	80,40 €	97,98 €	178,38 €
Interés	9,5 %	9,5 %	9,5 %
Comisión Apertura	40 €	40 €	60 €
Comisión Estudio	30 €	30 €	40 €
T.A.E.	11,21 %	10,97 %	10,75 %

- Comprobar que las cuantías a pagar son correctas.
- ¿Podrías explicar porqué la TAE disminuye siendo los plazos de pago iguales?
- Plantear la ecuación de la tasa efectiva.

12.- Seis cuotas gratis.

6 PRIMERAS CUOTAS GRATIS



Preocúpate sólo por el precio de la gasolina

FINANCIACIÓN A 60 MESES DESDE UN 10 % DE ENTRADA. INTERÉS NOMINAL 8,12 % ANUAL.

T.A.E. 60 cuotas: 9,46 % y T.A.E. con regalo seis cuotas: 4,3 %.
Oferta válida hasta el 30-11-98, para Renault Clio 1,2, RN 1,2 o 1,9 D. Comisión de apertura: 2 %.


- Calcular el valor de la cuota mensual a pagar para un vehículo de 18.000 €
- ¿Porqué anuncia dos TAE distintas?
- ¿Podrías explicar porqué la TAE con el regalo es en este caso menor que la del anterior?
- Plantear la ecuación de la tasa efectiva en los dos casos.

13.- Préstamo a interés variable. Cuota fija.

<p>EXTRAHIPOTECA <u>CUOTA FIJA</u></p> <p>10,746 €.</p> <p>POR CADA MIL EUROS AL MES*</p> <p>PARA QUE PAGUE SIEMPRE LA MISMA CUOTA.</p> <p>T.A.E. 12'24 %**</p>
<p>* CUOTA CALCULADA CON UN PLAZO INICIAL MÁXIMO DE 15 AÑOS QUE SE PODRÁ ACORTAR O ALARGAR HASTA 10 AÑOS EN FUNCIÓN DE LA VARIACIÓN DEL ÍNDICE DE REFERENCIA.</p> <p>** T.A.E. 12'24 % CALCULADO PARA UN PRÉSTAMO DE 60.000 € INTERÉS NOMINAL DEL 10 % EN EL PRIMER AÑO, VARIABLE ANUALMENTE EN FUNCIÓN DEL ÍNDICE DE REFERENCIA (MIBOR + 1'75) REDONDEADO AL ALZA HASTA UN CUARTO. COMISIÓN DE APERTURA: 2 % MÍNIMO 1.200 € MIBOR SEPTIEMBRE: 9'572 %.</p>

- ¿Es una operación comercial? ¿Porqué?
- Calcular el pago mensual del primer año para un importe de 18.000 €
- ¿Cuál sería el pago mensual del segundo año?.
- Plantear la ecuación de la TAE.

14.- Préstamo a interés variable.

<p>PRÉSTAMO VIVIENDA</p> <p> CAIXA GALICIA</p>
<p>MIBOR A 1 AÑO + 0,50 % NOMINAL</p>
<p>7'42 % * T.A.E.</p>
<p>SIN COMISIONES DE APERTURA.</p> <p>SIN GASTOS DE ESTUDIO.</p>
<p>*TAE CALCULADA PARA CUALQUIER IMPORTE Y PLAZO. AMORTIZACIÓN MENSUAL. NOMINAL: ÚLTIMO MIBOR PUBLICADO A 1 AÑO + 0,50%, VARIABLE ANUALMENTE. ÚLTIMO MIBOR PUBLICADO EN NOVIEMBRE 6,68 % .</p>

- Calcular el pago mensual del primer año para un importe de 18.000 €
- Calcular el pago mensual del segundo año.
- Plantear la ecuación de la TAE.

15.- Crédito personal, con catorce cuotas anuales.

CRÉDITO PERSONAL	
Tipo Nominal Base (TAE** 9,12 %) . 8,25 % Domiciliación de nómina o pensión- 0,25 % = 8,00 % Domiciliación de 2 recibos 0,25 % = 7,75 %	
DESDE <div style="text-align: center;"> 12,037 € por cada mil euros, a 8 años, en 14 CUOTAS ANUALES. </div>	
<div style="text-align: center;"> 7,75 % NOMINAL . 8,57 % T.A.E.* </div>	
<p>Plazo máximo 8 años. hasta 18.000 € Gastos de estudio 0,25 % (Mínimo 20 €). Comisión de apertura 1,50 %. Sin comisión de cancelación anticipada.</p> <p>(*) TAE, para préstamos de 6.000 € a 8 años. TAE 11,56 % para préstamos a 1 año.</p> <p>(**) TAE, para préstamos de 6.000 € a 8 años. TAE 12,12 % para préstamos a 1 año</p>	

- ¿Qué significa lo de 14 cuotas anuales?
- Comprobar que el valor de la cuota mensual a ocho años es el anunciado.
- Calcular el valor de la cuota mensual a un año.
- Plantear la ecuación de la tasa efectiva anunciada en ambos casos.
- Si no hubiese comisiones el valor de la TAE a 8 años y el valor a 1 año ¿Serían distintos?

16.- Crédito automóvil. Con entrada y última cuota diferente.



¿Envidia?
Por 47 cuotas de: 350 €/mes T.A.E.: 7,97 %

PVP: **33.650 €**
(IVA, transporte, y matriculación incluidos)
Entrada: **10.000 €**
Cuotas mensuales: **350 €**
Última cuota: **12.251,19 €**
Comisión de apertura 2 %: **(473 €)**,
Interés nominal (TIN): **6,95 %**.
Precio total a plazos: **39.174,19 €**

- ¿Qué es el TIN del 6,95 %?
- Calcular la cuantía de los intereses a pagar.
- Comprobar que el pago mensual de 35.000 pts es correcto.
- Plantear la ecuación de la TAE.