UNIVERSIDAD DE PINAR DEL RIO

“HERMANOS SAÍZ MONTES DE OCA”

FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS

MATERIAL AUXILIAR PARA ESTUDIANTES DE

PRIMER AÑO DE LICENCIATURA EN ECONOMIA

TEMA: Aplicaciones del cálculo diferencial e integral en la Economía.

AUTORA: Lic. Angie Fernández Lorenzo

UNA BREVE INTRODUCCIÓN...

Este folleto se elabora como material auxiliar para estudiantes de primer año de Licenciatura en Economía en el estudio de temas relacionados con el cálculo diferencial e integral en las asignaturas Análisis Matemático, específicamente en lo relacionado con las principales aplicaciones en la Economía de los conceptos de derivada de funciones de una y varias variables reales, de funciones compuestas y de integral definida e indefinida. En relación con la "Teoría del Consumidor": oferta, demanda, utilidad y excedente del consumidor y con la "Teoría de la Empresa": funciones de costos, ingresos, producción, ganancia y excedente del productor. Además de la aplicación que tienen en las funciones de consumo y ahorro de las economías domésticas y la empresa.

Por otra parte se pretende suministrar a los estudiantes de primer año de Economía algunos recursos claves que les podrán ser útiles posteriormente en asignaturas como Microeconomía y Macroeconomía. Se retoman aspectos relacionados con otros temas del Análisis Matemático, tales como funciones, teoría de extremos, entre otros. Se emplean a su vez técnicas informáticas para la solución de algunos problemas, como el uso de los programas Derive y Mathematica para Windows.

Por último agradecer a todas las personas que apoyaron la elaboración y publicación de este material, a todos ellos muchas gracias.

La autora.

INDICE

1- CONCEPTOS INTRODUCTORIOS

Mercado: es un mecanismo por medio del cual los compradores y los vendedores de un bien determinan conjuntamente su precio y su cantidad.

Producción (Q): cantidad total de una mercancía medida en unidades físicas.

Precio (P): coordinan las decisiones de los productores y los consumidores en el mercado. La subida de los precios tiende a reducir las compras de los consumidores y fomenta la producción. La reducción de los precios fomenta el consumo y reduce los incentivos para producir.

Renta (Y): flujo de salarios, intereses, dividendos y otros ingresos que recibe una persona o un país durante un período de tiempo.

Cálculo diferencial: El cálculo diferencial estudia los incrementos en las variables, siendo la diferenciación el proceso de calcular derivadas.

CálculoIntegral: El cálculo integral se basa en el proceso inverso de la diferenciación, llamado integración.

TEORIA DEL CONSUMIDOR

2- OFERTA Y DEMANDA

Curva de oferta: es la relación entre el precio de un bien en el mercado y la cantidad que los productores están dispuestos a producir y vender, manteniéndose todo lo demás constante (tecnología, precios de las materias primas e insumos, impuestos y subsidios, etc).

Curva de demanda: es la relación entre el precio y la cantidad comprada de un bien, cuando todo lo demás se mantiene constante (gustos y preferencias, precios de bienes sustitutivos, renta, etc)

Equilibrio de la oferta y la demanda: el mercado se encuentra en equilibrio cuando el precio y la cantidad equilibran las fuerzas de la oferta y la demanda. Este precio y esta cantidad de equilibrio se encuentran en el nivel en que la cantidad ofrecida voluntariamente es igual a la demandada voluntariamente. Este equilibrio se halla gráficamente en la intersección de las curvas de oferta y demanda. Al precio de equilibrio no hay escasez ni excedente.

Valores marginales de la demanda: dada la curva de demanda de un bien X1, considerando que los determinantes de la demanda (precios de bienes relacionados, rentas, entre otros) son constantes:

$$X_1 = d\ (P_1)$$

El valor marginal expresa la variación de la demanda de un determinado bien con respecto a un incremento en una unidad de su precio, lo que se calcula como la derivada ordinaria de la función. Al ser la función de demanda una curva de pendiente negativa, el valor marginal de la demanda siempre será negativo y expresa en cuánto disminuye la demanda por cada incremento de una unidad de los precios.

Elasticidad-precio de la demanda: es la sensibilidad de la cantidad demandada de un bien a las variaciones de su precio, manteniéndose todo lo demás constante. Su definición exacta es la variación porcentual de la cantidad demandada dividida por la variación porcentual del precio.

Cuando $E_d > 1$ Demanda elástica

$E_d = 1$ Demanda unitaria

$E_d < 1$ Demanda inelástica

La elasticidad de la demanda respecto al precio se define como:

$$E(d,p) = -\, p/d * d'(p)$$

Ejemplo 1 (Aplicación de la derivada de funciones de una variable)

El comportamiento de la demanda y oferta del trigo en un mercado local en un año X está dado por la función de demanda $Q_d = 60-1/2P$ y por la función de oferta $Q_o = 40+2P$, donde el precio se expresa en $ por quintal y la cantidad en millones de quintales al año.

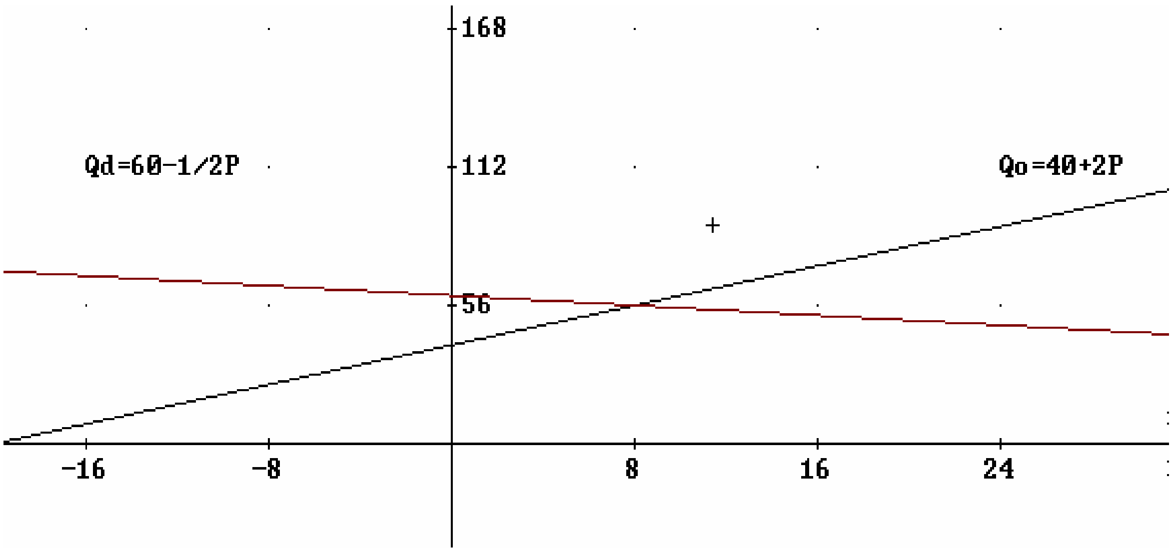
a-) Represente la curva de demanda.

b-) Represente la curva de oferta.

c-) Obtenga el punto de equilibrio de mercado analítica y gráficamente. ¿Qué representa?

d-) Halle el valor marginal para la función de demanda considerando que esta depende únicamente del precio del trigo. Interprete los resultados.

Solución gráfica:



Solución analítica:

I- El punto de equilibrio se obtiene donde:

$Q_d = Q_o$

60-1/2P =40+2P

60-40 =2P+1/2P

20 =2.5P

<u>P= $8.00</u>

II- Sustituir P = 8 en Q_d:

Q_d = 60-1/2P

Q_d = 60-1/2*8

<u>Q_d = 56u</u>

III- Punto de equilibrio P(56;8)

Rta: A un precio de $8.00 por quintal encuentra el mercado de trigo local su equilibrio con una cantidad ofertada y demandada de 56 millones de quintales.

d-) (Q_d)'= (60-1/2P)'=-1/2

Rta: Este valor indica que a medida que aumenta el precio en una unidad las cantidades demandadas disminuyen en ese valor.

Ejemplo 2 (Aplicación de la derivada de funciones de una variable)

La oferta de un producto en el mercado local está dada por la recta x-2y-14= 0, mientras que la demanda del mismo se representa por la parábola $2y^2$-4x-8= 0.

A-) Obtenga el punto de equilibrio de mercado analítica y gráficamente.

Solución:

I- El punto de equilibrio se obtiene donde:

$Q_d = Q_o$

Despejar x en Q_o:

x-2y-14 = 0

x = 2y+14

Sustituir x = 2y-14 en $2y^2$-5x-2y-22:

$0 = 2y^2-5(2y+14)-2y-22$

$0 = y^2-4y+32$

0 = (y-8) (y+4)

<u>y = $8.00</u>   y = -4   Se deshecha esta solución, pues no tiene sentido económico.

II- Sustituir Y=8 en Q_d:

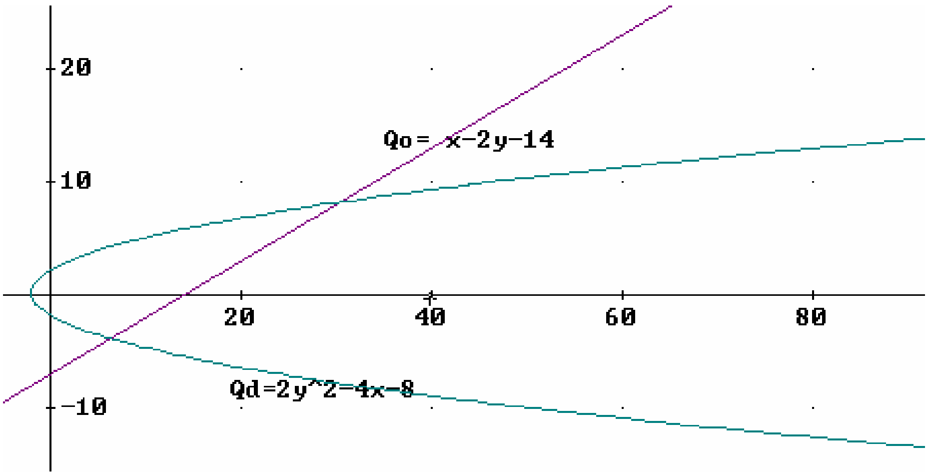
x-2y-14 = 0

x = 14+2*8

<u>x = 30 u</u>

Rta: El punto de equilibrio del producto en el mercado se obtiene a un precio de $8.00 con una cantidad de 30 unidades.

Solución gráfica:



Ejemplo 3 (Aplicación de la derivada de funciones de una variable)

Determine la elasticidad-precio de la demanda de trigo para el año siguiente al del ejemplo anterior si la demanda se comportó según la función $d(P)= 9/P^2$.

a-) Clasifique la demanda del trigo.

Solución:

$E(d;p)= -P/d*d'(P)$ $\qquad$ $d'(P)= (9/P^2)'=-18/P^3$

$= -P/(9/P^2)*(-18/P^3)$

$= 2$

Rta: Si el precio del trigo aumenta en un 1%, la cantidad demandada disminuye en un 2 %. Por lo que la demanda del trigo es elástica.

Función de demanda de varias variables: Al añadir a la función de demanda algunas de otras variables de las cuales también depende (además del precio del bien en cuestión), tales como precio de otros bienes relacionados y la renta del consumidor, se obtiene la siguiente expresión:

$X_1 = d (P_1 , P_2 , \ldots , P_n , Y)$

Valores marginales de la demanda: Expresan la variación en esta en relación con cada una de las variables anteriores, y son:

$\delta X_1 / \delta P_1$ ¸ $\delta X_1 / \delta P_2$, ... , $\delta X_1 / \delta P_n$, $\delta X_1 / \delta Y$

Elasticidad cruzada de la demanda: Mide la sensibilidad de un bien X con respecto a la variación de un bien Y.

$E (d, P_y) = P_y /d * \delta P / \delta P_y$, $\forall y \neq x$

Clasificación de los bienes atendiendo a la elasticidad cruzada de la demanda:

1- Bienes sustitutivos: si una reducción del precio de un bien causa una disminución de la cantidad demandada del otro. La elasticidad cruzada de la demanda es positiva.
2- Bienes complementarios: si una reducción del precio de un bien causa un aumento de la cantidad demandada del otro. La elasticidad cruzada de la demanda es negativa.
3- Bienes no relacionados: una variación del precio de un bien no modifica la cantidad demandada del otro. La elasticidad cruzada de la demanda es nula.

Elasticidad renta de la demanda: Se utiliza para conocer la sensibilidad de la cantidad demandada a variaciones porcentuales en la renta.

$E (d,Y) = Y/d * \delta d / \delta Y$

Clasificación de los bienes de acuerdo a la elasticidad renta de la demanda:

1- Bien normal: aquel que el consumidor compra en mayores cantidades cuando su nivel de ingreso se incrementa. La elasticidad renta de la demanda es positiva.

1.1 Bien de lujo: la elasticidad renta es mayor que la unidad.

1.2 Bien necesario: la elasticidad renta es menor que la unidad

2- Bien inferior: aquel que el consumidor decide comprar en menores cantidades cuando su nivel de ingresos se incrementa. La elasticidad renta de la demanda es negativa.

Ejemplo 4 (Aplicación de la derivada de funciones de varias variables)

Una Cooperativa de Ahorro y Crédito ha estimado la función de demanda de su servicio como: $D = 25\ M^{-1/2}\ S^{-1/3}\ q$.

Donde d es el consumo de su servicio, M es la renta real agregada, S es el nivel medio de intereses aplicados y q es el nivel medio de intereses de la competencia.

a-) Calcular los valores marginales de la demanda con respecto a M, S y q para cuando toman valor 100; 1,728 y 1,9 respectivamente. Interprete los resultados.

Solución

a-) $\delta D / \delta M = -25(/\ 2M\sqrt{M})*S^{-1/3}q$ Evaluar para (100; 1,728; 1,9)

$= (-25/\ 2*100*\sqrt{100}) * 1.728^{-1/3} * 1.9$

$= -\ 0.1884$

$\delta D / \delta S = (-25\ M^{-1/2}/\ 3S\ \sqrt[3]{S}) * q$

$= (-25 * 100^{-1/2} / 3*1.728*\ \sqrt[3]{1.728}) * 1.9$

$= -\ 0.76356$

$\delta D / \delta q = 25\ M^{-1/2}\ S^{-1/3}$

$= 25 * 100^{-1/2} * 1.728^{-1/3}$

$= 2.08$

Rta: La demanda de los servicios de la cooperativa disminuyen a medida que aumentan la renta y el nivel de intereses medios aplicados. Por otra parte aumenta con un incremento de los niveles de intereses aplicados por la competencia.

Ejemplo 5 (Aplicación de la derivada de funciones de varias variables)

La demanda de un bien se ha estimado como: D(a,b,e)= 24–2ab + 5e – 3b; donde **a** es el precio del bien, **b** el precio de otro bien y **e** la renta media de los consumidores.

a-) Obtener las expresiones de la elasticidad cruzada y la elasticidad renta de la demanda.

b-) Clasificar el bien en el punto (a,b,e) = (20,25,30).

Solución

a-)E(D,b) = (δ D / δ b)* (b/D)   δ D / δ b = -2a-3

= (-2a-3)* (b/24-2ab+5e-3b)

E(D,e) =(δ d / δ e)* (e/d)   δ D / δ e = 5

= 5* (e/ 24-2ab+5e-3b)

= 5e / 24-2ab+5e-3b

b-) Evaluar en el punto (20,25,30)

E(D,b) =(-2*20*25-3*25)/ (24-2*20*25+5*30-3*25) = 1.19

E(D,e) = (5*30)/ (24-2*20*25+5*30-3*25) = -0.166

Rta: Los bienes en cuestión son bienes sustitutivos pues la elasticidad cruzada de la demanda es positiva. En el caso del bien principal se puede clasificar como inferior pues la elasticidad renta es negativa.

3-UTILIDAD

Función de Utilidad: representa el grado de provecho o satisfacción que reporta a un consumidor una mercancía.

Utilidad marginal: representa la satisfacción adicional obtenida por el consumo de una unidad adicional del bien.

La relación entre la utilidad y la utilidad marginal para un bien estudiado se comporta según se muestra a continuación:

Cantidad consumida de un bien	**Utilidad total**	**Utilidad marginal**
0	0	
1	4	4
2	7	3
3	9	2
4	10	1
5	10	0
6	9	-1

Si se tiene la función de utilidad, la utilidad marginal se calcula como la derivada ordinaria de esta función. UM= U'

Si la UM=0 el consumidor obtiene con esa cantidad consumida toda la satisfacción que espera obtener del bien.

Si la UM<0 el bien no satisface todas las necesidades del bien.

Ley de la utilidad marginal decreciente: establece que a medida que aumenta la cantidad consumida de un bien tiende a disminuir su utilidad marginal, y con ella la satisfacción que obtiene del mismo.

Ejemplo 6 (Aplicación de la derivada de funciones de una variable)

Una asociación de consumidores de Roma ha realizado una medición para valorar el nivel de satisfacción por el servicio de restaurantes de comida italiana en la ciudad en un período determinado, lo que arrojó la siguiente función de utilidad:

$U = 200x-2x^2+150$.

a-) Calcule la expresión de la utilidad marginal para la comida italiana.

b-) Si el consumo de dicho servicio aumenta de 25 unidades a 100 unidades en el período analizado, ¿cómo se comportará la satisfacción obtenida de él por parte de los consumidores?

Solución:

a-) $UM = U' = (200x-2x^2+150)' = 200-4x$

Rta: La utilidad marginal del servicio restaurantes de comida italiana se comporta según la expresión $UM = 200-4x$.

b-) Para $x = 25$	Para $x = 100$
$UM = 200-4*25$	$UM = 200-4*100$
$\underline{UM = 100}$	$\underline{UM = -200}$

Rta: La satisfacción que reportan en el período para los consumidores los restaurantes de comida italiana va disminuyendo, incluso cuando el consumo es de 100 ya este bien no reporta todo lo que esperan de él los consumidores.

Función de utilidad de varias variables: Teniendo en cuenta que los consumidores obtienen satisfacción o utilidad de los distintos bienes y servicios que consumen durante un período determinado, puede redefinirse la función de utilidad como:

$U = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, siendo $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ los bienes y servicios consumidos.

Utilidad marginal: La utilidad marginal del bien X1 se obtiene a través de la derivada parcial $UM_{x1} = \delta U / \delta x_1$ que estima el incremento en la utilidad total por una unidad adicional del bien 1. Y así para cada una de las variables.

Condición de equilibrio en la elección del consumidor: Un consumidor que tenga una renta fija y que se enfrente a unos precios de mercado de los distintos bienes que estén dados logrará la máxima satisfacción o utilidad cuando la utilidad marginal del último peso gastado en cada bien sea exactamente igual que la utilidad marginal del último peso gastado en cualquier otro.

Ejemplo 7 (Aplicación de la derivada de funciones de varias variables)

Estudios realizados por una asociación de consumidores en Roma han permitido conformar una función de utilidad con respecto al consumo de servicios de restaurante, influida por las siguientes variables:

x- valoración sobre restaurantes de comida italiana

y- valoración sobre restaurantes de comida internacional

$U(x,y) = x^3y^4 - 2x^2y^3$

a-) Calcular las utilidades marginales respecto a cada uno de los dos bienes para $(X_0,Y_0) = (2,1)$.

b-) Interprete los resultados.

Solución

a-) $U(x,y) = x^3y^4 - 2x^2y^3$

$UMx = \delta U / \delta x$ $\quad$ $UMy = \delta U / \delta y$

$= 3x^2y^4 - 4x\,y^3$ $\quad$ $= 4\,x^3y^3 - 6x^2y^2$

Evaluar en el punto (2,1):

$UMx = 3x^2y^4 - 4x\,y^3$ $\quad$ $Umy = 4\,x^3y^3 - 6x^2y^2$

$= 3*2^2*1^4 - 4*2*1^3$ $\quad$ $= 4*2^3*1^3 - 2^2*1^2$

$= 4$ $\quad$ $= 8$

b-) Un incremento del consumo del servicio de restaurantes de comida internacional produce el doble de aumento del nivel de satisfacción de los consumidores con respecto al incremento del servicio de comida italiana.

Ejemplo 8 (Aplicación de la derivada de funciones de varias variables)

Dada la siguiente función de utilidad para dos bienes industriales x e y:

$U(x,y) = X^{1/2}\,y^{1/3}$

Se conoce que las empresas están consumiendo 16 y 27 unidades de cada bien respectivamente.

a-) Hallar la utilidad marginal para ambos bienes. Interprete los resultados.

b-) Si el mercado tiende a consumir la misma cantidad del bien x y a triplicar la cantidad consumida del otro. ¿Qué explicación podría dar?

Solución

a-) $UMx = \delta U / \delta x$ -Evaluar en (16,27)

$= \sqrt[3]{Y}/2\sqrt{x}$

$= \sqrt[3]{27}/2^{*}\sqrt{16} = 0.375$

$Umy = \delta U / \delta y$

$= \sqrt{x}/3\sqrt[3]{Y^2}$

$= \sqrt{16}/3^{*}\sqrt[3]{27} = 0.148$

Rta: El consumo de una unidad adicional del bien X produce una satisfacción mayor que en el caso del bien Y.

b-) $UMx_{(16,81)} = \sqrt[3]{81}/2^{*}\sqrt{16} = 0.541$

$UM\,y_{(16,81)} = \sqrt{16}/3^{*}\sqrt[3]{81^2} = 0.071$

$UMx_{(16,81)} > UMx_{(16,27)}$

$UMy_{(16,81)} < UMy_{(16,27)}$

Rta: Como resultado de la ley de utilidades marginales decrecientes al aumentar el consumo del bien Y disminuye la satisfacción por él obtenida. Mientras, el bien X se convierte en un bien escaso cuya utilidad marginal aumenta.

Ejemplo 9 (Aplicación de la derivada de funciones compuestas)

La función de utilidad para dos productos complementarios **a** y **b** es $U = a^3 b + 2ab$. Además existe una función que relaciona a ambos bienes de la siguiente forma: $b = a/2$.

a-) Hallar la función de utilidad marginal para el bien principal.

b-) Calcular su valor cuando se consumen 4 unidades de este bien.

Solución

Arbol de dependencia funcional:

U —— a

b —— a

$dU/da = \delta U/\delta a + (\delta U/\delta b * db/da)$ $\delta U/\delta a = 3a^2b+2b$

$= 3a^2b+2b + (a^3+2a)*1/2$ $\delta U/\delta b = a^3+2a$

$= 3a^2b+2b + a^3/2+a$ $db/da = 1/2$

Rta: La Utilidad marginal para el bien **a** está dada por la expresión

$dU/da = 3a^2b+2b + a^3/2+a$.

b-) Si a= 4 b= 4/2=2

Evaluar en dU/da:

$dU/da = 3*4^2*2+2*2+4^3/2+4 = 136$

Rta: Si las unidades consumidas del bien a son 4, la utilidad marginal que se obtiene es 136.

Ejemplo 10 (Aplicación de la derivada de funciones de varias variables)

La función de utilidad de un consumidor en estudio está dada por la expresión $U = x^2y^2$.

Si se conoce además que el precio de los bienes es 2 y 3 respectivamente y que se consumen 6 unidades del bien **x**.

a-) ¿Qué cantidad debe consumirse del bien **y** para que el consumidor se encuentre en equilibrio?

b-) Si el precio de y aumenta a 4. ¿Qué variación se producirá en la cantidad consumida de ese bien? Explique.

Solución

a-) Condición de equilibrio del consumidor:

$Umx/Px = Umy/Py$ $Umx = 2xy^2$

$2xy^2/2 = 2x^2y/3$ $Umy = 2x^2y$

$y/2 = x/3$

$y = 2x/3$ Sustituir x=6

$y = 2*6/3$

$\underline{y = 4}$

Rta: El consumidor debe consumir 4 unidades del bien **y** para encontrarse en equilibrio.

b-) y/2 = x/4

y = 2x/4

y = 2*6/4

<u>y = 3</u>

Rta: Al aumentar el precio del bien y su utilidad marginal por peso gastado disminuye, por lo que el consumidor tiene que consumir menos de ese bien hasta que se iguale a la utilidad marginal por peso gastado del otro bien.

4- EXCEDENTE DEL CONSUMIDOR

<u>Excedente del consumidor:</u> Diferencia entre la utilidad total de un bien y su valor de mercado. Se manifiesta en que pagamos por un bien menos de lo que realmente estamos dispuestos a pagar por la satisfacción que obtenemos de su uso.

EC = $\int_0^{q_0} Pdq - p_0 q_0$ donde P – función de demanda

P_0 - precio que pagamos

q_0- cantidad que compramos

Ejemplo 11 (Aplicación de la integral definida)

Si la función de demanda de un consumidor es P = $(4-q)^{0.5}$ y el precio del mercado por unidad es 1.

a-) ¿Cuál es el excedente del consumidor?

b-) Realice el inciso anterior gráficamente.

Solución

a-) Cálculo de q_0:

P = $(4-q)^{0.5}$ p_0*q_0 = 3*1 = 3

1 = √ (4-Q) elevar al cuadrado

4-q = 1

<u>q = 3</u>

EC = $\int_{0}^{q_0} Pdq - p_0 q_0$

= $\int_{0}^{3_0} (4-q)^{0.5} dq - 3$ - Aplicación del Método de Integración por sustitución

u = 4 – q

= $\int_{0}^{3_0} -1(4-q)^{0.5} / -1 dq - 3$ du = -dq

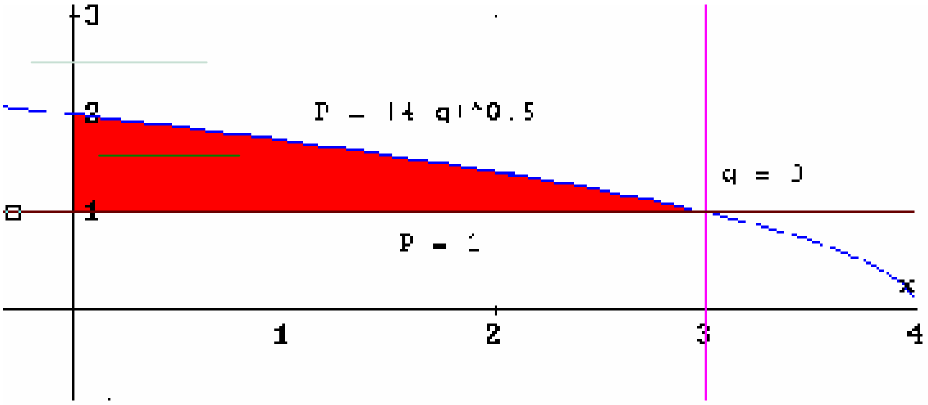
= - $\int_{0}^{3_0} (u)^{0.5} du - 3$

= $-u3/2/3/2\Big|_0^3$ -3 = $-2/3 * \sqrt{u^3}\Big|_0^3$ -3 = $-2/3 * \sqrt{(4-q)^3}\Big|_0^3$ -3

= [-2/3 *√(4-3) ³ –(-2/3*√(4-0) ³] -3 = 1.66

Rta: El excedente del consumidor es de $1.66.

b-)


1
2
3
4
x

TEORIA DEL PRODUCTOR

5- INGRESOS

Ingreso total (IT): es simplemente el precio de un bien multiplicado por la cantidad que se vende de ese bien.

Ingreso marginal (IM): es el incremento que experimenta el ingreso total cuando se eleva la producción en una unidad. El IM puede ser positivo o negativo en dependencia de la elasticidad de la demanda.

Para un bien en estudio el ingreso marginal se relaciona con el ingreso total, de forma:

Cantidad Q	**Precio P=IT/Q (pesos)**	**Ingreso total IT=PxQ (pesos)**	**Ingreso marginal IM (pesos)**
0	200	0	
1	180	180	180 (IT creciente)
2	160	320	140
3	140	420	100
4	130	520	100
5	120	600	80
6	100	600	0 (IT máximo)
7	60	420	-180 (IT decreciente)
8	40	320	-100
9	20	180	-140
10	0	0	-180

En el caso que se tenga la función de ingresos totales, IM= (IT)'.

Nótese que el ingreso total máximo se obtiene cuando el IM=0.

Ejemplo 12 (Aplicación de la derivada de funciones de una variable)

La función de ingresos total de la Empresa Lycos S.A. dedicada a la producción de piensos para aves viene dada por $IT(Q)= 30Q-3Q^2$, donde Q es la cantidad de toneladas de piensos vendida por la empresa en un año.

a-) Determinar el ingreso marginal para Q=3, Q=4 y Q=3.5.

b-) ¿A qué nivel de producción alcanza la empresa un ingreso total máximo? Calcule su valor.

c-) Analice el inciso anterior gráficamente.

Solución:

a-) $IM= (IT)'= (30Q-3Q^2)'= 30-6Q$

Para Q=3 Para Q=4

IM= 30-6*4=6 IM=30-6*3=12

Para Q=3.5

IM= 30-6*3.5=9

Rta: Cuando la producción es de 3 toneladas de pienso, el producir una unidad adicional traería consigo un aumento en los ingresos de $12.00, si fuera de 4 toneladas los ingresos totales aumentarían en $6.00 y si la producción fuera de 3.5 toneladas los ingresos totales aumentarían en $9.00.

b-) El ingreso total máximo se obtiene cuando IM=0:

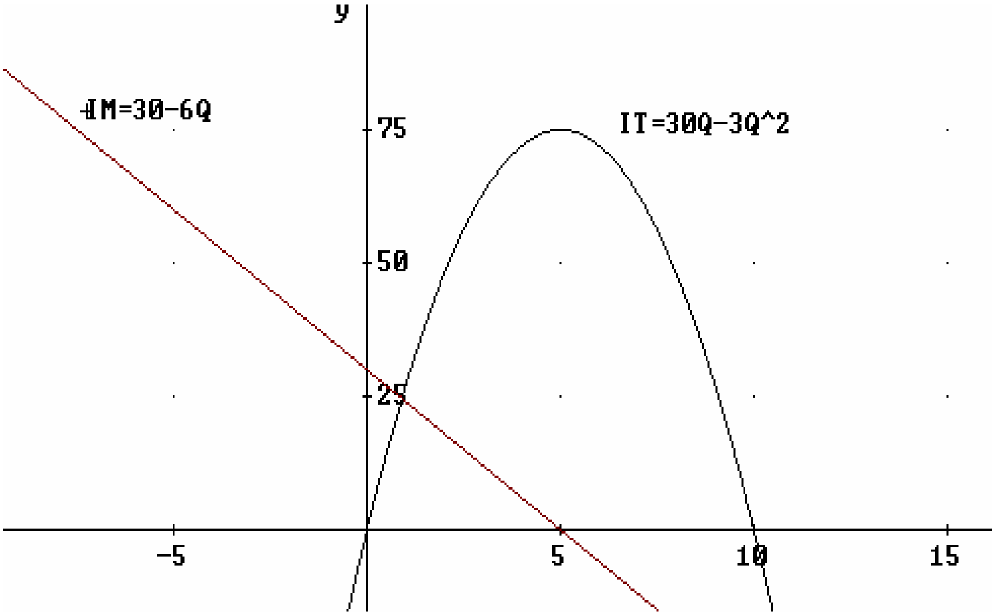
IM=O IT(5)= 30*5-3*5^2

30-6Q=0 <u>IT(5)= $75</u>6Q=30

<u>Q=5u</u>

Rta: Al producir 5 toneladas de piensos obtiene la Empresa Lycos S.A. un nivel máximo de ingresos de $ 75.00.

Solución gráfica:



Nótese que la función de Ingresos Totales tiene el punto de máximo donde su primera derivada es cero (IM = 0).

Ejemplo 13 (Aplicación de la integral indefinida)

La función de ingresos marginales de una fábrica está dada por

Imq = $20/ (4+q)^2$.

a-) Hallar la función de ingreso total si este es de 20 unidades monetarias cuando la producción es de 2 unidades.

b-) Calcular la variación en el ingreso total cuando la producción aumenta a 4 unidades.

Solución:

a-) ITq = $\int$ IMq *dq

= $\int 20/(4+q)^2$ *dq

$= -20/4+q \quad + C$

$IT_{(2)} = -20/4+2 \ + C$

$20 \quad = -10 + C$

<u>C = 30</u>

Rta: La función de ingresos totales está dada por la expresión

$ITq = -20/4+q \ +30.$

b-) $IT_{(4)} = -20/4+4 +30 = 27.5$

Rta: Al duplicarse la producción los ingresos totales aumentan en 7,5 unidades monetarias.

6- COSTOS

<u>Costo total (CT):</u> representa el gasto monetario total mínimo necesario para obtener cada nivel de producción Q. Aumenta a medida que aumenta Q.

Siempre, por definición CT = CF+CV, donde

<u>Costo fijo (CF):</u> representa el gasto monetario total en que se incurre aunque no se produzca nada. No resulta afectado por las variaciones de la cantidad de producción.

<u>Costo variable (CV):</u> representa los gastos que varían con el nivel de producción- como las materias primas, los salarios y el combustible- y comprende todos los costos que no son fijos.

<u>Costo medio o unitario (Cme):</u> es uno de los conceptos de costo más importantes pues cuando se compara con el precio o el ingreso medio, permite saber si la empresa está obteniendo o no un beneficio. Es el costo total dividido por el número de unidades producidas.

Cme = CT/Q

<u>Costo fijo medio (CFMe):</u> es el costo fijo dividido por Q. Al aumentar la producción el valor del CFMe disminuye.

CFMe = CF/Q

Costo variable medio (CVMe): es el costo variable dividido por el nivel de producción Q.

CVMe =CV/Q

Costo marginal de producción (CM): es el costo adicional en que se incurre al producir una unidad adicional.

El estudio de los costos de elaboración de un producto X brindó los siguientes resultados:

Producción Q	**Costo total CT (pesos)**	**Costo marginal CM (pesos)**
0	55	
1	85	30
2	110	25
3	130	20
4	160	30
5	210	50

O en el caso que se conozca la función de costo total, CM = (CT)'.

- Incremento de los costos marginales:

Si el incremento del CM es mayor que 1, la producción de una unidad adicional trae consigo un aumento mayor a la unidad en los costos totales.

Si el incremento es igual a 1, el cambio en los costos totales es proporcional al aumento de la producción.

Si el incremento es menor que 1, el incremento en el costo es menor que el incremento de la producción.

Elasticidad de los costos: indica cómo se adaptan los costos cuando varía la cantidad producida. Específicamente se define como la variación porcentual de los costos dividida por la variación porcentual de las cantidades producidas.

- Elasticidad del costo total (N): N =CM/Cme
- Elasticidad del costo medio (N*): N* = CM/Cme –1= N-1
- Elasticidad del costo variable (Nv): Nv = CM/CVMe

Ejemplo 14 (Aplicación de la derivada de funciones de una variable)

La función de costos de una unidad productora de helados ha sido estimada como: $C(x)= 0.4x^2+11x+260$, donde C(x) es el costo total de electricidad por hora en pesos y x la cantidad de helado producido en tanquetas.

a-) Determinar el costo marginal para x =20 y x =80.

b-) ¿Considera que un incremento en la producción de helados trae consigo un incremento proporcional en el consumo de energía eléctrica? ¿Por qué?

Solución:

a-) CM = (CT)'	Para x =20	Para x =80
$CM =(0.4x^2+11x+260)'$	CM = 0.8*20+11	CM =0.8*80+11
CM = 0.8x+11	<u>CM =27</u>	<u>CM =75</u>

Rta: Cuando la producción es de 20 tanquetas el costo de producir una unidad adicional es de $27.00, mientras que cuando la producción es de 80 tanquetas el costo de producir una más es de $75.00.

b-) Un incremento en la producción de helados no trae consigo un incremento proporcional en el consumo de energía eléctrica porque el incremento de los costos marginales es menor que 1 (es 0.8).

Ejemplo 15 (Aplicación de la derivada de funciones de una variable)

Dada la función de costos de una pieza de automóviles de una empresa nacional $C(Q)= 3Q^3-2Q^2-10Q+200$.

a-) Obtener cuál será la reacción en los costos totales, medios y variables cuando se producen 10 piezas.

Solución:

N = CM/Cme	CM = C'(Q)
$N= (9Q^2-4Q-10)/(3Q^2-2Q-10+200/Q)$	$CM= (3Q^3-2Q^2-10Q+200)'$
$N= (9*10^2-4*10-10)/(3*10^2-2*10-10+200/10)$	$CM= 9Q^2-4Q-10$
<u>N= 2.93</u>	
	Cme= CT/Q

$Cme=(3Q^3-2Q^2-Q+200)/Q$

$Cme= 3Q^2-2Q-10+200/Q$

$N^*= N-1$

$N^*=2.93-1$

$\underline{N^*= 1.93}$

$Nv= CM/CVMe$ $\quad$ $CVMe= CV/Q$

$Nv= (9Q^2-4Q-10)/(3Q^2-2Q-10)$ $\quad$ $CVMe= (3Q^3-2Q^2-10Q)/Q$

$Nv= (9*10^2-4*10-10)/(3*10^2-2*10-10)$ $\quad$ $CVMe= 3Q^2-2Q-10$

$\underline{Nv= 3.15}$

Rta: Al aumentar la producción en un 1% de piezas, los costos totales aumentan en un 2.93%, los costos medios en un 1.93% y los costos variables medios en un 3.15 %.

Ejemplo 16 (Aplicación de la integral indefinida)

Si la función de costo marginal de una fábrica está dada por $CMq = 6q^2 - 3q+10$ y el costo total es de 40 unidades monetarias cuando la producción es 2 unidades.

a-) Hallar la función de costo total.

Solución:

$CTq = \int CMq *dq$

$= \int (6q^2 - 3q+10)\, dq$

$= 2q^3-3/2q^2+10q + C$

$CT_{(2)} = 2*2^3-3/2*2^2+10*2+C$

$40 = 22 + C$

$\underline{C = 18}$

Rta: La función de costo total está dada por la expresión $CTq = 2q^3-3/2q^2+10q + 18$.

7- GANANCIA

Ganancia total (G): por definición la ganancia total es igual al ingreso total menos el costo total.

G= IT-CT= P*Q-CT

Relación con el IM y el CM: para maximizar la ganancia, la empresa debe buscar el precio y la cantidad de equilibrio, P* y Q* que le reporten el máximo beneficio, es decir la mayor diferencia entre IT y CT. Este precio y cantidad de equilibrio son aquellos con los que el ingreso marginal es igual al costo marginal.

IM=CM con una Q* y un P* de máximo beneficio.

Ejemplo 17 (Aplicación de la derivada de funciones de una variable)

En una empresa monoproductora en estudio, la función de costos está dada por $CT = Q^2+Q+15$ y su función de ingresos está determinada por los precios, según la expresión $P = 40-1/2Q$.

a-) Determine qué ganancia obtiene la empresa cuando produce 10 unidades.

b-) ¿A qué nivel de precios y con qué cantidad de producción encuentra la empresa el máximo beneficio? Calcule su valor.

c-) Analice el inciso anterior gráficamente.

Solución:

a-) $G = IT-CT$

$G = 40Q-1/2Q^2 -(Q^2+Q+15)$

$G =39Q-1.5Q^2-15$

$G =39*10-1.5*10^2-15$

$\underline{G =\$225}$

$IT = P*Q$

$IT = (40-1/2Q)*Q$

$IT = 40Q-1/2Q^2$

Rta: Si la empresa produce 10 unidades obtendrá una ganancia de $225.00.

b-) La ganancia máxima se obtiene cuando:

IM=CM	IM= (IT)’	CM= (CT)’
$40-Q=2Q+1$	$IM= (40Q-1/2Q^2)'$	$CM=(Q^2+Q+15)'$
$40-1=2$	$IM= 40-Q$	$CM= 2Q+1$

39=3Q

Q =13u

Sustituir Q =13 en P:

P=40-1/2*13

P=$33.5

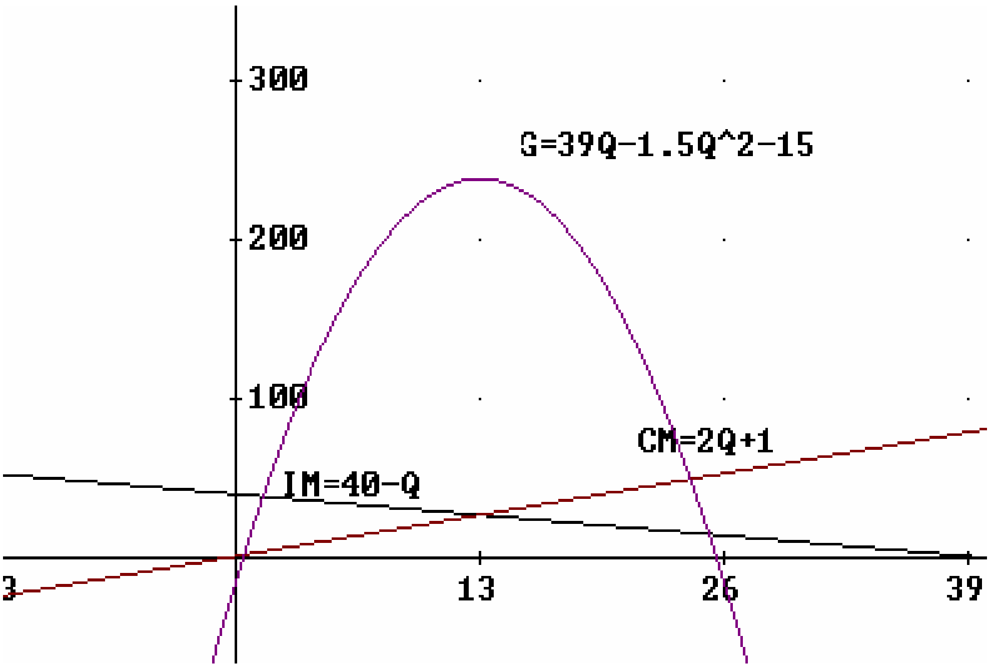
Sustituir Q =2 en G:

$G=39*13-1.5*13^2-15$

G=$238.5

Rta: La empresa debe producir 1 unidades y debe vender a $33.5 por unidad para obtener el máximo beneficio de $238.5.

c-)



Ejemplo 18 (Aplicación de la integral definida)

La función de ganancia marginal está dada por $GM = 60+3q^2+10q$.

a-) Calcular la ganancia total cuando la producción está en el intervalo (2;5).

b-) Realizar el inciso anterior gráficamente.

Solución

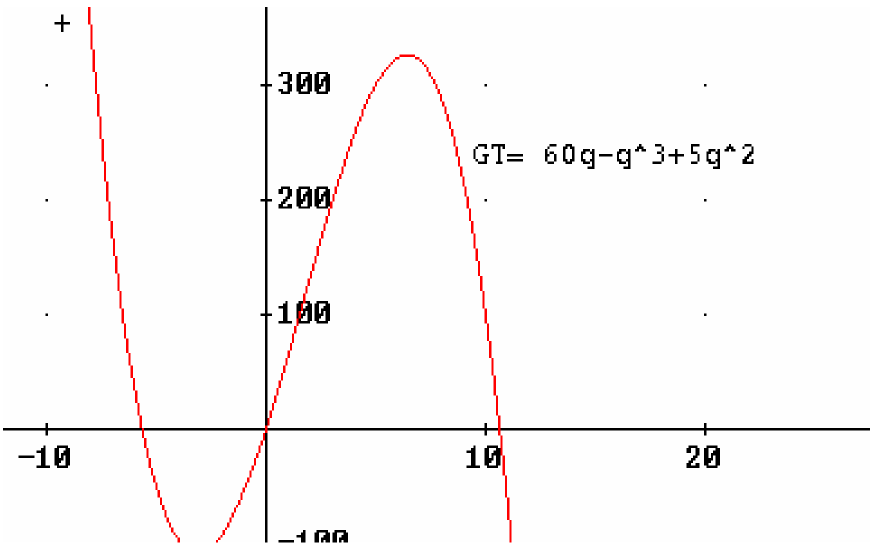
a-) GT = ∫ G'q *dq

$= \int 60+3q^2+10q$

$= 60q-q^3+5q^2 /_{2}^{5} = \underline{\$168}$

Rta: La ganancia total es de $168 cuando la producción está en el intervalo dado.

b-)



8- PRODUCCIÓN

Función de producción: Es la relación entre la cantidad máxima de producción que puede obtenerse y los factores necesarios para obtenerla.

Producto marginal de un factor: Es el producto adicional que se obtiene mediante una unidad adicional de ese factor, manteniéndose constantes los demás.

$PMa_L = \delta q/\delta l$ $PMa_K = \delta q/\delta k$

Ley de los rendimientos decrecientes: El producto marginal de cada unidad del factor disminuye a medida que aumenta la cantidad de ese factor, manteniéndose todo lo demás constante.

Regla del costo mínimo:[1] Para obtener un nivel dado de producción con el menor costo posible, una empresa debe comprar factores hasta que iguale el producto marginal por peso gastado en cada factor de producción. Eso implica que:

Pma_l / Precio de l = Pma_k/ Precio de k

Ejemplo 19 (Aplicación de la derivada de funciones de varias variables)

Considerando que en la elaboración de derivados de la harina intervienen los siguientes factores de producción:

l- mano de obra

m- materias primas

k- otros medios

La función de producción está dada por la expresión: $Q(l,m,k) = 10k\sqrt{lm} + 2k/m + 50$

a-) Calcular las productividades marginales respecto de cada uno de los factores de producción para el valor (4,4,1). Interpretar los resultados.

b-) Si la cantidad de factor m empleado aumenta en 5 unidades y las cantidades de los otros factores se mantienen. ¿Qué sucederá?

Solución

a-) $\delta q/\delta l = 10k\sqrt{m}/2\sqrt{l}$ - Evaluar en (4,4,1)

$= 10*1*\sqrt{4}/2*\sqrt{4} = 5$

$\delta q/\delta k = 10\sqrt{lm} + 2/m$

$= 10*\sqrt{4*4} + 2/4 = 40.5$

$\delta q/\delta m = 10k\sqrt{l}/2\sqrt{m} - 2l/m^2$

$= 10*1*\sqrt{4}/2*\sqrt{4} - 2*4/4^2 = 4.5$

Rta: La producción aumenta ante el incremento en el consumo de los tres factores de producción.

[1] Esta regla es, en la Teoría del Productor la equivalente a la Condición de equilibrio en la elección del consumidor, enunciada anteriormente en este trabajo.

b-) Evaluar en (4,9,1)

$\delta q/\delta l = 10*1*\sqrt{9}/2*\sqrt{4} = 7.5$

$\delta q/\delta k = 10*\sqrt{(4*9)} +2/9 = 60.22$

$\delta q/\delta m = 10*1*\sqrt{4}/2*\sqrt{9} - 2*4/9^2 = 3.232$

Rta: Al incrementarse la cantidad consumida de m, disminuye el producto marginal de ese factor, mientras que el del resto de los factores aumenta.

Ejemplo 20 (Aplicación de la derivada de funciones de varias variables)

La función de producción de una empresa es Q(l,k) = k2l3. Se conoce además que el precio de los factores es 6 y 8 respectivamente y que la cantidad consumida del factor trabajo es 10.

a-) ¿Qué cantidad de factor capital debe comprar la empresa si decide hallar el equilibrio?

b-) Si la empresa decide contratar el doble de las unidades del factor **l.** ¿qué sucederá con el factor **K**?

Solución

a-) Regla del costo mínimo:

$Pma_l / Pl = Pma_k / Pk$ $\qquad Pma_{l = 3l2k2}$

3l2k2/6 = 2kl3/8 $\qquad Pma_{k = 2kl3}$

k/2 = l/4

k = 2l/4 Sustituir l = 10

<u>K = 5</u>

Rta: Para encontrarse en el estado deseado la empresa debe comprar 5 unidades del factor capital.

b-) k/2 = l/4

k = 2l/4 Sustituir l = 20

<u>k = 10</u>

Rta: Si la empresa decide contratar el doble de las unidades del factor trabajo, debe comprar también el doble del factor capital, para poder mantener el equilibrio.

9- EXCEDENTE DEL PRODUCTOR

Excedente del productor: Diferencia existente entre los precios a los cuales los productores están dispuestos a vender sus productos y los que reciben en realidad.

EP = $q_0 p_0 - \int_0^{q_0} P dq$ donde P - función de oferta

po - precio que pagamos

q0- cantidad que compramos

Ejemplo 21 (Aplicación de la integral definida)

Si la función de oferta es P = $(q-2)^2$ y el precio por unidad en el mercado es 9.

a-) Calcular el excedente del productor.

b-) Obtener la solución gráfica.

Solución

- Cálculo de qo:

P = $(q-2)^2$ $p_0 q_0 = 5*9 = 45$

9 = $q^2 - 4q + 4$

0 = $q^2 - 4q - 5$

0 = (q+1) (q-5)

q = 5 q= -1 Se desecha esta solución pues carece de sentido económico

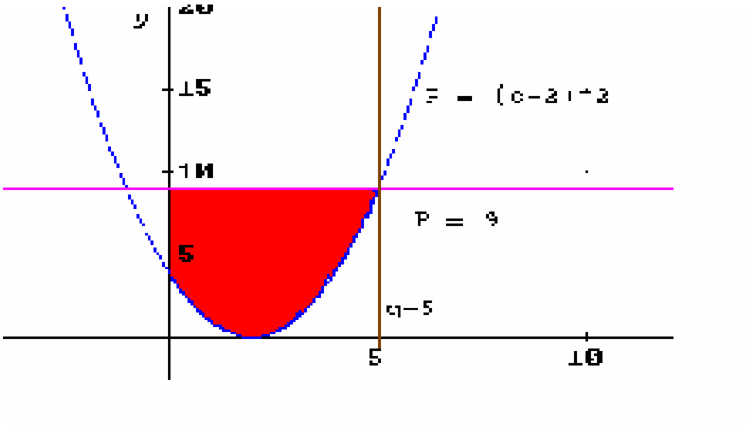
a-)

$$EP = q_0 p_0 - \int_0^{q_0} P dq = 45 - \int_0^5 (q-2)^2 dq = 45 - \int_0^{q_0} (q^2 - 4q + 4) dq = 45 - (q^3/3 - 2q^2 + 4q) \Big|_0^5$$

$$= 45 - (5^3/3 - 2*5^2 + 4*5 - 0) = 33.34$$

Rta: El excedente del productor es de $33.34

b-)



ELEMENTOS DE MACROECONOMIA

10- CONSUMO Y AHORRO

Función de consumo (C): muestra la relación entre el nivel de gasto de consumo y el nivel de renta personal disponible.

El consumo es C = Co+bY, donde Co es el consumo independiente del nivel de renta y b es el incremento que tiene esta función por cada peso adicional de renta, que además en la pendiente de la recta que representa a la función de consumo .

Propensión marginal a consumir (PMC): es la cantidad adicional que consumen los individuos cuando reciben un peso adicional de renta.

PMC= C'= (Co+bY)'= b

Función de ahorro (S): muestra la relación entre el nivel de ahorro y la renta. Del supuesto de que la renta es igual al consumo más al ahorro, se obtiene que

S= (Co)+(1-b)Y.

Propensión marginal a ahorrar (PMA): es la cantidad adicional que ahorran los individuos por cada dólar de renta adicional de renta que reciben.

PMA = S'= [(Co)+(1-b)Y] ' = 1-b =a

-Relación entre PMC y PMA:

Cada dólar adicional de renta pasa a incrementar el consumo o el ahorro. Combinando estos hechos, se calcula la PMC y la PMA: a+b = 1

Ejemplo 22 (Aplicación de la derivada de funciones de una variable)

En una economía con solo dos sectores: empresas y domésticos, la función de consumo se comporta según la expresión C = 40+0.6Y.

a-) Determine la PMC. Explique su significado.

b-) Si la función de ahorro está dada por la expresión S= (40)+0.4Y. Determine la PMA.

Solución:

a-) PMC = C'

PMC = (40+0.6Y)'

PMC = 0.6

Rta: Los sectores de la economía dedican $0.6 al consumo por cada peso adicional de renta.

b-) PMA = S'

PMA = [(40)+0.4Y]'

PMA = 0.4

Rta: Dedican al ahorro $0.4 por cada peso adicional de renta.

Ejemplo 23 (Aplicación de la integral indefinida)

La propensión marginal al ahorro es $S'(Y) = 1-1/2Y^{-1/3}$. El ahorro total es cero cuando el ingreso es 8.

a-) Hallar la función de ahorro.

Solución

$S(Y) = \int S'(Y) * dY$

$= \int (1-1/2Y^{-1/3})\, dY$

$= Y - 3\ \sqrt[3]{Y^2} + C$

$S(8) = 8- 3\ \sqrt[3]{8^2} + C$

$0 = 8-12 + C$

<u>C= 4</u>

Rta: La función de ahorro total es $S(Y) = Y - 3\ \sqrt[3]{Y^2} + 4$.

Ejemplo 24 (Aplicación de la integral indefinida)

La propensión marginal al consumo es $C'(Y) = 20\ e^{-0.2Y}$. El gasto en consumo total es 60 cuando el ingreso es cero.

a-) Hallar la función de consumo.

Solución:

$C(Y) = \int C'(Y) * dY$

$= \int (20\ e^{-0.2Y})\, dY$

$= -20/\ 0.2e^{-0.2y} + C$

$C(0) = -100/e^{-0.2*0} + C$

$60 = -100 + C$

<u>C = 160</u>

Rta: La función de consumo está dada por la expresión $C(Y) = -20/\ 0.2e^{-0.2y} + 160$.

11- EJEMPLOS INTEGRADORES

Ejemplo 25

Dada la función de demanda p = 8-3q y la función Cme = q-3+2/q de un monopolista.

a-) Represente las funciones de los costos e ingresos totales.

b-) Represente las funciones de los costos e ingresos marginales.

c-) Determine el valor de producción que maximiza la ganancia. Halle su valor. Corrobore estos resultados en los incisos anteriores.

d-) Calcule la elasticidad de la demanda para q =1 y q =2. Determine para que valor de producción la demanda es unitaria.

Solución:

a-) Función de costos totales:

Cme = CT/q

CT = Cme*q

CT = (q-3+2/q)*q

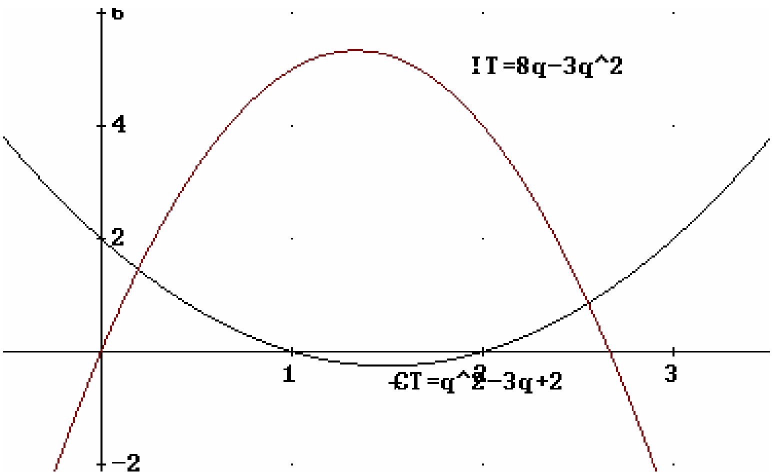
CT = q^2-3q+2

Función de ingresos totales:

IT = P*q

IT = (8-3q)*q

IT = 8q-3q^2



b-) Función de costo marginal:

Función de ingreso marginal:

$CM = (CT)'$

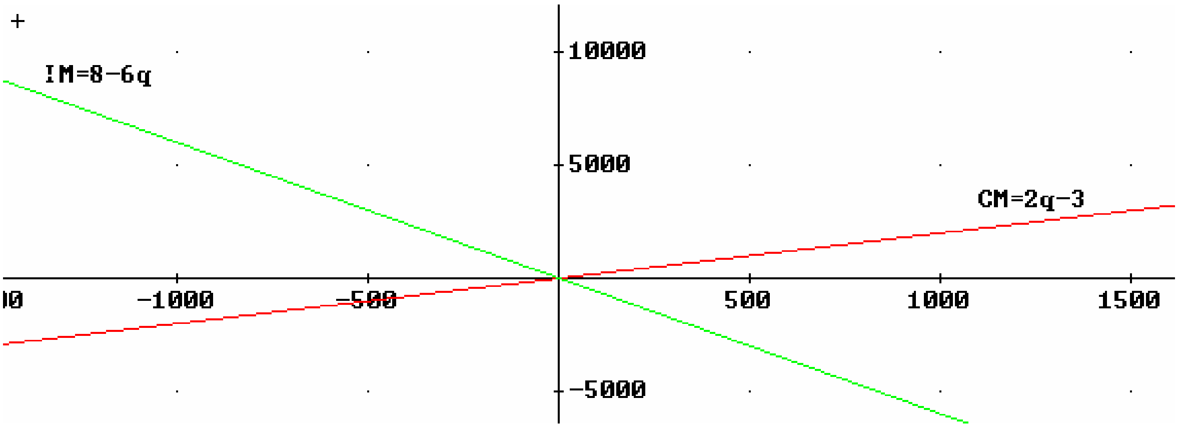
$CM = (q^2-3q+2)'$

$CM = 2q-3$

$IM = (IT)'$

$IM = (8q-3q^2)'$

$IM = 8-6q$



c-) La ganancia máxima se obtiene cuando:

$IM = CM$

$8-6q = 2q-3$

$8+3 = 2q+6q$

$11 = 8q$

$\underline{1.375\ u = q}$

Función de ganancias totales:

$GT = IT - CT$

$GT = (8-3q) - (q^2-3q+2)$

$GT = 6 - q^2$

Sustituir q = 1.375 en GT:

$GT = 6- (1.375)^2$

$\underline{GT = \$\ 4.10}$

Rta: Con una producción de 1.375 unidades se obtiene el valor de ganancia máxima de $4.10.

d-) $E(d,p) = - p/d * d'(p)$ $d'(p) = -1/3$

$E(d,p) = -p/ (p-8)/-3 * (-1/3)$

$E(d,p) = -p/ (p-8)$

Para q= 1 Para q =2

$p = 8-3*1 = 5$ $p = 8-3*2$

$E(d,p) = -5/5-8 = 1.66$ $E(d,p) = -2/2-8 = 0.33$

Rta: Para q= 1 y para q= 2 la elasticidad de la demanda es elástica.

Demanda unitaria :

$E(d,p) = 1$ $p = 8-3q$

$E(d,p) = -p/ (p-8)$ Sustituir p =4

$1 = -p/ (p-8)$ $4 = 8-3q$

$p-8= -p$ $\underline{q = 1.33 \text{ u}}$

$p =4$

Rta: Para q= 1.33 la demanda es unitaria.

Ejemplo 26

Una empresa industrial determinó que sus funciones de ingresos y costos totales para uno de sus productos son $4q^2-q$ y $3q^2+2q-20$. Se desea obtener:

a-) El nivel de producción que maximiza la ganancia. El valor de esta y el precio al que debe venderse el producto.

b-) El nivel de producción que maximiza el ingreso y el valor correspondiente de la ganancia.

Solución:

a-) La ganancia máxima se obtiene cuando:

$IM = CM$ $IM= (IT)'$ $CM=(CT)'$

$8q-1 = 6q+3$ $IM= (4q^2-q)'$ $CM= (3q^2+2q-20)'$

$8q-6q = 3+1$ $IM= 8q-1$ $CM= 6Q+3$

$2q = 4$

$\underline{q = 2 \text{ u}}$

La función de ganancia es:

$GT = IT-CT$

$GT = (4q^2-q)- (3q^2+2q-20)$

$GT = q^2-4q+20$

Sustituir q =2 en la función de GT:

$GT = 2^2-4*2+20$

$\underline{GT = \$16.00}$

La función de ingresos es:

$IT = P*q$

$IT/q = P$

$(4q^2-q)/q = P$

$4q-1 = P$

Sustituir q =2 en la función de precios:

$P = 4*2-1$

$\underline{P = \$7.00}$

Rta: El nivel de producción que maximiza la ganancia es de 2 unidades, se obtiene una ganancia de $16.00, vendiendo cada unidad a un precio de $7.00.

B-) El ingreso máximo se obtiene cuando:

$IM = 0$

$8q-1 = 0$

$\underline{q = 1/8 \text{ u}}$

Sustituir q = 1/8 en GT:

$GT = (1/8)^2-4*1/8+20$

$\underline{GT = \$19.51}$

Rta: El nivel de producción que maximiza los ingresos es de 1/8 unidades. Para este valor de producción se obtiene una ganancia total de $19.51.

Ejemplo 27

Se conoce que el precio y la cantidad de equilibrio para una empresa son $(P^e,q^e) = (30,6)$ y la función de costos marginales es $C'(q) = q^2 +10$.

a-) Obtener la expresión de la función de costos totales si la empresa tiene una ganancia de $100 cuando alcanza el equilibrio.

Solución

$CT(q) = \int C'(q)*dq$ - Calcular para q= 6

$= \int (q^2 +10)\, dq$

$= q^3/3 +10q + C$

$= 6^3/3+10*3+C$

$= 132 + C$

IT = P*q = 30*6 = 180

GT = IT – CT

100 = 180 – (132+C)

<u>C = 52</u>

Rta: La función de costos totales está dada por la expresión CT(q) = $q^3/3 +10q + 52$.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

Colectivo de Autores. 1997. Fundamentos de Optimización Matemática para la Economía y la Empresa con Derive y Mathematica en un entorno Windows. Editorial RA-MA.P. 150-210.

Colectivo de Autores. 1997. Matemáticas en la Economía y la Empresa con Derive y Mathematica en un entorno Windows. Editorial RA-MA. P. 397-405

Enciclopedia Microsoft® Encarta® 2000. © 1993-1999 Microsoft Corporation.

Fernández, Celia. 1998. Fundamentos matemáticos y su aplicación económica. La Habana. p. 26-31, 64-67, 99-102

Miller, R. 1988. Microeconomía. P. 102-104, 118-120, 178-180, 620-624. Editorial McGraw-Hill.

Samuelson, P. Economía I, II, III y IV. España. p.58,79-102, 113-115, 130-134,144-154, 152-154, 196-205.

Samuelson, P. Economía V, VI y VII. España. P. 534-539.