2. Preferencias individuales

Un elemento fundamental en la teoría microeconómica consiste en cómo los individuos realizan sus decisiones y cómo seleccionan alternativas de un conjunto disponibles de las mismas. La teoría postula que cada individuo ordena las alternativas de acuerdo con su preferencia relativa. De esta forma, cuando el individuo realiza una elección, éste selecciona la alternativa con aquello que más tiene de todo lo posible. En este capítulo se desarrollará el marco teórico asociado con el concepto de preferencia.

2.1. Preferencias individuales

Asuma la existencia de n alternativas, éstas pueden contener n bienes que usted puede poseer, n posibles candidatos por los cuales votar, n empleos a optar, etc. En general, cuando hay n alternativas en algún orden que desea, usted podrá expresar un orden de preferencias por las mismas. Cuando algunas alternativas tienen el mismo nivel en su lista, usted tendrá indiferencia entre las mismas. Existen dos propiedades importantes en su lista: Primera, es posible comparar dos alternativas diciendo cuál de las dos es mayor; de esta forma, una es más preferida que la otra, o cuando ella tiene el mismo nivel. Segunda, dada la naturaleza de las preferencias ésta no es cíclica[2], es decir, si la primera alternativa es mayor que la segunda, y también mayor que la tercera, entonces la primera alternativa es mayor que la tercera. Ahora, usted puede establecer un orden, y si solamente algunas de las alternativas son posibles, entonces podrá seleccionar aquella alternativa que más prefiera. Un orden más general se establece para un infinito número de elementos y aun cuando la lista con dicho orden sea complicada, el ordenamiento se mantiene.

2. Esto significa que deberá cumplir el teorema de aciclicidad: Si para un entero finito n, $x_1 > x_2$, $x_2 > x_3$, $x_3 > x_4$,....., $x_{n-1} > x_n$ entonces $x_n \neq x_1$ (Kreps 1995).

2.1.1 Definición Formal

Sea X el conjunto de alternativas consideradas por un individuo; el conjunto X puede ser un conjunto finito de alternativas o representar el conjunto de canastas de bienes disponibles. Una relación binaria sobre X, es una relación R de X a X, con el conjunto de pares ordenados (x , q) donde $x \in X$ y $q \in X$. Los pares en la relación de R se dicen que satisfacen esta relación. Una relación de preferencia es un caso especial y se escribe $x \succsim q$ sí $(x , q) \in X \times X$ satisface esta relación. Sí $x \succsim q$ entonces se dice que x es preferido a q. Esta relación puede entenderse en el sentido débil como "al menos es tan bueno como" más que en el sentido de "es mejor que". De igual forma, una relación estricta de preferencias $\succ$ se define como $x \succ q \Leftrightarrow x \succsim q$ pero no $q \succsim x$, y se lee x es preferido a q. La relación ~ se conoce como indiferencia y se define por $x \sim q \Leftrightarrow x \succsim q$ y $q \succsim x$ y se lee x es indiferente a q. En orden a cualificar la relación de preferencias, la relación $\succsim$ deberá satisfacer las siguientes propiedades fundamentales:

2.1.1.1. Reflexibidad

Para todo $x \in X$, $x \succsim x$. Este supuesto nos dice que la canasta x, en el sentido débil, es preferida a sí misma, es decir, que al menos es tan buena como ella misma.

2.1.1.2. Completitud

Para todos los elementos x, q en X se cumple que $x \succsim q$ ó $q \succsim x$ o ambos. Este supuesto simplemente nos dice que dos canastas pueden ser comparadas.

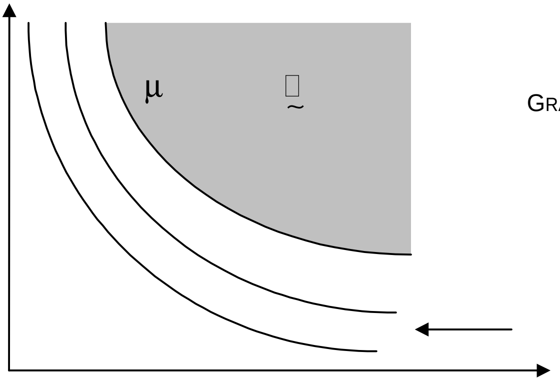
2.1.1.3. Transitividad

Para todo x , q y z en X, si $x \succsim q$ y $q \succsim z$ entonces $x \succsim z$. La propiedad de transitividad plantea la coherencia en las elecciones.

Las propiedades 2.1.1.1 a 2.1.1.3 definen un conjunto de elección preordenado.

Preferencias sobre $\Re_+^m$

Las relaciones de preferencias se usan para caracterizar los deseos de los consumidores, por varias combinaciones de bienes. Los bienes son indexados de 1 hasta m. Una canasta de bienes es una colección de varias cantidades de esos m bienes, y la cantidad de cada bien en una canasta es un número real positivo. También podemos ver una canasta como la representación de un vector m-dimensional de números no negativos, comúnmente se asume que los bienes son divisibles. Tomemos $X = \Re_+^m$ como el ortante no negativo de $\Re^m$, en este conjunto una relación de preferencia en el caso de dos dimensiones puede verse de la siguiente forma:



GRÁFICA 2.1. Preferencias en dos dimensiones.

2.1.1.4. Continuidad

Una relación de preferencias $\succsim$ sobre $X = \Re_{+}^{m}$ se dice que es continua sí para cada $x \in X$ los conjuntos $\{ y \in X \mid y \succsim x \}$ y $\{ y \in X \mid x \succsim y \}$ son cerrados. Esto es, para alguna canasta x defina A(x) como el conjunto donde x es "al menos tan bueno como y " y B(x) "no existe un mejor conjunto que x ", así:

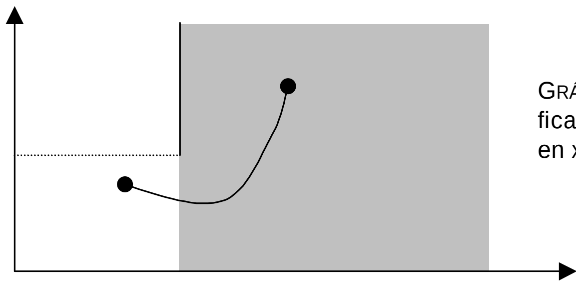
(2.1) $A(x) = \{ y \in X \mid y \succsim x \}$ y $B(x) = \{ y \in X \mid x \succsim y \}$

Donde A(x) y B(x) son cerrados dado que contienen sus propios límites para X en el conjunto de elección. A A(x) se le denomina el conjunto superior y a B(x) el conjunto inferior. De lo anterior, se deduce que:

(2.2) $A(x) = \{ y \in X \mid y \succ x \}$ y $B(x) = \{ y \in X \mid x \succ y \}$

Serán abiertos. Se podrá observar entonces que (2.1) y (2.2) se utilizan para evitar conductas discontinuas.

Y, para un orden de preferencias $\succsim$, la intersección entre los conjuntos superior e inferior, para algún x, definirá el conjunto de indiferencia $I(x) = \{ y \in X \mid y \sim x \}$ el cual es cerrado. Con respecto a la Gráfica 2.1 la continuidad asegura que los puntos sobre la frontera de $\mu(X) = \{y \in X \mid y \succsim x\}$ sean equivalentes al elemento x. Observe, sin embargo, que la continuidad no asegura la posibilidad de que la superficie de la curva de indiferencia pueda contener conjuntos cerrados. Por ejemplo, en el conjunto de preferencias lexicográficas:



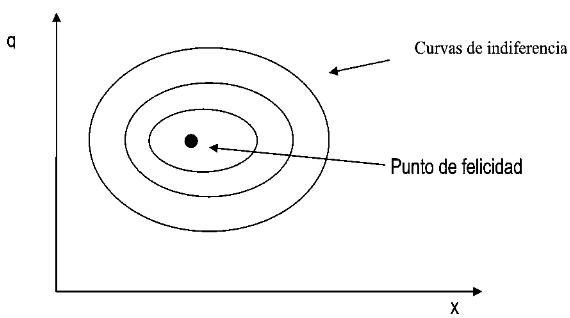
GRÁFICA 2.2. Preferencias lexicográficas: Se salta de estrictamente peor en x a estrictamente mejor en y.

El orden de preferencias lexicográficas no es continuo. Como se puede observar en el caso de dos dimensiones, considérese un conjunto cuyo contorno superior corresponda al elemento x = (1,1), esto es, el conjunto de elementos $q \succsim x$ cuya gráfica es (2.2), claramente no es cerrado debido a que la frontera del conjunto por abajo (1,1) no está contenida en el conjunto. Por ejemplo (1,½) < (1,1) y de igual forma (1,1½) ≥ (1,1).

2.1.1.5. Insaciabilidad

Una relación de preferencia $\succsim$ sobre X se dice que no es saciada sí para todo $x \in X$ existe un $q \in X$ siendo $q \succ x$.

Lo contrario a dicha afirmación es la existencia de un elemento x_0 en X que sea preferido a otro elemento. Tal elemento se denominará "punto de felicidad" y se puede observar en la siguiente gráfica:



GRÁFICA 2.3. Puntos de felicidad.

Existen otras propiedades relacionadas con la insaciabilidad, a saber:

2.1.1.5.1. Insaciabilidad local

Una relación de preferencia $\succsim$ sobre X = $\Re^m_+$ satisface la insaciabilidad local sí para algún x en X y algún ε > 0 existe algún q en X con $\|x - q\| < \varepsilon$ tal que

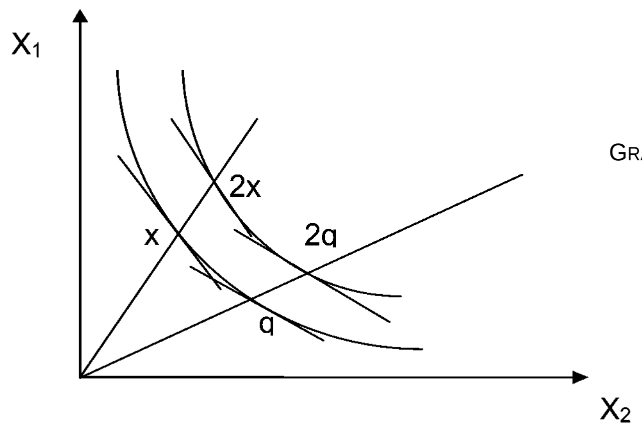
$q \succ x$ [3]. Esto significa, que para alguna canasta x, existen canastas cercanas que son estrictamente preferidas a x, lo cual podría entenderse siempre que es posible mejorar aunque sólo se introduzcan pequeñas variaciones en la canasta de bienes.

2.1.1.5.2. Fuerte monotonicidad

Una relación de preferencia $\succsim$ sobre X= $\Re_+^m$ es fuertemente monótona sí $x \in X$, $q \in X$ y $q \succsim x$, $q \neq x$ implica que $q \succ x$. La fuerte monotonicidad implica insaciabilidad local. Si una cesta de bienes contiene como mínimo la misma cantidad de bienes que otra y más de alguno de ellos, esta cesta es estrictamente mejor que la otra, lo cual significa suponer que los bienes son buenos, pues si uno de ellos fuese un mal, como la contaminación o la basura, no se cumpliría este supuesto. En términos generales, esta propiedad se conoce también como que "los bienes son buenos".

2.1.1.5.3. Homotecia

Una relación de preferencias monótonas $\succsim$ sobre X= $\Re_+^m$ es homotética si todos los conjuntos de indiferencia están relacionados por un rayo de expansión proporcional, esto es, si $x \sim q$ entonces $\alpha x \sim \alpha q$ para algún $\alpha \geq 0$; veamos:

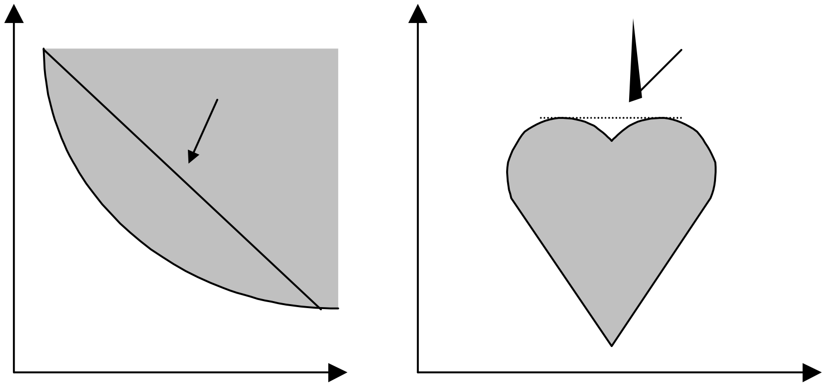


GRÁFICA 2.4. Preferencias homotéticas.

2.1.1.6. Convexidad

Una relación de preferencia $\succsim$ sobre X= $\Re_+^m$ es convexa si dado algún x, q y z en X tal que $x \neq q$, $x \succsim z$, $q \succsim z$ entonces para todo α, $0< \alpha<1$, se cumple que $\alpha x + (1-\alpha)q \succsim z$ y se dice que es estrictamente convexa si $x \succ z$, $q \succ z$ y para todo α, $0< \alpha<1$, se cumple que $\alpha x + (1-\alpha)q \succ z$. De igual forma, esta propiedad podría leerse como que la canasta media es preferida a los extremos; veamos:

3. Donde $\|x - q\| < \varepsilon$ es la distancia euclideana entre los puntos x y q: $\|x-q\| = (\sum_{i=1}^{n}(x_i - q_i)^2)^{\frac{1}{2}}$



GRÁFICA 2.5. Conjuntos convexos y no convexos.

2.2. La función de utilidad

Si la ordenación de preferencias es completa, transitiva, reflexiva y continua, entonces las preferencias se pueden representar a través de una función de utilidad continua. La función de utilidad, u, es una función con valores reales, definida sobre el conjunto X, de tal forma que el orden de las preferencias sobre X se preserva por la magnitud de u. De esta forma, una función de utilidad tiene la propiedad de que dados dos elementos x y q en X se cumple que $u(q) \geq u(x)$ sí y solo sí $q \succsim x$.

No todas las relaciones de preferencias pueden ser representadas por funciones de utilidad, pero si la relación de preferencias es continua sobre $\Re^m_+$ entonces ésta puede ser representada por una función de utilidad. Por lo tanto, sí las preferencias son reflexivas, transitivas, completas y continuas, u(x) representa dichas preferencias y deberá cumplirse: Primero, u(x) es estrictamente creciente sí y sólo sí las preferencias son monótonas. Segundo, u(x) es cuasiconcava sí y solo sí las preferencias son convexas y tercero u(x) es estrictamente cuasiconcava sí y solo sí las preferencias son estrictamente convexas[4].

2.2.1. Invarianza de la función de utilidad

Sea $\succsim$ un orden de preferencias continuo tal que u(x) es una función de utilidad que represente a éstas. Si $f(\bullet)$ es una función estrictamente creciente de una variable

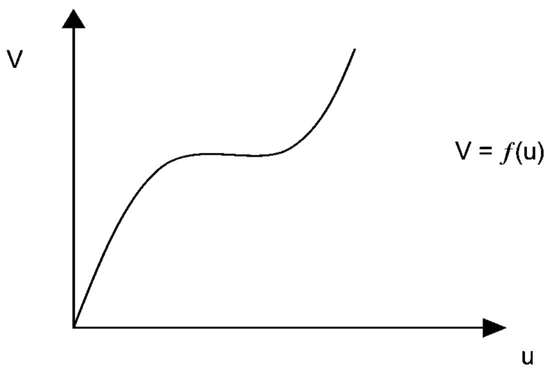
4. Una función $f: D \rightarrow R$ es cuasicóncava si $\forall\ x_1$ y x_2 en D : $f(x^t) \geq \min[f(x_1), f(x_2)]\ \forall\ t \in [0,1]$

singular, y f(u(x)) es la función compuesta y esta es una transformación monótona positiva de u(x), entonces esta también representa una función de utilidad. De lo anterior se deduce:

1) Que $u(x_1,x_2)$ represente $\succsim$ significa que $u(x_1,x_2) > u(q_1,q_2) \Leftrightarrow (x_1,x_2) \succ (q_1,q_2)$
2) $f(\bullet)$ es una transformación monótona de $u(x_1,x_2) > u(q_1,q_2) \Leftrightarrow f(u(x_1,x_2)) > f(u(q_1,q_2))$
3) De (2) se observa que $f(u(x_1,x_2)) > f(u(q_1,q_2)) \Leftrightarrow (x_1,x_2) \succ (q_1,q_2)$

PROPOSICIÓN 2.1

Si una relación de preferencia es representada por una función de utilidad sobre $\Re^m_+$, entonces una función de la forma $v(x) = f(u(x))$, donde f es estrictamente creciente en el rango de v sobre u, será también una función que represente la misma relación de preferencia. Si f y u son continuas entonces v también es continua. Esto se deduce de (1),(2) y (3).



GRÁFICA 2.5. Transformación monótona de u.

La invarianza en la función de utilidad deberá incluir como requisitos adicionales: mantener la invarianza en la descripción, la invarianza en el procedimiento y la invarianza en el contexto[5].

2.2.1.1. Invarianza en la descripción

Este requisito requiere que las preferencias entre las opciones no dependan de la forma en la cual ellas son presentadas. De esta forma, dos descripciones del mismo problema deberán llevar a la misma elección [Arrow (1982), Tversky y Kahneman (1986)]. Tversky y Kahneman (1986) proveen el siguiente ejemplo, que viola esta propiedad.

Problema 3. (126 individuos participaron en el experimento): Asuma que usted se enriquece en $300 más que hoy, y debe realizar una elección entre:

5. Ver también la descripción de Kreps (1995) sobre el encuadramiento (framing).

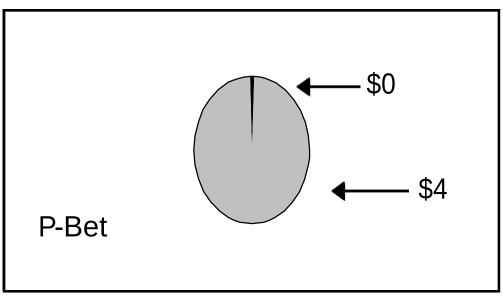
A) Una ganancia segura de $100 (72% de los individuos eligieron esta opción).
B) 50% de oportunidad de ganar $200 y 50% de oportunidad de no ganar nada (28% de los individuos eligieron esta opción).

Problema 4. (128 individuos participaron en el experimento): Asuma que usted se enriquece en $500 más que hoy, y debe realizar una elección entre:
A) Una pérdida segura de $100 (36% de los individuos eligieron esta opción).
B) 50% de oportunidad de no perder nada y 50% de oportunidad de perder $200 (64% de los individuos eligieron esta opción).

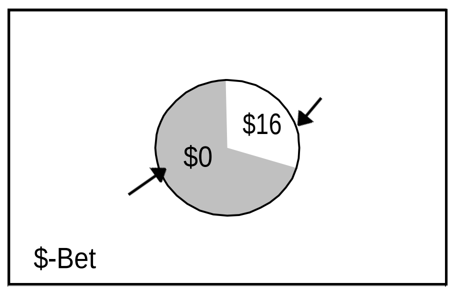
Dado que los dos problemas son idénticos, la variación en la descripción tiene un gran efecto en las preferencias.

2.2.1.2. Invarianza en el procedimiento

Esta propiedad requiere que los métodos de "extraer" las preferencias mantengan el mismo orden en ellas, entonces dos procedimientos diferentes deberán mantener el mismo orden en las preferencias. Este fenómeno está asociado directamente a la existencia de inversión en las preferencias descrito inicialmente por Sarah Lichtenstein y Paul Slovicv y ampliado por Tversky y Kahneman. Considere un individuo que tiene la oportunidad de jugar dos loterías representadas en la gráfica siguiente:[6]



LOTERÍA A



LOTERÍA B

La lotería A da un pago de $4 con una gran certeza y un pago de $0 con una pequeña probabilidad. La lotería B da un pago de $16 con una probabilidad de un 30% y un pago de $0 con una probabilidad de 70%. La lotería A es llamada P-Bet debido a que la probabilidad de ganar es muy grande y la lotería B es llamada $-Bet debido a que la cantidad a ganar es muy grande. Cuando los individuos son preguntados por su

6. Esta versión de la inversión en las preferencias es tomada de Plott,Ch.R (1996).

elección la mayoría elige A. Sin embargo, cuando se les pregunta cuánto pagarían por el derecho a jugar las loterías, el mismo individuo desearía pagar más por el derecho a jugar la lotería B. De esta forma, la inconsistencia en el comportamiento es evidente, mostrando asimetría en el procedimiento. [Ver también Tversky (1996) y McFadden (1999)].

2.2.1.3. Invarianza en el contexto

El último requisito consiste en la invarianza en el contexto, definido por el conjunto de opciones bajo consideración. De acuerdo con Tversky (1996) uno de los supuestos básicos en una elección racional consiste en que cada alternativa tiene una utilidad que depende solamente de esa alternativa. Esto significa que una opción no preferida, no puede preferirse si se adicionan nuevas alternativas al conjunto de elección. Lo contrario mostraría que no existe invarianza en el contexto. Esta hipótesis implica que si no existe invarianza, la "'parte del mercado' de x podría incrementarse al adicionar a {x,y} una tercera alternativa z que es claramente inferior a x pero no a y". Un ejemplo sobre la violación de este supuesto, es provisto por los autores anteriores: A un grupo de 106 encuestados se les ofreció elegir entre $6 y un bolígrafo Cross, el porcentaje que seleccionó el bolígrafo fue del 36% y el resto prefirió el dinero. A un segundo grupo de 115 encuestados se les ofreció elegir tres opciones: $6, el bolígrafo Cross y un bolígrafo menos atractivo; el 2% eligió el bolígrafo menos atractivo, mientras el porcentaje que eligió el Cross aumento del 36% al 46%.

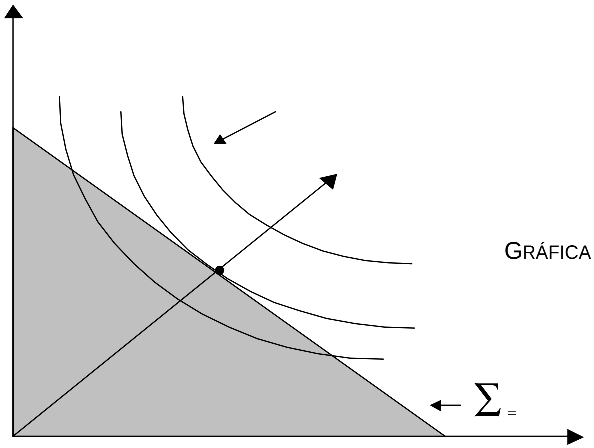
2.3. El problema básico del consumidor

Deberemos ahora introducir los precios en nuestro modelo básico. Cualquier consumidor ha experimentado que sus deseos de elegir m bienes se ven frustrados cuando decide ir al mercado, a un centro comercial, etc. Dicha frustración no es más que la confirmación de que aun cuando se tienen preferencias por los bienes, éstas por sí solas no bastan, esto es, existen restricciones como la cantidad de dinero que poseemos en nuestros bolsillos para comprar dichos bienes. De una manera más formal, asumamos que existen m bienes, los cuales son infinitamente divisibles.

Un consumidor selecciona una canasta que contiene dichos bienes descritos por el m vector en $X = (x_1,x_2,\ldots,x_m)$ donde x_i, $i=1,..,m$, representa la cantidad del bien i. Las preferencias del consumidor, sobre varias posibles canastas, se representa por la relación de preferencias $\succsim$ sobre $\Re^m_+$.

Asociado a cada bien i existe un precio, medido en alguna unidad monetaria $p_i \geq 0$, de tal forma que el costo de elegir x_i será $p_i\, x_i$. El costo total de elegir la canasta $X = (x_1,x_2,\ldots,x_m)$ será $\sum_{i=1}^{m} p_i x_i = pX$. Asumiremos por simplicidad, que el consumidor tiene un presupuesto de y unidades monetarias.

Así, la elección del consumidor es restringida a la restricción de presupuesto:



GRÁFICA 2.6. Elección del consumidor.

Por lo tanto, el consumidor elegirá una canasta determinada de acuerdo a la siguiente restricción:

(2.3) $\sum_{i=1}^{m} p_i x_i \leq y$

Esta situación se representa en la Gráfica 2.6, donde la restricción de presupuesto se define como el área sombreada debajo de la recta $p_i . x_i = y$. Como se podrá observar, la diagonal de esta región será perpendicular al vector de precios p. Si el presupuesto cambia, digamos aumenta, dicha región también aumentará desplazándose a la derecha y, de lo contrario, a la izquierda. Para cualquier consumidor la restricción (2.3) le indica que tanto U_0 como U_1 son asequibles mientras U_2 no.

¿Cómo se deberá elegir entre U_0 y U_1? Para resolver dicho interrogante se usará el supuesto 2.1.1.5.1 por lo cual la desigualdad se convertirá en igualdad y, entonces la canasta óptima será X* con la curva de indiferencia U_1. Mas-Collel, Whinston y Green (1995) definen esta solución de la siguiente forma: la demanda Walrasiana x(p,y) satisface la ley de Walras, sí para cada p > > 0 e y > 0 se cumple que $p . x = y \ \forall x \in X(p,y)$, esto es, el consumidor gasta totalmente su riqueza. De manera formal, diremos que el problema básico del consumidor, dados unos precios p y, un presupuesto y, consistirá en solucionar:

(2.4)
$$\max_{x} u(x)$$
$$\text{Sujeto a } p.x \leq y \ ; \ x \in X$$

Sí p es estrictamente positivo (> >) y u(.) es continua, el problema de maximización de la utilidad tiene una solución.

2.3.1. Restricciones múltiples

Suponga una función de utilidad continua y cuasi-cóncava. Cada $g_i(x)$ es convexa y X es un conjunto convexo. Suponga también que existe algún $x \in X$ con $g_i(x) < 0 \ \forall \ i=1,2,..,s$. Si x* es una solución existe una serie de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ positivos, pero no todos iguales a cero, tal que x* es una solución al problema:

(2.4.1)
$$\begin{aligned} &\boldsymbol{Max\ u(x)} \\ &\boldsymbol{Sujeto\ a} \sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i(x) \leq 0\ ;\ x \in X \end{aligned}$$

Así, el problema 1.12 del capítulo 1 podría escribirse como

(2.4.2)

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{Max\ u(x)} \\ &\boldsymbol{Sujeto\ a:\ Deportes}(\lambda_{ingreso} p_{deportes} + \lambda_{tiempo} t_{deportes}) + \boldsymbol{Ocio}(\lambda_{ingreso} p_{ocio} + \lambda_{tiempo} t_{ocio}) \\ &+ \ldots + x_m(\lambda_{ingreso} p_m + \lambda_{tiempo} t_m) \leq \lambda_{ingreso} Y + \lambda_{tiempo} T \end{aligned}$$

Como podrá observarse λ_{tiempo} consiste en una clara interpretación del valor del tiempo; este será el valor por medio del cual una unidad de tiempo, por ejemplo una hora, puede ser convertida en dinero.

2.4. Dualidad

Uno de los aspectos importantes en la teoría del consumidor, consiste en la dualidad. La dualidad es una de las "herramientas" más usadas en la estimación de modelos. Básicamente la dualidad expresa la relación entre los bienes por un lado y los precios por el otro. De esta forma, el consumidor podrá elegir entre maximizar la función de utilidad sujeto a la restricción de presupuesto o, minimizar su gasto en una serie de bienes siempre y cuando, la función de utilidad permanezca constante. El problema se plantea como:

(2.5)
$$\begin{aligned} &\max_{x}\ \boldsymbol{u}(x) \\ &\text{Sujeto a } px \leq y\ ;\ x \in X \end{aligned}$$

ó

(2.6)
$$\begin{aligned} &\min_{x}\ px \\ &\text{Sujeto a } u(x) = u^{\circ};\ x \in X \end{aligned}$$

De la solución al problema (2.5) se obtienen las demandas marshallianas, mientras de la solución a (2.6) se obtienen las demandas Hicksianas o demandas compensadas. Las funciones Hicksianas satisfacen la cantidad de bienes x a los precios p cuando la utilidad permanece constante, de ahí su nombre:

(2.6.1) $X_i = g_i\,(y,p) = h_i\,(u,p)$

(2.6.2) $u = v(x_1,\dots,x_m) = v[g_1(y,p),g_2(y,p),..,g_m(y,p)] = v\,(y,p)$

(2.6.3) $x = \sum_{i=1}^{m} p_i h_i(u,p) = C(u,p)$

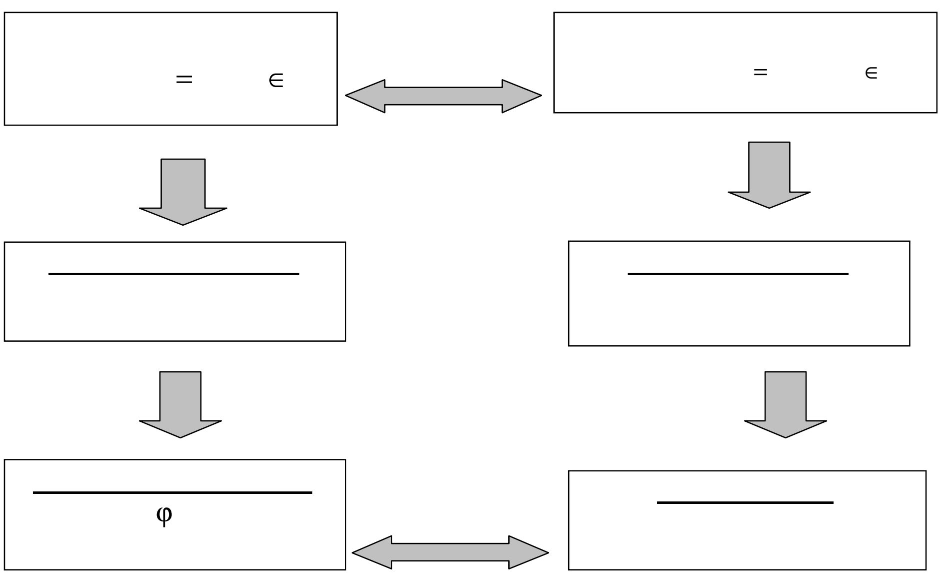
Donde v (y,p) es la función indirecta de utilidad o el máximo sostenible de utilidad dados los precios y el ingreso:

(2.6.4) $v\,(y,p) = \max_{x}\;[v(x);\; px = y]$

Y la función C(u,p) es el mínimo gasto que mantiene la utilidad constante, dado los precios p, y claramente es una solución al problema dual:

(2.6.5) $C(u,p) = \min_{x}\;[\;px = \;;\; u(x) = v]$

La función de gasto y la función indirecta de utilidad están íntimamente relacionadas, pues a partir de invertir C(u,p) = x se encuentra u en función de x y p. Similarmente la inversión de u = v (y,p) nos lleva directamente a x = C(u,p). Esto se puede observar mejor en el siguiente esquema:



2.4.1. Propiedades de la función indirecta de utilidad

Entre las propiedades usuales de la función indirecta de utilidad, tenemos

1) Es homogénea de grado cero en (p,y), esto es, $v(tp, ty) = v(p,y) \ \forall \ t > 0$.
2) No es creciente en p y es estrictamente creciente en y.
3) Es cuasi convexa con respecto a p, esto es el conjunto $\{p: v(p,y) \leq c\}$ es convexo para cada $y > 0$ y algún c.
4) La derivada de la función indirecta de utilidad con respecto a los precios e ingreso se conoce también como la Identidad de Roy y es una forma conveniente de recuperar la demanda Marshalliana,

$$(2.7)\ x_i^m = g_i\,(y,p) = v = -\frac{\partial\varphi / \partial \boldsymbol{p_i}}{\partial\varphi / \partial \boldsymbol{y}}$$

5) Es continua en p e y.

2.4.2. Propiedades de la función de gasto

Entre las propiedades usuales de la función de gasto, se encuentran:

1) La función de gasto es homogénea de grado uno en precios, formalmente para algún escalar $\theta > 0 : C(u, \theta p) = \theta\, C(u,p)$. Esto es, si los precios se doblan se deberá desembolsar dos veces más cantidad de dinero para estar en la misma curva de indiferencia.

2) La función de gasto es creciente en m, no decreciente en p y creciente en al menos un precio. Esto se deriva del axioma de insaciabilidad ya que dados unos precios, el consumidor tiene que gastar más para estar mejor, debido a que un incremento en precios requiere más cantidad de dinero para permanecer mejor.

3) La función de gasto es cóncava en precios. Cuando el precio de un bien cambia, mientras los otros precios y la utilidad permanecen constantes, la concavidad implica que el costo aumenta no más que linealmente, esto es esencial, porque el consumidor minimiza sus gastos reacomodando sus compras en orden a tomar las ventajas de la estructura de precios. Es decir,

$$(2.8)\quad C(u,\theta p) \geq \theta\, C(u,p)\ ;\ 0 \leq \theta \leq 1$$

La estricta concavidad se mantiene, si en (2.8) se reemplaza $\geq$ por $>$. Supongamos los siguientes bienes y precios:

	x_i	p_i	$\sum x_i p_i$
1	2	4	8
2	4	5	20
3	6	4.5	27

Y definamos p_3 como $\theta p_1 + (1-\theta)p_2$ y si θ es igual a 0.5 entonces $p_3=4.5$. Entonces,

$C(u,p_1) = \sum x_1p_1 = 8 \leq \sum x_3p_1 = 24$

$C(u,p_2) = \sum x_2p_2 = 20 \leq \sum x_3p_2 = 30$

Se deberá demostrar que $C(u, \theta p_1 + (1- \theta)p_2) \geq \theta[C(u, p_1)] + (1- \theta)[C(u, p_2)]$. Sí $C(u, \theta p_1 + (1-\theta)p_2) = C(u,p_3) = \sum x_3p_3 = 27$ y dado que $\theta[C(u, p_1)] = 0.5*8$ y $(1-\theta)[C(u, p_2)]=10$:

$C(u, \theta p_1 + (1-\theta)p_2) \geq \theta[C(u, p_1)] + (1-\theta)[C(u, p_2)]$ ya que $27 > 14$.

4) La función de gasto es continua en p y la primera y la segunda derivada con respecto a los precios existe.

5) Cuando ellas existan, las derivadas parciales de las funciones de gasto con respecto a los precios serán las funciones de demandas Hicksianas:

(2.9) $$\frac{\partial C(u,p)}{\partial p_i} = h_i(u,p) = x_i^h$$

La anterior propiedad se conoce también como el Lema de Sheppard.

2.4.3. Propiedades de las funciones de demandas Marshallianas y Hicksianas

Como se ha encontrado anteriormente, de la solución a (2.5) se obtiene la demanda Marshalliana mientras de la solución a (2.6) se obtiene la demanda Hicksiana. Ahora derivaremos algunas de las propiedades para dichas demandas.

2.4.3.1. Adición

El valor total de las demandas Hicksianas y Marshallianas serán los gastos totales:

(2.10) $$\sum_{i=1}^{m} p_i h_i(u,p) = \sum_{i=1}^{m} p_i g_i(y,p) = y$$

2.4.3.2. Homogeneidad

Las demandas Hicksianas son homogéneas de grado cero en precios; las demandas Marshallianas en el gasto total y en los precios también lo son, esto es, para algún escalar $\theta > 0$, se cumple:

(2.11) $\quad hi(u, \theta p) = hi(u, p) = g_i(\theta y, \theta p) = g_i(y, p)$

2.4.3.3. Simetría

Las derivadas transversales de los precios, en las demandas Hicksianas son simétricas:

(2.12) $$\frac{\partial h_i(u,p)}{\partial p_i} = \frac{\partial h_j(u,p)}{\partial p_j}$$

Para todo $i \neq j$. Esta propiedad además se deriva del teorema de Young.

2.4.3.4. Negatividad

La matriz de $n \times n$ formada de los elementos de $\frac{\partial h_i}{\partial p_j}$ es semidefinida negativa,

(2.13) $$\sum i \sum_j \lambda_i \lambda_j \frac{\partial h_i}{\partial p_j} \leq 0$$

Si λ es proporcional a p, la desigualdad llegará a ser una igualdad, y la forma cuadrática (2.13) será cero. El resultado anterior se mantiene en tanto $\frac{\partial h_i}{\partial p_j}$ es la matriz de segundas derivadas de la función de gasto, que es una función cóncava y semidefinida negativa. Por conveniencia $\frac{\partial h_i}{\partial p_j}$ se reemplaza por s_{ij} y se conoce como la matriz de sustitución o la matriz de Slutzky, donde los elementos diagonales de dicha matriz serán no positivos para todo i,

(2.14) $\quad s_{ii} \leq 0$

De esta forma, un incremento en precios con la utilidad constante deberá producir una mayor demanda para aquel bien o aquellos que permanecen sin cambiar. La expresión (2.14) podría considerarse también como la famosa "ley de la demanda". Por supuesto, (2.14) nos muestra una función de demanda compensada, pero a diferencia de la visión tradicional de la demanda (2.14) proviene de la función de gasto, la cual es cóncava aunque las preferencias sean o no convexas. La propiedad de negatividad no nos dice nada acerca de las curvas de indiferencia y, por supuesto si éstas fueran cóncavas al origen dichas demandas mostrarían soluciones de esquina, las cuales no son explicadas por (2.14).

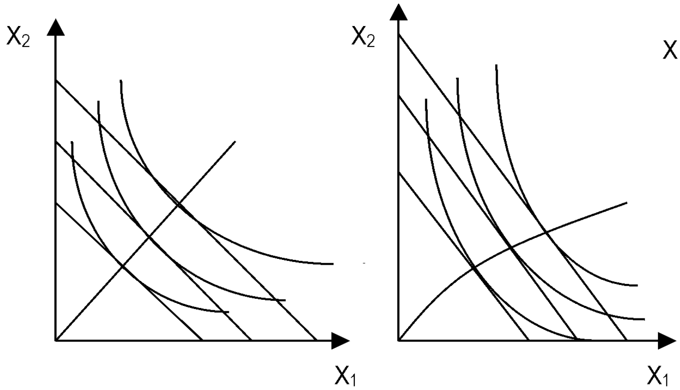
De esta forma, las propiedades básicas de las curvas de demanda son la adición, la homogeneidad de grado cero en precios e ingreso. Por lo tanto, serán simétricas las respuestas en precios y formarán una matriz semidefinida negativa. Si la simetría y negatividad son comprobables entonces es posible observar la matriz de sustitución de Slutzky. Al derivar la Hicksiana con respecto a p_j y usando el lema de Sheppard encontraremos:

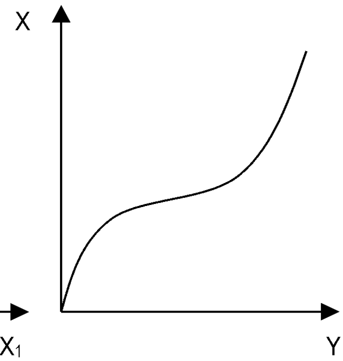
(2.15) $$s_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial p_j} = \frac{\partial g_i}{\partial y} x_j + \frac{\partial g_i}{\partial p_j}$$

Donde el último término es la derivada de los precios no compensados con respecto a p_j. El término compensado se refiere a la cantidad de veces x_j (la derivada del mínimo costo con respecto a p_j) que $\frac{\partial g_i}{\partial x}$ (el gasto total derivado de x_i) deberá ser adicionado. Cada una de las magnitudes de (2.15) en principio pueden ser observadas directamente variando a x y p. La ecuación (2.15) se descompone entonces en el efecto sustitución del cambio en precios y en el efecto ingreso $-x_j \frac{\partial g_i}{\partial y}$. Un s_{ij} positivo sólo puede ocurrir en el caso de un bien inferior, por ejemplo bienes giffen, ya que todos los bienes giffen son inferiores pero lo contrario no es cierto. Los bienes giffen son muy raros y sólo se citan casos excepcionales como la papa, ya que si aumenta su precio su demanda no disminuirá. La matriz de sustitución tiene una función importante en clasificar los bienes: si los bienes i y j son complementarios s_{ij} es negativo y si los bienes i y j son sustitutos s_{ij} es positivo.

2.5. Trayectorias de expansión

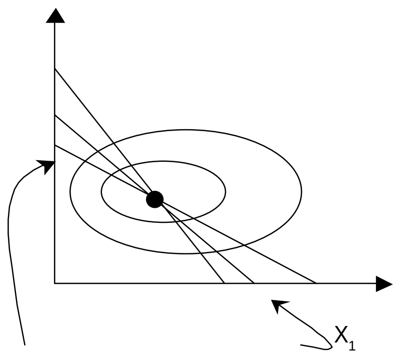
Usualmente la función de demanda cambia ante un cambio en precios o ingreso; este cambio puede observarse en términos de la estática comparativa: Suponga que los precios están fijos pero el ingreso del consumidor lentamente se incrementa, entonces a partir de la colección de puntos resultantes se podría trazar una trayectoria en el ortante no negativo que se denomina trayectoria de expansión del ingreso. Esta trayectoria puede ser proyectada en un plano definido por dos bienes, mostrando dicha trayectoria la expansión del ingreso relativo a estos dos bienes de la siguiente forma:

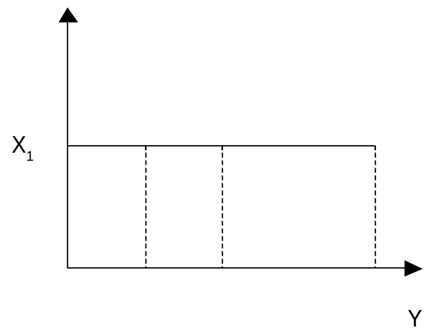




GRÁFICAS 2.7.a 2-7.b. Trayectorias de expansión.

GRÁFICA 2.7.c. Curva de Engel.





GRÁFICA 2.7.d. Puntos de felicidad y restricciones presupuestarias B_i.

GRÁFICA 2.7.e. Curva de Engel.

Como podrá observarse, la gráfica (2.7.a) muestra un conjunto de bienes normales: el consumo de los bienes x_1 y x_2 se incrementa cuando el ingreso se incrementa. En la gráfica (2.7.b) el bien x_2 es un bien inferior, esto es, el consumo cae en tanto el ingreso aumenta. Cuando la demanda de un bien se grafica como una función del ingreso, el resultado se conoce como la curva de Engel para dicho bien. Deberá además observarse que en el caso de que las preferencias sean homotéticas, se cumple que $u(tx) = tu(x)\ \forall t > 0$, entonces, la trayectoria de expansión y la curva de Engel será una línea de trazo continuo como en la gráfica (2.7.c).

2.6. La tasa marginal de sustitución

Considere la curva de indiferencia $u(x_1,x_2) = u_1$ cuya representación viene dada por la gráfica (2.6) para algún valor fijo de u. Esta curva puede ser pensada como la función $x_2(x_1)$. De dichas curvas se define la tasa marginal de sustitución del bien 2 por el bien 1 como:

(2.16) $\quad TMS_{21} = -\dfrac{\partial x_2}{\partial x_1}$

La tasa marginal de sustitución es la pendiente de la curva de indiferencia, y su sentido económico no es otro que la cantidad que se está dispuesto a renunciar del consumo del bien 1 por consumir unidades adicionales del bien 2, por esta razón la tasa marginal de sustitución definida de la anterior forma decrece cuando x_1 crece. Si nosotros diferenciamos $u(x_1,x_2) = U_1$ con respecto a x_1, se encuentra:

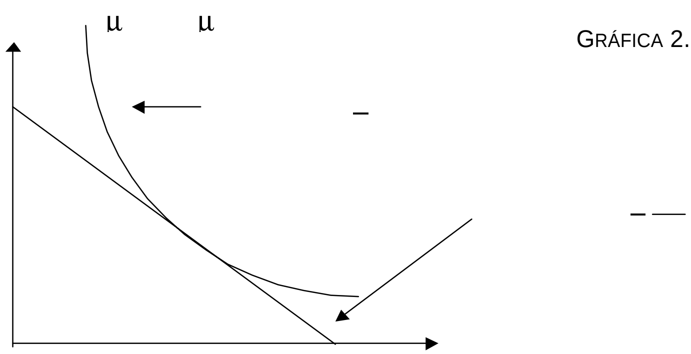
$$\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = 0$$

(2.17)
$$TMS_{21} = -\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1} / \frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}$$

De igual forma, la solución al problema básico del consumidor nos muestra:

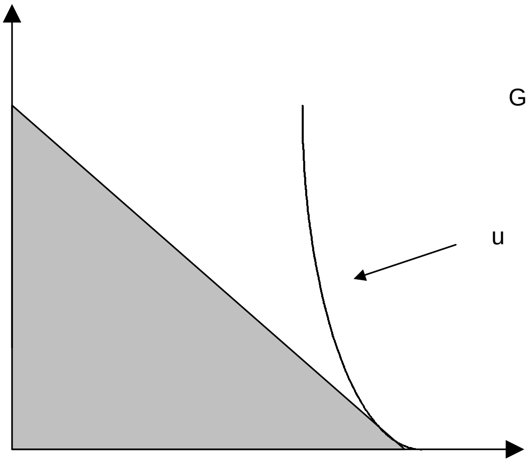
(2.18)
$$\frac{\partial u(x_1,x_2)/\partial x_1}{\partial u(x_1,x_2)/\partial x_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Donde (2.18) es la tasa de sustitución económica del bien 2 por el bien 1, y ésta es la pendiente de la línea de restricción presupuestaria:



GRÁFICA 2.8. Tasa marginal de sustitución.

Se asume que la solución anterior ocurre en un punto x con x > 0, esto es posible incluso para uno o más componentes de x que sean cero, tal es el caso de las soluciones de esquina como en (2.9), veamos:



GRÁFICA 2.9. Solución de esquina.

La gráfica anterior en el caso de dos dimensiones nos muestra que si la solución ocurre en el punto $x_1 > 0$ y $x_2 = 0$ la $TMS_{21} > \dfrac{p_1}{p_2}$, este resultado se extiende a dimensiones mayores.

2.7. Elasticidad

Cuando se discute la sensibilidad de la demanda del consumidor ante cambios en variables como el precio o el ingreso, se puede medir directamente dicha sensibilidad, a través de la elasticidad, por ejemplo, ∂x/∂y en el caso de la sensibilidad en el ingreso. Una de las desventajas de esta medida, es la dependencia sobre las unidades usadas. Es común usar la elasticidad ingreso de la demanda:

$$\varepsilon_j = \frac{\partial x_j / x_j}{\partial p_j / p_j} = \frac{\partial Ln x_j}{\partial Ln p_j} \tag{2.19}$$

Así (2.19) es el porcentaje de cambio en la demanda ante un cambio porcentual en el ingreso. Como un resultado adicional, se deberá observar que la elasticidad ingreso promedio deberá ser unitaria, esto es: $k_1\varepsilon_1 + ... + k_j\varepsilon_j = 1$ donde $k_j = \dfrac{p_j x_j}{y}$ es la proporción del ingreso gastado en la bien j.

La elasticidad precio de la demanda del bien x vendrá definida por:

$$\varepsilon_j = \frac{\partial x_j / x_j}{\partial p_j / p_j} = \frac{\partial Lnx_j}{\partial Lnp_j} \tag{2.19}$$

2.8. Algunas formas funcionales

En esta sección se desarrollará primero un ejemplo usual de maximización y luego se discutirán algunas formas funcionales tradicionales en la demanda. Suponga un consumidor, cuya función de utilidad viene definida por $u(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$. La restricción presupuestaria viene dada por $p_1x_1 + p_2x_2 = Y$. Para solucionar este problema se usará el Lagrangiano y deduciremos las condiciones de primer orden. El problema se plantea como:

$$\text{Max} \quad u(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{Sujeto a} \quad p_1x_1 + p_2x_2 = Y$$

$$\ell = x_1^2 + x_2^2 - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - Y)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial x_1} = 2x_1 - p_1\lambda = 0 \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial x_2} = 2x_2 - p_2\lambda = 0 \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = p_1x_1 + p_2x_2 - Y = 0 \tag{2.22}$$

¿Cuál es el significado económico del multiplicador Lagrangiano λ? Se puede observar que el multiplicador es la razón de cambio del máximo (o mínimo) valor de la función objetivo con respecto a un cambio paramétrico en el valor de la restricción. Supongamos, que la función objetivo para un individuo está determinada por el trabajo y el ocio, sujeta a la restricción del tiempo en algún nivel k: Sí un incremento adicional del tiempo, ocurriese en Δk unidades, el ingreso se incrementaría en $\Delta y^* \equiv \lambda^* \Delta k$. En otras palabras, λ^* será el valor marginal del tiempo o el costo de oportunidad del mismo, y en una economía competitiva, las empresas estarían dispuestas a pagar λ^* por cada incremento en el tiempo, esto significa que λ^* podría ser visto como el precio de reserva del tiempo, es decir el salario de reserva.

Despejando (2.20) y (2.21) e igualando obtenemos,

(2.23) $$x_1 = \frac{x_2 p_1}{p_2}$$

Sustituyendo (2.23) en (2.22):

(2.24) $$p_1\left[\frac{x_2 p_1}{p_2}\right] + p_2 x_2 - Y = 0 \Rightarrow x_2\left[\frac{p_1^2 + p_2^2}{p_2}\right] = Y$$

De donde se deduce que la demanda Marshalliana viene determinada por:

(2.25) $$x_2^m = \frac{Yp_2}{p_1^2 + p_2^2}$$

De igual forma, reemplazando esta solución en (2.22), la demanda del bien x_1 será:

(2.26) $$x_1^m = \frac{Yp_1}{p_1^2 + p_2^2}$$

La función indirecta de utilidad se encuentra reemplazando (2.25) y (2.26) en la función de utilidad:

(2.27) $$\begin{aligned} V^*(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2 \\ &= \left[\frac{Yp_1}{p_1^2 + p_2^2}\right]^2 + \left[\frac{Yp_2}{p_1^2 + p_2^2}\right]^2 \\ &= \frac{Y^2}{p_1^2 + p_2^2} \end{aligned}$$

A partir de (2.27) se puede usar la identidad de Roy, entonces:

(2.28) $$-\frac{\partial V^*}{\partial p_1} = -\frac{0 - 2p_1Y^2}{\left(p_1^2 + p_2^2\right)^2} = \frac{2p_1Y^2}{\left(p_1^2 + p_2^2\right)^2}$$

(2.29) $$\frac{\partial V^*}{\partial Y} = \frac{2Y\left(p_1^2 + p_2^2\right)}{\left(p_1^2 + p_2^2\right)^2} = \frac{2Y}{\left(p_1^2 + p_2^2\right)}$$

De donde se deduce:

$$(2.30)\quad -\frac{\partial V^{*}/\partial p_1}{\partial V^{*}/\partial Y}=\frac{\dfrac{2p_1Y^2}{\left(p_1^{\,2}+p_2^{\,2}\right)^2}}{\dfrac{2Y}{\left(p_1^{\,2}+p_2^{\,2}\right)}}$$

De esta forma, la demanda será:

$$(2.31)\quad x_1^{\,m}=\frac{Yp_1}{p_1^{\,2}+p_2^{\,2}}$$

De acuerdo con la dualidad, el problema también se puede plantear como:

Min $\quad p_1x_1+p_2x_2$
Sujeto a $\quad u(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2=u_0$

Así, el Lagrangiano es:

$l = p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda\,(x_1^2 + x_1^2 - u^0)$

$$(2.32)\quad \frac{\partial\ell}{\partial x_1}=p_1+\lambda 2x_1=0$$

$$(2.33)\quad \frac{\partial\ell}{\partial x_2}=p_2+\lambda 2x_2=0$$

$$(2.34)\quad \frac{\partial\ell}{\partial\lambda}=x_1^{\,2}+x_2^{\,2}-u^0=0$$

Despejando (2.32) y (2.33) e igualando:

$$(2.35)\quad x_2=\frac{x_1p_2}{p_1}$$

Sustituyendo (2.35) en (2.34) se obtiene:

$$(2.36)\quad x_1^{\,2}+\left[\frac{x_1^{\,2}p_2^{\,2}}{p_1^{\,2}}\right]=u^0\ \Rightarrow\ x_1^{\,2}\left[\frac{p_1^{\,2}+p_2^{\,2}}{p_1^{\,2}}\right]=u^0$$

De donde se deduce que la demanda Hicksiana viene determinada por:

(2.37) $$x_1^h = \frac{u^{\frac{1}{2}} p_1}{(p_1^2 + p_2^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Usando el Lema de Sheppard:

$$= \frac{p_1^2 u^{\frac{1}{2}}}{\left(p_1^2 + p_2^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{p_2^2 u^{\frac{1}{2}}}{\left(p_1^2 + p_2^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

(2.38) $C(u,p_1,p_2)$ $$= \frac{p_1^2 u^{\frac{1}{2}} + p_2^2 u^{\frac{1}{2}}}{\left(p_1^2 + p_2^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= u^{\frac{1}{2}} \left(p_1^2 + p_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Por lo cual,

$$\frac{\partial C^*(u, p_1, p_2)}{\partial p_1} = 0 + \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2 p_1 u^{\frac{1}{2}}$$

(2.39) $$x_1^h = \frac{u^{\frac{1}{2}} p_1}{\left(p_1^2 + p_2^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$ y $$x_2^h = \frac{u^{\frac{1}{2}} p_2}{\left(p_1^2 + p_2^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Veamos otro ejemplo. Considere la siguiente función de utilidad y la restricción presupuestaria:

(2.20.1) $U(x_1,x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{(1-\alpha)}$

(2.20.2) $p_1 x_1 + p_2 x_2 = y$

Para solucionar el problema del consumidor, tendremos:

(2.20.3) $\ell = x_1^{\alpha} x_2^{(1-\alpha)} - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - y)$

(2.20.4) $$\frac{\partial \ell}{\partial x_1} = \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} - \lambda p_1 = 0$$ (2.20.5) $$\frac{\partial \ell}{\partial x_2} = (1-) x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha} - \lambda p_2$$

(2.20.6) $x_1^{\,m} = \frac{(1-\alpha)y}{p_2}$

Igualando (2.20.3) y(2.20.4) se encuentra que:

(2.20.5) $\frac{\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha}}{p_1} = \frac{(1-\alpha)x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha}}{p_2} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1(1-\alpha)}{p_2\alpha}$

Sustituyendo en (2.20.6) se obtienen las siguientes demandas Marshallianas:

(2.20.6) $x_1^{\,m} = \frac{(1-\alpha)y}{p_2}$

(2.20.7) $x_2^{\,m} = \frac{\alpha y}{p_1}$

La función indirecta de utilidad, V (p_1,p_2,y),será:

(2.20.8) V(p_1,p_2,y) = $\left(\frac{\alpha y}{p_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{(1-\alpha)y}{p_2}\right)^{(1-\alpha)}$

2.8.1. El sistema Lineal de Gasto

El sistema lineal de gasto (LES) es una generalización de la función de utilidad Cobb-Douglas. Fue desarrollado por Klein y Rubin (1947-48) y Samuelson (1947-48). Investigado empíricamente por Stone (1954) y Geary (1950), por lo cual se le da el nombre Stone-Geary. El sistema lineal de gasto es básicamente una Cobb-Douglas trasladada en el origen al punto (B_1 ,B_2), en el cuadrante positivo:

(2.40) $U(X_1, X_2) = (X_1 - B_1)^{\alpha_1}(X_2 - B_2)^{\alpha_2}$

(2.41) $V(X_1, X_2) = \alpha_1 Ln(X_1 - B_1) + \alpha_2 Ln(X_2 - B_2)$ por la proposición 2.1

Supongamos la restricción:

(2.42) $X_1P_1 + X_2P_2 = Y$

Entonces el problema de maximizar (2.41) sujeto a (2.42) se resuelve con el Lagrangiano:

(2.43) $\ell = \alpha_1 Ln(X_1 - B_1) + \alpha_2 Ln(X_2 - B_2) - \lambda(X_1P_1 + X_2P_2 - Y)$

(2.44) $\dfrac{\partial \ell}{\partial X_1} = \dfrac{\alpha_1}{(X_1 - B_1)} - \lambda P_1 = 0$ (2.45) $\dfrac{\partial \ell}{\partial X_2} = \dfrac{\alpha_2}{(X_2 - B_2)} - \lambda P_2 = 0$

(2.46) $\dfrac{\partial \ell}{\partial \lambda} = X_1P_1 + X_2P_2 - Y = 0$

Igualando (2.44) y (2.45) tendremos:

$$\frac{\alpha_1}{(X_1 - B_1)P_1} = \lambda \;\; ; \;\; \frac{\alpha_2}{(X_2 - B_2)P_2} = \lambda \Rightarrow \alpha_1(X_2 - B_2)P_2 = \alpha_2(X_1 - B_1)P_1 \Rightarrow$$

$$\alpha_1 X_2 P_2 - \alpha_1 B_2 P_2 = \alpha_2 X_1 P_1 - \alpha_2 B_1 P_1$$

$$X_2P_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_1 P_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} B_1 P_1 + B_2 P_2$$

Sustituyendo en (2.46)las demandas marshalianas serán:

$$X_1P_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} X_1 P_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} B_1 P_1 + B_2 P_2 = Y$$

$$X_1P_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} X_1 P_1 = Y + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} B_1 P_1 - B_2 P_2$$

$$X_1P_1\left(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = Y + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} B_1 P_1 - B_2 P_2$$

$$X_1P_1\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1}\right) = Y + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} B_1 P_1 - B_2 P_2$$ Sí $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$

$$X_1P_1 \frac{1}{\alpha_1} = Y + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} B_1 P_1 - B_2 P_2 \qquad \Rightarrow$$

$$X_1 = Y\frac{\alpha_1}{P_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{\alpha_1}{P_1} B_1 P_1 - B_2 P_2 \frac{\alpha_1}{P_1} \qquad \Rightarrow$$

$$X_1 = Y\frac{\alpha_1}{P_1} - B_2 P_2 \frac{\alpha_1}{P_1} + \frac{(1 - \alpha_1)}{\alpha_1} B_1 P_1 \frac{\alpha_1}{P_1} \qquad \Rightarrow$$

$$X_1 = Y\frac{\alpha_1}{P_1} - B_2P_2\frac{\alpha_1}{P_1} + \frac{B_1P_1\alpha_1}{\alpha_1P_1} - B_1P_1\frac{\alpha_1}{P_1} \Rightarrow$$

(2.47) $$X_1^m = B_1 + \frac{\alpha_1}{P_1}(Y - B_2P_2 - B_1P_1)$$

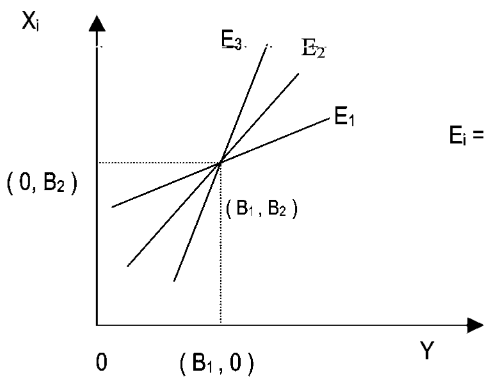
(2.48) $$X_2^m = B_2 + \frac{\alpha_2}{P_2}(Y - B_2P_2 - B_1P_1)$$

Las ecuaciones (2.47) y (2.48) son las demandas Marshallianas. Escribiendo las funciones de demanda en forma de gasto:

(2.49) $$X_1^mP_1 = P_1B_1 + \frac{\alpha_1P_1}{P_1}(Y - B_2P_2 - B_1P_1)$$

(2.50) $$X_2^mP_2 = P_2B_2 + \alpha_2(Y - B_2P_2 - B_1P_1)$$

De esta forma, el gasto en cada bien X_iP_i es lineal en precios e ingreso. El LES describe a unos consumidores comprando primero las cantidades de subsistencia de cada bien (B_i) y, dividiendo lo que queda del gasto, entre los bienes, en proporciones fijas (α_1, α_2) . El gasto marginal en cada bien es constante y el LES tiene una curva de Engel lineal que no es homotética, ya que todas las líneas de ingreso-gasto pasan a través del punto B_i



GRÁFICA 2.8. Sendas de expansión para una LES no homotética.

E_i = Curva de Engel; Y = Ingreso

Howe, Pollack y Wales(1979) estiman un LES usando los siguientes bienes: alimentos, ropa, abrigos y misceláneos denominados por f, c, s y m respectivamente; los datos fueron tomados del consumo en Estados Unidos entre 1929 y 1975 excluyendo los años de guerra(1942-1945), el resultado obtenido fue:

Parámetro	Valor	Desviación Estándar
α_f	0.38	0.022
α_c	0.24	0.015
α_s	0.17	0.02
α_m	0.21	–

Los α_i {f,c,s,m} son las partes asignadas del presupuesto marginalmente y éstas son necesariamente independientes de los precios, del gasto y del consumo pasado. La restricción implícita como se puede observar, consiste en $\sum\alpha_i^4 = 1$, debido a que no se puede gastar más de lo que se tiene en cada bien, y no tiene sentido gastar menos. De igual forma, para 1975 Howe et-al encontraron unos valores α_i {f,c,s,m} de 0.32, 0.12, 0.36 y 0.20 respectivamente.

La concavidad en la función de gasto se satisface por el hecho de que los α_i son positivos y x_i no es menor que $\sum_i p_i B_i$ ya que $x_i \geq B_i \ \forall$ i. Si dichas restricciones no se mantienen, la función de gasto no es cóncava. Deaton y Muelbauer(1981) indican que si observamos la cantidad $\sum_i p_i \alpha_i$ ésta nos muestra que no existen efectos de sustitución y entonces se deberá pensar en el LES como una función de utilidad "comprada" a un precio constante por unidad $\prod p_i^{\alpha_i}$. De igual forma, los α´s pueden ser pensados como la media geométrica de los precios y, de esta forma, como un índice de precios que representa el "costo marginal de vida".

Para obtener un indicador "real" de riqueza, deberemos partir de que sí los B_i representan los requisitos de subsistencia, solamente $Y - \sum_i p_i B_i$ es lo que queda para asignarse en forma discrecional, y sí deflactamos lo que queda por la media geométrica ponderada de los precios α_i, entonces obtendremos dicho indicador.

2.8.2. La función de Utilidad CES

La función de utilidad CES surge como una analogía directa a la teoría de la producción (Arrow et-al 1961) y tiene la forma:

(2.51) $u(x_1,x_2) = (\alpha_1 x_1^{\rho} + \alpha_2 x_2^{\rho})^{1/\rho}$ con $\rho \leq 1$

Maximizando (2.51) sujeto a la restricción de presupuesto:

(2.52) $X_1 P_1 + X_2 P_2 = Y$

Y utilizando las condiciones de primer orden derivadas de usar el Lagrangiano obtenemos:

(2.53) $\alpha_1 x_1^{\rho-1}(\alpha_1 x_1^{\rho} + \alpha_2 x_2^{\rho})^{\frac{(1-\rho)}{\rho}} - \lambda p_1 = 0$

(2.54) $\alpha_2 x_2^{\rho-1}(\alpha_1 x_1^{\rho}+\alpha_2 x_2^{\rho})^{\frac{(1-\rho)}{\rho}}-\lambda p_2=0$

(2.55) $Y-X_1P_1-X_2P_2=0$

Igualando (2.53) y (2.54) se obtiene:

(2.56) $\dfrac{x_1}{x_2}=\left(\dfrac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}$

De donde la elasticidad de sustitución vendrá dada por:

(2.57) $\sigma=\dfrac{-\partial Log(x_1^{*}/x_2^{*})}{\partial Log(p_1/p_2)}=\dfrac{1}{1-\rho}$

Entre mayor sea el valor del parámetro ρ mayor será el grado de sustitución entre los bienes. Observe que sí $\rho = 0$ la CES será una Cobb-Douglas y cuando $\rho \to \infty$ será una Leontief. Las funciones de demandas Marshallianas correspondientes a la CES serán:

(2.58) Y $-p_1\left(\dfrac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2}\right)^{-\sigma} x_2-p_2x_2=0$

De donde,

(2.59)

$$x_1^{m}=\frac{(\alpha_1 p_2)^{\sigma}Y}{\alpha_1^{\sigma}p_1p_2^{\sigma}+\alpha_2^{\sigma}p_2p_1^{\sigma}} \quad \text{y}$$

$$x_2^{m}=\frac{(\alpha_2 p_1)^{\sigma}Y}{\alpha_1^{\sigma}p_1p_2^{\sigma}+\alpha_2^{\sigma}p_2p_1^{\sigma}}$$

Dado que las preferencias representadas por la función de utilidad CES son homotéticas, las funciones de demandas marshallianas son lineales en el Ingreso. Para encontrar la función de utilidad indirecta, se sustituye (2.59) en (2.55) y dado que $\rho\sigma=\dfrac{\rho}{(1-\rho)}=\sigma-1$ obtenemos la función indirecta de utilidad:

$$V^* = \left(\alpha_1 \left[\frac{(\alpha_1 p_2)^\sigma Y}{\alpha_1^\sigma p_1 p_2^\sigma + \alpha_2^\sigma p_2 p_1^\sigma} \right]^\rho + \alpha_2 \left[\frac{(\alpha_2 p_1)^\sigma Y}{\alpha_1^\sigma p_1 p_2^\sigma + \alpha_2^\sigma p_2 p_1^\sigma} \right]^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}}$$

(2.60) $$= \left((\alpha_1^{1+\rho\sigma} p_2^{\rho\sigma} + \alpha_2^{1+\rho\sigma} p_1^{\rho\sigma}) \left[\frac{(\alpha_2 p_1)^\sigma Y}{\alpha_1^\sigma p_1 p_2^\sigma + \alpha_2^\sigma p_2 p_1^\sigma} \right]^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}}$$

$$= \frac{Y[\alpha_1^\sigma p_2^{\sigma-1} + \alpha_2^\sigma p_1^{\sigma-1}]^{\frac{1}{(\sigma-1)}}}{p_1 p_2}$$

La función de gasto se obtiene directamente invirtiendo la función indirecta de utilidad:

(2.61) $$C(u, p_1, p_2) = Up_1 p_2 [\alpha_1^\sigma p_2^{\sigma-1} + \alpha_2^\sigma p_1^{\sigma-1}]^{\frac{1}{(1-\sigma)}}$$

2.8.3. La función de Utilidad Indirecta Addilog

Como se ha podido observar en los ejercicios anteriores, es posible derivar las funciones de demanda de los bienes a través de maximizar la utilidad, sujeta a la restricción de gasto. Sin embargo, la solución no siempre es estimable. La teoría de la dualidad sugiere que una alternativa es especificar una función indirecta de utilidad, una función que es no decreciente en el ingreso, no decreciente y cuasi convexa en precios, continua y homogénea de grado cero en precios e ingreso. De esta forma, a partir de la función de utilidad indirecta que corresponda a algún tipo de preferencias del consumidor puede recuperarse la demanda con la identidad de Roy. Una forma funcional es la función "addilog" de utilidad indirecta introducida por Houthakker (1965):

(2.62) $V(p_1,p_2,Y)$ = $$\alpha_1 \left(\frac{Y}{p_1} \right)^{\beta_1} + \alpha_2 \left(\frac{Y}{p_2} \right)^{\beta_2}$$

Las funciones de demandas obtenidas de una "addilog" usando la identidad de Roy serán:

(2.63) $$x_1^m = \frac{-\partial V / \partial p_1}{\partial V / \partial Y}$$

$$= \frac{\alpha_i \beta_i p_1^{-\beta_i - 1} Y^{\beta_i}}{\alpha_1 \beta_1 p_1^{-\beta_1} Y^{\beta_1 - 1} + \alpha_2 \beta_2 p_2^{-\beta_2} Y^{\beta_2 - 1}} \quad ; \quad i = 1,2$$

Si nosotros dividimos x_1Y por x_2Y y tomamos logaritmos, el resultado es una logarítmica lineal en el ingreso y en los precios relativos de x_1 , x_2:

$$Log\left(\frac{x_1^{\ Y}}{x_2^{\ Y}}\right) = Log\frac{\alpha_1\beta_1 p_1^{\ -\beta_1-1}Y^{\beta_1}}{\alpha_2\beta_2 p_2^{\ -\beta_2-1}Y^{\beta_1}}$$

(2.64) $$= Log\left(\frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_2\beta_2}\right) - (\beta_1+1)Logp_1 + (\beta_2+1)Logp_2 + (\beta_1-\beta_2)LogY$$

2.8.4. Las especificaciones Translogarítmicas

La función de utilidad translogarítmica proviene de Christensen, Jorgenson y Lau (1971,1975). Esta ha sido la forma funcional más usada en análisis empíricos de demanda. Una de las ventajas de la translogarítmica es su forma funcional flexible, ya que puede ser aproximada de una función de segundo orden por Taylor a una función de utilidad indirecta arbitraria. La especificación translogarítmica básica viene dada por:

(2.65) $$LogV^*(p_1,...,p_n,Y) = -\sum_j \alpha_j Log\frac{p_j}{Y} - \frac{1}{2}\sum_k \sum_j \beta_{kj} Log\frac{p_k}{Y} Log\frac{p_j}{Y}$$

Las restricciones teóricas nos indican que por adición $\sum_{i=1}^{j} \alpha_i = 1$ y por simetría $\beta_{kj} = \beta_{jk}\ \forall$ k y j. Cuando sea más conveniente trabajar con las ecuaciones de gasto que con las ecuaciones de demanda, entonces se usarán las especificaciones translogarítmicas:

(2.66) $$-\frac{\partial LogV/\partial Logp_i}{\partial LogV/\partial LogY} = \left(\frac{\partial V/\partial p_i}{\partial V/\partial Y}\right)\left(\frac{p_i/V}{Y/V}\right) = \frac{p_i X_i}{Y}$$

La especificación translogarítmica puede denotarse también como:

(2.67) $$LogV = LogY - \sum_j \alpha_j Logp_j - \frac{1}{2}\sum_k \sum_j \beta_{kj}(Logp_k - LogY)(Logp_j - LogY)$$

Las ecuaciones de gasto se pueden obtener a través de la diferenciación logarítmica de (2.67) y se escriben:

$$x_i p_i = \frac{\alpha_i + \frac{1}{2}\sum_j \beta_{ji} Log(\frac{p_j}{Y}) + \frac{1}{2}\sum_k \beta_{ki} Log(\frac{p_k}{Y})}{1 + \frac{1}{2}\sum_k \sum_j \beta_{kj} Log(\frac{p_j}{Y}) + \frac{1}{2}\sum_k \sum_j \beta_{kj} Log(\frac{p_k}{Y})}$$

(2.68)

$$= \frac{\alpha_i + \sum_j \beta_{ji} Log(\frac{p_j}{Y})}{1 + \sum_k \sum_j \beta_{kj} Log(\frac{p_j}{Y})}; \forall i = 1,...,n$$

Un caso especial de la translogarítmica es la translogarítmica homotética, la cual se obtiene a través de imponer las siguientes restricciones:

(2.69) $\sum_j \beta_{kj} = 0$, k = 1,…,n

que se conocen como restricciones de Homogeneidad. Dadas estas n restricciones, la función de utilidad indirecta y las ecuaciones de gasto serán:

(2.70) $LogV = LogY - \sum_j \alpha_j Logp_j - \frac{1}{2}\sum_k \sum_j \beta_{kj} Logp_k Logp_j$

(2.80) $x_i p_i = \alpha_i + \sum_j \beta_{ij} Logp_j ; \forall i = 1,...,n$

La ecuación (2.80) muestra que las partes del gasto son independientes del ingreso, lo cual confirma que las preferencias son homotéticas. Observe también que la función indirecta de utilidad (2.79) puede ser invertida para obtener una función de gasto translogarítmica homotética:

(2.81) $LogY^*(p_1,..., p_n, u) = Logu + \sum_j \alpha_j Logp_j + \frac{1}{2}\sum_k \sum_j \beta_{kj} Logp_k Logp_j$

La función de gasto (2.81) se usa frecuentemente en estudios empíricos sobre funciones de producción, ya que si se interpreta Y* como el costo total, entonces las ecuaciones de intensidades factoriales se obtienen a través del Lema de Sheppard.

2.8.5. El sistema Casi - Ideal de Gasto AIDS

El sistema de ecuaciones de demanda puede ser derivado a partir de la función de gasto. Suponiendo que éste es continuo y no-decreciente precios y utilidad, y además cóncavo y homogéneo de grado cero, entonces:

(2.82) $LogY^*(p_1,..., p_n, u) = a(p_1,..., p_n) + ub(p_1,..., p_n)$

Usando el Lema de Sheppard, las ecuaciones de gasto serán:

$$\begin{aligned} x_i p_i &= \frac{\partial LogY^*}{\partial Logp_i} \\ &= \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} Logp_j + p_i u \frac{\beta_i}{p_i} b(\bullet) \\ &= \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} Logp_j + p_i \frac{LogY - a(\bullet)}{b(\bullet)} \frac{\beta_i}{p_i} b(\bullet) \qquad (2.83) \\ &= \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} Logp_j + \beta_i Log \frac{Y}{p_i}, \forall i = 1,\dots,n \end{aligned}$$

Donde

$$a(\bullet) = \alpha_0 + \sum_j \alpha_j Logp_j + \frac{1}{2} \sum_k \sum_j \gamma_{kj} Logp_k Logp_j$$

$$b(\bullet) = \beta_0 \prod_j p_j^{\beta_j}; (1) \sum_j \alpha_j = 0, (2) \sum_j \beta_j = 0, \sum_k \gamma_{kj} = 0, (3) \gamma_{kj} = \gamma_{jk}$$

Deaton y Muellbauer arguyen que p puede ser considerado como un índice de precios y que puede ser aproximado por $\sum_j x_i p_i Logp_i$. Dada esta aproximación, el sistema de ecuaciones de demanda serán lineales en el logaritmo de precios e ingreso real.

El sistema AIDS (Almost Ideal Demand Sistem) cumple las restricciones de adición, homogeneidad y simetría. Para satisfacer las condiciones de negatividad se requiere que la matriz de Slutzky sea semidefinida negativa:

(2.84) $c_{ij} = \gamma_{ij} + \beta_i \beta_j \, Log\,(Y/p) - x_i p_i \, \delta_{ij} + x_j p_j \, x_i p_i$

Donde δ es el producto de kronecker[7] que será igual a 1 sí $i = j$ y 0 de lo contrario. Los resultados más importantes del AIDS consisten en que (2.84) es lineal y puede ser estimado por mínimos cuadrados ordinarios. Las restricciones sobre α y γ aseguran que p sea lineal, aunque en muchas estimaciones p pueda resultar colineal, si se usa algún índice de precios se elimina dicho problema. Los β´s del AIDS determinan cuándo los bienes son de lujo o necesarios: si $\beta_i > 0$ el gasto ($x_i p_i$) se incrementa con x, por lo cual, el bien i será de lujo, de forma similar $\beta_i < 0$ el bien i será necesario. Los γij miden el cambio en la i- ésima parte del gasto siguiendo un cambio proporcional en p_j con (Y/ P) permaneciendo constante.

7. Sí A es($m \times n$) y B es ($p \times q$) entonces se dice que el producto de Kronecker $A \otimes B = \{b_{ij} A\}_{mp,nq}$

2.8.6. El modelo de Rotterdam

Propuesto inicialmente por Theil(1965) y Barten(1966). Este modelo es parecido al Stone-Geary, sólo que en lugar de trabajar con los niveles de los logaritmos se usan las diferencias de los mismos, esto es, diferenciando (2.51) se obtiene:

(2.85) $$\partial Log x_i = e_i \partial Log Y + \sum_j e_{ij} \partial Log p_j$$

Se supone en (2.85) que las elasticidades e_i y e_{ij} permanecen constantes. Usando la descomposición de Slutzky y obteniendo $e_{ij} = e_{ij}^* - e_i x_i p_i$ donde e_{ij}^* es la elasticidad cruzada de los precios:

(2.86) $$\partial Log x_i = e_i(\partial Log Y - \sum x_k p_k \partial Log p_k) + \sum_j e_{ij}^* \partial Log p_j$$

Las restricciones se efectúan también sobre las ecuaciones de gasto, de esta forma:

(2.87) $$x_i p_i \partial Log x_i = b_i \partial Log \bar{x} + \sum_j c_{ij} \partial Log p_j$$

Donde,

(2.88) $\partial Log \bar{x} = \partial Log\ x - \sum_k x_k p_k Log p_k = \sum_k x_k p_k \partial Log x_k$

(2.89) $b_i = x_i p_i e_i = p_i \dfrac{\partial x_i}{\partial Y}$

(2.90) $c_{ij} = x_i p_i e_i^* = \dfrac{p_i p_j s_{ij}}{Y}$

Y, s_{ij} es el (i , j) término de la matriz de sustitución de Slutzky. Observe que (2.88) es un índice que representa el cambio proporcional en el gasto total real, mientras que (2.90) representa la demanda Hicksiana y (2.89) es la propensión marginal a gastar en el i- ésimo bien.

La propiedad de adición requiere que las propensiones marginales a gastar en cada bien sumen uno y que el efecto neto de un cambio de precio en el presupuesto sea cero. Algunas pruebas sobre homogeneidad en (2.88) han sido propuestas por Barten (1969) y Deaton (1974). Ver además Deaton et-al (pag. 71-73).

Bibliografía

ARROW, K.J et-al. (1968). "Labor substitution and economic efficiency", Review of economics and statistics, vól.43, pp.225-250, August .

————.(1982). "Risk perception in psychology and economics", Economic inquiry, Vol. 20, pp.1-9.

BARTEN, A. P. (1969). "Maximum likelihood estimation of complete system of demand equations", European economic review, vól. 1, pp. 7-73.

————. (1966). "Theorie en empire van een volledig stelsel van vraaguergelijkingen", Doctoral dissertation, Roterdam : University of Roterdam.

CHRISTENSEN, L. R., DALE, W.J AND LAWRENCE, J.L. (1975). "Transcendental logarithmic utility function" American economic review, núm.65, pp.367-383, June.

CHRISTENSEN, L, D JOGERSON, L. LAU. (1971). "Conjugate duality and the trascendental logaritmic production function". Econometric 3 Jul, 255-56.

DEATON, A. (1974). "The analysis of consumer demand in the united kingdon,1900-1970 ", Econometrica, vól.42, pp.341-67.

DEATON, A Y MUELLBAUER, J. (1980). Economics and consumer behavior. Cambridge University Press (1989).

————1980) "Almost ideal demand system", American economic review, vól. 70, pp.312-336.

HOUTHAKKER, H.S. (1965). "A note on self-dual preferences", Econometrica, núm.33, pp.797-801, Oct.

HOWE H R:A POLLACK AND T.J WILES (1979). "Theory and time series estimation of the quadratic expendiure system". Econometric, vol.47, No.5, pp.1231.

KAHNEMAN, D AND TVERSKY, A. (1992). "Advances in prospect theory: cumulative representation of uncertainty", Journal of risk and uncertainty, vól.5, pp.46-55.

KLEIN, LR. AND H. RUBIN. (1947-48) " A constant utility index of the cost of living". Review of economic studies, 15, pp. 84-57.

KREPS, D.M. (1995). Curso de Teoría Microeconómica. Mcgraw-Hill.

LUENBERGER, D.L. (1995). Microeconomic theory, Mc Graw-Hill.

MCFADDEN, D. (1999). "Rationality for economists?". Journal of risk and uncertainty, Dec.

PLOTT, CH. R. (1996). Rational individual behavior in markets and the social choice process: the discovered preferences hypothesis; en Kenneth J. Arrow., Enrico Colombato., Mark Perlman and Christian Schmidt (comps.), The rational foundations of economic behaviour-Proceedings of the IEA conference in held Turin, Italy, St Martin´s press.inc.Usa.

TVERSKY, A .(1996). Rational theory and constructive choice; en Kenneth J. Arrow., Enrico Colombato., Mark Perlman and Christian Schmidt (comps.), The rational foundations of economic behaviour-Proceedings of the IEA conference in held Turin, Italy, St Martin´s press.inc.Usa.

TVERSKY, A AND KAHNEMAN, D. (1991). "Loss aversion in riskless choice: a reference dependent model", Quaterly journal of economics, vól.107, pp.1039-61.

TVERSKY, A., SLOVIC, P. AND KAHNEMAN, D. (1990). "The causes of preference reversal" American economic review, vol. 80, pp.204-17.

MASCOLLEL, A.., WHINSTON,M.D Y GREEN,J.R. (1995). Microeconomic Theory, NY, Oxford University Press.

STONE, R. (1954). "Linear expenditure systems and demand analysis: an application to the pattern of British demand", Economic journal, núm.64, pp.511-527, Sep.

THEIL, H. (1965). "The information approach to demand analysis", Econometrica, vól. 33, pp.67-87.