# 7

# Modelos de utilidad discreta

Generalmente las elecciones de los consumidores involucran elecciones discretas como usar gas o no, usar energía eléctrica o no, comprar un automóvil o no, etc.

En los capítulos anteriores hemos considerado a un individuo que elige una alternativa de un conjunto de elecciones finitas A. Si en A se cumplen los axiomas de completitud, reflexividad y transitividad, y dado que A es finita, entonces una alternativa óptima $a^* \in A$ para el individuo está definida como la alternativa $a^* \geq a \; \forall \; a \in A$, por lo cual es posible encontrar una función de utilidad que represente las preferencias individuales,esto es, existe una función $U(\cdot)$ que satisface la propiedad $U(a^*) \geq U(a)$ si y solo si $a^* \geq a$ cuando la alternativa $a^*$ maximiza U sobre A.

La anterior aproximación ha sido criticada por sicólogos como Thurstone (1927), Luce y Supes (1955), Tversky (1969) y por economistas como Georgescu-Roegen (1958), Quandt (1956) y Macfadden (1981, 1986), ya que implica fuertes postulados sobre el poder discriminatorio de los agentes, así como una capacidad ilimitada de procesar información.

Para Tversky, cuando se realiza una elección entre varias alternativas, las personas parten de experiencias inciertas e inconsistentes. Esto es, las personas no están seguras sobre cuál alternativa deberían seleccionar, así como tampoco toman siempre la misma elección bajo condiciones parecidas. Este comportamiento, aparentemente irracional, lleva al autor a concluir que "el proceso de elección debe ser visto como un proceso probabilístico" (Tversky, 1972, p. 281).

Naturalmente, deberemos preguntarnos qué factores determinan dicha probabilidad. Es decir, el comportamiento de los agentes es intrínsecamente probabilístico o el modelador no puede representar el comportamiento del consumidor, o ambos. Con respecto a lo primero, Quandt (1956) arguye que una alternativa puede ser vista como un conjunto finito de características, donde las preferencias son definidas directamente sobre las características e indirectamente sobre las alternativas.

Para Quandt, puede que las personas, en alguna ocasión, consideren algunas características de una alternativa y/o cometan un error al evaluar la importancia de una característica asociada con una alternativa; de esta forma, las circunstancias bajo las cuales las elecciones son efectivamente realizadas pueden "perturbar" la percepción y/ o la deseabilidad de una alternativa. Quandt cita el siguiente ejemplo: Un hombre que compra vino, podría comprar una botella sin tener en cuenta la cosecha, pero ante la presencia de un catador de vinos él podría comprar un vino de mejor cosecha; de esta forma, el comportamiento individual podría cambiar de acuerdo con factores externos, sin que las preferencias individuales sobre las características hayan cambiado. Desde este punto de vista, el proceso de elección es intrínsecamente probabilístico.

Para Manski (1977), la falta de información lleva al modelador a determinar reglas probabilísticas de elección en los individuos más que la falta de racionalidad.

Ambas interpretaciones llevan a un esquema probabilístico donde se pueden diferenciar dos familias de modelos: La primera familia parte de que la regla de decisión es estocástica mientras la utilidad es determinística (Luce, Tversky). La segunda familia parte de una regla de decisión determinística mientras la utilidad es estocástica (Macfadden, Thurstone). Ambas familias pueden distinguirse a través de la naturaleza del mecanismo aleatorio que gobierna la elección.

Otra aproximación es realizada por Machina (1985), para quien el individuo maximiza una utilidad determinística definida sobre loterías en el conjunto de elección. En la aproximación de Machina la utilidad se define sobre las loterías, y las probabilidades de estados alternativos de la naturaleza provienen exógenamente[17].

## 7.1. Reglas de decisión

### 7.1.1. Modelos con regla de decisión estocástica

La interpretación proviene de Tversky (1972a), para quien la utilidad de diferentes alternativas es determinística, pero el proceso de elección en sí mismo es probabilístico. En este tipo de modelos el individuo no necesariamente elige la alternativa que da la mayor utilidad; en lugar de esto, existe una probabilidad de elegir cada una de las posibles alternativas, incorporando la idea de "racionalidad limitada" dado que los individuos no necesariamente seleccionan lo que es mejor para ellos [Macfadden (1981, pp.198)].

El primer modelo desarrollado bajo esta perspectiva es el de Luce (1959). Luce muestra que cuando las probabilidades de elección satisfacen los axiomas de elec-

17. Los primeros trabajos originales al respecto, se deben a Von Newman y Morgensten (1944); posteriormente Pratt (1964) y Arrow (1971), desarrollan las famosas medidas de aversión al riesgo Arrow-Pratt, y Machina(1985), trabaja la generalización de la utilidad esperada.

ción, una escala puede ser definida sobre las alternativas, de tal forma que las probabilidades de elección pueden ser derivadas de escalas de alternativas.

El modelo de Luce tiene como inconveniente que una nueva alternativa, que sea más que proporcional a las otras, reducirá las probabilidades de elección de alternativas existentes que son similares y causará reducciones menos que proporcionales en las probabilidades de elección en alternativas diferentes (Anderson, et. al, pp. 23-25).

Tversky (1972), propone que la elección de una alternativa puede verse como un proceso estocástico, en el cual las alternativas son sucesivamente eliminadas hasta que quede solamente una; para esto supone que cada alternativa está compuesta por una lista de características, las cuales son binarias en términos de que las alternativas poseen o no dichas características (por ejemplo, un automóvil puede o no tener aire acondicionado, sonido, etc.). En el caso de características que no sean estrictamente binarias (verbi gracia, el número de kilómetros recorridos por galón), Tversky sugiere usar niveles de umbrales, por ejemplo si el carro puede alcanzar más o menos 30 Kilómetros por galón, para convertirlas en binarias.

A cada característica se le asigna una escala positiva o valor de "utilidad" expresando la importancia de la característica para el individuo. El proceso de selección de una alternativa es el siguiente: Primero, una característica se selecciona y todas las alternativas que no posean esta característica son eliminadas del conjunto de elección. Segundo, se selecciona como el criterio para eliminar aquellas alternativas que quedan y así sucesivamente. Si una alternativa queda, ésta es la alternativa elegida por el individuo. Si varias alternativas quedan, ellas son elegidas con igual probabilidad. La probabilidad de seleccionar una característica como el criterio de elección de las alternativas que quedan depende de la escala de valores. Como podrán existir secuencias de eliminación diferentes, la probabilidad de elegir una alternativa particular es la suma de las probabilidades de todas las secuencias que finalizan con esta alternativa. Esta aproximación es muy parecida a la ordenación de preferencias lexicográficas, sin embargo, es diferente debido a que el orden de selección de las características es aleatorio mientras éste viene dado a priori en el modelo lexicográfico.

Para ilustrar el proceso de eliminación de Tversky considere el siguiente ejemplo: Existen tres alternativas A = { a, b, c } y siete características i = 1,2,...,7. Cada característica se asocia con una escala de utilidad $\mu_i$. Las alternativas en A son discretas, por lo cual:

$a = ( U_1, 0 , 0 , U_4 , U_5 , 0 , U_7 )$
$b = ( 0 , U_2 , 0 , U_4 , 0 , U_6 , U_7 )$
$c = ( 0 , 0 , U_3 , 0 , U_5 , U_6 , U_7 )$

Donde cero indica que la alternativa no posee la característica. Dado que la última característica $U_7$, está presente en todas las alternativas, ésta no es considerada en el proceso de eliminación. Simplificando, a partir de $K = \sum_{i=1}^{S} U_i$ deberá mostrarse como $P_i$ ( a ) se determina. La alternativa a puede ser elegida si la primera característica es seleccionada, dado que no está presente en b o en c. Este evento se debe asumir que ocurre con probabilidad $\frac{U_1}{K}$ . Si la característica cuarta o quinta es una de las seleccionadas, entonces la alternativa a podrá ser seleccionada como la probabilidad de seleccionar la cuarta característica que tiene una probabilidad $\frac{U_4}{K}$, entonces c es eliminado pues no posee esta característica, la alternativa a se elegirá por lo tanto con una probabilidad P( a , b ). La quinta característica es seleccionada con probabilidad $\frac{U_5}{K}$ y si este evento ocurre b es eliminado y a es elegido con probabilidad P( a , c ). Dado que el proceso de selección de la primera característica es un evento mutuamente excluyente, tendremos:

$$(7.1) \quad P_A(a) = \frac{\left[U_1 + U_4 P(a,b) + U_5 P(a,c)\right]}{K}$$

Donde $P(a,b) = \dfrac{U_1 + U_5}{U_1 + U_2 + U_5 + U_6}$ y $P(a,c) = \dfrac{U_1 + U_4}{U_1 + U_3 + U_4 + U_6}$

Observe que en P( a , b ) la característica cuatro es común en a y b, por lo cual se elimina. De igual forma en P( a , c ) la característica cinco es común en b y c . El procedimiento mostrado por Tversky se resume en los siguientes pasos:

Paso 1: Elimine las características comunes a todas las alternativas.
Paso 2: Seleccione una de las características que permanecen.
Paso 3: Elimine las alternativas que no poseen esta característica.
Paso 4: Deténgase si las alternativas que quedan tienen la misma característica, de otra forma regrese al paso 2.

Formalmente, suponga que existe una función U no negativa que especifica la utilidad para cada característica y denótese S como el número de características que están presentes después de haber eliminado las características comunes a las alternativas en el conjunto de elección $S \subseteq A$. Finalmente, sea $S_i$ el conjunto de las alternativas contenidas en S que contienen las características i, i = 1, 2, ..., S. En el modelo de Eliminación por Aspectos (EBA) propuesto por Tversky, la probabilidad de que la alternativa $a \in S$ sea elegida vendrá dada por:

$$(7.2) \quad P_S(a) = \sum_{i=1}^{S} \frac{U_i}{\sum_{j=1}^{S} U_j} P_{si}(a)$$

Cuando todas las características son comunes a todas las alternativas en S y $P_S(a) = \frac{1}{|S|}$ donde $|S|$ es el número de elementos en S. Como se puede observar (7.2) es recursivo, esto es, $P_S(a)$ es el peso de la suma de las probabilidades $P_{si}(a)$ donde a ha sido elegido del conjunto de $S_i$ alternativas teniendo las características i en común, i = 1, 2, ..., S. Los pesos $\frac{U_i}{\sum_{j=1}^{S} U_j}$ k, representan las probabilidades de seleccionar las características j = 1, 2, ..., S y las probabilidades $P_{si}(a)$ son definidas por (7.2).

## 7.1.2. Modelos con utilidad estocástica

Existen dos versiones tradicionales de los modelos de utilidad estocástica. El primero proviene de Thurstone a partir de la teoría sicológica de la elección individual y el segundo proviene de Macfadden en la versión económica de la elección discreta.

El modelo de Thurstone tiene su origen en una serie de experimentos donde se les preguntaba a los individuos acerca de comparar intensidades de estímulos físicos, por ejemplo, el rango de tonos en términos del ruido. Dada la variabilidad en las respuestas, Thurstone propone que un estímulo provoca una "sensación" o un estado sicológico que es la realización de una variable aleatoria. De esta forma, "las utilidades se asumen que varían de un momento a otro , y el proceso de decisión consiste en una regla fija de escoger la alternativa con la mayor utilidad momentánea" Edgell y Geisler (pp. 266).

Considere un individuo compuesto por varios homo-económicos. Cada tipo obedece a la teoría neoclásica, y dependiendo del estado de la mente del individuo un homo-económico en particular es seleccionado, por lo cual el individuo se comporta racionalmente según una utilidad determinística. De acuerdo con esta aproximación, los valores de las alternativas en A deberán ser considerados como variables aleatorias, $U_1 + \varepsilon_1$ ,..., $U_n + \varepsilon_n$ , las variables $U_1$ ,..., $U_n$ son escalas de valores asociados a alternativas constantes mientras que $\varepsilon_1$ ,..., $\varepsilon_n$ son variables aleatorias. Suponga que la función de distribución acumulativa de $\varepsilon = (\varepsilon_1,.., \varepsilon_n)$ es continua con respecto a la medida de Lebesque [ $Pr(\varepsilon_i - \varepsilon_j = \alpha = 0)\ \forall\ \alpha$ constante e $i \neq j$ ]. Si $\varepsilon_i$ tiene media cero (de lo contrario la media de $\varepsilon\iota$ puede ser adicionada al escalar $\mu_i$ ), las probabilidades del conjunto de elección vienen determinadas por:

$$(7.3)\quad P_A(i) = Pr\left[\mu_i + \varepsilon_i = \max_{j=1,\dots,n}(U_j + \varepsilon_j)\right],\ i = 1,\dots,n$$

La versión de Macfadden es conceptualmente diferente: considere una población de individuos haciendo la misma elección sobre el conjunto A y determine la fracción de la población que elige una alternativa determinada. La población total puede ser dividida en subpoblaciones tales que cada subpoblación sea homogénea con respecto a ciertos factores socioeconómicos observables (ingreso, edad, profesión, etc.). Cada individuo se supone que tiene una función de utilidad determinista U definida sobre A. Sin embargo, el modelador podrá observar imperfectamente las características que influencian las decisiones individuales y entonces tendrá un conocimiento imperfecto de la función de utilidad U. La función U se descompone en dos partes, una parte: $\mu$ que representa la parte conocida de la utilidad y definida sobre las características observables, y la otra parte, e, que representa la diferencia entre U y $\mu$ . Para cada i = 1, 2, ..., n la utilidad deseada de la alternativa i puede escribirse como:

(7.4 ) $U_i = \mu_i + e_i \ , \ e_i \sim ( 0 , \sigma^2 )$

Pensando que el comportamiento es determinístico, para el modelador es imposible predecir exactamente la elección del individuo dado que él no puede ser observado. Esto es posible, ya que cada miembro difiere de los otros en la subpoblación considerada con respecto a las características no observables y los factores que influencian al individuo en su elección. De esta forma, $U_i$ puede ser modelado como una variable aleatoria:

(7.5) $\bar{U}_i = U_i + \varepsilon_i$

Aquí $\bar{U}_i$ es la utilidad observable y refleja las preferencias de la subpoblación para la i-ésima alternativa y $\varepsilon_i$ toma en cuenta las diferencias entre los gustos en los individuos de la subpoblación. La probabilidad de que un individuo aleatoriamente seleccione la alternativa i viene dada por:

(7.6 ) $P_A(i) = Pr(\bar{U}_i = \max_{j=1,\dots,n} \bar{U}_j)$ , i = 1,...,n

Existen diferentes fuentes de incertidumbre: características no observables, variaciones no observables en las utilidades individuales, desconocimiento de la cantidad de características observables y finalmente, especificación funcional errónea [Manski (1977)]. El modelador podría estar satisfecho si pudiera agrupar una población y si en la función puede incluir los principales factores observables. Podemos observar entonces que aun cuando entre (7.3) y (7.6) existen diferencias epistemológicas, a un nivel agregado, como observa Macfadden, las "variaciones intraindividuales e interindividuales en los gustos son indistinguibles en su efecto sobre la distribución observada en la demanda" (pp. 205), lo cual indica que (7.3) y (7.6) tienen las mismas probabilidades de elección. Consideremos a una población de individuos, los cuales son estadísticamente idénticos e independientes, lo cual significa que las elecciones están gobernadas por la misma distribución de probabilidades, aunque las elecciones actuales difieran entre los individuos. Esto implica que la probabilidad de un individuo de elegir una alternativa particular es independiente de las elecciones realizadas por otros individuos. Bajo este supuesto, la distribución de elección es multinomial con media $\bar{X}_i$ dada por $\bar{X}_i$ = N PA( i ) , i = 1,2,...,n , la cual es la demanda esperada para la alternativa i. Si N es suficientemente grande, $\bar{X}_i$ es una buena aproximación de la demanda agregada, dado que la desviación estándar de la distribución de la función de demanda decrece a una razón $1/\sqrt{N}$ .

## 7.2. Funciones de densidad para elecciones discretas

Para determinar las probabilidades de elección, se deberá especificar la distribución de las variables aleatorias $\varepsilon_i$. Estas probabilidades para una serie de distribuciones, como la del modelo de probabilidad lineal, del Logit, el Probit y el Multinomial, se conocen como modelos de elección binaria. Sea f(X), la densidad $\varepsilon$ donde $\varepsilon \equiv \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ tendremos:

( 7.7 ) $P_A(1) = \int_{-\infty}^{U_1-U_2} f(x)dx$

Donde (7.7) es el valor de la función de densidad acumulativa de $\varepsilon$ sobre $U_1 - U_2$.

Supongamos que $\varepsilon$ esté distribuido uniformemente en el intervalo [-L , L] , entonces:

(7.8 ) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2L}, \; Si \; X \in [-L, L] \\ 0, \; De \; otra \; forma \end{cases}$$

Por lo cual la probabilidad de elección para la alternativa 1 será:

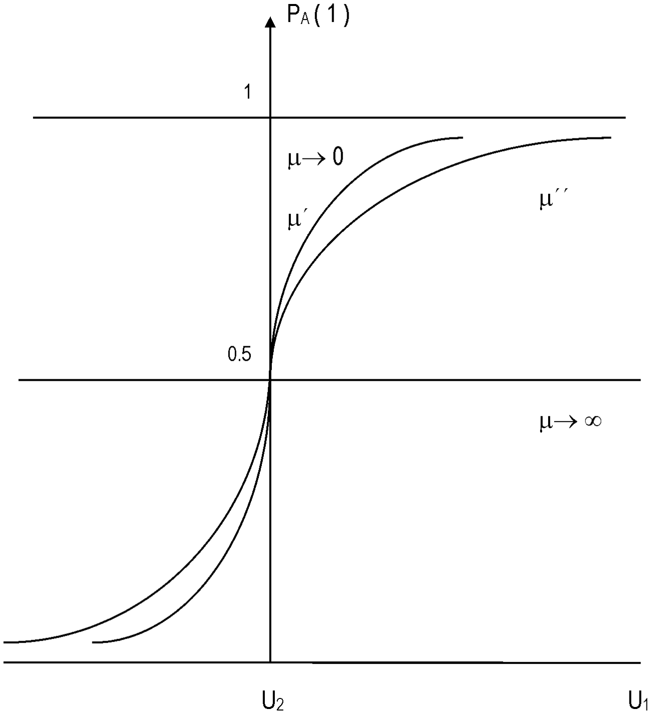
(7.9 ) $$P_A(1) = \begin{cases} 0, \; Si \; U_1 - U_2 < -L \\ \dfrac{U_1 - U_2}{2L} + \dfrac{1}{2}, \; Si - L \leq U_1 - U_2 \leq L \\ 1, \; Si \; L < U_1 - U_2 \end{cases}$$

Este modelo es conocido como el Modelo de Probabilidad Lineal, ya que la probabilidad (7.9) es lineal sobre el intervalo [ -L , L ]. Consideremos ahora que $\varepsilon$ se distribuya normalmente y que $\varepsilon_1$ y $\varepsilon_2$ se pueden ver como variables independientes no observables. Suponga que $\varepsilon_1 \sim ( 0,\sigma_1^2 )$ y $\varepsilon_2 \sim ( 0,\sigma_2^2 )$ y que la covarianza entre $\varepsilon_1$ y $\varepsilon_2$ estará dada por $\sigma_{12}$ , entonces $\varepsilon \sim ( 0 , \sigma_{12} + \sigma_2^2 - 2\sigma^{12} )$ y obtenemos:

(7.10 ) $$PA ( 1 ) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{U_1+U_2} e^{\left(\frac{-X^2}{2\sigma^2}\right)} d\,x$$

El cual es un Probit. Si asumimos que $\varepsilon$ se distribuye logísticamente, la función de la distribución para $\varepsilon$ viene dada por $\dfrac{1}{1+e^{\left(\frac{-X}{\mu}\right)}}$, la media de $\varepsilon$ es cero y su varianza es $\dfrac{\pi^2\mu^2}{3}$. La probabilidad de elegir 1 viene dada por el Logit definido como:

$$(7.11)\quad P_A(1) = \frac{1}{1+e^{\left[\frac{(-U_1-U_2)}{\mu}\right]}}$$




GRÁFICA 7.1. Modelo Probit.

La gráfica anterior se define para valores de $0 < \mu' < \mu'' < \infty$. La pendiente sigmoidal de la curva es más pronunciada para valores mayores de $\mu$. La curva tiene un punto de inflexión en $\mu' - \mu''$ donde $P_A(1) = ½$. $P_A(1)$ es decreciente o creciente en $\mu$ cuando $U_1$ es mayor o menor que $U_2$. Un modelo de elección determinístico inicialmente se puede definir entre los siguientes tres modelos: Probabilidad Lineal, Probit y Logit. Para $L \to 0$ en (7.9) con $U_1 \neq U2$, $P_A(i) = 1$ si y sólo si $U_i = \max\{U_1, U^2\}$. Este también es el límite para el modelo Probit cuando $\sigma \to 0$ y en el Logit cuando $\mu \to 0$. Cuando L, $\sigma$ y $\mu$ tienden a infinito, el comportamiento individual es impredecible completamente y entonces $P_A(1) = P_A(2) = ½$.

## 7.3. Funciones de utilidad y funciones indirectas de utilidad

Un individuo consume de acuerdo con una función de utilidad definida sobre los bienes $X_1,......X_n$ y Z, siendo Z el numerario. La utilidad del consumidor podría también depender de una serie de atributos de los bienes $X'_s$ denotadas por $b_1,.....b_n$, los cuales son tomados exógenamente; adicionalmente las preferencias podrían depender de características propias como la educación, la raza, la cultura, la edad..., etc., representadas por el vector S[18]. De esta forma, la función de utilidad se escribirá compactamente como U( X, b, Z, S, ε), donde ε es una variable aleatoria con alguna función de densidad conjunta $f\in\ (\varepsilon_1,..... \varepsilon_n)$, sobre U. Un supuesto adicional consiste en que los X's sean mutuamente excluyentes, esto es, un individuo no puede rentar su casa y vivir allí mismo por lo cual $X_i\ X_j\ =\ 0\ \forall\ i\neq j$.

Suponga que el consumidor decide consumir solamente el bien j; condicionado sobre esta decisión, su función de utilidad será una función de $X_j$ y Z, por lo cual la utilidad vendrá definida por:

$$(7.12)\quad \overline{U} = U\left(0,...,0\ ;\ X_j;0,..,0\ ;\ b_1,...,b_n\ ;\ Z;\ S;\varepsilon\right)$$

Suponiendo que existe débil complementariedad, la utilidad directa condicional puede escribirse como:

$$(7.13)\quad \overline{U} = U_j\left(X_j, b_j, Z, S, \varepsilon\right)$$

El consumidor maximiza sobre la restricción tradicional de presupuesto y no negatividad para $X_j$ y Z. Asumiendo estricta cuasiconcavidad en $U_j$, en relación con $X_j$ y Z la solución viene dada por $X_j > 0$. Las funciones de demandas Marshallianas ordinarias serán:

$$(7.14)\quad X_j = \overline{X}_j\left(p_j, b_j, Y, S, \varepsilon\right)$$

$$\overline{Z} = Z\left(p_j, b_j, Y, S, \varepsilon\right) = Y - p_j\,\overline{X}_j\left(p_j, b_j, Y, S, \varepsilon\right)$$

Y la función indirecta de utilidad vendrá dada por:

$$(7.15)\quad \overline{V}_j\left(p_j, b_j, Y, S, \varepsilon\right) \equiv \overline{U}_j\left(\overline{X}_j(\,p_j, \overline{U}_j, Y, S, \varepsilon), b_j, \overline{Z}_j\left(p_j, b_j, Y, S, \varepsilon\right) S, \varepsilon\right)$$

Siendo $\overline{V}_j$ cuasiconvexa, decreciente en $p_j$ y creciente en Y. Usando la identidad de Roy para encontrar la demanda marshalliana obtenemos:

18. La introducción de S se debe originalmente a los trabajos de Pollack y Wales (1979).

$$(7.16)\quad \bar{X}_j\left(p_j,b_j,Y,S,\varepsilon\right) = \frac{-\partial \bar{V}_j\left(p_j,b_j,Y,S,\varepsilon\right)/\partial p_j}{\partial \bar{V}_j\left(p_j,b_j,Y,S,\varepsilon\right)/\partial Y}$$

Las Cantidades $\bar{X}_j, \bar{Z}$ y $\bar{V}_j$ son cantidades conocidas para el consumidor pero dado que las preferencias se observan incompletamente, éstas serán variables aleatorias desde el punto de vista del investigador. Sea $\bar{X}_j, \bar{Z}$ y $\bar{V}_j$ la densidad conjunta de $\bar{V}_1,..,\bar{V}_n$ denotada por $f_\varepsilon(\cdot)$ y $F_{\bar{V}}(.)$ la distribución acumulativa. Si la elección discreta, por medio de la cual un bien puede ser seleccionado se representa por un conjunto binario de índices de valores de la forma:

$$(7.17)\quad \delta_1,\ldots,\delta_N = \begin{cases} \delta_j = 1, & si \quad X_j > 0 \\ \delta_j = 0, & si \quad X_j = 0 \end{cases}$$

Entonces la elección puede ser expresada en términos de las funciones condicionadas de utilidad indirecta como:

$$(7.18)\quad \delta_j\,(p,b,Y,S,\varepsilon) = \begin{cases} 1 \quad ; \quad si \ : \bar{V}_j\left(p_j,b_j,Y,S,\varepsilon\right) \geq \bar{V}_i\left(p_i,b_i,Y,S,\varepsilon\right) \quad \forall i \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad , \quad De \quad otra \quad forma \end{cases}$$

Para el observador, los índices discretos de elección son variables de medición $E(\delta_j)=\pi_j$ que vienen dados por:

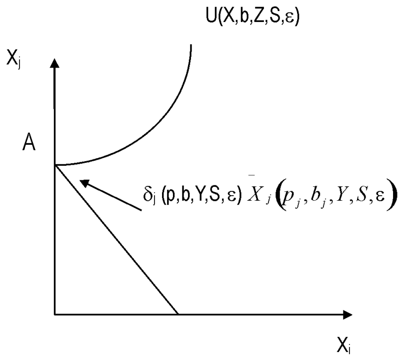
$$(7.19)\quad \pi_j(p,b,Y,S,\varepsilon) = \begin{aligned} & Prob\left\{\bar{V}_j\left(p_j,b_j,Y,S,\varepsilon\right) \geq \bar{V}_i\left(p_i,b_i,Y,S,\varepsilon\right) \forall i\right\} \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\bar{V}}^{\,j}(u,\ldots,u)\,\partial u \end{aligned}$$

Donde $F_{\bar{V}}^{\,j}$ es la derivada de $F_{\bar{V}}(\,.\,)$ con respecto a su i-ésimo argumento. De (7.18) nosotros sabemos que las demandas están condicionadas a la existencia de los índices, por lo cual:

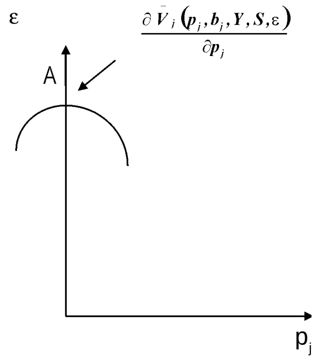
$$(7.20)\quad X_j\,(p,b,Y,S,\varepsilon) = \delta_j\,(p,b,Y,S,\varepsilon)\bar{X}_j\left(p_j,b_j,Y,S,\varepsilon\right) \ \forall\ j=1,\ldots..,N$$

$$V(p,b,Y,S,\varepsilon) = \max[\bar{V}_1\left(p_1,b_1,Y,S,\varepsilon\right),\ldots\ldots\ldots,\bar{V}_N\left(p_N,b_N,Y,S,\varepsilon\right)]$$

Dado que V(.) es cuasiconvexa, la solución de esquina puede representarse como:




GRÁFICA 7.2.




GRÁFICA 7.3.

En el punto A, gráfica (7.3), la utilidad indirecta al precio j es máxima. A estos precios se cumple (7.17), y dada la función de utilidad, la demanda de $X_j$ cuando $\delta_j = 1$ se obtiene en el punto A, gráfica (7.2). Para encontrar las distribuciones de probabilidades de $X_j$ y V, suponga que existe un conjunto $A_j \equiv \{\varepsilon | \bar{V}_j(p_j, b_j, Y, S, \varepsilon) \geq \bar{V}_i(p_i, b_i, Y, S, \varepsilon) \forall i\}$; j=1.....N;

de fε se puede construir como $f_{\varepsilon|\varepsilon \in A_j}$, esto es, la densidad conjunta de $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N$ dado que $\varepsilon \in$ Aj y cuando el bien j es seleccionado, la probabilidad de densidad de $\bar{X}_j$ $f_{X_j|\varepsilon \in A_j}(X) = Pr\{X_j = X | \varepsilon \in A_j\}$, puede ser obtenida de $f_{\varepsilon|\varepsilon \in A_j}$

De esta forma, la probabilidad de densidad de $X_j$, f $X_j$ (X) = Pr { $X_j$=X} tomará la forma:

(7.21) $$f_{x_j}(X) = \begin{cases} 1 - \Pi_j; X = 0 \\ \Pi_j f_{X_j|\varepsilon \in A_j}(X); X > 0 \end{cases}$$

Así, una vez especificado el modelo, uno puede construir las densidades $F_{\bar{V}}$ y $f_{\varepsilon|\varepsilon \in A_j}$ las cuales son usadas en la función de probabilidades de elección discreta y las densidades condicionadas y no condicionadas de las $X_j$´s. Por ejemplo, si N fuese igual a dos se puede establecer que:

(7.22) $$X = \begin{cases} \dfrac{-\partial \bar{V}_1(p_1, b_1, Y, S, \varepsilon)/\partial p_1}{\partial \bar{V}_1(p_1, b_1, Y, S, \varepsilon)/\partial Y}; Si \bar{V}_1(p_1, b_1, Y, S, \varepsilon) \geq \bar{V}_2(p_2, b_2, Y, S, \varepsilon) \\ \\ \dfrac{-\partial \bar{V}_2(p_2, b_2, Y, S, \varepsilon)/\partial p_2}{\partial \bar{V}_2(p_2, b_2, Y, S, \varepsilon)/\partial Y}; \text{ De otra forma} \end{cases}$$

Cuando hay T individuos y j * es el índice seleccionado por el i-ésimo individuo y $X_t$* el consumo observado sobre este índice para un individuo, la función de verosimilitud para la muestra vendrá dada por:

$$(7.23)\quad L=\prod_{t=1}^{T} f_{X_{j^*t}}(X_t^*)=\prod_{t=1}^{T}\left\{ f_{X_{j^*t}}|_{\varepsilon\in A_{j^*t}}(X_t^*)\Pi_{j^*t}\right\}$$

En principio (7.23) puede ser obtenido por máxima verosimilitud, sin embargo Haneman(1984) sostiene que en la práctica las ecuaciones normales podrían tener múltiples raíces, y a menos que se comience con un estimador inicial consistente, no existe garantía de convergencia a un máximo global. Usualmente se sugiere el procedimiento de dos etapas de Heckman, esto es, encontrar por máxima verosimilitud, usando un Logit, el conjunto de parámetros que serán consistentes pero no eficientes dado que ellos ignoran la información contenida en datos continuos; con estos parámetros, uno puede entonces obtener estimadores consistentes de $(\lambda_i / \mu)_t$ y realizar una regresión para elecciones continuas donde el modelo vendría determinado por:

$$(7.24)\quad LnP_{j^*}X_{j^*}=Ln\theta_t+\eta Y_t+(\rho-1)(\mu Ln\sum e^{\left(\frac{\lambda_i}{\mu}\right)_t}+0.5722\mu)+V_i;t=1,..,T$$

Con $V\tau$´s iid, EV($\mu$,-0.57222$\mu$) ; E($V_t$)=0 ; Var $V_t = \dfrac{\Pi^2\mu^2}{6}$ .

Finalmente, se puede usar la subrutina Maxlik del programa gauss y obtener estimadores eficientes, o usar el programa LIMDEP.

## 7.4. Elecciones discretas con productos diferenciados

El consumidor representativo es un agente cuya utilidad nos muestra un conjunto de preferencias diversas. Ya que en la práctica los consumidores tienden a comprar, solamente una, o en todo caso muy pocas de las variantes de un producto que se les ofrece, el consumidor representativo ha sido bastante criticado[19]. Como bien lo han señalado Archival, Eaton y Lipsey (1986), la cuestión sobre cuándo el consumidor representativo puede constituir una descripción agregada válida de una población de consumidores caracterizados por elecciones discretas en el ámbito individual es un punto de discusión abierto.

En este sentido, el interés principal de esta sección, consistirá en mostrar cómo encontrar un consumidor representativo para una población de consumidores que realizan elecciones discretas, dados unos supuestos sobre el proceso de elección o

19. Lo que produce soluciones de esquina o en el caso de que el consumidor adquiera más de una variante soluciones interiores.

la elección de probabilidades y cuáles serían las propiedades de la función de utilidad correspondiente.

Suponga que existen m+1 bienes y N consumidores estadísticamente idénticos e independientes. El bien 0 es perfectamente divisible y se toma como numerario. Los bienes i= 1, 2, ....., m son los variantes de un producto diferenciado a los precios $p_1, ..., p_m$. Sea A el conjunto de variantes donde la variante i se asocia a un índice de calidad $a_i$[20]. Cada consumidor tiene un ingreso real Y con el que puede comprar una unidad de una variante singular. Asuma que $0 \leq p_i \leq Y$ lo cual asegura que cada variante es alcanzable por todos los consumidores. Suponga también que la función indirecta de utilidad derivada de la compra de la variante i viene dada por la siguiente forma aditiva:

(7.25) $\bar{v}_i = Y - p_i + a_i + \varepsilon_i \; ; \; i = 1, ..., m$

Donde $\varepsilon_i$ son las n variables aleatorias con una densidad f(x) y $x = x_1, ..., x_n$. La probabilidad de que un consumidor seleccione la variante i, viene dada por:

(7.26) $P_i = \text{Prob}[\, a_i - p_i + \varepsilon_i = \max_{j=1,..,m} (\, a_j - p_j + \varepsilon_j)\,]$

$= \text{Prob}[\, a_i - p_i + \varepsilon_i = \max_{j=1,..,m} (\, a_j - p_j + \varepsilon_j)\,]$

Lo que se conoce como utilidad aleatoria (LRUM). La demanda esperada para la variante i, se define como:

(7.27) $X_i = NP_i$

La estructura particular de LRUM depende del modelo en cuestión. Suponga un modelo multinomial, entonces la probabilidad de que un individuo elija una variante i viene dada por:

(7.28) $P_i(a-p) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{u_i+x-u_1} \cdot \;\cdot\; \cdot \int_{-\infty}^{u_i+x-u_m} \times f(z_1 \ldots \; x \ldots \; z_m) \partial z_m \ldots \; \partial z_1 \partial x$

La función (7.28) deberá satisfacer las siguientes propiedades:

Primera Propiedad: $\int_{-\infty}^{p_2} \cdots \int_{-\infty}^{p_m} \frac{\partial^{m-1} P_1(a_1 - p_1, ..., a_m - p_m)}{\partial p_2 \ldots \partial p_m} \partial p_m \ldots \partial p_2$. deberá cumplirse también para $P_m$.

20. El índice de calidad $a_i$ resume todas las características observables de la variante i. De esta forma, si la variante i tiene varias características observables y los consumidores tienen valoraciones idénticas e independientes entonces $a_i$ es el producto de las características observables con las valoraciones de los consumidores.

Segunda Propiedad: $\frac{\partial P_i}{\partial p_j} = \frac{\partial P_j}{\partial p_i}; i, j = 1....m, i \neq j.$

Tercera propiedad: Para algún $\theta \in \Re$, $P_i[a - (p + \theta)] = P_i(a - p)$, i = 1...m. Donde $p + \theta$ es un vector con componentes $p_j + \theta$, j = 1,...,m.

Cuarta propiedad: $\underset{(a_i - p_i) \to \infty}{Lim} P_i = 1$; i=1...m, con $a_j - p_j$ finito y $j \neq i$.

Por la primera propiedad se tiene que las variantes de los productos diferenciados son débilmente sustitutas, lo cual significa que $\frac{\partial P_i}{\partial p_j} > 0; i, j = 1....m, i \neq j.$. Por la segunda propiedad se garantiza la igualdad de las derivadas cruzadas de los precios. De (7.27) conocemos que la demanda es independiente del ingreso. Si estas demandas son el resultado de la maximización individual, entonces las derivadas cruzadas representan los efectos sustitución en la matriz de Slutzky. La tercera propiedad significa que la probabilidad depende solamente de las diferencias en precios. La cuarta propiedad significa que todos los consumidores eligen una variante i con certeza cuando esta variante es infinitamente atractiva en términos de la medida de utilidad { $u_i = a_i - p_i$ } cuando las otras utilidades son finitas.

De la primera propiedad, se puede deducir la función de distribución acumulativa y la función de densidad, las cuales se definen como:

(7.29) $F(z_1,..., z_m) = \int_{-\infty}^{z_1} P_1(0, t - z_2, ..., t - z_m)\psi(t)\partial t \geq 0$

Donde $\psi(t)$ será una probabilidad de densidad univariada y derivando (7.29) encontramos la siguiente función de densidad:

(7.30) $f(z_1,..., z_m) = \frac{\partial^{m-1} P_1(0, z_1 - z_2, ..., z_1 - z_m)}{\partial z_2 ... \partial z_m} \psi(z_1) \geq 0$

Combinando ( 7.30 ) con (7.28) genera las probabilidades $P_1...P_{m.}$

## 7.4.1. La función de demanda para un continuo de consumidores

Considere un continuo de consumidores igual a N cada uno con gustos determinísticos. Un consumidor tiene un ingreso Y y compra una unidad de una variante de un producto diferenciado. La función de utilidad indirecta condicionada viene dada por:

(7.31) $V_i = Y - p_i + a_i + e_i$ ; $i = 1, ..., m$

Donde $e_1 ... e_m$ describe las valoraciones de un consumidor para un conjunto de variantes. Cada conjunto de valoraciones define un tipo de consumidor. Aunque los índices de cualidades $a_1,...,a_m$ son comunes a todos los consumidores, las valoraciones son individuales y toman valores diferentes para consumidores diferentes. Las valoraciones se distribuyen sobre $\Re^m$ de acuerdo con la siguiente función de densidad:

(7.32) $g(e) \equiv Nf(e)$

Donde f(e) es la densidad de probabilidades de $\varepsilon_1 ... \varepsilon_m$. Por construcción $\int_{\Re^m} g(e)de = N$.

El segmento de mercado para la variante i se puede definir como:

(7.33) $S_i \equiv \{ e \in \Re^m ; V_i(e) \geq V_j(e) , j = 1,...,m. \}$

Mostrando el conjunto de tipos para los cuales la variante i es débilmente preferida sobre todos los otros. De esta forma, la demanda total para i viene definida por:

(7.34) $X_i = \int_{S_i} g(e)de \; ; \quad i = 1,...,m$

La cual es igual al total de consumidores en el segmento de mercado para la variante i. Es importante observar que la función de densidad del consumidor cumple el mismo papel que la función de densidad de probabilidades (7.26). Sin embargo, la diferencia entre (7.26) y (7.34) es sustancial, pues la función derivada de la integración de las utilidades máximas sobre la densidad de probabilidades (7.26) puede ser interpretada como la utilidad esperada del consumidor, mientras que la integral de las utilidades máximas de los individuos sobre la densidad de tipos producirá la función de riqueza a partir de la utilidad. Esta última idea se desarrollará a continuación. Suponga que la función de riqueza derivada de la utilidad se define como:

(7.35) $V = W + \int_{\Re^m} max(a_i - p_i + e_i)g(e)\partial e \quad ; \quad i = 1,...,m$

Donde W = NY es el ingreso agregado. Note primero que V satisface las características propias de la función indirecta de utilidad (cap. 2, sec. 2.4.1, pag 20):

| | | |
|---|---|---|
| Primera propiedad | : | V es continua en $p_i$ y W. |
| Segunda propiedad | : | V no es creciente en $p_i$ y es creciente en W. |
| Tercera propiedad | : | V es convexa en $p_i$. |
| Cuarta propiedad | : | V es homogénea de grado cero en todos los precios e ingreso. |

La propiedad tercera se sigue del hecho de que la integral de funciones convexas es convexa,[21] la cuarta propiedad se mantiene en tanto $p_1,..,p_m$ y W se encuentran en términos reales al dividir por el precio del bien 0, el cual es el bien numerario. Dado que las utilidades individuales son lineales en el ingreso, la utilidad marginal del ingreso es igual a uno para todos los individuos. Lo cual significa que un cambio en cualidades o precios que aumentan a V aumentará las transferencias de ingreso en todos los consumidores situándoles mejor que antes del cambio en precios o ingreso. El segundo término de (7.35) puede usarse para cuantificar los cambios en el excedente del consumidor atribuible a cambios en precios y cualidades, lo cual se puede ver también como una medida del beneficio del consumidor de introducir una nueva variante.

## 7.4.2. El consumidor representativo multinomial

Suponga un consumidor con una función de utilidad aleatoria $\bar{v}_i = Y - p_i + a_i + e_i$ . Las demandas esperadas vendrán dadas por:

$$(7.36) \quad X_i = N\frac{exp[(a_i - p_i)/\mu]}{\sum_{j=1}^{m} exp[(a_j - p_j)/\mu]} \text{ ; i = 1,...,m.}$$

A través de (7.35) la función de utilidad indirecta para un consumidor representativo, se puede definir como:

$$(7.37) \quad V = W + N\mu Ln\left[\sum_{j=1}^{m} exp\left(\frac{a_j - p_j}{\mu}\right)\right]$$

Con el fin de ilustrar estas funciones, suponga el caso de que m=2 las demandas serán:

$$(7.36.1) \quad X_i = N\frac{exp[(a_i - p_i)/\mu]}{exp[(a_1 - p_1)/\mu] + exp[(a_2 - p_2)/\mu]} \text{ ; i = 1, 2.}$$

Dado que las demandas para las variantes son independientes del ingreso y dependen multiplicativamente de N, debe esperarse una función de utilidad directa de la forma:

$$(7.36.2) \quad U = Nu(x_1, 1 - x_1) + X_0$$

21. Cuando se normaliza con el precio del bien 0 V es cuasiconvexa en todos los precios ( $p_0, p_1,...,p_n$) [Anderson, de Palma y Thisse (1992), (1995)].

Donde $x_1 \equiv X_1 / N$ y $X_0$ es el consumo del bien numerario. Suponga que la restricción presupuestaria viene dada por:

$$(7.36.3) \quad Y = \sum_{i=1}^{2} p_i X_i + X_0$$

Y sustituyendo $X_0$ de (7.36.3) en (7.36.2) se obtiene:

$$(7.36.4) \quad U = Nu(x_1, 1 - x_1) + Y - p_1 N x_1 - p_2 N(1 - x_1)$$

Tomando las condiciones de primer orden, se encuentra que:

$$(7.36.5) \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} = (p_1 - p_2)$$

De (7.36.1) se observa la condición:

$$(7.35.6) \quad \frac{x_1}{1 - x_1} = exp\left[\frac{(a_1 - p_1) - (a_2 - p_2)}{\mu}\right]$$

Que también se puede ver como:

$$(7.36.7) \quad p_1 - p_2 = a_1 - a_2 - \mu[Ln\ x_1 - Ln\ (1 - x_1)]$$

Sustituyendo (7.36.7) en (7.36.5) e integrando para recobrar u:

$$(7.36.8) \quad u(x_1, 1 - x_1) = a_1 x_1 + a_2(1 - x_1) - \mu[x_1 Ln\ x_1 - (1 - x_1) Ln\ (1 - x_1)]$$

Donde la constante de integración deberá ser igual a $a_2$. A través de (7.36.2) se tiene que la función de utilidad indirecta será:

$$(7.36.9) \quad V = N(a_1 x_1 + a_2(1 - x_1) - \mu[x_1 Ln\ x_1 - (1 - x_1) Ln\ (1 - x_1)] + X_0$$

Dado que cada consumidor compra una unidad de una variante en el modelo de utilidad aleatorio, el consumidor representativo comprará N unidades. Esto bajo el supuesto de que la utilidad tiende a $-\infty$ para otros consumos.

Finalmente, una función de utilidad para un consumidor representativo con demandas tipo Logit multinomiales vendrá dada por:

$$(7.38) \quad V = \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_i X_i - \mu \sum_{i=1}^{m} X_i (LnX_i - LnN) + X_0 & Sí \quad \sum_{i=1}^{m} X_i = N \\ -\infty & De \quad otra \quad forma \end{cases}$$

El Lagrangiano para el problema de la maximización del consumidor se define como:

$$(7.39) \quad L = \sum_{i=1}^{m} a_i X_i - \mu \sum_{i=1}^{m} X_i (LnX_i - LnN) + X_0 + \lambda_1 (\sum_{i=1}^{m} X_i - N) + \lambda_2 (Y - X_0 - \sum_{i=1}^{m} X_i)$$

Donde $\lambda_1$ y $\lambda_2$ son los multiplicadores Lagrangianos de las restricciones. Dado que los precios e ingreso son tales que el consumo óptimo del bien numerario es positivo $\lambda_2 = 1$, el conjunto de primeras condiciones para $X_i$ será:

$$(7.40) \quad a_i - \mu(Lnx_i + 1) - p_i + \lambda_1 = 0, i = 1,...,m$$

La condición (7.40) puede escribirse también como:

$$(7.41) \quad x_i = \exp(-1 + \lambda_1/\mu) \exp(a_i - p_i) / \mu , i = 1,...,m$$

Si hacemos $\sum_{i=1}^{m} X_i = 1$ se encuentra que $\exp(1 - \lambda_1/\mu) = \sum_{i=1}^{m} \exp(a_i - p_i) / \mu$, de donde se sigue que las demandas multinomiales representadas por (7.36) son similares a (7.41).

## 7.5. Análisis de riqueza

En un análisis continuo se puede encontrar el excedente del consumidor a través de integrar la curva de demanda compensada entre dos precios. Sin embargo, en el análisis discreto existirán puntos de discontinuidad y no-diferenciación en la función indirecta de utilidad y en la función de gasto, por lo tanto existirán problemas al integrar las funciones. La demanda se podría modelar, como observan Small y Rosen (1981), a través de tres aproximaciones:

Primero, pensar que los bienes son disponibles en cantidades continuas, pero solamente en un pequeño número de variedades mutuamente excluyentes; un ejemplo sería una casa: usted podría alquilarla o vivir en ella, pero solamente la posesión de la misma le daría una cantidad continua de usos para ser consumidas, como clavar puntillas para colgar cuadros, pintarla de todos los colores y las veces que usted quisiera, etc.

Segundo, los bienes pueden son disponibles en unidades discretas entre más consumidores elijan una o dos unidades, como en el caso del transporte para trabajadores, los colegios, las antenas parabólicas, y en general muchos bienes durables.

Tercero, los bienes pueden ser comprados en unidades discretas pero debido a las no-concavidades en la función de utilidad, llevaría al consumidor a elegir entre soluciones alternativas de esquina. Por ejemplo, podríamos tener dos o más televisores con diferentes programas cada uno y observarlos al mismo tiempo; sin embargo, ver un sólo programa podría generar mayor utilidad que ver dos programas al mismo tiempo.

A continuación se analizará primero el caso de un modelo con 3 bienes, dos de los cuales son mutuamente excluyentes. Considere un consumidor con una función de utilidad $U=U(X_n,X_1,X_2)$ donde $X_n$ es el bien numerario, la utilidad es finita siempre que $X_1$ o $X_2$ sean cero. Como en el caso estándar, la utilidad se maximiza con la restricción:

(7.42) $X_n+P_1X_1+P_2X_2 = Y$ ; $X_j \geq 0$ (j=1,2,n)

Por último, se requiere que $X_1 X_2 = 0$ y asumiendo soluciones interiores, se llega al siguiente teorema.

## 7.5.1. El teorema de Small y Rosen

Suponga un consumidor que maximiza sujeto a la restricción (7.42) con una función de utilidad dos veces diferenciable y estrictamente cuasicóncava. Asuma que U es finito siempre que $X_1$ o $X_2$ sean cero, y que U es estrictamente creciente en $X_n$ y no decreciente en $X_1$ y $X_2$. Sea $e(P_1,P_2,U)$ el mínimo gasto requerido para alcanzar el nivel de utilidad U y sea $U^\circ = V(p_1^\circ, p_2, Y)$ el valor de la función indirecta de utilidad a los precios iniciales y el ingreso; entonces la variación compensada para un cambio de precios en $p_1$ de $p_1^\circ$ a $p_f^\circ$ viene definido como:

(7.43) $$e(p_1^f, p_2, U^\circ) - e(p_1^\circ, p_2, U^\circ) = \int_{p_1^\circ}^{p_1^f} X_1^c(p_1, p_2, U^\circ)\partial p_1$$

Y la función de demanda compensada para el bien 1 vendrá definida por:

(7.44) $X_1^c(p_1,p_2,U^o)=X_1(p_1,p_2,e(p_1,p_2,U^o))$

Adicionando un continuo de consumidores se obtiene:

(7.45) $$\Delta E = \int_{p_1^\circ}^{p_1^f} X_1^c(p_1, p_2, \{U^i\})\partial p_i$$

Donde $U^i$ es el nivel de utilidad inicial para el i-ésimo consumidor y (7.45) es el excedente del consumidor. Considere ahora el caso de un bien comprado solamente en unidades discretas cuando una gran parte de los consumidores eligen una o dos unidades. Sea la función de utilidad $U(X_n,X_1)$ donde $X_n>0$ y $X_1$ puede tomar valores binarios de 0 y 1. La utilidad se maximiza sujeta a la restricción presupuestaria $X_n + X_1 p_1 = Y$. Si $X_1 = 0$ la cantidad óptima de $X_n$ es igual a Y, esta característica da como resultado una función de gasto $\tilde{e}_n(U)$ condicionada sobre $X_1 = 0$. Si $X_1$ es igual a 1 la función de gasto $\tilde{e}_1(p_1,U)$ se puede encontrar. El punto de máxima utilidad está asociado con el mínimo de estas dos funciones de gasto, entonces:

(7.46) $e(p_1,\bar{U}) = \min \{\tilde{e}_n(\bar{U}), \tilde{e}_1(p_1,\bar{U})\}$

Dado que $\tilde{e}_n, \tilde{e}_1$ son continuamente diferenciables en precios $[\frac{\partial \tilde{e}_n}{\partial p_1} = 0]$ excepto a los precios a los cuales $\tilde{e}_1 = \tilde{e}_2$ y e es continuo y diferenciable, las funciones de demandas serán continuas, pero un conjunto de precios particulares y de ingreso llevarán a soluciones de esquina en el cual el bien no es consumido totalmente.

Se puede observar que el rango de precios estará dividido por $p_1^*(\bar{U})$, esto es, para $p_1 < p_1^*(\bar{U})$ una solución interior en el bien 1 existe. De esta forma, las demandas compensadas y la función de gasto se derivan como $\tilde{X}_n^c$, $\tilde{X}_1^c$, cuando $p_1 \geq p_1^*(\bar{U})$, es por esta razón que una solución de esquina se alcanza y el bien 1 no es consumido; esta solución viene determinada por $\tilde{X}_n^c$ y $\tilde{e}$ por lo cual la restricción presupuestaria requiere solamente que satisfaga la condición:

$$(7.47)\quad \tilde{X}_n^c(p_1,\bar{U}) + p_1(p_1,\bar{U}) = \tilde{e}(p_1,\bar{U}) \text{ sí } p_1 < p_1^*(\bar{U})$$

$$\tilde{\tilde{X}}_n^c(\bar{U}) = \tilde{\tilde{e}}(\bar{U}) \text{ sí } p_1 \geq p_1^*(\bar{U})$$

Donde $p_1^*(\bar{U})$ se define como el precio límite en el cual la demanda se hace cero (precio máximo). De esta forma, la demanda compensada viene definida como:

$$(7.48)\quad X^c{}_n(p_1,\bar{U}) = \begin{cases} \tilde{X}^c{}_n(p_1,\bar{U}), si: p_1 < p_1^*(\bar{U}) \\ \tilde{\tilde{X}}^c{}_n(\bar{U}), \; si: p_1 \geq p_1^*(\bar{U}) \end{cases}$$

Que es continua en $p_1$, de donde se infiere que el $\lim_{p_1 \to p_1^*} \tilde{e}(p_1,\bar{U}) = \tilde{\tilde{e}}(\bar{U})$.

Cuando un bien es comprado en unidades discretas, pero existen no-concavidades en la función de utilidad, el consumidor elige entre soluciones alternativas de esquina. Supongamos una canasta de 3 bienes donde las curvas de indiferencia entre $X_1$, $X_2$ y el bien numerario son convexas, entonces en cada vector de precios el consumo tanto en $X_1$ como en $X_2$ podría ser cero. Los supuestos del teorema de Small y Rosen garantizan que los $U(X_n,0,X_2)$ y $U(X_n,X_1,0)$ sean funciones bien definidas manteniéndose el excedente del consumidor. Resumiendo, el excedente del consumidor se puede encontrar siempre que exista una función de gasto $\tilde{e}(\bar{U})$ dado que dicha función es diferenciable en precios.

## Bibliografía


ARROW, K.J.(1971). Essays in the theory of risk beaning. Chicago:Markham.

ANDERSON, S.P., PALMA, A AND J.F, THISSE. (1995). Discrete choice theory of product differentiation, MIT press, Cambridge Mass.

———-,———, ———.(1992). "Interpretations of the logit discrete choice model in the theory of product differentiation" en J.M.E. Gee and G.Norman (comps.) Market structure and strategy, Hemmel Hempstead: Harvester Wheatsheaf.

ARCHIBALD, G.C AND B.C. EATON AND R.G. LIPSEY. (1986). "Address models of value" en J.E. Stiglitz and F.G, Mathewson (comps.) New developments in the analysis of market structure, Cambridge, MIT Press.

ARROW, K.J (1970A). "Exposition of the theory of choice under uncertainty", in K. J. Arrow, Ensays in the Theory of Risk-Bearing, Amsterdam : North-Holland.

———.(1970b). "The theory of risk aversion", in K. J. Arrow, Essays in the Theory of Risk-bearing, Amsterdam : North-Holland.

DUBIN, J.A AND D.L, MACFADDEN. (1984). "An econometric analysis of residential electric appliance holdings and consumption", Econometrica, vol.52, March, num.2, pp.345-362.

EDGELL, S.E AND W.S, GEISLER. (1980). "A set-theoretic random utility models of choice behavior". Journal of mathematical psychology, 21, pp.265-278.

GEORGESCU-ROEGEN, W. (1958). "Threshold in choice and the theory of demand", Econometrica, vol.26, pp.157-168.

HANEMANN, M.W. (1984). "Discrete/continuous models of consumer demand", Econometrica, vol.52, May, num.3, pp.541-561.

LUCE, R.D AND P, SUPES. (1965). "Preference, utility and subjective probability" en Luce, R.D., Brush, R.R and Galante, E. (comps.) Handbook of mathematical psychology, New York.

LUCE, R.D. (1959). Individual choice behavior: a theoretical analysis. New York: Wiley.

———. (1977). "The choice axiom after twenty years", Journal of mathematical psychology, 15, pp.215-233.

MCFADDEN, D. (1984). "Econometric analysis of qualitative response models" en Z.Griliches (comp.), Handbook of econometrics, vol. 2.

——— .(1981). "Econometric models of probabilistic choice", in structural analysis discrete date, edited by C.F Mansky and D. McFadden. Cambridge Mass: Mit Press.

———. (1986). "The choice theory of market research", Marketing science,5,pp.275-297.

MACHINA, M.J. (1985). "Stochastic choice functions generated from deterministic preferences over lotteries", Economic journal, 95, pp.575-594.

MANSKI, C.F. (1977). "The structure of random utility models", Theory and decision, 8, pp.229-254.

PRATT,J. (1964). "Risk aversion in the small and in the large", Econometrica, 32,pp.122-36.

POLLACK AND T.J WALES. (1979). "Welfare comparisons and equivalence scales", American Economic Review, vol. 69, pp.216-21.

QUANDT, R.E. (1956). "A probabilistic theory of consumer behavior", Quarterly journal of economics, 70, pp.507-536.

SMALL, K.A AND ROSEN, H.S. (1981). "Applied welfare economics with discrete choice models", Econometrica, vol. 49, pp.105-129.

SLUTZKY, E. (1915). " Sulia teoria del bilancio des consomatore", Giornale degli Economisti, vol51, pp.1-26. English trans. In Readings in Price Theory; G.J. Stigler and K.E Boulding (eds.), Chicago University Press,1952.

THURSTONE, L.L. (1927). "A locus of comparative judgement", Psychological review, 34, pp.273-286.

TVERSKY, A. (1972). "Elimination by aspects: a theory of choice", Psychological review, 79, pp.281-299.

———. (1969)."Intrasitivity of Preferences", Psych. Rev. 76, pp.31-48

WILLIG, R. (1976). "Consumer´s surplus without apology", American economic review, vol.66, pp.589-597.

VON NEUMANN, J., AND O. MORGENSTERN.(1944). Theory of games and economic behavior, Princeton University Press, Princeton,New York.