

# Análisis general competitivo

Kenneth J. Arrow F. H. Hahn

## Prefacio

## Nota sobre las convenciones de notaciones y referencias cruzadas

## Introducción histórica

### 1. Los economistas clásicos

### 2. Las contribuciones de Walras

### 3. Edgeworth y Pareto: racionalidad de grupo y asignación

### 4. Análisis del equilibrio parcial

### 5. Desarrollos ocurridos durante los años treinta y después: existencia y carácter único

### 6. Desarrollo durante los treinta y después: estabilidad y estática comparativa

### 7. La estructura de la determinación de los precios y la unicidad del equilibrio

## **Prefacio**

*La tradición es algo mucho más importante. No puede heredarse, y si se desea debe obtenerse con grandes sacrificios.*

-T. S. Eliot. *Tradition and the Individual Talent.*

Gran parte de este libro se ocupa del análisis de una economía idealizada, descentralizada. En particular, se supone que en lo fundamental hay competencia perfecta y que las elecciones de los agentes económicos pueden deducirse de ciertos axiomas de racionalidad. Sólo recientemente se ha vuelto posible un examen más o menos completo y riguroso de esta construcción, en proceso desde hace mucho tiempo.

Nos proponemos hacer una exposición sistemática del tema. Al recorrer este camino, se puso en claro que podría atravesarse una cantidad considerable de territorio intelectual inexplorado sin sacrificar los objetivos básicamente expositivos del trabajo; por el contrario, en muchos casos la superación de lagunas da un aspecto más sistemático al conjunto. Igualmente, en la mayoría de los casos hemos ofrecido pruebas nuevas de los resultados conocidos en la teoría del equilibrio competitivo.

En las notas que se encuentran al final de cada capítulo se anotan los reconocimientos de prioridades; no hemos tratado de elaborar historias detalladas, sino sólo de presentar el primer enunciado importante de cada resultado. Los teoremas del texto no citados en las notas son, o tan bien conocidos que la referencia habría resultado pedante, o bien son originales de los autores de este libro hasta donde nosotros sabemos.

El libro es estrictamente un esfuerzo conjunto, y ambos autores son responsables de todos los errores. En el acto de la redacción, cada autor tuvo la responsabilidad inicial de cada capítulo, que luego se sometió a las críticas y enmiendas reiteradas del otro; en varios casos, el proceso de aproximación pasó por varias etapas. Este proceso habría continuado, sin duda, si los autores no hubiesen aprendido por amarga experiencia que el tiempo en que se da la recontratación coincide de hecho con el tiempo real. Arrow escribió los borradores iniciales de los capítulos 1 y 3-8, y los apéndices matemáticos B y C; Hahn escribió los borradores de los capítulos 9-14 y el apéndice matemático A. Ambos autores escribieron secciones del capítulo 2.

Hay necesidad de advertir que no nos ocuparemos de ciertos tópicos que algunos lectores esperarían encontrar; tales tópicos se han omitido para mantener dentro de límites razonables el alcance físico e intelectual del libro y para preservar alguna apariencia de unidad en el enfoque. (1) Hemos omitido todo examen de los mercados con un continuo de participantes, un estudio que a nuestro juicio tiene gran importancia potencial, introducido en años recientes por Aumann y proseguido por Debreu, Hildenbrand, Vind y las jóvenes escuelas belga e israelí. Este trabajo requiere el empleo de la teoría de la medición, lo que habría constituido una adición formidable a los requisitos de matemáticas avanzadas que ya exigimos de nuestros lectores. Sin embargo, en los capítulos 7 y 8 hemos tratado de avanzar hasta donde sea posible en esta dirección sin el empleo de la teoría de la medición. (2) Dado que hacemos hincapié en el equilibrio general de la economía, no nos hemos ocupado en forma detallada de teoremas específicos de las teorías de la empresa y la unidad familiar; sólo analizamos los resultados que requiere el examen del equilibrio general. Esto significa también que nos hemos contentado con basar la teoría de la unidad familiar en el supuesto de un ordenamiento de las preferencias, y no hemos examinado la literatura creciente que basa esta teoría en alguna forma del supuesto de las preferencias reveladas. (3) Nos hemos abstenido también de desarrollar la economía del bienestar, a excepción de algunos teoremas que intervienen, a la vez y en alguna forma, en la teoría descriptiva del equilibrio general. Se espera que otros volúmenes de esta serie de textos sobre economía matemática y econometría se ocupen de las teorías de la empresa y la unidad familiar, y de la economía del bienestar. (4) Sólo nos ocupamos en la forma más superficial de la extensión de la teoría del equilibrio general en cuanto a la situación de incertidumbre, en el capítulo 5. Por una parte, la economía de la incertidumbre es un tópico amplio que no puede tratarse aquí en forma adecuada; por la otra, la teoría del equilibrio general se encuentra todavía en etapa temprana del desarrollo.

Es natural y justificado que nos preguntemos si esta investigación de una economía aparentemente tan alejada del mundo real es algo que valga la pena.

Podemos contestar en la forma acostumbrada, llamando la atención sobre la naturaleza enormemente compleja del material que estudian los economistas y sobre la necesidad correspondientemente urgente de simplificación y, por tanto, de abstracción. Pero ello dejaría sin respuesta la duda acerca de por qué hayan de ser apropiadas las simplificaciones particulares aquí utilizadas. \_

Nuestra respuesta es algo diferente. Ya es larga y bastante respetable la serie de economistas que, desde Adam Smith hasta el presente, han tratado de demostrar que una economía descentralizada, motivada por el interés individual y guiada por señales de los precios, sería compatible con una disposición coherente de los recursos económicos, que podría considerarse, en un sentido bien definido, mejor que un gran número de disposiciones alternativas posibles. Además, las señales de precios operarían en cierta forma para establecer este grado de coherencia. Es importante entender cuán sorprendente deber ser esta afirmación para cualquiera que no se haya expuesto a esta tradición. La respuesta inmediata, “de sentido común”, al interrogante: “¿Cómo sería una economía motivada por la ambición individual y controlada por un número muy grande de agentes diferentes?”, sería probablemente ésta; habría caos. El hecho de que una respuesta enteramente diferente haya sido proclamada como cierta desde antiguo y haya impregnado en realidad el pensamiento económico de gran número de personas que en modo alguno son economistas, es motivo suficiente para investigarla seriamente. Una vez planteada la proposición y considerada muy seriamente, se hace importante saber, no sólo si la misma es cierta, sino también si ella *podría ser* cierta. Buena parte de lo que sigue se refiere a esta última cuestión, que en nuestra opinión merece la atención de los economistas.

Si se ha encontrado la confirmación de la proposición antes mencionada en una formalización particular de la economía, se vuelve luego interesante la determinación de la fuerza de este resultado. ¿Sobrevivirá el mismo si cambiamos el supuesto de una economía perfectamente competitiva por el de otra de competencia imperfecta? ¿Será destruido por las economías externas, por irrationalidades evidentes, tales como la de “juzgar la calidad por el precio”, o por la falta de suficientes “mercados de futuros” y el papel especial que podría asumir el medio de cambio? En lo que sigue se sugerirán algunas respuestas a estas cuestiones. Por supuesto, subsistirán otros interrogantes. Pero lo importante es esto: no basta con afirmar que, si bien es posible inventar un mundo donde resulten justificadas las pretensiones de la “mano invisible”, tales pretensiones fallan en el mundo real. Debe mostrarse cómo las características del mundo, consideradas esenciales en toda descripción del mismo hacen imposible también la justificación de aquellas pretensiones. Al tratar de contestar el interrogante “¿podría ser cierto?”, aprenderemos mucho acerca de por que podría no ser cierto.

Así pues, opinamos que exista una teoría de la economía descentralizada intelectualmente desafiante, que ha sido tomada en serio y lo sigue siendo, y por tanto merece el escrutinio lógico más cuidadoso.

Hemos prestado aquí también cierta atención a la posibilidad de utilizar las construcciones idealizadas para comparar economías diferentes. En general,

concluimos que los postulados son demasiado débiles para permitirnos avanzar mucho. Esto puede tomarse como demostración de la deficiencia de la teoría. Pero también puede tomarse como demostración de su fuerza, ya que sugiere que se han dejado grados de libertad suficientes para que la información empírica no influya en el pronóstico; no es una construcción totalmente a priori.

### **Nota sobre las convenciones de notaciones y referencias cruzadas**

Todos los vectores aparecen en negrita; los componentes de un vector tienen el mismo símbolo que éste, pero en cursiva y se distinguen entre sí por subíndices. Por ejemplo, si  $X$  es un vector, y  $x_i$  es su componente número  $i$ . Cuando el contexto es claro, no se utiliza ninguna notación especial para distinguir los vectores de hilera de los vectores de columna. Por ejemplo, en el producto interior  $\mathbf{x}\mathbf{y}$  se da por sentado que  $\mathbf{x}$  es un vector de hilera e  $\mathbf{y}$  es un vector de columna. La notación para las desigualdades de vectores es la siguiente:

$\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$  significa  $x_i \geq y_i$ , para todo  $i$ ;

$\mathbf{x} > \mathbf{y}$  significa  $x_i \geq y_i$ , para todo  $i$ ,  $x_i > y_i$  por los menos para una  $i$ ;

y

$\mathbf{x} > \mathbf{y}$  significa  $x_i > y_i$  para todo  $i$ .

Generalmente indicamos un conjunto con una letra mayúscula en bastardilla. Una suma vectorial de conjuntos de vectores se indica por un signo ordinario de sumatoria. Un producto cartesiano de conjunto de vectores se indica por  $X$ ; en ambos casos, los subíndices indican la extensión de la suma. Por ejemplo, si para cada índice  $f$ , y  $Y^f$  es un conjunto de vectores de producción posibles, su suma vectorial, el conjunto de posibilidades de producción social, se indica por  $f Y^f$ , mientras que su producto cartesiano, que es el conjunto de posibles asignaciones de la producción, se denota por  $\mathbf{X}^f \mathbf{Y}^f$ . Un conjunto definido como un producto cartesiano de una familia de conjuntos con una letra en cursiva, se designa con la correspondiente letra mayúscula manuscrita; por ejemplo  $\mathbf{y} = \mathbf{X}^f \mathbf{Y}^f$ , y todo elemento del mismo, con la correspondiente letra minúscula manuscrita; por ejemplo,  $y$  es un miembro típico de  $\mathbf{y}$ .

Si un conjunto se define por alguna propiedad de sus miembros se escribe con llaves, donde el elemento típico del conjunto se anota primero, seguido, tras una línea vertical, por la propiedad en cuestión. Por ejemplo,  $\mathbf{A} = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} > \mathbf{0}\}$  es el conjunto de todos los vectores  $\mathbf{X}$  con la propiedad de que todos sus elementos son no negativos y por lo menos uno es positivo.

Un par de llaves que encierran un solo vector denota el conjunto consistente en ese vector solo; por ejemplo,  $\{\mathbf{x}_0\}$ . Si  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son conjuntos  $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$  denota la diferencia de teoría de conjuntos entre  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , o sea el conjunto de todos los elementos de  $\mathbf{A}$  que no se encuentran también en  $\mathbf{B}$ .

Las matrices se denotan generalmente con letras mayúsculas en cursivas o se presentan por paréntesis alrededor de elemento típico. Por ejemplo,  $(\mathbf{x}_{ij})$  es la matriz  $\mathbf{X}$  cuyo elemento típico es  $\mathbf{x}_{ij}$ . La transportación se denota con una prima.

En cada capítulo se encontrará la notación detallada.

## Introducción histórica

*Este es el uso de la memoria para liberación...*

*La Historia puede ser servidumbre,*

*La Historia puede ser libertad...*

-T. S. Eliot, *Little Gidding*

## 1. Los economistas clásicos

Hay dos aspectos básicos, imposibles de separar por completo, de la noción del equilibrio general tal como se ha utilizado en la economía: la noción simple de la determinación, en que las relaciones que describen el sistema económico deben ser suficientemente completas para determinar los valores de sus variables, y la noción más específica de que cada relación representa un equilibrio de fuerzas. Generalmente, pero no siempre, se interpreta esta última noción en el sentido de que una violación de cualquier relación pone en movimiento fuerzas que tienden a restaurarla (se ha demostrado que esta hipótesis no implica la estabilidad de todo el sistema). En cierto sentido, casi todo intento de elaboración de una teoría de todo el sistema económico implica la aceptación de la primera parte de la noción de equilibrio; y la “mano invisible” de Adam Smith es una expresión poética de lo más fundamental en las relaciones de equilibrio económico; la igualación de las tasas de rendimiento, impuesta por la tendencia de los factores a trasladarse desde los rendimientos bajos hasta los altos.

La noción del equilibrio (“peso igual”), con referencia a la condición de equilibrio de una balanza con pivote en el centro) era familiar en la mecánica por mucho antes de la publicación de *La riqueza de las naciones* en 1776, y con ella la noción de que los efectos de una fuerza pueden destruirlo (por

ejemplo, el agua que busca su propio nivel), pero no es evidente que Smith haya obtenido sus ideas de alguna analogía con la mecánica. Cualquiera que sea la fuente del concepto, la noción de que un sistema social movido por acciones independientes en búsqueda de valores diferentes es compatible con un estado final de equilibrio coherente, donde los resultados pueden ser muy diferentes de los buscados por los agentes; es in duda la contribución intelectual más importante que ha aportado el pensamiento económico al entendimiento general de los procesos sociales.

Smith percibió también la implicación más importante de la teoría general del equilibrio; la capacidad de un sistema competitivo para obtener una asignación de recursos eficiente en algún sentido. Sin embargo, no se encuentra en Smith nada que parezca un argumento riguroso, siquiera una presentación cuidadosa de la proposición de la eficiencia.

Así pues, puede sostenerse que Smith fue el creador de la teoría del equilibrio general, aunque pueda ponerse en duda la coherencia y consistencia de su trabajo. *A fortiori*, los posteriores expositores sistemáticos del sistema clásico, como Ricardo, Mill y Marx, cuyo trabajo subsanó algunas de las lagunas lógicas del de Smith, pueden ser considerados como los primeros expositores de la teoría del equilibrio general. En algunos sentidos, Marx se aproximó más a la teoría moderna en cuanto a la forma en su esquema de la reproducción simple (*El Capital*, vol. II), estudiada en combinación con su desarrollo de la teoría de los precios relativos (vol. I y III), que cualquiera otro economista clásico, aunque lo confunda todo en su intento de mantener simultáneamente una teoría pura del valor trabajo y una igualación de las tasas de rendimiento del capital. [\[1\]](#)

Sin embargo, hay un sentido muy importante en que ninguno de los economistas clásicos tenía una verdadera teoría general del equilibrio: ninguno de ellos asignó un papel explícito a las condiciones de la demanda. Sin duda, los pensadores más sistemáticos del grupo, de modo muy particular J.S. Mill, rindieron homenaje verbal al papel de la demanda y la influencia de los precios sobre ella, pero no hubo una integración genuina de la demanda con el carácter de la teoría clásica esencialmente centrado en la oferta. Los supuestos simplificadores especiales hechos en relación con la oferta facilitaron ese desentendimiento de la demanda. Una teoría del equilibrio general es una teoría acerca de las cantidades y los precios de todos los bienes. Sin embargo, los autores clásicos descubrieron que los precios parecían estar determinados por un sistema de relaciones derivadas de la condición de la tasa igual de beneficio, donde no intervenían las cantidades. Esto es bastante claro como se suponen coeficientes de producción fijos y un solo factor primario, el trabajo, como en el famoso intercambio de Smith de venados y castores; y la demostración de Malthus y Ricardo de que podría incluirse la tierra en el sistema constituyó una gran hazaña. Si, por último, los supuestos malthusianos acerca de la población implicaban que el precio de oferta del trabajo estaba fijo en términos de bienes, podría determinarse hasta la tasa de rendimiento del capital (aunque la presencia del capital como factor productivo y receptor de remuneraciones constituyó claramente un embarazo para los autores clásicos,

como los sigue siendo hasta cierto punto en nuestros días); en realidad, con el supuesto malthusiano volvió a tener el modelo un solo factor primario; la tierra.

Así pues, en cierto sentido definido, los economistas clásicos no tuvieron una teoría verdadera de la asignación de recursos, ya que no se estudió la influencia de los precios sobre las cantidades y se negó la influencia recíproca. [2] Pero la teoría clásica no pudo responder al problema lógico de la explicación de los salarios relativos de tipos heterogéneos de trabajo, ni al problema empírico de la explicación de los salarios que subían sostenidamente por encima del nivel de subsistencia. En ese contexto surgieron las teorías neoclásicas alrededor de 1870, con todos los recursos primarios ocupando el papel que antes había desempeñado la tierra por sí sola.

(Para ser justo con los economistas clásicos, debemos recordar que la teoría del comercio internacional en la forma que le dio Mill fue una teoría genuina de equilibrio general. Desde luego, los supuestos formulados fueron muy restrictivos, en particular el de la inmovilidad de los factores).

## 2. Las contribuciones de Walras

El reconocimiento pleno del concepto del equilibrio general puede atribuirse sin lugar a dudas a Walras [1874, 1877], aunque W. Stanley Jevons y Carl Menger habían elaborado en forma independiente muchos elementos del sistema neoclásico. [3] El sistema económico se compone de unidades familiares y empresas. Cada unidad familiar posee un conjunto de recursos, bienes útiles en la producción o el consumo, incluyendo diversas clases de trabajo o mano de obra. En consecuencia, para todo conjunto dado de precios una unidad familiar tiene un ingreso derivado de la venta de sus recursos, y con este ingreso puede escoger entre todos los conjuntos alternativos de bienes de consumo cuyo coste, a los precios dados, no supere el ingreso de la unidad familiar. Así pues, la demanda de cualquier bien de consumo hecha por las unidades familiares es función de los precios de los bienes de consumo y de los recursos. Se supuso (por lo menos en las primeras versiones) que las empresas operaban bajo coeficientes fijos. Luego la demanda de bienes de consumo determinaba la demanda de recursos, y los supuestos combinados de los coeficientes fijos y de los beneficios iguales a cero en un sistema competitivo implicaban las relaciones entre los precios de los bienes de

---

1]2[1αραπ αχισ(λχ δαδιχαπαχινι αλ ρογιω ναργ νοχ οδατνεσερπ αη ]5391[ τηγινΚ .Η.Φ.οχιμ (νοχε αμελβορπ λεδ ν (ιχαγνισα εδ αζελαρυταν αλ δαδιραλχ νοχ ρεω

2]3[2ρετεπμηχΣαλ εδ σεροδαερχ σολ εδ ονυ ομοχ ]1871[ δρανσι α οδαλα)εσ ναη σορτο ψ,1691[ σιραηχοεηΤ νοχ οδρευχα εΔ .λαρενεγ οιββιλιυθε λεδ α' ροετα ελαπιυθε οιβμαχρετιν ορυπ εδ οσαχ λε αραπ δρανσι εδ ολεδομ λε ]07-6691ευθ ρενοπυσουδιπιδινι ν ηγιννεειτ αδναμεδ εδ σενοιχνηψ σαλ σαδοτ ευθ ψ ,οπιτχα ανυ εδ σ(μ ενεεινE .οιορπ οιχερπ λε νοχ ψ οσεργνι λε νοχ ν (ιχαλερ νε αιρατινυ δαδιχισαλεαλ νεψυτιτσονοχ σοπιταλερ σοιχερπ σολ ευθ αρτσευμεδ εσ σενοιχιδνοχ σατσεεσ ν(ιβμαΤ .σαεν(τλυμισ σελαενιλ σενοιχαυχε εδ αμετσεισ νυ εδ ν (ιχυλοσσολ εδ σοδαρβμυτσοχα σοτσευπισ σολ νοχ ,ν (ιχχυδορπ αλ εχυδορτινισολ α σ(μ οηχυμ αμιζορπα εσ ολεδομ λεδ υτιρίπσε λE .σοφιφ σετνειχιφεοχ.σοεν(ροπιμετνοχ σατσιχισαλχ σολ α ευθ σεροιρετσοπ σοχισ(λχοεν σεροτυα

consumo y de los recursos. Así pues, un conjunto de precios de *equilibrio* era un conjunto tal que la oferta y la demanda se igualaran en cada mercado; bajo el supuesto de coeficientes de producción fijos, o en términos más generales, de rendimientos constantes a escala, esto equivalía a igualar la oferta y la demanda en los mercados de recursos, cuando los precios debían satisfacer la condición de beneficios iguales a cero para todas las empresas. El trabajo posterior de Walras, J. B. Clark, Wicksteed y otros, generalizó los supuestos relativos a la producción para incluir métodos alternativos, expresados en una función de producción. Las consideraciones de la productividad marginal ayudaron a determinar los precios de los recursos. La existencia de un conjunto de precios de equilibrios se sostuvo con base en la igualdad del número de precios por determinar con el número de ecuaciones que expresan la igualdad de la oferta y la demanda en todos los mercados. Ambos son iguales al número de bienes, digamos  $n$ . En esta cálculo Walras reconoció que había dos complicaciones (a) Sólo los precios relativos afectan el comportamiento de las unidades familiares y las empresas; por lo tanto, el sistema de ecuaciones tiene sólo  $n-1$  variables, lo que Walras expresó seleccionando un bien para que sirviera como *muméraire*, mientras que los precios de todos los bienes se median en relación con el precio de este numerario. (b) El equilibrio presupuestario de cada unidad familiar entre el ingreso y el valor del consumo, y la condición de beneficio nulo de las empresas, implican en conjunto lo que ha dado en llamarse la ley de Walras: el valor de mercado de la oferta es igual de la demanda para cualquier conjunto de precios, no sólo para el conjunto de equilibrio; por lo tanto, las relaciones de oferta-demanda no son independientes. Si la oferta iguala a la demanda en  $n-1$  mercados, la igualdad debe existir en el mercado  $n$ . Walras fue más allá y examinó la estabilidad del equilibrio, esencialmente por primera vez ( es decir, aparte de algunas alusiones breves de Mill en el contexto del comercio internacional) en su famosa pero más bien oscura teoría de los *tâtonnements* (literalmente “tentaleos” o “avances a tienta”). Supongamos, como hizo Walras, un conjunto de precios dado arbitrariamente: entonces la oferta puede superar a la demanda en algunos mercados y ser menor que ella en otros (a menos que el conjunto inicial sea en realidad el conjunto de equilibrio, deberá haber por lo menos un caso de cada una de esas situaciones, por la ley de Walras). Supongamos que los mercados se consideran en algún orden definido. En el primer mercado, ajustemos el precio de modo que se igualen la oferta y la demanda, dados todos los demás precios; esto requerirá normalmente que se eleve el precio si inicialmente la demanda superaba a la oferta; que se baje en caso contrario. El cambio del primer precio cambiará la oferta y la demanda en todos los demás mercados. Repitamos el proceso con el segundo y los demás mercados. Al final de la primera vuelta, el último mercado estará en equilibrio, pero ninguno de los demás lo estará necesariamente porque los ajustes de los mercados subsecuentes destruirán el equilibrio logrado en cualquiera de ellos. Sin embargo, argüía Walras, las funciones de oferta y demanda de cualquier bien dado se verán más afectadas por los cambios de su propio precio que por los de otros precios; en consecuencia, tras de una vuelta los mercados deberán estar más cerca del equilibrio que al principio, y tras de vueltas sucesivas tenderán a la igualdad la oferta y la demanda en cada mercado. Parece claro que Walras no supuso literalmente que los mercados alcancen el equilibrio en algún orden definido. Más bien, la historia es una forma conveniente de

exposición del modo en que el sistema de mercado podría resolver en realidad el sistema de las relaciones de equilibrio. El sistema dinámico, mejor dicho, afirmaba que en todo mercado sube el precio cuando la demanda supera a la oferta y baja en el caso contrario; debe suponerse también que los cambios de precios ocurren en forma simultánea en los diversos mercados. Por último, Walras buscaba un objetivo todavía más elevado con su análisis del equilibrio general: quería estudiar lo que ahora se llama *estática comparativa*; en otras palabras las leyes de variación de los precios y cantidades de equilibrio al variar los datos básicos (recursos, condiciones de la producción, o funciones de utilidad). Pero en realidad se avanzó poco en esa dirección.

### 3. Edgeworth y Pareto: racionalidad de grupo y asignación

A partir de la mano invisible de Adam Smith, los economistas clásicos sostuvieron que el equilibrio competitivo producía lo que en algún sentido no muy bien definido constituía una asignación óptima de los recursos. Edgeworth [1881] y Pareto [1909, p. 534] aclararon de modo considerable la relación existente entre los equilibrios competitivos y las asignaciones óptimas, partiendo de estas últimas.

Edgeworth consideró dos individuos, con recursos iniciales de dos bienes, que estaban tratando de realizar una transacción entre sí. No supuso que estuviesen operando bajo las reglas del juego competitivo, sino que podrían hacer cualquier tipo de transacción que desearan. Supuso que (a) no harían una transacción si hubiese alguna otra forma más beneficiosa para ambos, y (b) que ninguno de ellos realizaría una transacción que lo colocase en situación peor que antes. Demostró que había todo un conjunto de asignaciones, que llamó la *curva de contrato*, que satisfacían estas condiciones, uno de los cuales era el equilibrio competitivo. Luego supuso que, en lugar de dos individuos, había dos tipos de individuos, y que todos los individuos de cada tipo tenían la misma función de utilidad y la misma dotación de recursos iniciales. Generalizó los supuestos anteriores acerca de las condiciones del intercambio satisfactorio; no se complementaría el intercambio multilateral entre los participantes mientras hubiese algún subconjunto de ellos que pudiesen hacer alguna transacción entre sí, utilizando sólo su propios recursos que los beneficiase más que en el intercambio propuesto inicialmente. Esta condición generaliza los supuestos (a) y (b) anteriores. Luego llegó a la conclusión notable de que al aumentar el número de individuos de cada tipo se reducía el conjunto de intercambios posibles en la dirección del equilibrio competitivo. En consecuencia, un proceso de negociación general resulta una relación con el equilibrio general competitivo.

La contribución especial de Pareto es una definición adecuada de la asignación óptima de los recursos, esencialmente la satisfacción de la condición (a) de la curva de contrato de Edgeworth. Reconoció, pero no demostró en forma rigurosa, que en su sentido siempre podría alcanzarse un óptimo como un equilibrio competitivo a partir de alguna asignación inicial de recursos adecuada.

#### 4. Análisis del equilibrio parcial

Cournot [1838] y más tarde Jenkin [1870] y los economistas neoclásicos utilizaron ampliamente el análisis de equilibrio parcial de un solo mercado. La demanda y la oferta de un solo bien se conciben como funciones del precio de ese bien solamente; el precio de equilibrio es aquél en que igualen la demanda y la oferta. Esta forma de análisis debe contemplarse como un instrumento pedagógico para aprovechar la facilidad de la representación gráfica de relaciones de una sola variable, o como una primera aproximación al análisis del equilibrio general. La existencia de un mercado supone que debe haber, por lo menos, un bien aparte del que se comercia en ese mercado, ya que un precio debe expresarse como la tasa a que un individuo da algo a cambio del bien en cuestión. Si realmente sólo hubiese un bien en el mundo, no habría intercambio ni mercado.

Supongamos por el momento que sólo hay dos bienes, digamos el 1 y el 2. A causa de la homogeneidad, la demanda y la oferta se determinan por la razón del precio del bien 1 al precio del bien 2, o sea el precio del bien 2 cuando el bien 2 es el numerario. Según la ley de Walras, el equilibrio en el mercado 1 asegura el equilibrio en el mercado 2. El análisis de equilibrio parcial del mercado 1, en el caso de dos bienes, equivale enteramente al análisis del equilibrio general.

El análisis de un mundo de dos bienes puede tener considerable utilidad didáctica en el estudio del equilibrio general mediante un caso especial que admita una representación diagramática sencilla, pero podríamos preguntarnos si el análisis del equilibrio parcial tiene algún interés empírico en un mundo de muchos países. El tema siguiente, elaborado en forma independiente por Hicks [1939] y Leontief [1936], aporta una respuesta: si los precios relativos de algún conjunto de bienes permanece constante, para todos los fines analíticos el conjunto puede considerarse como un solo bien compuesto, cuyo precio puede considerarse proporcional al precio de cualquier miembro del conjunto y cuya cantidad se define luego en forma tal que el gasto (precio por cantidad) en el bien compuesto sea igual a la suma de los gastos en los bienes individuales del conjunto. En símbolos, si los precios,  $P_1, \dots, P_m$ , de un conjunto de bienes  $1, \dots, m$  satisfacen las condiciones  $p_i = P p_i$  ( $P_i$  es una constante para cada  $i$ , mientras que  $p$  puede variar), podemos considerar  $p$  como el precio del bien compuesto, y  $p_i q_i$  como la cantidad, de donde  $q_i$  es la cantidad del bien  $i$ .

El teorema de agregación de Hicks-Leontief puede utilizarse para justificar el análisis de equilibrio parcial. Supongamos que un cambio en el precio del bien 1 deje constantes los precios relativos de todos los demás bienes. Entonces, mientras sólo consideramos las perturbaciones del equilibrio debidas a causas peculiares al mercado del bien 1, los bienes restantes pueden considerarse como un solo bien compuesto, y el análisis del equilibrio parcial será válido.

El supuesto de la constancia estricta de los precios relativos de los demás bienes no será generalmente válido, desde luego, pero en muchos casos de interés práctico puede resultar aproximado. Para ello basta que los cambios de los precios relativos de los demás bienes inducidos por un cambio del precio

del bien que se estudia, no induzcan a su vez a una modificación significativa de las condiciones de la oferta y la demanda del mercado de dicho bien.

## 5. Desarrollos ocurridos durante los años treinta y después: existencia y carácter único

Los siguientes adelantos verdaderamente importantes se lograron apenas en los años treinta. Hubo dos corrientes claras de pensamiento: una iniciada en la literatura de habla alemana y preocupada primordialmente con la existencia y el carácter único del equilibrio; la otra, expresada fundamentalmente en inglés, preocupada con la estabilidad y la estática comparativa. La primera principió por examinar a fondo la simplificación hecha por Cassel [1924] del sistema de Walras, caso interesante de un trabajo que en sí mismo no tenía importancia pero cuyo estudio resultó extraordinariamente fructífero. Cassel supuso dos clases de bienes: los productos que intervienen en las funciones de demanda de los consumidores y los factores que utilizan para producir los productos (no se consideraron los bienes intermedios). Cada producto se genera por factores con coeficientes de insumo-producto constantes. Se suponen totalmente inelásticas las ofertas de factores. Sea  $a_{ij}$  la cantidad del factor  $i$  utilizada en la producción de una unidad del producto  $j$ ,  $x_j$  la producción total de producto  $j$ ,  $v_i$  la oferta inicial total del factor  $i$ ,  $p_j$ , el precio del producto  $j$ , y  $r_i$ , el precio del factor  $i$ . entonces, la condición de que la demanda sea igual a la oferta de todos los factores de expresa así.

$$a_{ij} r_i = p_j \text{ para todo } j. \quad (2)$$

El sistema se completa con las ecuaciones que relacionan la demanda de productos con sus precios y con el ingreso total derivado de la venta de los factores. Hayen total tantas ecuaciones como incógnitas. Pero en tres ensayos virtualmente simultáneos de Zeuthen [1932], Neisser [1932] y von Stackelberg [1933] se demostró en formas diferentes que el problema de la existencia de un equilibrio significativo es más complicado que la igualdad de ecuaciones e incógnitas. Neisser hizo notar que aún con valores perfectamente verosímiles de los coeficientes de insumo-producto  $a_{ij}$ , los precios o cantidades que satisfacen (1) y (2) podrían ser negativos. Von Stackelberg advirtió que (1) constituye un sistema completo de ecuaciones en los productos  $x_j$ , dado que las ofertas de factores,  $v_i$ , son datos, pero no se había supuesto nada acerca de los números de factores o bienes distintos. En particular, si el número de bienes fuese menor que el de factores, la ecuación (1) no tendría solución en general.

Zeuthen reconsideró el significado de la ecuación (1). Recordó que los economistas, por lo menos desde Carl Menger, habían reconocido que algunos factores (como en el aire) son tan abundantes que no se cobraría por ellos. Estos no entrarían en la lista de factores del sistema de Cassel. Pero Zeuthen argumentó entonces que la división de factores en libres y escasos no debería tomarse como dada a priori. Por lo tanto, sólo podemos decir que el uso de un factor no debe exceder su oferta, pero se es menor que tal oferta, el factor será libre. En símbolos, sustituimos (1) por

$$a_{ij} x_j \leq v_i$$

si se da desigualdad estricta, tendremos

$$r \neq 0. (1')$$

Para una generación posterior de economistas familiarizados con la programación lineal y sus generalizaciones, el significado de este paso no requiere elaboración; las igualdades son reemplazadas por desigualdades y se introduce la noción vital de los sobrantes complementarios de cantidades y precios.

Independiente de Zeuthen, Schlesinger, un banquero y economista aficionado vienés, llegó a la misma conclusión. Pero fue mucho más allá, y en forma intuitiva captó la idea crucial de que la sustitución de igualdades por desigualdades resuelve también los problemas planteados por Neisser y por von Stackelberg. Schlesinger [1933-34] advirtió la complejidad matemática de un tratamiento riguroso, y a petición suya Oskar Morgenstern le puso en contacto con un joven matemático, Abraham Wald. El resultado de su colaboración fue el primer análisis riguroso del equilibrio competitivo general. En una serie de ensayos [1933-34, 1934-35] (véase en resumen en Wald [1936, 1951]), Wald demostró la existencia de equilibrio competitivo en varios modelos alternativos, incluyendo el de Cassel y un modelo de puro intercambio. Se definió el equilibrio competitivo en el sentido de Zeuthen, y en las matemáticas aparece claro el papel esencial desempeñado por esa definición en la justificación de la existencia.

Los ensayos de Wald tenían una profundidad matemática inaccesible, no sólo por cuanto al empleo de herramientas refinadas, sino también por la complejidad del argumento. Cuando los economistas matemáticos los conocieron gradualmente, sirvieron quizá tanto para inhibir con su dificultad las nuevas investigaciones como para estimularlas.

Finalmente se tuvo el auxilio de una línea de investigación relacionada; la teoría de los juegos de John Von Neumann (primer ensayo básico publicado en 1928; véase a Von Neumann y Morgenstern [1944]). Esta relación histórica entre la teoría de los juegos y el equilibrio económico tiene elementos paradójicos. La teoría de los juegos ha desarrollado varias nociones de equilibrio muy generales que, en principio, deberían reemplazar la noción del equilibrio competitivo o incluirla como un caso especial. Una noción tal de equilibrio, la del *núcleo*, es idéntica a la curva de contrato de Edgeworth; la introdujo Gillies [1953] y la aplicó Shubik [1959] a situaciones específicamente de mercado, y Scarf [1962] (Véase el Capítulo 8) en forma mucho más cercana al pensamiento económico común. El estímulo principal de la teoría de los juegos a la teoría de equilibrio ha provenido de las herramientas matemáticas desarrolladas en aquélla y aplicadas en ésta con interpretaciones totalmente diferentes. El propio Von Neumann hizo la primera de tales aplicaciones en su afamado ensayo sobre el crecimiento económico equilibrado [1937, 1945]. En este modelo no había funciones de demanda, sólo de producción. Los mercados debían estar en equilibrio en cada período en el sentido de Zeuthen, pero más allá se encontraba el equilibrio en un segundo sentido que podría llamarse *equilibrio estacionario*. La configuración del equilibrio debía ser la

misma de un período a otro. Para probar la existencia del equilibrio, Von Neumann demostró que cierta razón de formas bilineales tenía un punto nulo, lo que constituía una generalización del teorema que probaba la existencia del equilibrio en los juegos de dos personas de suma cero. Pero en la teoría de los juegos las variables del problema son probabilidades (de escoger estrategias alternativas), mientras que en la aplicación a la teoría del equilibrio un conjunto de variables era el de los precios y el otro el de los niveles de las actividades productivas.

Von Neumann dedujo su teorema del punto nulo a partir de una generalización del teorema del punto fijo de Brouwer, una proposición famosa en topología. El matemático Shizuo Kakutani presentó años después una versión simplificada del teorema de Von Neumann, y el teorema de Kakutani ha sido la herramienta básica virtualmente en la totalidad del trabajo posterior (en el Apéndice Matemático C se encuentran enunciados y pruebas de los teoremas de Brouwer y Kakutani). Con estos fundamentos, más la influencia del rápido desarrollo de la programación lineal tanto en el campo de las matemáticas (de nuevo relacionado estrechamente con los teoremas del punto nulo) como en el de la economía [4] varios académicos percibieron en forma independiente que ahora se podían obtener teoremas de existencia más simples y generales que los de Wald. Los primeros ensayos fueron los de McKenzie [1954] y Arrow y Debreu [1954]. Luego vinieron las aportaciones de Hukukane Nikaidô [1956] e Hirofumi Uzawa, Debreu y McKenzie [1959, 1961]. La exposición sistemática más completa de las condiciones de existencia se encuentra en Debreu [1959]; la versión más general se encuentra también en Debreu [1962].

## 6. Desarrollo durante los treinta y después: estabilidad y estática comparativa

La demanda excedente (demanda menos oferta) del bien  $i$ , en general es función de  $P_1, \dots, P_n$  los precios de los  $n$  bienes. Entonces, la definición de la estabilidad de Hicks era equivalente a la condición de que los menores principales de la matriz, cuyos elementos fuesen  $z_i/p_j$  tuviesen determinantes que fuesen positivos o negativos, según el número de hileras o columnas incluidas fuese par o non. Hicks trató también de derivar conclusiones de estática comparativa acerca de la respuesta de los precios ante cambios de las funciones de demanda. Los teoremas actualmente aceptados llegan a las mismas conclusiones, aunque a partir de las premisas diferentes.

Samuelson formuló la definición de estabilidad ahora aceptada. Argumentó que la misma debe basarse en un modelo dinámico explícito relativo al comportamiento de los precios cuando el sistema está en desequilibrio. Formalizó el supuesto implícito de Walras y de la mayoría de sus sucesores; el precio de cada bien aumenta en forma proporcional a la demanda excedente de ese bien. Este supuesto define un sistema de ecuaciones diferenciales; si todos los caminos que satisfacen el sistema y parten suficientemente cerca del equilibrio convergen hacia el mismo, el sistema será estable. Samuelson pudo demostrar que la definición de Hicks no es necesaria ni suficiente para la suya, y que el sistema económico es estable si los efectos de ingreso sobre el consumo son suficientemente pequeños. Propuso un *principio de*

*correspondencia* general, en el sentido de que todos los teoremas significativos de la estática comparativa derivan de las condiciones de segundo orden relativas a la elevación máxima de los beneficios por parte de las empresas o de la utilidad por parte de los consumidores, o bien del supuesto de que el equilibrio observado es estable. En realidad, de este principio se pueden derivar muy pocas proposiciones útiles

La tendencia actual en materia de estática comparativa y estabilidad se originó en el trabajo de Mosak [1944] y de Metzler [1945]. No se ha hecho hincapié precisamente en el principio de correspondencia de Samuelson, sino que se ha tendido más bien a formular hipótesis acerca de las funciones de demanda excedente que implican a la vez estabilidad y ciertos resultados en el campo de la estática comparativa.

## 7. La estructura de la determinación de los precios y la unicidad del equilibrio

A partir de 1948 se ha desarrollado un análisis más detallado de las relaciones existentes entre los precios de los factores y los precios de los bienes producidos. En estos análisis suele suponerse que (a) cada bien es un factor original o un bien producido, pero no ambas cosas y (b) no hay producción conjunta; o sea, que cada proceso de producción tiene exactamente un producto, aunque puede tener varios insumos.

El caso en que se supone, además, que la producción ocurre en condiciones de coeficientes fijos, genera un análisis relativamente sencillo. La condición de beneficio nulo en todos los procesos conduce a un sistema de ecuaciones lineales. En el caso sencillo en que todos los insumos son factores originales, los precios de los bienes que se produzcan en cualquier cantidad positiva se relacionan con los precios de los factores por las ecuaciones (2) (Sección 1.5). Adviértase que si sólo hay un bien primario los coeficientes tecnológicos determinan los precios relativos de todos los bienes. Por otra parte, si el número de factores no excede el número de bienes producidos y si la matriz  $(a_{ij})$  tiene un orden igual al número de factores (igual al número de hileras), los precios de los factores se determinan en forma única por los precios de los bienes.

Estas conclusiones obviastienen generalizaciones muy considerables. Las primeras extensiones se aplicaron en el caso en que hay bienes intermedios, o sea bienes producidos, que se utilizan como insumos en la producción de bienes (Leontief [1941]). Considérese de nuevo sólo los bienes producidos en alguna cantidad positiva de modo que la condición de beneficio nulo exista en cada proceso productivo. Sea ahora  $a_{ij}$  la cantidad del bien producido  $i$  utilizada en la producción de una unidad del bien  $j$ , y sea  $b_{kj}$  la cantidad factor del original  $k$  utilizada en la producción de una unidad del bien  $j$ . Como antes, sea  $p_j$  el precio del bien producido  $j$ , y sea  $v_k$  el precio del factor original  $k$ . Entonces las condiciones de beneficio nulo se escriben:

$$p_j - \sum_i p_i a_{ij} = \sum_k v_k b_{kj}$$

o en la notación de matrices y vectores.

$$p = pA = vB, (3)$$

donde  $p$  y  $v$  son los vectores con componentes  $p_j$  y  $v_k$ , respectivamente y entonces (3) puede escribirse

$$p(I-A) = vB, (4)$$

y, si  $I-A$  es no singular,

$$p = vB (I-A)^{-1}. (5)$$

Por lo tanto los precios de los factores determinan los precios de los bienes, en particular, si sólo hay un factor original, sigue siendo cierto que los precios relativos de los bienes producidos se determinan completamente por los coeficientes técnicos, independientemente de la demanda. También, si el orden de la matriz  $B$  es igual al número de factores (hileras), puede verse por (4) que los precios de los bienes determinan en forma única los precios de los factores.

Debe hacerse notar que los precios de los bienes determinados por (4) son necesariamente no negativos si los precios de los factores lo son, y si se satisface una condición natural en  $A$ . Específicamente, se sigue de las definiciones de  $A$  y  $B$  y del supuesto de que no hay una producción conjunta, que los elementos de  $A$  y  $B$  son no negativos. Supóngase ahora que el sistema es productivo en el sentido de que es posible producir la cantidad positiva de cada bien producida si no consideramos las limitaciones debidas a escasez de los factores: en símbolos, existe un vector no negativo  $X$  tal que  $AX < X$  (es decir, cada componente de  $AX$  es menor que el componente correspondiente de  $X$ ). Se sigue entonces de una teoría matemática de Perron y Frobenius bien conocida: que la matriz  $I-A$  es no singular y que los elementos de  $(I-A)^{-1}$  son no negativos. Para  $v$  no negativo,  $vB$  es no negativo, y por lo tanto  $p = vB(I-A)^{-1}$  es no negativo (véase una exposición de esta cuestión en Karlin [1959, vol. I páginas 245-246 y 256-258]; la teoría matemática puede verse en Karlin [1959, Vol. I pp. 246-256] o en el Apéndice Matemático A).

Trabajos realizados desde 1948 han demostrado que estas relaciones entre los precios de los bienes y de los factores pueden generalizarse al caso de métodos alternativos de producción (pero se conserva la hipótesis de ausencia de producción conjunta). Samuelson [1951] y Georgescu-Roegen [1951] demostraron que con un factor primario sigue siendo cierto que la tecnología determina los precios relativos de bienes producidos, independientemente de las condiciones de la demanda. En cierto sentido, esto es una resurrección sorprendente de la teoría clásica, donde las condiciones de la oferta determinan por sí solas los precios. Dado que la producción competitiva siempre reduce los costes al mínimo, se sigue que la técnica escogida realmente para la producción de cualquier bien es también independiente de las condiciones de la demanda, aunque en general dependerá de las condiciones tecnológicas existentes en otras industrias. En la Sección 2.11 se encontrará una explicación más amplia.

Samuelson [1948, 1953-54] estudió las condiciones de la determinación de los precios de los factores por los precios de los bienes; el problema surgió en el contexto del comercio internacional, que según se supone iguala los precios de los bienes entre países. En realidad, la cuestión de las condiciones bajo las cuales los precios de los bienes determinan los precios de los factores en un caso especial de las condiciones de la unicidad de los precios del equilibrio general, específicamente el caso en que la demanda de los bienes es perfectamente elástica.

En general no hay necesidad de que el equilibrio sea único, y ya desde Marshall se han conocido ejemplos no de unicidad. Wald [1936] inició el estudio de las condiciones suficientes para la unicidad del equilibrio competitivo. Desde entonces, sus dos condiciones suficientes alternativas se han convertido en grandes temas de la literatura: el axioma débil de la preferencia revelada se da en las funciones de la demanda de mercado, o todos los bienes son sustitutos aproximados.

Gale y Nikaidô [1965] corrigieron un error contenido en las condiciones de Samuelson para la determinación de los precios de los factores; además, aportaron la base matemática de un teorema de unicidad muy general, que en particular pluraliza la condición de Wald de la sustituibilidad aproximada .

---