4. Separabilidad

Cuando usted va a comprar alimentos, es natural que destine una parte de su ingreso para la compra de éstos. Al igual como destina parte de su ingreso en comprar alimentos, destinará dinero para alquiler, servicios públicos, ropa, entretenimiento, etc. Observe que esto implica que en cada ítem se agrupe una serie de bienes (por ejemplo alquiler de apartamento, garaje, etc.; ropa: camisas, zapatos, etc., y así sucesivamente). Agrupar los bienes requiere que las preferencias reflejen este agrupamiento. Hace algunos años Sono(1962), Goldman y Usawa (1964) y Pudney (1981), entre otros, observaron que es posible separar las decisiones de los individuos de asignar sus ingresos a una serie de bienes, manteniendo la estructura de preferencias, de las decisiones intertemporales de gastar.

De esta forma, el objetivo de este capítulo consistirá en mostrar cómo manteniendo la estructura de las preferencias es posible separar las decisiones de gastar en cada grupo.

4.1. Estructura de las preferencias

Supongamos que los bienes son particionados en dos subgrupos, con un vector x = (y,z), esto es, $X = Y \times Z$. Para un z fijo se define un orden condicional $\succsim_z$ sobre Y tal que la relación $y \succsim_z y'$ se mantiene si y sólo si $(y,z) \succsim (y',z)$. De esta forma, $\succsim_z$, es una restricción sobre el orden original definiendo un z fijo. Deberá observar que para algún z la relación $\succsim_z$ es de hecho un orden de preferencia sobre Y. Para una partición x = (y,z) si el orden de preferencias condicionado sobre Y es independiente de z, nosotros diremos que y es independiente de z.

4.1.1. Independencia

Suponga un orden de preferencia representado por una función de utilidad u(y,z). Entonces, si y es independiente de z la función de utilidad será:

(4.1) $u(y,z) = U(\nu(y),z)$

Donde $U(\nu,z)$ es estrictamente creciente en ν. Si u es continua y fuertemente monótona, entonces ν y u son continuas.

4.1.2. Débil y fuerte independencia

Suponga la existencia de n bienes particionados en g grupos. Una partición se define como $\{n_1,n_2,\ldots,n_g\}$ con $n_i \cap n_j$ vacío para todo $i \neq j$ y $\bigcup_{i=1}^{g} n_i = N$. Para una canasta de bienes arbitraria $x \in \Re_+^m$ particionada como $x = (x_1,x_2,\ldots,x_g)$ dado algún $i=1,2,\ldots,g$. Sea x_{-i} el vector de bienes en el complemento de n_i, de tal forma que $x_{-i} = (x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_g)$, entonces:

A) Un orden de preferencias es débilmente independiente, con respecto a una partición $\{n_1,n_2,\ldots,n_g\}$, si para cada $i=1,2,..,g$ el vector x_i es independiente de su complemento.

B) Un orden de preferencias es fuertemente independiente con respecto una partición $\{n_1,n_2,\ldots,n_g\}$, si este es débilmente independiente con respecto a la partición $\{n_1,n_2,\ldots,n_g\}$ y, con respecto a las particiones que consisten de todas las uniones de $n_1,\ldots,n_g$ y a los subconjuntos propios de n.

Dado que ν es continua y creciente, $\nu^{-1}u$ es aditiva y representará el mismo orden de preferencias[10]. En general, no se requieren más supuestos excepto cuando $x_1,\ldots x_n$ son consumos en el tiempo 1,...,t. En tal caso se debe usar el principio de Stroz, esto es, la consistencia dinámica de las preferencias.

4.1.3. Separabilidad débil y fuerte

Sea $N = \{n_j\}_{j=1}^{k}$ una partición del conjunto del conjunto $\{1,\ldots,g\}$, y asuma el conjunto de consumo $X = S_1 \times \ldots \times S_k$. Tal partición es apenas natural si el consumo es considerado en varios lugares. La separabilidad implica que las preferencias sobre las canastas en cada elemento de la partición, en la fecha y en el lugar será independiente del nivel de consumo [Barten, A y Böhn, V (1982)].

4.1.3.1. Separabilidad débil

Una función de utilidad $u : \prod_{j \in J} S_j \to \Re$ es débilmente separable, si existe una función continua $u_j : S_j \to \Re$, $j \in J$ y $\nu : \Re^k \to \Re$ tal que $u(x) = \nu(u_1(x_1),\ldots,u_1(x_1))$.

10. Ver Barten, A y Böhn, V. (1982).

4.1.3.2. Separabilidad fuerte

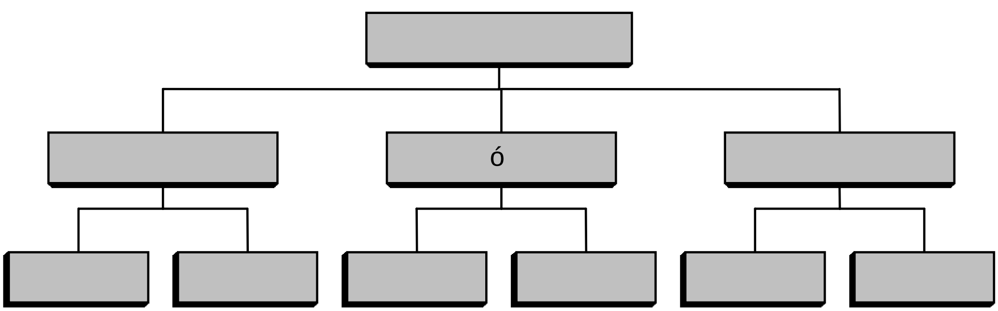
Una función de utilidad $\boldsymbol{u} : \prod_{j \in J} \boldsymbol{S}_j \rightarrow \Re$ es fuertemente separable si existe una función continua $\boldsymbol{u}_j : \boldsymbol{S}_j \rightarrow \Re$, j $\in$ J y $\nu : \Re \rightarrow \Re$ tal que $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \nu(\sum_{j \in J} \boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{x}_j))$.

4.2. Separabilidad de las preferencias

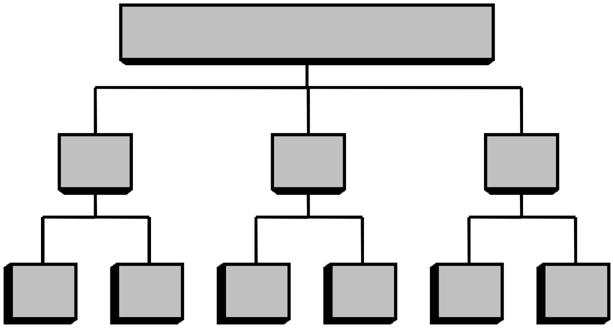
Para definir grupos de bienes o estructuras de bienes, deberemos partir de la definición de separabilidad en torno a las preferencias. Si esto es plausible, los bienes pueden ser particionados en grupos donde las cantidades en un grupo son independientes de las cantidades en otros grupos. Si los alimentos pertenecen a un grupo, el consumidor puede ordenar diferentes canastas de alimentos en un orden bien definido, el cual es independiente del consumo en gasolina, entretenimiento, arrendamientos, y cualquier bien por fuera del grupo. Esto significa que nosotros tendríamos funciones de subutilidades para cada grupo y que los valores de cada subgrupo de utilidades se combinan de tal forma que se puede obtener una utilidad total.

Para una definición más formal, considere J = {1,…,k} y para algún j $\in$ J y x $\in$ X , sea $x_{-i} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_g)$ el vector de componentes diferentes de x_j. Para algún $\bar{\boldsymbol{x}}_{-i}$ fijo, el orden de preferencias $\succsim$, induce un orden de preferencias sobre S_j, el cual está definido por $x_j \succsim_{-i} x'_j$ si y sólo si $(\bar{\boldsymbol{x}}_{-i}, x_j) \geq (\bar{\boldsymbol{x}}_{-i}, x'_j)$ para algún x_j y x'_j en S_j. La primera noción de separabilidad nos indica que los órdenes de preferencias para un elemento particular j de la partición son idénticos para todos los $\bar{\boldsymbol{x}}_{-i}$.

Débil separabilidad de las preferencias: Un orden de preferencias $\succsim$ sobre $\prod_{j \in J} \boldsymbol{S}_j$ es llamado débilmente separable, si para cada j $\in$ J, $x_j \succsim_{\bar{\boldsymbol{x}}_{-i}} x'_j$ implica $x_j \quad _{\bar{\boldsymbol{x}}_{-i}} x'_j$ para todo $\bar{\boldsymbol{x}}_{-i} \in \prod_{j \in J} \boldsymbol{S}_j$. Supongamos el siguiente esquema:



GRÁFICA 4.1. Separabilidad de la función de utilidad.



GRÁFICA 4.2. Presupuesto en dos etapas.

A partir de la gráfica (4.2), se puede plantear la siguiente función de utilidad:

(4.2) $U = \nu(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) = F\ [\ \nu A\ (q_1, q_2), \nu P\ (q_3, q_4), \nu E\ (q_5, q_6)\ ]$

Donde, F(.) es una función creciente y νA, νP, νE son funciones de subutilidades asociadas con alimentos, protección y entretenimiento.

Este diagrama de utilidad nos muestra un presupuesto en dos estados; esto ocurre cuando el consumidor puede asignar el gasto total en las dos etapas. La primera etapa podría caracterizarse como un mayor estado del gasto total en un grupo extenso de bienes como alimentos, protección, entretenimiento, y un segundo estado, más bajo, de bienes individuales como cereales, carne, casa, ropa, internet y deportes. La separabilidad de las preferencias y el presupuesto en dos etapas está íntimamente relacionadas, pero esto no significa que la una implique la otra; lo que sí es cierto es que la separabilidad en (4.2) es necesaria y suficiente para el segundo estado de presupuesto.

Si algún grupo de bienes aparece solamente en una subfunción de utilidad separable, entonces las cantidades compradas en el grupo pueden descomponerse como una función del gasto del grupo y precios con el grupo solamente. Esto se puede ver de la gráfica (4.2). La maximización de la utilidad en (4.2) deberá implicar que νA, νP y νE se maximizan cada una, sujeta a la restricción de cuanto se gasta en alimentos, protección y entretenimiento; si esto no fuese así, ν_A, ν_P y ν_E serán crecientes, violando la restricción presupuestaria.

Los gastos sobre q_1 y q_2 son el resultado de maximizar $\nu_A(q_1, q_2)$ sujeto a $p_1q_1 + p_2q_2 = x_A$ el gasto total sobre el ingreso, así el gasto total en alimentos puede escribirse como:

(4.3) $q_i = g_{Fi}\ (\ x_F, p_1, p_2)\ ;\ i = 1,2$

Donde q_i es la demanda marshalliana para un subgrupo. ¿Qué tipo de relación existe entre la débil separabilidad y el segundo estado? En primer lugar, la separabilidad sobre las preferencias impone restricciones sobre el comportamiento y limita los posibles efectos sustitución entre los bienes en grupos diferentes. En segundo lugar, aparte de los efectos ingreso, un cambio en el precio de los cereales podría afectar las cantidades de gasolina o deporte. Para mantener la consistencia, diremos que los siguientes lemas deben cumplirse:

Lema 1: Las preferencias son débilmente separables intertemporalmente. Este supuesto depende del período de tiempo; es decir, el supuesto implica que la demanda de cada bien, en cada período, es una función del gasto total y precios en cada período.

Lema 2: Si el ocio es débilmente separable de los bienes, la asignación del gasto total es independiente de las decisiones sobre las horas, lo cual es claramente imposible para bienes que sean complementarios totalmente como el ocio y bienes recreacionales como la televisión o entre bienes sustitutos como viajar al trabajo y el ocio; sin embargo, podría ser aceptable para el tamaño de los gastos de los consumidores. En un segundo estado del presupuesto, se deberá usar la débil separabilidad y, la asignación de todo el gasto, sin considerar las horas trabajadas, será válida siempre y cuando todos los bienes sean separables del ocio.

Lema 3: El gasto sobre el bien se relaciona con el gasto y precios del grupo solamente.

Lema 4: Aplicación de racionamiento: Si algún bien o grupo de bienes es racionado y si otro grupo de bienes es separable del bien racionado o del grupo racionado, entonces el efecto del racionamiento sobre los bienes en el grupo separable se hace a través del gasto total en el grupo. Si uno de los bienes es racionado y los otros bienes son separables de éste, el gasto necesario para comprar la ración se deduce simplemente del gasto total, y lo que queda se asigna entre los otros bienes independientemente de la ración. Como ejemplo, tomaremos el ocio: Si un consumidor no tiene elección sobre el número de horas trabajadas y si los bienes son separables débilmente del ocio, lo que se gasta como resultado del ingreso es explicable sin necesidad de usar el número de horas actualmente trabajadas; lo inverso es también importante: Si los bienes no son débilmente separables del ocio y si el consumidor es restringido en las horas trabajadas, las horas trabajadas aparecerán como un argumento exógeno en la asignación del gasto.

4.3. Separabilidad y sustitución intergrupal

La separabilidad débil implica restricción sobre el grado de sustituibilidad entre los bienes, en grupos diferentes. Suponga que las preferencias separables son representadas por una función de utilidad de la forma:

(4.4) $U = F[\nu_1(q_1), \nu_2(q_2), ..., \nu_G(q_G)]$

Con los subvectores $q1,...,q_G$ y una función F(.) creciente en sus argumentos. La anterior función de utilidad implica un subgrupo de demanda o demandas condicionales de la forma:

(4.5) $q_i = g_{Gi}\left(x_G, p_G\right)$; $\forall$ i $\in$ G

Con $x_G = \sum_k p_{Gk}q_{Gk}$ = la cantidad total gastada sobre el grupo G. Ahora suponga, que existe un i $\in$ G y un j $\in$ H donde G $\neq$ H son subgrupos. Si diferenciamos (4.5) con respecto a j, manteniendo constante la utilidad, el efecto será a través de x_G:

(4.6) $$S_{ij} = \frac{\partial q_i}{\partial x_G}\frac{\partial x_G}{\partial p_j}\bigg|_{U constante} \qquad S_{ji} = \frac{\partial q_j}{\partial x_H}\frac{\partial x_H}{\partial p_i}\bigg|_{U constante} = S_{ij}$$

Por simetría,

(4.7) $$\frac{\partial q_i}{\partial x_G}\frac{\partial x_G}{\partial p_j} = \frac{\partial q_j}{\partial x_H}\frac{\partial x_H}{\partial p_i} \Rightarrow \frac{\frac{\partial x_G}{\partial p_j}}{\frac{\partial q_j}{\partial x_H}} = \frac{\frac{\partial x_H}{\partial p_i}}{\frac{\partial q_i}{\partial x_G}}$$

Y como $\frac{\frac{\partial x_H}{\partial p_i}}{\frac{\partial q_i}{\partial x_G}}$ es independiente de j, nosotros podemos representar esta cantidad por λ_{GH}. Haciendo $\frac{\partial x_G}{\partial p_j} = \lambda_{GH}\frac{\partial q_j}{\partial x_H}$ y por (4.6) conocemos que $S_{ij} = \frac{\partial q_i}{\partial x_G}\frac{\partial x_G}{\partial p_j}$, de donde se deduce:

(4.8) $$S_{ij} = \frac{\partial q_i}{\partial x_G}\lambda_{GH}\frac{\partial q_j}{\partial x_H}$$

Y, haciendo $$\mu_{GH}\frac{\partial x_G}{\partial x}\frac{\partial x_H}{\partial x} = \lambda_{GH} \textit{ tendremos que } S_{ij} = \partial q_i \partial q_j \frac{\mu_{GH}\frac{\partial x_G}{\partial x}\frac{\partial x_H}{\partial x}}{\partial x_G \partial x_H}$$

$$\textit{entonces: } S_{ij} = \partial q_i \partial q_j \mu_{GH}\frac{\partial x_G \partial x_H}{\partial x \partial x \partial x_G \partial x_H} \Rightarrow$$

(4.10) $$S_{ij} = \frac{\partial q_i}{\partial x}\frac{\partial q_j}{\partial x}\mu_{GH}$$

La ecuación (4.10) muestra la condición necesaria y suficiente para separabilidad débil. Esta ecuación resume las implicaciones empíricas de la separabilidad. La sustituibilidad entre bienes en grupos diferentes está limitada como es natural. La cantidad μ_{GH} resume la interrelación entre los grupos y es independiente de i y de j.

4.4. Separabilidad y aditividad

La hipótesis de separabilidad [Sono (1962), Leontief (1947)] implica que la utilidad puede ser aditiva o separable. Una función de utilidad es aditiva si cumple:

$$(4.11)\quad U = F\left[u_1(q_1) + u_2(q_2) + \dots + u_g(q_g)\right]$$

Donde las utilidades individuales u_n están en función de las cantidades consumidas y F(.) es una función aditiva de n utilidades. Adicionalmente, una función será aditiva grupalmente si cada función de utilidad está definida por (4.2). Una función es separable si toma la forma (4.4). Pearce(1964) ha mostrado cómo la ecuación de Slutzky, correspondiente a una función de utilidad grupalmente aditiva, tiene la forma:

$$(4.12)\quad K_{ij} = \frac{\partial q_i}{\partial p_j} + q_j\frac{\partial q_i}{\partial Y} = \phi\frac{\partial q_i}{\partial Y}\frac{\partial q_j}{\partial Y} = K_{ji}$$

Para algún $i \in I$, $j \in J$, $I \neq J$, donde K_{ij} son los términos de sustitución del ingreso compensado, q son las cantidades, p los precios, Y el ingreso y θ un escalar. Expresando (4.12) en elasticidades:

$$(4.13)\quad \frac{e_{ij}}{w_j} + E_i = \frac{\phi}{Y}E_iE_j = \theta E_iE_j = \frac{e_{ji}}{w_i} + E_j$$

Haciendo $\theta = \phi/y$ y reescribiendo (4.13) como una restricción no lineal:

$$(4.14)\quad e_{ij} = w_j\theta E_iE_j - w_jE_i$$

Donde e_{ij} es la elasticidad de la demanda para el bien (i) con respecto al precio del bien. E_i es la elasticidad ingreso de la demanda para el bien (i) y $w_j = p_jq_j/Y$ es la proporción del gasto total usada en el bien (j). Donde $1/\phi$ es denominado por Frish (1959) como la "flexibilidad de la utilidad marginal del dinero" y por Barten (1964) como "la elasticidad de la utilidad marginal del dinero". La ecuación de Slutzky para una función de utilidad separable, puede escribirse como:

$$(4.15)\quad \frac{e_{ij}}{w_j} + E_i = \theta_{IJ}E_iE_j = \frac{e_{ji}}{w_i} + E_j = \theta_{JI}E_iE_j$$

Para Pearce (1964) los coeficientes de separabilidad entre grupos θ_{IJ} pueden ser interpretados como la medida del nivel general de sustitución entre diferentes grupos que representan diferentes deseos. Con relación a los trabajos empíricos, se ha llegado a la distinción entre: aditividad, aditividad grupal, y separabilidad. Y, con el fin de presentar un conjunto de restricciones, deberá adicionarse la homogeneidad, la agregación de Engel y la simetría de Slutzky:

(4.16) Homogeneidad $e_{ij} = \left(-\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} e_{ij} \right) - E_i$

(4.17) Agregación de Engel $E_n = \frac{1}{w_n} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{w_j}{w_n} E_j$

(4.18) Simetría Slutzky $e_{ij} = \frac{w_j}{w_i} e_{ji} + w_j E_j - w_j E_i$

(4.19) Separabilidad (o Separabilidad de Pearce) $e_{ij} = w_j \theta_{IJ} E_i E_j - w_j E_i$

Claramente la restricción de separabilidad depende sobre la hipótesis de aditividad y de la agrupación elegida. Deberá observarse que las condiciones locales para que se cumpla la condición de Slutzky implican pequeños cambios bajo el supuesto de que los gustos no cambian.

4.5. Pruebas de separabilidad[1]

La mayoría de las pruebas de separabilidad son desarrolladas por Byron (1969), Jorgenson-Lau (1975) y Pudney (1981), quienes han usado esta técnica para encontrar patrones de separabilidad entre bienes con cierto grado de separabilidad en un período determinado.

Barten ha comprobado la hipótesis de la restricción de separabilidad entre bienes y ocio usando series de tiempo para datos en U.S.A y ha rechazado la separabilidad. Los resultados en últimas podrán sugerir una considerable especificación errónea de los estudios tradicionales.

Es también posible usar un test de separabilidad de corte transversal entre bienes y ocio como lo hace Muellbauer (1981). Sea la siguiente función de gasto:

1. Para una mejor comprensión de esta sección deberá leerse primero el Capítulo 6.

(4.20) $C(\eta, w, p) = d(p) + b(p)w + \left[a(p)^{1-\delta} w^{1-\delta} \mu\right]$

Donde w es el salario, d(p), b(p) y a(p) están en función de p y son homogéneas de grado 1, 0, 1 respectivamente. A través del Lema de Sheppard, Muellbauer muestra:

(4.21) $q_i = \alpha_i + \beta_i w + \gamma_i \eta$

(4.22) $w_h = \alpha_0 + \beta_0 w + \gamma_0 \eta$

Para un ingreso transferido en η unidades, una cantidad de horas trabajadas h, y una serie de parámetros α, β, γ constantes en una serie de corte transversal. Observe que (4.20) satisface (4.4) para el ocio a través de los bienes solamente cuando b(p) es constante, esto implica que en (4.21) y (4.22) $\frac{\beta_i}{\lambda_i}$ sea independiente para todo i=1,..,n.

El sistema (4.20) se estima por mínimos cuadrados ordinarios y se usa la prueba de Wald para los (n-1) restricciones, i= 1,....,(n-1); esto significa probar la restricción:

(4.23) $B_i \gamma_n - \gamma_i B_n = 0$

Deaton (1981) sugiere que existe poco conflicto con la separabilidad. Blundell y Walker (1982) usando una variación de (4.20) rechazan la hipótesis de que el ocio de las esposas sea separable de los bienes. Deberemos observar que probar la separabilidad entre diferentes períodos de tiempo es muy difícil, ya que es imposible obtener estimadores no restringidos de los efectos sustitución entre los bienes individuales a través de los diferentes períodos.

Bibliografía

BARTEN, A. P. (1964). Family composition, prices and expenditure patterns, in P.E. Hart, G. Mills, and J. K Whitaker (eds.), Econometric Analysis for National Economics Planning, London : Butterworth.

——————.(1977). "The systems of consumer demand functions approach: A review", Econometrica, 45, pp.23-51.

——————.(1982). Consumer theory, en K Arrow and M.D. Intriligator(comps.) Handbook of mathematical economics, Vl II, North Holland Publishing.

BLACKORBY, I . (1978). "Measures of quality and their meaning in terms of social welfare", Journal of economic theory, vól.18, pp. 59 - 80.

BLUNDELL, R.W AND WALKER, I. (1982). "Modeling the joint determination of household labor variation", Economic journal, 92, pp.351-64

BYRON, R.A. (1970). "A simple method for estimating demand systems under separability assumptions", Review of economics studies, 37, pp.261-74.

DEATON, A. (1981). Theoretical and empirical approaches to consumer demand under rationing, en Deaton, A (Editor) Essays in the theory and measurement of consumer behavior, N.Y, Cambridge University Press.

―――――― and Muellbauer, J. (1989). Economics and consumer behavior. Ny. Cambridge University Press.

DIEWERT, W.E. (1982). Duality approaches to microeconomic theory, en K Arrow and M.D. Intriligator (comps,) Handbook of mathematical economics, Vl II, North Holland Publishing.

FRISH, R. (1959). "A complete scheme for computing all direct and cross demand elasticities in a model with many sectors", Econometrica, 27, pp.367-97.

GOLDMAN, S.M AND USAWA. H. (1964). "A note on separability in demand analysis", Econometrica, vól 32, jul.

JORGENSON, D.W AND LAU, T.S. (1975). "The structure of consumer preferences", Annals of economic and social measurement, 4, pp.49-101.

KATZNER. D. (1970). Static demand theory, London, Macmillan.

LEONTIEF, W. (1947). "Introduction to a theory of the internal structure of functional relationships", Econometrica, 15, pp.361-73.

MUELLBAUER, J. (1981). "Linear aggregation in neoclassical labor supply", Review of economics studies, 41, pp.28-36

PEARCE, I.F. (1964). A contribution to demand analysis, Oxford University Press.

PUDNEY, S.E. (1981). "An empirical method of approximating the separable structure of consumer preferences", Review of economics studies, 48, pp.561-77.

SONO, M. (1962). "The effect of price changes on the demand and supply of separable goods" International economic review, vól.2, pp.239-71.