MEDIDAS DE *PERFORMANCE*: ALGUNOS INDICES CLASICOS Y RELACION DE LA TRIP CON LA TEORIA DE CARTERA

por Fernando Gómez-Bezares, José A. Madariaga y Javier Santibáñez
Publicado (en versión reducida, sin apéndices) en *Análisis Financiero Internacional*, nº 113, Tercer Trimestre, 2.003, págs. 5-19

1.- INTRODUCCION

El Valor Actualizado Penalizado (VAP) es un criterio de selección de inversiones en ambiente de riesgo propuesto hace ya unos veinte años por Fernando Gómez-Bezares[1] y sobre el que hemos venido trabajando en el Departamento de Finanzas de la Universidad Comercial de Deusto a lo largo de los últimos años[2]. En una comunicación presentada al III Foro de Finanzas celebrado en los meses de noviembre y diciembre de 1995 en la Universidad Comercial de Deusto (Bilbao)[3], tratábamos de desarrollar un criterio apoyado en la idea anterior, la TRIP (Tasa de Rentabilidad Interna Penalizada), coherente con ella, y que trataba de conectarlo con los criterios clásicos de tratamiento de la decisión de inversión en condiciones de riesgo (ajuste del tipo de descuento y equivalente de certeza). Veíamos entonces las hipótesis de partida del criterio, su justificación teórica y la coherencia del mismo con los mencionados criterios.

En este artículo intentaremos conectar la TRIP con otra línea interesante de trabajo desarrollada en el campo de las modernas finanzas como es la Teoría de cartera de Markowitz, así como con uno de los modelos desarrollados a partir de aquella (el *Capital Asset Pricing Model*). Y lo haremos tratando de analizar la coherencia de la TRIP con algunas medidas de *performance* utilizadas habitualmente para el estudio del desempeño de títulos y carteras en Bolsa y que encuentran su base en la citada Teoría de cartera.

1 El primer trabajo relacionado con el tema data de principios de los ochenta (véase Gómez-Bezares, 1984).

2 Pueden verse Gómez-Bezares (1991, 1993 y 2002), Santibáñez (1995) o Santibáñez y Gómez-Bezares (1999), por citar sólo algunos de los trabajos más representativos relacionados con el tema.

3 Véase Laka y Santibáñez (1995).

2. LA DECISION DE INVERSION EN CONDICIONES DE RIESGO: CRITERIOS CLASICOS

Como es sabido, el análisis de un proyecto de inversión parte de la construcción y análisis de su perfil de fondos, el cual presenta tres características fundamentales: es un perfil de tesorería (es decir, analiza los impactos que el proyecto tiene en la tesorería de la empresa, y no en el beneficio); es un perfil incremental (recoge sólo las variaciones experimentadas en la tesorería de la compañía como consecuencia de afrontar el proyecto); y se construye con total independencia de cómo se financie (aspecto éste último, la financiación, que aparece al calcular las medidas del interés del proyecto).

Una vez construido el perfil de fondos asociado al proyecto, la Teoría Financiera pone a nuestra disposición una serie de criterios de decisión, de entre los que los más interesantes son el Valor Actualizado Neto y la Tasa de Rentabilidad Interna.

El Valor Actualizado Neto (VAN) propone comparar en valor actual las entradas y salidas de fondos provocadas por el proyecto. Ello exige estimar la tasa de descuento apropiada (la rentabilidad mínima a exigir), que es entendida siempre como coste de oportunidad o rentabilidad de la mejor alternativa de riesgo similar a la que se renuncia al afrontar el proyecto en cuestión. En condiciones de certeza, esta rentabilidad sería el tipo de interés sin riesgo a un plazo similar. Así:

$$VAN = -DI + \sum_{t=1}^{t=n} \frac{GF_t}{(1+k)^t} \qquad [1]$$

donde:

DI	Desembolso Inicial asociado al proyecto
GF_t	Impacto en caja del proyecto en el año "t" (supuestos proyectos a largo plazo y generaciones de fondos definidas en términos anuales)
n	Vida útil del proyecto (número de años en los que el proyecto tiene impacto en la tesorería de la empresa)
k	Rentabilidad exigida al proyecto (tipo de interés sin riesgo)

En cuanto a la Tasa de Rentabilidad Interna (TRI), ésta se define como la rentabilidad asociada al proyecto, y se calcula sobre el mismo perfil de fondos, igualando a cero el VAN y despejando el tipo de descuento que cumple tal condición.

El criterio de actuación es claro: se aceptarán aquellos proyectos cuyo VAN sea mayor que cero (son los que aportan valor a la empresa), o lo que es lo mismo, los que presenten una TRI mayor que k (es decir, aquellos que rinden más que la mejor alternativa -de riesgo similar- a la que se renuncia). Los dos criterios son consistentes a la hora de aceptar o rechazar un proyecto, aunque pueden discrepar cuando se trata de ordenar varios proyectos en función de su interés para la compañía, situación en la que el VAN aparece como un mejor criterio, ya que tal discrepancia está motivada por la diferente hipótesis implícita de reinversión que los dos criterios consideran, siendo más lógica la del VAN.

En ambientes de riesgo, la Teoría Financiera propone dos criterios clásicos para el tratamiento de la decisión de inversión: el ajuste del tipo de descuento y el equivalente de certeza. Ambos parten de la idea de que los individuos nos comportamos como enemigos del riesgo, es decir, que sólo estamos dispuestos a aceptar riesgos si se nos premia por ello[4].

El ajuste del tipo de descuento propone penalizar el interés de los proyectos en función del riesgo que aportan a su propietario a través de los denominadores del VAN. Así:

$$VAN_{ajustado} = -DI + \sum_{t=1}^{t=n} \frac{E\,(GF_t)}{(1+k+p)^t} = -DI + \sum_{t=1}^{t=n} \frac{E\,(GF_t)}{(1+r)^t} \qquad [2]$$

donde:

$E\,(GF_t)$	Generación de Fondos “esperada” del proyecto en el año “t”
p	Prima de riesgo asociada al proyecto
r	Rentabilidad exigida al proyecto en función de su riesgo (r = k + p)

De esta manera, y tal como puede verse en la fórmula [2], la rentabilidad exigida al proyecto está compuesta por el tipo de interés sin riesgo (k), al que se añade una prima de riesgo (p). El criterio sería aceptar proyectos cuyo VAN ajustado sea mayor que cero; o lo que es lo mismo, aceptar aquellos que tengan una TRI (esperada)[5] mayor que el tipo primado “r”.

El equivalente de certeza propone algo parecido, pero realizando la penalización en los numeradores de la fórmula. Así, de lo que se trata es de convertir las generaciones esperadas en aquellas cantidades seguras que reportan la misma utilidad, es decir, en sus equivalentes ciertos:

$$VAN_{ajustado} = -DI + \sum_{t=1}^{t=n} \frac{\alpha_t \cdot E\,(GF_t)}{(1+k)^t} = -DI + \sum_{t=1}^{t=n} \frac{GF_t'}{(1+k)^t} \qquad [3]$$

[4] Para ampliar todo lo relativo al tratamiento de la decisión de inversión en condiciones de riesgo a un nivel relativamente sencillo puede consultarse Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez (2001).

[5] Entendiendo en este contexto el término “esperada” no en la forma habitual (asociado al concepto estadístico de “esperanza matemática”), sino en el sentido de “calculada a partir de las generaciones de fondos esperadas”; más tarde volveremos sobre ello.

donde:

α_t	Coeficiente corrector (entre 0 y 1, supuestos individuos enemigos del riesgo) correspondiente a la generación de fondos esperada del año "t"
GF'_t	Generación de fondos equivalente cierta del año "t"

Obsérvese que el tipo de descuento es en este caso "k", el tipo de interés sin riesgo, ya que la penalización por el riesgo se hace ahora a través del numerador. El criterio de actuación sería nuevamente el de aceptar aquellos proyectos cuyo VAN (ajustado por el riesgo) sea mayor que cero, o lo que es lo mismo, aquellos cuya TRI (equivalente cierta) sea mayor que k.

Tenemos que decir que el VAN se presenta como un criterio superior a la TRI, y ello por una serie de motivos: supone un tipo de reinversión más lógico (el tipo de descuento); no tiene problemas de inconsistencia (la TRI puede presentar varias soluciones y darnos consejos incoherentes); no necesita, para comparar proyectos, que sus desembolsos sean iguales; tiene la propiedad aditiva; sirve directamente al objetivo financiero de la empresa (la maximización de su valor en el mercado); …[6] Sin embargo, la Teoría de cartera, así como los modelos que se derivan de una forma u otra de la anterior, se basan en la TRI, y ello es justificable porque en estos modelos se suponen proyectos uniperiodo, en los que sólo hay dos posiciones: una en la que se invierte, y otra en la que se retiran los resultados de la inversión (aportación inicial y rendimientos obtenidos, con su signo). En tales condiciones, puede demostrarse que es indiferente razonar en términos de VAN, TRI, riquezas actuales, riquezas finales, etc., siempre que partamos de la misma aportación inicial.

3. UNA ALTERNATIVA A LOS CRITERIOS CLÁSICOS: EL VALOR ACTUALIZADO PENALIZADO (VAP) Y LA TASA DE RENTABILIDAD INTERNA PENALIZADA (TRIP)

Frente a los criterios clásicos de tratamiento del riesgo surge el Valor Actualizado Penalizado (VAP), propuesto por el profesor Gómez-Bezares a principios de los años ochenta. La idea del VAP es sencilla: si el ajuste del tipo de descuento penaliza el interés del proyecto a través del denominador del VAN y el equivalente de certeza lo hace a través de los numeradores, el VAP propone penalizar directamente el promedio de VAN con su desviación típica, calculados ambos al tipo de interés sin riesgo. De entre todas las formas posibles, nos inclinamos por la penalización lineal (véase el Apéndice B), que nos llevaría a la siguiente formulación:

---

[6] Para ampliar cualquier aspecto relacionado con la discusión VAN-TRI a un nivel sencillo puede consultarse Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez (1995).

$$VAP = E\ (VAN) - t \cdot \sigma\ (VAN) \qquad [4]$$

donde:

E (VAN)	Esperanza matemática de VAN (calculado al tipo de interés sin riesgo)
t	Parámetro de penalización (mayor que cero para enemigos del riesgo)
σ (VAN)	Desviación típica (medida del riesgo -total- del proyecto) de VAN (calculado al tipo de interés sin riesgo)

Según el criterio, serían interesantes los proyectos cuyo VAP fuera positivo; y a la hora de jerarquizar, serían más interesantes los proyectos que tuvieran un VAP mayor.

La justificación teórica del criterio es interesante. Así, el VAP nos indicaría la ordenada en el origen de la recta de pendiente “t” (en el mapa promedio-riesgo -μ−σ- de VAN) en la que el proyecto nos permite situarnos; por lo que, si suponemos rectas en lugar de curvas de indiferencia, el VAP puede entenderse como el VAN equivalente cierto de un E (VAN) sujeto a riesgo; y de esta forma, el VAP sería una medida de utilidad. Puede verse todo ello de manera gráfica en la figura 1.

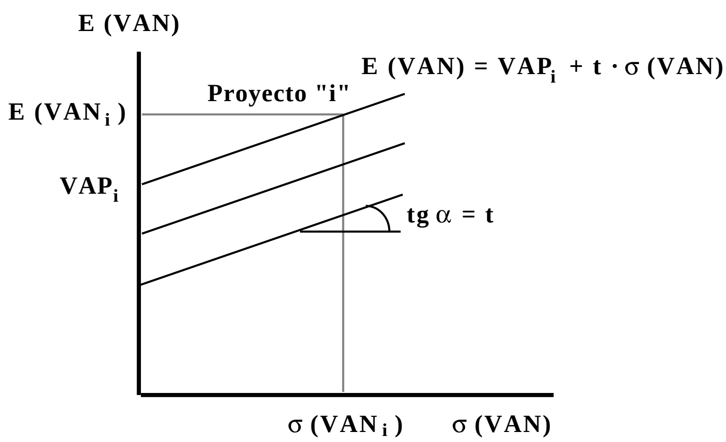


Figura 1

Partiendo de la interpretación propuesta, puede verse también que la recta que delimita la “zona de proyectos interesantes” es la que nace del origen de coordenadas (siempre con pendiente t), ya que el VAN = 0 (sin riesgo) siempre es alcanzable (invirtiendo el dinero al tipo de interés sin riesgo); puede verse gráficamente esta idea en la figura 2.

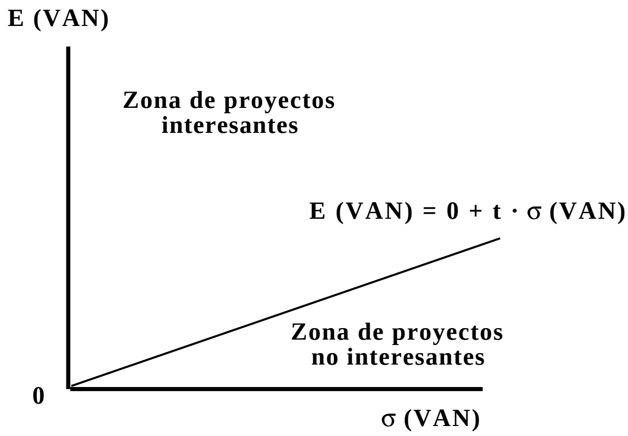


Figura 2

Por otro lado, el parámetro "t" nos está indicando el número de desviaciones típicas que el VAP se aleja del promedio de VAN (por la izquierda, supuestos enemigos del riesgo). Desde este punto de vista, el valor de "t" elegido llevaría aparejada una probabilidad "α" a la izquierda (y, por tanto, "1-α" a la derecha) del VAP, por lo que éste puede interpretarse también como un VAN mínimo garantizado con una probabilidad "1-α" que depende del valor de "t" elegido. Supuestas distribuciones normales de VAN tales probabilidades son fáciles de conocer: en la figura 3 se ofrecen algunos valores especialmente interesantes.

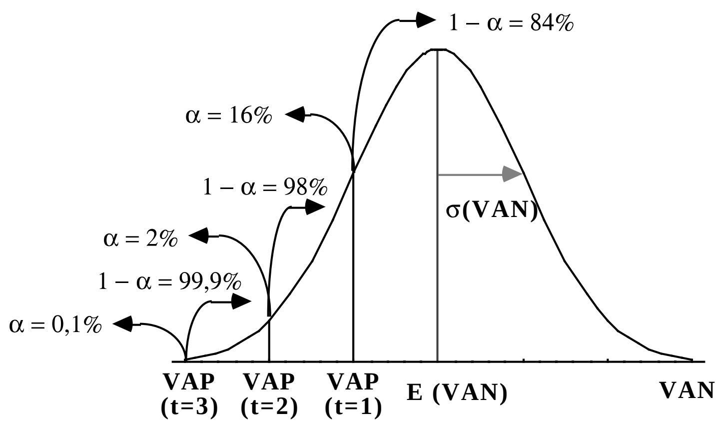


Figura 3

Estos mismos razonamientos pueden trasladarse a la TRI, dando lugar a un criterio que hemos llamado TRIP (Tasa de Rentabilidad Interna Penalizada). Su formulación, de manera coherente con lo indicado hasta ahora, sería la siguiente:

$$TRIP = E\ (TRI) - t \cdot \sigma\ (TRI) \qquad [5]$$

donde:

E (TRI)	TRI esperada del proyecto[7]
t	Parámetro de penalización (mayor que cero para enemigos del riesgo)
σ (TRI)	Desviación típica de TRI (medida del riesgo -total- del proyecto)

El criterio de actuación ahora sería aceptar aquellos proyectos cuya TRIP fuera superior al tipo de interés sin riesgo (k), siguiendo una interpretación coherente con la propuesta para el VAP. Efectivamente, en la figura 4 puede verse que, supuestas rectas de indiferencia, la TRIP del proyecto puede interpretarse como la TRI equivalente cierta de una E (TRI) sujeta a riesgo, siendo “t” la pendiente de dichas rectas; y dado que el tipo de interés sin riesgo siempre puede conseguirse, la mínima tasa equivalente cierta que estaremos dispuestos a aceptar será dicho tipo de interés sin riesgo (por lo que la recta de pendiente t que nace del tipo k delimita en este contexto la zona de proyectos interesantes de los que no lo son -véase la figura 5-). Finalmente, el parámetro t indica el número de desviaciones típicas que el valor tomado como referencia (la TRIP) se aleja del promedio (por la izquierda), por lo que TRIP puede entenderse como la tasa mínima garantizada con un determinado nivel de probabilidad, que depende del propio valor de t elegido. En la figura 6 se ofrece un gráfico con algunos valores de t que consideramos especialmente relevantes, supuesta normalidad de la TRI[8].

---

[7] Recuérdese lo comentado en la nota 5.

[8] La hipótesis de normalidad del VAN es relativamente fácil de aceptar. En lo que se refiere a la TRI, la aceptación de esta hipótesis no plantea excesivos problemas en proyectos uniperiodo (véase Gómez-Bezares, 1991, pág. 114; y también, en relación con todo lo aquí tratado, el Apéndice C), pero el tema se complica en proyectos multiperiodo (aunque puede también aceptarse la hipótesis de normalidad bajo determinadas condiciones; puede verse a este respecto el Apéndice D). Si la utilización de la TRIP se circunscribe al análisis de la *performance* de títulos y carteras en bolsa, lo anterior tampoco es grave, ya que la propia Teoría de cartera y los modelos que se construyen a partir de ella suponen proyectos uniperiodo; lo que permite superar también otros problemas importantes de la TRI, incluso en ambiente de certeza. Sin embargo, pensamos que la TRIP puede ser también de utilidad para el análisis de inversiones en la empresa, y más en concreto, en PYMES, y en este contexto es habitual encontrar proyectos con varios periodos. Una posible solución consiste en “transformar” el proyecto multiperiodo en otro uniperiodo, capitalizando hasta el año n (vida útil) las generaciones de fondos esperadas de cada año al tipo k, y calculando la TRI de este nuevo proyecto transformado: es lo que algunos llaman Tasa de Rentabilidad Interna Modificada -TRIM- (puede verse a este respecto Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez, 1995). En el resto del artículo hablaremos de E (TRI) o TRI esperada en el sentido apuntado, es decir,

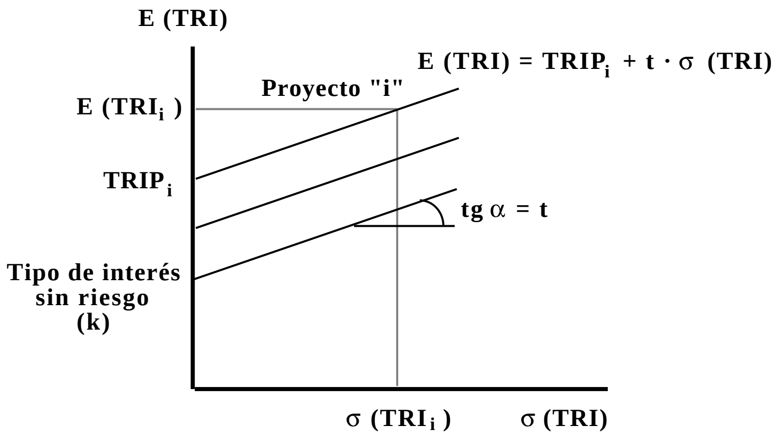


Figura 4

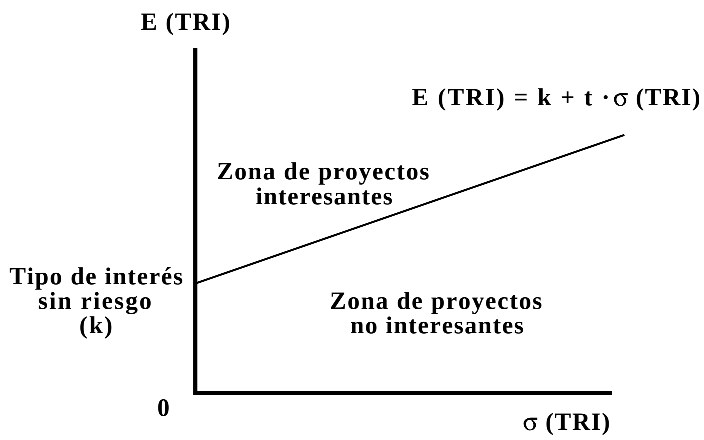


Figura 5

suponiendo que el proyecto analizado es uniperiodo (o lo hemos convertido previamente en uniperiodo), en cuyo caso coinciden la TRI esperada y la TRI calculada a partir de las generaciones de fondos esperadas y resulta sencillo aceptar la hipótesis de normalidad que requiere la interpretación propuesta para el parámetro t en términos de garantía asociada a la TRIP (desapareciendo también otros problemas de la TRI y que ya han sido comentados). En el Apéndice C se amplían y justifican con mayor rigor algunos de los elementos aquí apuntados.

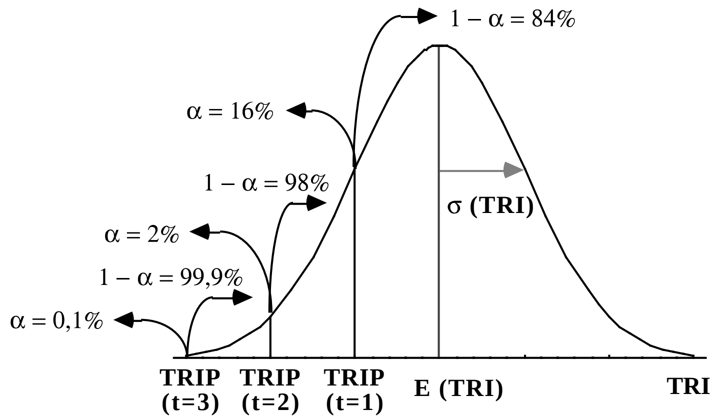


Figura 6

4. UNA BREVISIMA REFERENCIA A LA TEORIA DE CARTERA Y AL CAPM

La Teoría de cartera de Markowitz[9] parte de una serie de hipótesis simplificadoras de la realidad, de entre las que cabe destacar:

- Se suponen mercados perfectos, en los que la información es pública y disponible para todos los agentes.
- Se considera un único horizonte temporal idéntico para todos los agentes, que tienen expectativas homogéneas respecto a las implicaciones que dicha información tiene sobre el rendimiento y el riesgo de los activos.
- Existe un tipo de interés sin riesgo al que los agentes pueden prestar y pedir prestado de manera ilimitada.
- En sus decisiones, los individuos se comportan como enemigos del riesgo, tratan de maximizar su utilidad, y se fijan sólo en el promedio y riesgo del rendimiento (medidos por μ y σ).

En estas condiciones, puede demostrarse que la "frontera eficiente", es decir, la parte del "mapa de oportunidades posibles" (formado por todas las combinaciones de promedio y riesgo

[9] Una exposición sencilla e intuitiva de este modelo (y del CAPM que comentaremos después) puede encontrarse en Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez (1994).

alcanzables por los individuos a partir de los títulos y carteras existentes en el mercado) que cumple la propiedad de dar el máximo promedio para cada nivel de riesgo y el mínimo riesgo para cada promedio de rentabilidad, es una recta en el mapa $\mu-\sigma$ (véase la figura 7). Esta recta, llamada Línea del Mercado de Capitales (LMC), es la recta tangente al mapa de oportunidades posibles formado por los títulos y carteras con riesgo que nace del tipo de interés sin riesgo. Y en ella se situarán todos los individuos. En estas condiciones, cuando el mercado ha llegado al equilibrio, el punto de tangencia es lo que llamamos cartera de mercado (R^*), ya que todos los individuos que inviertan en títulos con riesgo lo harán en las proporciones dadas por dicha cartera (donde están todos los títulos que cotizan en el mercado y en las proporciones que tienen en él; esta cartera suele aproximarse con un índice de mercado). Y se cumplirá el Teorema de la separación de Tobin, según el cual las preferencias de los individuos no intervienen en la composición de su cartera con riesgo, sino únicamente en el peso que ésta tendrá en la cartera total del individuo, que siempre invertirá en una combinación de título sin riesgo y cartera de mercado. La ecuación de la LMC es la siguiente:

$$\text{LMC:} \quad \mu_i = r_0 + \frac{\mu^* - r_0}{\sigma^*} \cdot \sigma_i \qquad [6]$$

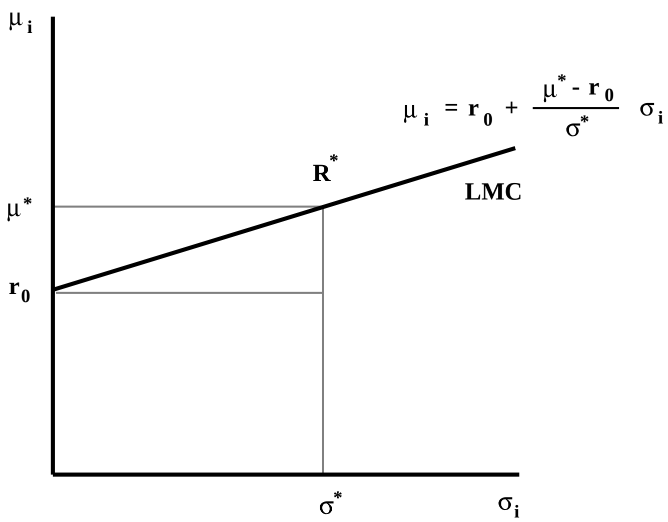


Figura 7

donde:

μ_i	Rentabilidad esperada del título o cartera “i”
r_0	Tipo de interés sin riesgo
μ^*	Rentabilidad esperada de la cartera de mercado

σ_i Riesgo total estimado (medido con la desviación típica de rentabilidad) del título o cartera "i"

σ^* Riesgo total estimado (medido con la desviación típica de la rentabilidad) asociado a la cartera de mercado

Partiendo de lo anterior, Sharpe introduce dos hipótesis simplificadorasadicionales[10] y llega al Modelo de mercado, en el que se establece una relación lineal entre las rentabilidades de cada título o cartera y el mercado. Y permite distinguir dos tipos diferentes de riesgo: el sistemático, relacionado con la marcha general de la economía, y el diversificable, que como su nombre indica puede ser eliminado mediante una adecuada diversificación. En el Modelo de mercado se estima la cantidad de riesgo sistemático, siendo la beta (pendiente de la recta que mejor ajusta la nube de puntos correspondiente a las rentabilidades del título o cartera y el mercado) la medida de dicho riesgo sistemático de los títulos y carteras.

Sobre la base de lo anterior, el *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) deduce la relación entre la rentabilidad de los títulos y su riesgo sistemático (el único relevante y que será retribuido, ya que el modelo considera que los títulos se incorporarán a una cartera convenientemente diversificada, por lo que sólo aportan riesgo sistemático), que en las condiciones del modelo será lineal (véase la figura 8). Así, en equilibrio, todos los títulos y carteras deberían situarse en la Línea del Mercado de Títulos (LMT):

$$\text{LMT:} \quad \mu_i = r_0 + (\mu^* - r_0) \cdot \beta_i \qquad [7]$$

donde:

β_i Medida del riesgo sistemático (propuesta por el CAPM) del título o cartera "i"

Es fácil relacionar el CAPM con los criterios clásicos de tratamiento del riesgo, pudiendo estimarse tanto la prima de riesgo propuesta por el "ajuste del tipo de descuento" como los coeficientes correctores que propone el "equivalente de certeza" de manera coherente con el modelo[11].

5. MEDIDAS CLASICAS DE *PERFORMANCE*

Presentaremos ahora las medidas clásicas de *performance* utilizadas habitualmente en el estudio del desempeño de los títulos y carteras en bolsa. En todos los casos, se trata de recoger la idea de que las rentabilidades obtenidas por los títulos o carteras no son directamente

---

[10] En un intento de reducir los cálculos necesarios para aplicar la Teoría de cartera de Markowitz, y cuyo cumplimiento no es imprescindible para que se mantengan las conclusiones fundamentales del CAPM.

[11] Puede verse, por ejemplo, en Gómez-Bezares (1991, págs. 172 y ss).

comparables, ya que los riesgos asumidos pueden haber sido diferentes. Y las diferencias entre las distintas medidas están precisamente en el riesgo que consideran relevante, así como en la manera de medir la forma de batir al mercado[12].

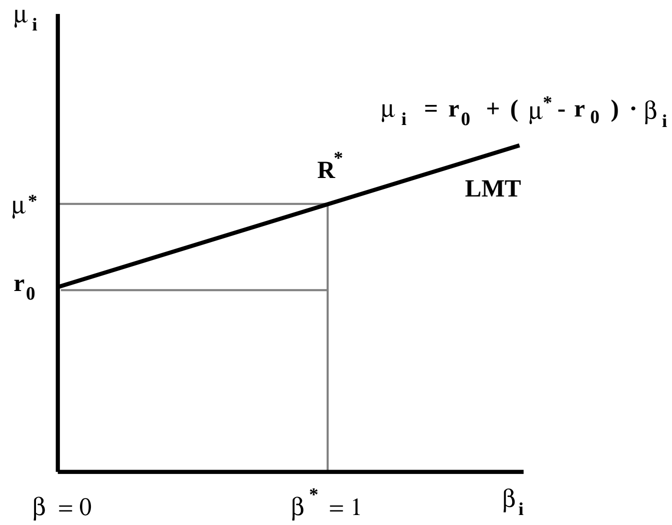


Figura 8

• **Indice de Sharpe**[13]**:**

$$S_i = \frac{\mu_i - r_0}{\sigma_i} \qquad [8]$$

donde:

S_i	Indice de Sharpe asociado al título o cartera “i”
μ_i	Promedio de rentabilidad obtenido por el título o cartera “i”
r_0	Tipo de interés sin riesgo
σ_i	Riesgo total (medido con la desviación típica de rentabilidad) del título o cartera “i”

12 A lo largo de toda la exposición supondremos, como es normal, que μ^* es mayor que r_0, lo que evidentemente tiene que ser cierto al menos a priori, aunque no necesariamente a posteriori. En el caso de encontrarnos en la situación contraria ($\mu^* < r_0$) puede consultarse Ferruz y Sarto (1997), trabajo en el que se realizan algunas matizaciones a los índices clásicos de *performance* relacionadas con este tema y que pueden resultar de interés.

13 Sharpe (1966).

Como puede verse, el índice de Sharpe calcula el premio de rentabilidad obtenido por el título o cartera por unidad de riesgo total medido por la desviación típica de rentabilidad.

• **Indice de Treynor**[14]**:**

$$T_i = \frac{\mu_i - r_0}{\beta_i} \qquad [9]$$

donde:

T_i Indice de Treynor asociado al título o cartera "i"

β_i Medida del riesgo sistemático (propuesta por el CAPM) del título o cartera "i"

Como puede verse, el índice de Treynor calcula el premio de rentabilidad obtenido por el título o cartera por unidad de riesgo sistemático soportado medido por beta.

• **Indice de Jensen**[15]**:**

$$J_i = (\mu_i - r_0) - (\mu^* - r_0) \cdot \beta_i \qquad [10]$$

donde:

J_i Indice de Jensen asociado al título o cartera "i"

μ^* Promedio de rentabilidad obtenido por la cartera de mercado

Como puede verse, el índice de Jensen calcula la diferencia entre el exceso de rentabilidad obtenido por el título o cartera "i" con respecto al título sin riesgo y el exceso que debería haber obtenido según el CAPM.

• **Indice de Jensen dividido por beta:**

$$\frac{J_i}{\beta_i} = \frac{\mu_i - r_0}{\beta_i} - \frac{(\mu^* - r_0) \cdot \beta_i}{\beta_i} = T_i - T^* \qquad [11]$$

---

14 Treynor (1965).

15 Jensen (1968 y 1969).

donde:

J_i / β_i Indice de Jensen dividido por beta asociado al título o cartera "i"

T^* Indice de Treynor asociado a la cartera de mercado

Como puede verse, el índice de Jensen relativizado por beta calcula la diferencia entre el premio por unidad de riesgo sistemático (medido por beta) obtenido por el título o cartera "i" y el asociado a la cartera de mercado. Puede también verse que es en realidad la diferencia entre los índices de Treynor asociados al título o cartera "i" y al mercado.

6. COMPARACION ENTRE LAS MEDIDAS DE *PERFORMANCE* CLASICAS Y LA TRIP

6.1. Indice de Sharpe vs TRIP

El índice de Sharpe analiza el interés de los títulos o carteras en función del premio que dan relativizado por su riesgo total medido por la desviación típica de rendimiento. Considera que un título o cartera bate al mercado cuando el premio por unidad de riesgo total es superior al conseguido por dicho mercado (lo que puede ocurrir por ineficiencias del mercado, porque se producen diferencias entre los comportamientos de los títulos y carteras "a priori" y "a posteriori", etc.). Dicho de otro modo, el índice de Sharpe mide la pendiente de la recta que en el mapa $\mu - \sigma$ une el tipo de interés sin riesgo con el comportamiento del título o cartera analizado, y considera que los títulos y carteras interesantes son los que se sitúan por encima de la Línea del Mercado de Capitales -LMC- (es decir, aquellos en los que la pendiente de la recta descrita anteriormente es superior a la de la propia LMC). Puede verse todo ello en la figura 9.

La TRIP propone calcular la ordenada en el origen de la recta de pendiente "t" en la que cada título o cartera permite situarse. En el contexto de la Teoría de cartera, definiremos dicha "t" como la pendiente de la LMC. Así:

$$TRIP_i \text{ (coherente con el Indice de Sharpe)} = \mu_i - t \cdot \sigma_i = \mu_i - \frac{\mu^* - r_0}{\sigma^*} \cdot \sigma_i \qquad [12]$$

Serán interesantes aquellos títulos o carteras que permitan situarse en una recta (paralela) superior a la propia LMC (véase la figura 10). Efectivamente, recordemos que la interpretación teórica de la TRIP nos lleva a razonar en términos "equivalentes ciertos", lo que supone, en el contexto de la Teoría de cartera, y en las condiciones que hemos descrito, que el rendimiento de la cartera de mercado (sujeta a riesgo) reporta la misma utilidad que el tipo de interés sin riesgo. Esto naturalmente no tiene por qué ser así para todos los individuos, de hecho algunos preferirán, en función de su grado de aversión al riesgo, invertir toda su riqueza en título sin riesgo, mientras que otros lo harán en la cartera de mercado (siendo también posibles las infinitas combinaciones entre título sin riesgo y cartera de mercado, que los individuos podrán elegir en función de sus preferencias). Pero lo que es cierto es que el mercado se ha puesto de acuerdo, en la situación descrita, en premiar de esa manera la asunción de riesgos. Es decir, la sociedad en su conjunto premia la asunción de riesgos (totales) en términos de la pendiente de la LMC.

Así, y apelando a la interpretación de “t” propuesta por la TRIP, la pendiente de la LMC nos indicaría el nivel de garantía exigido a la rentabilidad que se toma como referencia para el análisis del interés de los títulos o carteras analizados (la propia TRIP).

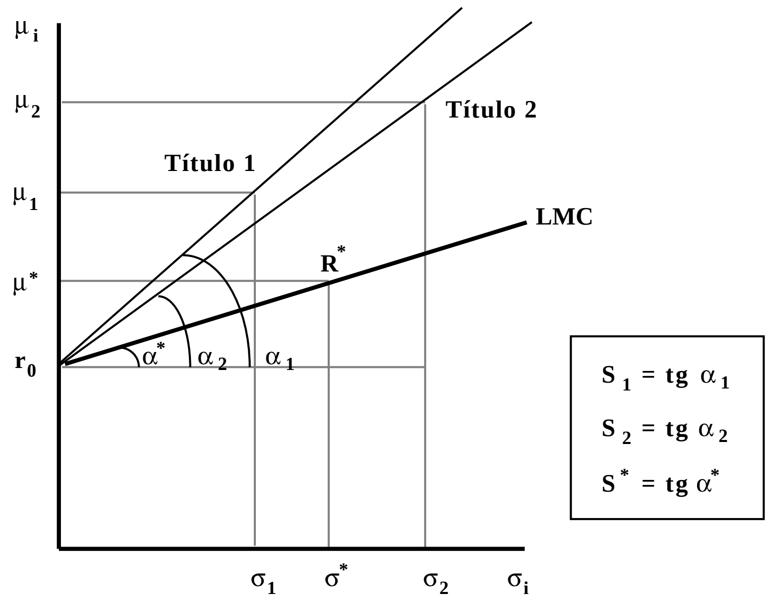


Figura 9

Como puede verse, el índice de Sharpe y la TRIP no pueden discrepar a la hora de juzgar un título o cartera como interesante, ya que ello exige para los dos criterios que el título o cartera en cuestión se sitúe por encima de la LMC. Sin embargo, y tal como puede verse en las figuras 9 y 10, pueden discrepar a la hora de jerarquizar el interés de los títulos o carteras analizados. Así, en nuestro ejemplo, tanto el “1” como el “2” son títulos que baten al mercado, pero para el índice de Sharpe resulta más interesante el título “1”, que proporciona un premio por unidad de riesgo total superior al que da el “2”; mientras que para la TRIP, el título “2” resulta ser más interesante, ya que permite situarse al individuo en una “recta” de indiferencia más alejada del origen de coordenadas. O dicho de otro modo, la rentabilidad equivalente cierta asociada al título “2” es mayor que la del título “1”, supuesto un nivel de garantía para determinar esos equivalentes ciertos dado por el mercado (la probabilidad asociada a "t", entendida en este caso como pendiente de la LMC).

En ambos casos se está considerando como relevante el riesgo total. Es decir, este planteamiento será tanto más interesante cuando las carteras que estamos "juzgando" tienen vocación de diversificación, a diferencia de las que no la tienen (por ejemplo, carteras sectoriales).

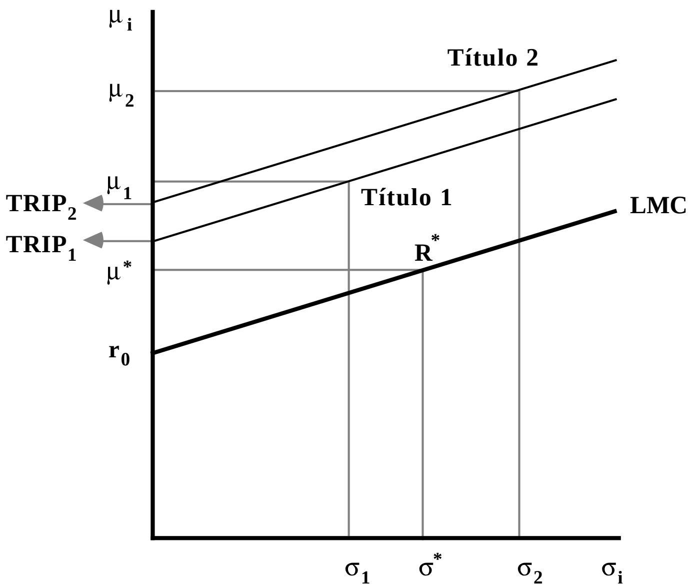


Figura 10

El hecho de elegir una medida u otra depende de lo que el analista considere más conveniente: si busca minimizar la probabilidad de obtener una rentabilidad inferior al tipo de interés sin riesgo optará por el índice de Sharpe; mientras que si considera más importante elegir aquellos títulos o carteras con una mayor rentabilidad garantizada, con una probabilidad que se considera suficiente, lo hará por la TRIP.

Lo anterior permite ligar la TRIP con la Teoría de cartera, viendo la coherencia de ambos sistemas. Podemos relacionar esto con la discusión centrada en el VAP, cuando podía optarse por diferentes modos de realizar la penalización. Nosotros hemos optado siempre por la penalización lineal, ya que hacer el cociente μ/σ (de VAN), que implícitamente busca y valora como mejores aquellos proyectos cuya probabilidad de obtener pérdida sea menor, supone despreciar el resto de la información recogida en la distribución de resultado, centrándose sólo en "lo malo" del proyecto (posibilidad de perder) y despreciando otros aspectos interesantes (véase nuevamente el Apéndice B).

Por todo ello, y de manera coherente con lo dicho para el VAP, nosotros optaríamos por el índice TRIP (utilizando como parámetro de penalización la “t” entendida como pendiente de la LMC) frente al índice de Sharpe en aquellos casos en los que el riesgo total sea el relevante.

6.2. Indice de Treynor vs TRIP

El índice de Treynor valora los distintos títulos o carteras en función del premio por unidad de riesgo que otorgan a su propietario, considerando como relevante únicamente el riesgo sistemático. Lo anterior lo hace coherente con las ideas propuestas por el CAPM, según el cual los títulos y carteras deberían rendir en función de su riesgo sistemático. Como es sabido, el modelo propone que, en equilibrio, todos los títulos y carteras deberían cumplir la ecuación fundamental del CAPM, es decir, todos deberían situarse en la LMT:

$$\text{LMT:} \quad \mu_i = r_0 + (\mu^* - r_0) \cdot \beta_i \qquad [7]$$

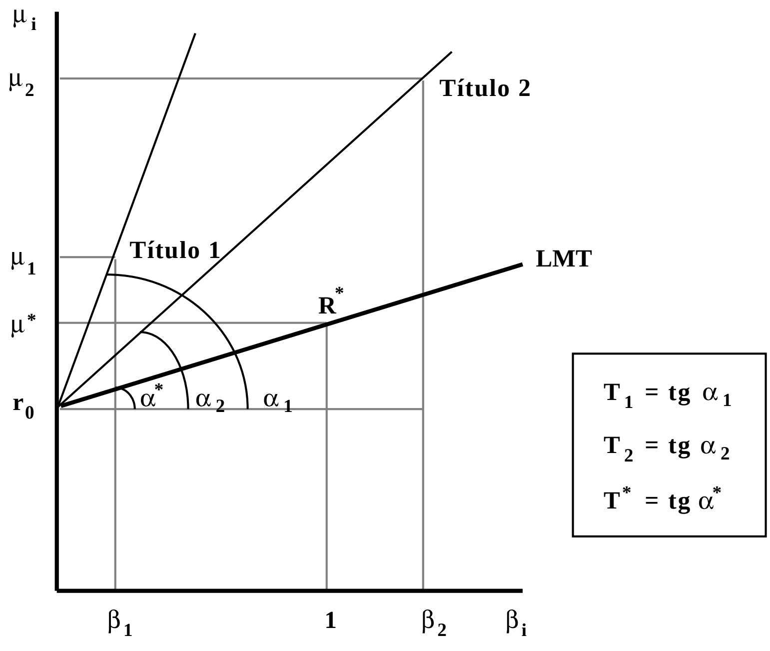


Figura 11

Es decir, según el modelo, el premio de rentabilidad por unidad de riesgo sistemático medido por beta debería ser $(\mu^* - r_0)$. El índice de Treynor mide el premio conseguido por los títulos o carteras por unidad de riesgo sistemático soportado, y considera que son interesantes aquellos títulos o carteras que presentan un premio mayor que el propuesto por el modelo. Dicho de otra forma, y tal como puede verse en la figura 11, el índice de Treynor mide, en el mapa $\mu - \beta$, la pendiente de la recta que une el tipo de interés sin riesgo con el comportamiento del título o cartera en cuestión, considerando que es interesante cuando bate al mercado, es decir, cuando la pendiente de dicha recta es superior a la de la LMT. Serán, por tanto, interesantes, aquellos títulos o carteras que queden por encima de la LMT, lo cual es perfectamente coherente con lo propuesto por el CAPM.

Frente al anterior, el concepto de la TRIP, trasladado al mapa $\mu - \beta$, mediría la ordenada en el origen de la recta de pendiente idéntica a la LMT en la que un título o cartera permite situarse al individuo (véase figura 12):

$$\text{TRIP}_i \text{ (coherente con el Indice de Treynor)} = \mu_i - t' \cdot \beta_i = \mu_i - (\mu^* - r_0) \cdot \beta_i \qquad [13]$$

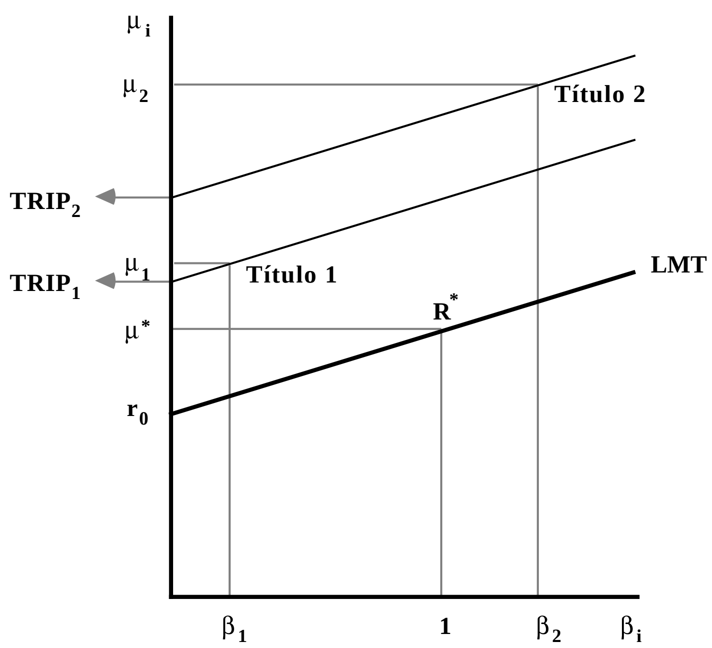


Figura 12

El único problema es que ahora la t’ (pendiente de la LMT) pierde la interpretación anterior (en términos de garantía del valor tomado como referencia), dado que la penalización ya no se hace en función de la desviación típica, sino del riesgo sistemático (luego volveremos sobre ello). Pero puede seguir manteniéndose la interpretación de equivalentes ciertos.

Los dos criterios son consistentes a la hora de determinar los títulos y carteras interesantes: son todos aquellos que se sitúen por encima de la LMT (o dicho de otro modo, los que rinden más que lo que deben, en este caso en función de lo que dice el CAPM). Pero pueden discrepar a la hora de jerarquizar, tal como puede verse en las figuras 11 y 12. Efectivamente, el índice de Treynor considera más interesantes aquellos títulos o carteras que, batiendo al mercado, conceden un mayor premio por unidad de riesgo sistemático. Mientras que la TRIP definida en este punto considera mejores aquellos que permiten conseguir una rentabilidad equivalente cierta (donde la relación de equivalencia viene dada por la pendiente de la LMT) superior (siempre que sea mayor que la del título sin riesgo).

6.3. Indice de Jensen vs TRIP

El índice de Jensen mide la diferencia que hay entre el exceso de rentabilidad ofrecido por el título o cartera analizado con respecto al título sin riesgo (premio conseguido) y el premio por riesgo que según el CAPM debería haber conseguido. Recordemos una vez más la ecuación fundamental del CAPM, recogida en la LMT:

$$\mu_i = r_0 + (\mu^* - r_0) \cdot \beta_i \qquad [7]$$

Si en la ecuación anterior pasamos el rendimiento del título sin riesgo al primer miembro tenemos:

$$\mu_i - r_0 = (\mu^* - r_0) \cdot \beta_i \qquad [14]$$

donde μ_i es todavía lo que el título "debería haber dado", y por tanto [14] es el exceso sobre el tipo sin riesgo que el título "debería haber dado". El índice de Jensen se formula como:

$$J_i = (\mu_i - r_0) - (\mu^* - r_0) \cdot \beta_i \qquad [10]$$

donde ahora μ_i es la rentabilidad promedio asociada al título. Puede presentarse de manera más clara:

$$J_i = \mu_i - [r_0 + (\mu^* - r_0) \cdot \beta_i] \qquad [15]$$

Como puede verse, el índice de Jensen mide la diferencia, en vertical, entre la rentabilidad dada por el título o cartera y la que según la ecuación fundamental del CAPM, la LMT, debería haber dado. Es decir, hace exactamente lo que proponíamos en el punto anterior al trabajar con la TRIP definida en el mapa $\mu-\beta$: las únicas diferencias entre ambos criterios son puramente formales, en el sentido de que el índice de Jensen incorpora directamente la comparación con el mercado (si es positivo, el título o cartera es interesante, y lo es tanto más cuanto mayor sea) y la TRIP debe compararse con el tipo sin riesgo, siendo mejores los títulos y carteras que presenten una mayor diferencia (positiva) con él; y por otro lado, el índice de Jensen mide la diferencia en el propio punto, mientras que la TRIP lo hace en el eje de ordenadas (puede verse todo ello en la figura 13). Es decir, los dos criterios son conceptualmente idénticos, por lo que podríamos decir que la TRIP no aporta nada sobre el índice de Jensen, simplemente nos permite realizar una interpretación de lo que estamos haciendo, coherente con el concepto de equivalente cierto.

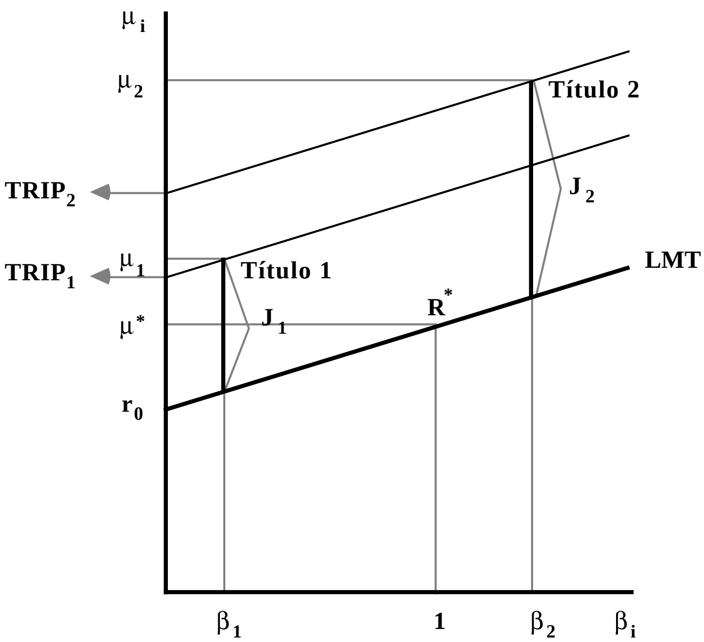


Figura 13

6.4. Indice de Jensen relativizado por beta vs TRIP

El índice de Jensen relativizado por beta coincide con la diferencia entre los índices de Treynor del título o cartera analizado y el mercado. Efectivamente, el índice de Jensen dividido por beta trata de relativizar la información dada por el índice de Jensen, haciendo que la diferencia entre el premio que el título da y el que debería haber dado se vea relativizada por el riesgo sistemático asumido. Veámoslo matemáticamente:

$$J_i = (\mu_i - r_0) - (\mu^* - r_0) \cdot \beta_i \qquad [10]$$

$$\frac{J_i}{\beta_i} = \frac{\mu_i - r_0}{\beta_i} - \frac{(\mu^* - r_0) \cdot \beta_i}{\beta_i} = \frac{\mu_i - r_0}{\beta_i} - \frac{\mu^* - r_0}{1} = T_i - T^* \qquad [11]$$

Recordemos la interpretación que dábamos anteriormente al índice de Treynor. Tal como veíamos entonces, este índice mide la pendiente de la recta que nace del tipo de interés sin riesgo y pasa por el comportamiento, en términos de $\mu-\beta$, del título o cartera analizado. Por lo tanto, lo único que aporta el índice de Jensen relativizado por beta frente al de Treynor es realizar la comparación entre el comportamiento del título o cartera analizado y el mercado, dándonos la diferencia de pendiente existente entre ambos. Es decir, nos indica la diferencia que hay entre el premio por unidad de riesgo sistemático ofrecido por el título o cartera analizado y el ofrecido por el mercado.

7. UN INTENTO DE LIGAR EL PARAMETRO DE PENALIZACIÓN DE LA TRIP COHERENTE CON TREYNOR (MAPA $\mu-\beta$) CON LA IDEA DE MINIMO GARANTIZADO

Como hemos dicho, la interpretación original dada por la TRIP en lo que se refiere al parámetro de penalización “t” sería el nivel de garantía exigido por el analista para el valor tomado como referencia (en el mapa $\mu-\sigma$). Como hemos visto, es fácil ligar el índice de Sharpe con la TRIP, interpretando la pendiente de la LMC como el parámetro de penalización “t”, que fijaría para este último criterio el nivel de garantía que sería aceptable por el analista. También en el caso del índice de Treynor la ligazón con el concepto de equivalente cierto que se encuentra detrás de la TRIP es sencilla, pero en este caso perdemos la interpretación propuesta por TRIP para el parámetro de penalización t’. Y la diferencia entre los índices de Treynor y Jensen sería la que existe entre el índice de Sharpe y la TRIP en su versión primigenia (en el mapa $\mu-\sigma$, donde el parámetro “t” coincide con la pendiente de la LMC).

Lo que intentaremos en este punto es estudiar la interpretación de la pendiente de la LMT en términos de sus implicaciones para el riesgo total, y por tanto, del nivel de garantía exigido implícitamente en el índice de Jensen (o en la TRIP definida de manera coherente con el índice de Treynor). Recordemos primero algunas fórmulas:

$$\beta_i = \frac{COV(R_i, R^*)}{(\sigma^*)^2} \qquad [16]$$

$$\rho_{i,m} = \frac{COV(R_i, R^*)}{\sigma_i \cdot \sigma^*} \qquad [17]$$

$$\beta_i = \frac{\rho_{i,m} \cdot \sigma_i \cdot \sigma^*}{(\sigma^*)^2} = \rho_{i,m} \cdot \frac{\sigma_i}{\sigma^*} \quad [18]$$

donde:

$COV(R_i, R^*)$	Covarianza entre las rentabilidades del título o cartera "i" y el mercado
$\rho_{i,m}$	Coeficiente de correlación de Pearson entre las rentabilidades del título o cartera "i" y el mercado

La "t" que está implícita en el índice de Jensen es la pendiente de la LMT (es la t' que utilizaríamos en la versión de TRIP coherente con la consideración del riesgo sistemático en lugar del total). Así:

$$t' = \mu^* - r_0 \quad [19]$$

y al aplicar el concepto TRIP a un título o cartera, lo que hacemos es:

$$TRIP_i = \mu_i - t' \cdot \beta_i \quad [13]$$

$$TRIP_i = \mu_i - (\mu^* - r_0) \cdot \rho_{i,m} \cdot \frac{\sigma_i}{\sigma^*} \quad [20]$$

$$TRIP_i = \mu_i - \frac{\mu^* - r_0}{\sigma^*} \cdot \rho_{i,m} \cdot \sigma_i \quad [21]$$

Puede verse que la penalización es igual que en el caso de la TRIP propuesta anteriormente de manera coherente con el índice de Sharpe, salvo que ahora el parámetro "t" se ve multiplicado por una cifra $\rho_{i,m}$, evidentemente menor o igual que la unidad en términos absolutos. ¿Qué significa lo anterior? Varias cosas:

- En primer lugar, que supuesta correlación positiva entre el título (o cartera) y el mercado, la penalización entendida como nivel de garantía exigido va a ser tanto menor cuanto menor sea la relación entre el título y el mercado. Es decir, sólo en el caso de que la correlación fuera perfecta, la penalización (y el grado de garantía exigido) coincidiría con la de la TRIP coherente con el índice de Sharpe. Y si la relación fuera negativa, la penalización sería negativa, es decir, el equivalente cierto sería superior a la rentabilidad esperada (títulos que van contra el mercado, que son especialmente interesantes porque permiten reducir el riesgo sistemático).

- En segundo lugar, que la garantía exigida a cada título (o cartera) ya no es la misma, sino que depende de la cantidad de riesgo sistemático asociado al título. Pero podemos siempre interpretar el parámetro de penalización (que hemos llamado t', para distinguirlo del anterior) en términos de nivel de garantía exigido. En general, a mayor "t" mayor nivel de garantía (mayor 1-α, siendo α la probabilidad que queda a la izquierda del valor tomado como referencia); ahora, supuesta una "t" dada por la pendiente de la LMC, el CAPM lo que haría sería relativizar ese nivel de garantía en función del grado de relación con el mercado. Puede parecer que los títulos con beta superior a la unidad no se ven muy penalizados, y ello tampoco es cierto, ya que para que la beta sea superior a uno, el producto de correlación x desviación típica del título debe ser mayor que la desviación típica del mercado. Es decir, es algo que se tiene en cuenta (aunque más escondido) en la propia fórmula.

8. CONCLUSIONES

El objetivo del artículo radica en presentar y justificar el interés de una medida alternativa a las utilizadas tradicionalmente a la hora de evaluar la *performance* de títulos y carteras (y fondos) en bolsa. Así, frente a índices clásicos como el de Sharpe, Treynor y Jensen, la TRIP puede resultar una medida de interés en determinadas condiciones. Hemos visto la justificación teórica del criterio, la TRIP puede entenderse como una medida de utilidad, y también en términos de rentabilidad equivalente cierta; por otro lado, el parámetro de penalización utilizado en la TRIP en el caso de considerar como relevante el riesgo total del título o cartera analizada está relacionado con el nivel de garantía exigido a la tasa que se toma como referencia (la propia TRIP), siempre que pueda aceptarse la normalidad de la distribución de la TRI (hipótesis justificable bajo determinadas condiciones).

En lo que se refiere a la coherencia del criterio TRIP con las medidas clásicas de *performance*, hemos comprobado que es total a la hora de determinar si el título o cartera bate o no al mercado, pero pueden aparecer discrepancias entre las jerarquizaciones dadas por los diferentes criterios, y entre éstos y la TRIP. En el artículo hemos profundizado en las causas que explican tales discrepancias, indicando en qué casos entendemos que la TRIP puede resultar un mejor criterio que los índices clásicos.

El análisis comparativo de las diferentes medidas lo hemos realizado desde la óptica de la Teoría de Cartera de Markowitz, y hemos conectado el criterio de la TRIP con tales desarrollos. De esta manera, es fácil determinar el parámetro de penalización "t" que exige la utilización de la TRIP de manera coherente con dicha Teoría de Cartera (en cuyo caso coincidiría con la pendiente de la Línea del Mercado de Capitales), así como con el CAPM (en cuyo caso podría utilizarse la pendiente de la Línea del Mercado de Títulos).

Por otro lado, hemos ahondado también en la posibilidad de utilizar el criterio TRIP para proyectos empresariales. La justificación es clara en proyectos uniperiodo, en los que la hipótesis de normalidad de la TRI es fácil de aceptar; para proyectos multiperiodo, los más habituales en las decisiones empresariales, cabe aceptar la hipótesis de normalidad (en condiciones bastante restrictivas), o puede utilizarse la Tasa de Rentabilidad Interna Modificada, lo que permite superar también otros problemas que plantea la TRI.

En definitiva, se presenta un criterio que puede complementar a los criterios clásicos, que puede resultar de utilidad en proyectos de inversión empresarial, y a la vez, como medida complementaria de *performance* de títulos o carteras en bolsa, dando una perspectiva diferente de los índices clásicos, y con una interpretación coherente con los modernos desarrollos de la Teoría Financiera.

BIBLIOGRAFIA

FERRUZ, L. y J.L. SARTO (1997): "Revisión crítica de las medidas clásicas de performance de carteras y propuesta de índices alternativos. Aplicación a fondos de inversión españoles (1990-1995)", *Boletín de Estudios Económicos*, Vol. LII, no. 162, Diciembre, págs. 549-573.

GOMEZ-BEZARES, F. (1984): "Algunos modelos básicos para la selección de inversiones con flujos relacionados", *XIV Congreso de la SEIO*, Caja de Ahorros de Granada, Granada, vol. 1, págs. 40-51.

GOMEZ-BEZARES, F. (1991): *Dirección financiera (teoría y aplicaciones)*, 2ª ed., Desclée de Brouwer, Bilbao.

GOMEZ-BEZARES, F. (1993): "Penalized present value: net present value penalization with normal and beta distributions", en Aggarwal, ed., *Capital budgeting under uncertainty* (1993), Prentice - Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, págs. 91-102.

GOMEZ-BEZARES, F. (2002): *Las decisiones financieras en la práctica*, 8ª ed., Desclée de Brouwer, Bilbao.

GOMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBAÑEZ (1994): *Valoración de acciones en la bolsa española (un análisis de la relación entre la rentabilidad y el riesgo)*, Desclée de Brouwer, Bilbao.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBÁÑEZ (1995): "VAN vs TRI: algunos ejemplos prácticos", *Harvard-Deusto Finanzas & Contabilidad*, 7, Septiembre-Octubre, págs. 48-58.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBÁÑEZ (2001): "La decisión de inversión en entornos de riesgo", *Estudios Empresariales*, 107, Tercer Cuatrimestre, págs. 22-37.

JENSEN, M.C. (1968): "The performance of mutual funds in the period 1945-1964", *Journal of finance*, Mayo, págs. 389-416.

JENSEN, M.C. (1969): "Risk, the pricing of capital assets, and the evaluation of investment portfolios", *Journal of business*, Abril, págs. 167-247.

LAKA, J.P. y J. SANTIBAÑEZ (1995): "Algunas reflexiones sobre el Valor Actualizado Penalizado (VAP)", Comunicación presentada en el *III Foro de Finanzas*, Bilbao, Noviembre-Diciembre. Publicada en Gómez-Bezares, F. y J.V. Ugarte, ed., *III Foro de Finanzas (1995)*, Bilbao, págs. 75-91.

SANTIBAÑEZ, J. (1995): "El tratamiento del riesgo en la decisión de inversión: VAP y distribuciones no conocidas", *Boletín de Estudios Económicos*, 154, Abril, págs. 119-140.

SANTIBAÑEZ, J. y F. GOMEZ-BEZARES (1999): *Ejercicios de Teoría y Política Financiera*, Desclée de Brouwer, Bilbao.

SHARPE, W.F. (1966): "Mutual fund performance", *Journal of business*, Enero, págs. 119-138.

TREYNOR, J.L. (1965): "How to rate management of investment funds", *Harvard business review*, Enero-Febrero, págs. 63-75.

APENDICE A: ALGUNAS RELACIONES MATEMATICAS ENTRE LOS DIFERENTES INDICES PROPUESTOS

• Relación entre el Indice de Treynor y el Indice de Sharpe

$$S_i = \frac{\mu_i - r_0}{\sigma_i}$$

$$T_i = \frac{\mu_i - r_0}{\beta_i}$$

$$\beta_i = \frac{COV(R_i, R^*)}{(\sigma^*)^2} \quad ; \quad \rho_{i,m} = \frac{COV(R_i, R^*)}{\sigma_i \cdot \sigma^*} \quad \longrightarrow \quad \beta_i = \frac{\rho_{i,m} \cdot \sigma_i \cdot \sigma^*}{(\sigma^*)^2} = \rho_{i,m} \cdot \frac{\sigma_i}{\sigma^*}$$

$$T_i = \frac{\mu_i - r_0}{\beta_i} = \frac{\mu_i - r_0}{\frac{\rho_{i,m} \cdot \sigma_i}{\sigma^*}} = \frac{\mu_i - r_0}{\sigma_i} \cdot \frac{\sigma^*}{\rho_{i,m}} = S_i \cdot \frac{\sigma^*}{\rho_{i,m}}$$

$$T_i = S_i \cdot \frac{\sigma^*}{\rho_{i,m}} \qquad [A.1]$$

• Relación entre la TRIP (coherente con Sharpe) y el Indice de Sharpe

$$TRIP_i\ (Sharpe) = \mu_i - t \cdot \sigma_i = \mu_i - \frac{\mu^* - r_0}{\sigma^*} \cdot \sigma_i = \mu_i - S^* \cdot \sigma_i$$

$$TRIP_i\ (Sharpe) = \mu_i - S^* \cdot \sigma_i \qquad [A.2]$$

• **Relación entre la TRIP (coherente con Treynor) y el Indice de Sharpe**

$$TRIP_i\ (Treynor) = \mu_i - t' \cdot \beta_i = \mu_i - (\mu^* - r_0) \cdot \beta_i = \mu_i - (\mu^* - r_0) \cdot \rho_{i,m} \cdot \frac{\sigma_i}{\sigma^*} =$$

$$= \mu_i - \frac{\mu^* - r_0}{\sigma^*} \cdot \rho_{i,m} \cdot \sigma_i = \mu_i - S^* \cdot \rho_{i,m} \cdot \sigma_i$$

$$TRIP_i\ (Treynor) = \mu_i - S^* \cdot \rho_{i,m} \cdot \sigma_i \qquad [A.3]$$

• **Relación entre la TRIP (coherente con Sharpe) y la TRIP (coherente con Treynor)**

$$TRIP_i\ (Sharpe) = \mu_i - S^* \cdot \sigma_i \quad \rightarrow \quad \mu_i = TRIP_i\ (Sharpe) + S^* \cdot \sigma_i$$

$$TRIP_i\ (Treynor) = \mu_i - S^* \cdot \rho_{i,m} \cdot \sigma_i \quad \rightarrow \quad \mu_i = TRIP_i\ (Treynor) + S^* \cdot \rho_{i,m} \cdot \sigma_i$$

$$TRIP_i\ (Sharpe) + S^* \cdot \sigma_i = TRIP_i\ (Treynor) + S^* \cdot \rho_{i,m} \cdot \sigma_i$$

$$TRIP_i\ (Treynor) = TRIP_i\ (Sharpe) + S^* \cdot \sigma_i \cdot (1 - \rho_{i,m}) \qquad [A.4]$$

• **Relación entre el Indice de Jensen y el Indice de Sharpe**

$$J_i = (\mu_i - r_0) - (\mu^* - r_0) \cdot \beta_i =$$

$$= S_i \cdot \sigma_i - (\mu^* - r_0) \cdot \rho_{i,m} \cdot \frac{\sigma_i}{\sigma^*} = S_i \cdot \sigma_i - \frac{\mu^* - r_0}{\sigma^*} \cdot \rho_{i,m} \cdot \sigma_i =$$

$$= S_i \cdot \sigma_i - S^* \cdot \rho_{i,m} \cdot \sigma_i = \sigma_i \cdot (S_i - S^* \cdot \rho_{i,m})$$

$$J_i = \sigma_i \cdot (S_i - S^* \cdot \rho_{i,m}) \qquad [A.5]$$

• Relación entre el Indice de Jensen y el Indice de Treynor

$$J_i = \sigma_i \cdot (S_i - S^* \cdot \rho_{i,m}) = \sigma_i \cdot (T_i \cdot \frac{\rho_{i,m}}{\sigma^*} - T^* \cdot \frac{1}{\sigma^*} \cdot \rho_{i,m}) =$$

$$= \frac{\sigma_i}{\sigma^*} \cdot \rho_{i,m} \cdot (T_i - T^*) = \beta_i \cdot (T_i - T^*)$$

$$J_i = \beta_i \cdot (T_i - T^*) \qquad [A.6]$$

Gráficamente, puede verse en la figura A.1

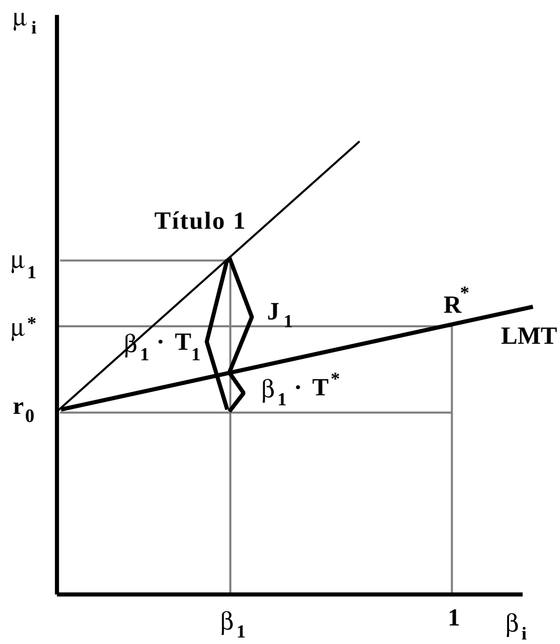


Figura A.1

• Relación entre el Indice de Jensen dividido por beta y el Indice de Sharpe

$$\frac{J_i}{\beta_i} = (T_i - T^*) = S_i \cdot \frac{\sigma^*}{\rho_{i,m}} - S^* \cdot \frac{\sigma^*}{1} = \sigma^* \cdot \left(\frac{1}{\rho_{i,m}} \cdot S_i - S^*\right)$$

$$\frac{J_i}{\beta_i} = \sigma^* \cdot \left(\frac{1}{\rho_{i,m}} \cdot S_i - S^*\right) \qquad [A.7]$$

APENDICE B: OTRAS FORMAS DE PENALIZACION EN VAP Y TRIP

Hemos visto que el VAP propone penalizar directamente el promedio de VAN con su desviación típica. De entre las posibles formas de realizar esta penalización, hemos optado por la penalización lineal, aunque existen otras formas de hacerlo[16]. Nos centraremos ahora en la siguiente fórmula de penalización:

$$\text{VAP} = \frac{\text{E (VAN)}}{\sigma\ \text{(VAN)}} \qquad \text{[B.1]}$$

Si utilizamos la fórmula [B.1] para analizar el interés de los proyectos, nos estamos fijando en la probabilidad de pérdida asociada a los mismos. Efectivamente, supuesta normalidad en la distribución del VAN, la fórmula anterior supone preguntarse por el número de desviaciones típicas que el valor cero se aleja con respecto al promedio, por lo que tratar de maximizar el VAP así entendido supone buscar aquellos proyectos que minimizan la probabilidad de pérdida. Lo anterior puede verse gráficamente en la figura B.1.

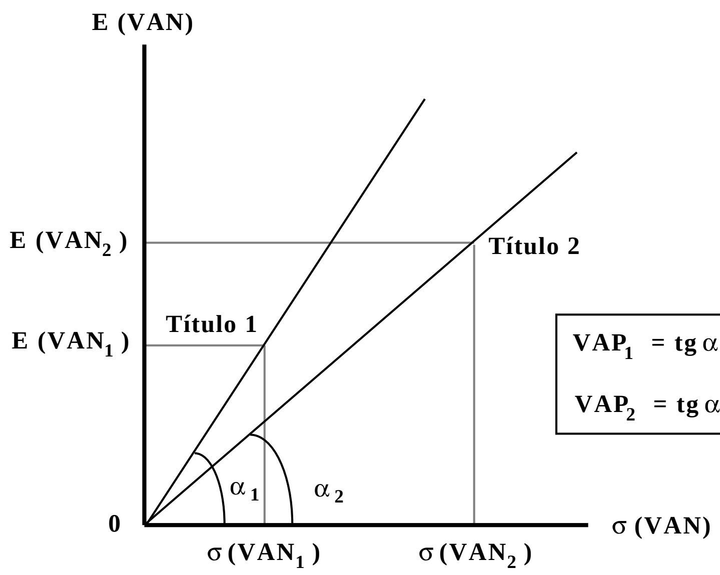


Figura B.1

[16] Puede verse a este respecto Gómez-Bezares, F. (2002): *Las decisiones financieras en la práctica*, 8ª ed., Desclée de Brouwer, Bilbao, págs. 286 y ss.

En el ejemplo que aparece en la figura B.1, el título “1” aparece como más interesante que el “2”, ya que su probabilidad de obtener un VAN negativo es menor. Sin embargo, si optamos por la penalización lineal, el que se prefiera uno u otro título dependerá del valor de “t” elegido, pero en cualquier caso se tiene en cuenta algo más que la probabilidad de pérdida[17]. Así, si el individuo se comporta como poco enemigo del riesgo, el valor de “t” será bajo, y el título “2” aparecerá como más interesante que el “1”, ya que el aumento de promedio de VAN que ofrece compensará suficientemente del aumento de riesgo que obliga a asumir (véase la figura B.2). Mientras que si la aversión al riesgo es mayor, el título “1” podrá llegar a ser preferido, en la medida en que permite asumir menor riesgo que el “2”, no siendo suficiente el premio que éste último ofrece con respecto al primero en términos de promedio de VAN aportado para compensar el aumento de riesgo correspondiente (véase la figura B.3, en la que no sólo el título “1” resulta ser más interesante, sino que el “2” pasa a no ser interesante, ya que nos lleva a obtener un VAN equivalente cierto menor que cero).

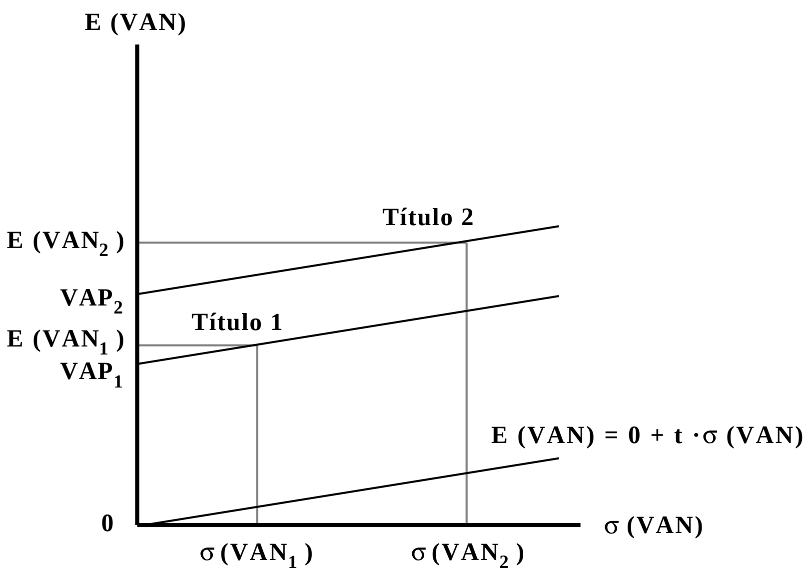


Figura B.2

[17] Efectivamente, si al comparar dos proyectos, uno tiene un VAP de 4 y el otro un VAP de 40 (según la fórmula B.1), podrá parecer que el segundo es mucho mejor que el primero. Sin embargo, la probabilidad de obtener un VAN negativo es prácticamente nula en ambos casos, no aportando gran cosa el segundo frente al primero en términos de reducción de la probabilidad de perder. Y sin embargo, desprecia otra información interesante de la distribución, como las posibilidades de ganar cantidades grandes, que pueden ser mucho mayores en el primer proyecto.

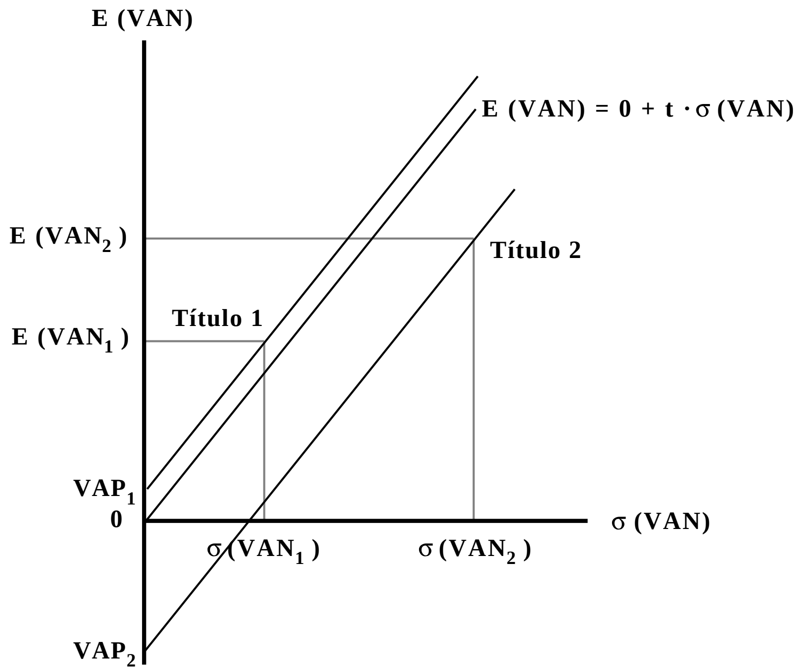


Figura B.3

Si trasladamos el razonamiento anterior a la TRIP, nos encontramos con las mismas conclusiones, matizadas por el hecho de que en este caso, las comparaciones a realizar se hacen con el título sin riesgo. Así:

$$\text{TRIP} = \frac{E\,(\text{TRI}) - r_0}{\sigma\,(\text{TRI})} \qquad [B.2]$$

En la figura B.4 puede apreciarse que, si utilizamos la formulación de TRIP propuesta en [B.2], el proyecto “1” es mejor que el “2”, ya que tiene asociada una probabilidad más baja de obtener una TRI menor que el tipo de interés sin riesgo. Sin embargo, utilizando la formulación de TRIP defendida en el artículo (fórmula [5] del texto principal) vemos en la figura B.5, asociada a un individuo poco enemigo del riesgo, que el proyecto “2” pasa a ser preferido al “1”, ya que para el nivel de garantía exigido, la rentabilidad equivalente cierta del proyecto “2” es superior a la del “1” (siendo ambos interesantes). Situación que vuelve a invertirse en la figura B.6, en la que el “1” no sólo es preferido al “2”, sino que además éste último deja de ser interesante (utilizando la misma fórmula [5], pero aplicada ahora por un individuo más enemigo del riesgo que el anterior).

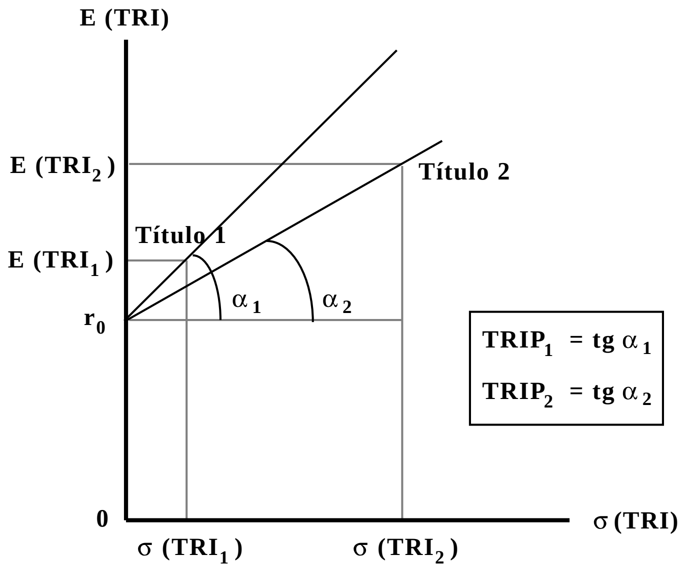


Figura B.4

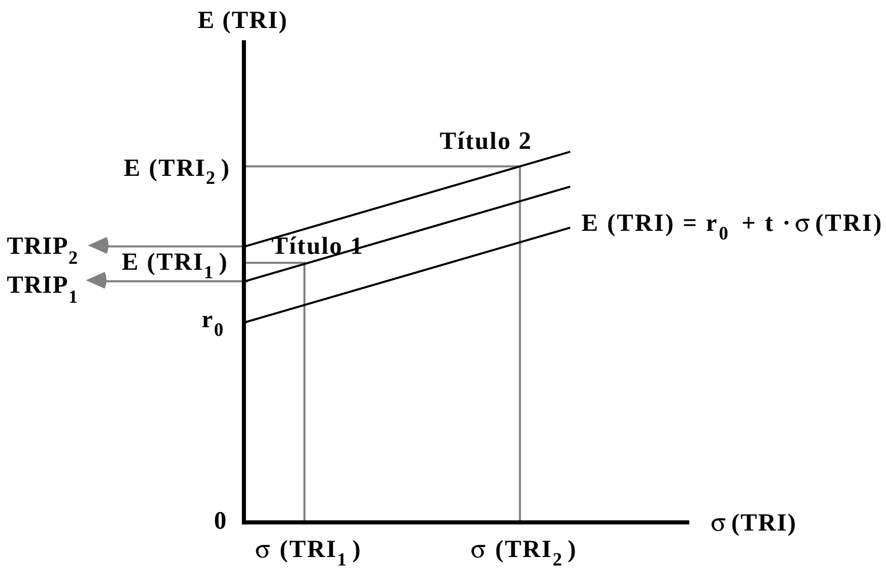


Figura B.5

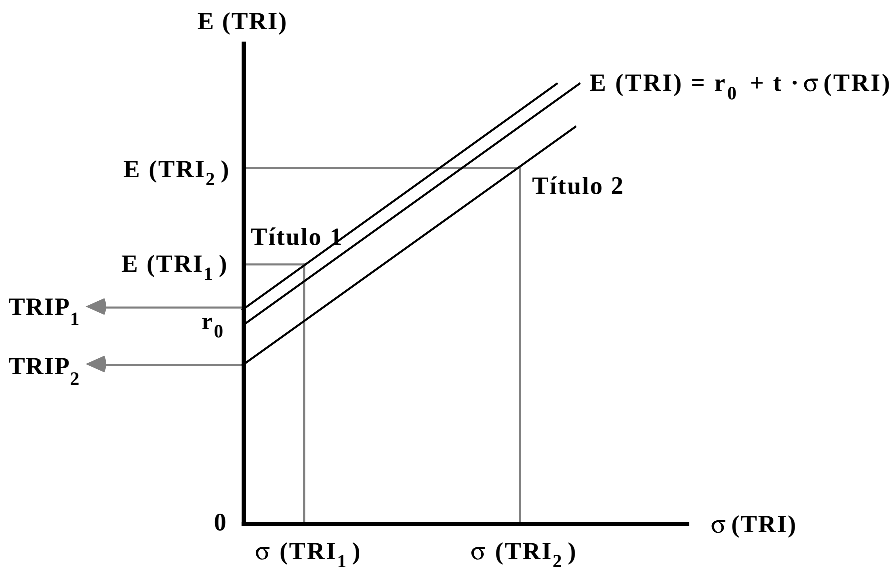


Figura B.6

La formulación de TRIP propuesta en [B.2] coincide con el índice de Sharpe, de donde se deduce que la utilización de Sharpe tiene las mismas limitaciones que esta versión de TRIP, es decir, hace un *ranking* de las posibles carteras en función de su probabilidad de que la rentabilidad caiga por debajo de r_0, y esto no parece un criterio suficiente.

APENDICE C: RELACION ENTRE EL PARAMETRO DE PENALIZACION EN VAP Y TRIP

La pregunta que cabría hacerse es: a la hora de trabajar con la TRIP, ¿debemos utilizar la misma t que con el VAP? La cuestión tiene su importancia, ya que nosotros hemos defendido siempre que el valor de t que parecía razonable para el VAP estaría entre 1 y 2, lo que supone obtener un VAN mayor que el VAP con una garantía de entre el 84% y el 98%, aproximadamente, lo cual parece suficiente en la mayoría de los casos.

Sin embargo, al utilizar la TRIP en el análisis de las decisiones bursátiles, vemos que si empleamos estos valores no aceptamos nunca ningún título ni cartera, ni siquiera la cartera de mercado, por lo que trataremos de ver en primer lugar si deberían exigirse garantías diferentes en los dos criterios, para analizar después lo que ocurre con la TRIP.

Recordemos que estamos analizando proyectos uniperiodo como el de la figura C.1 (o convertidos en uniperiodo en la forma que indicábamos en el texto; es cuando tiene sentido utilizar la TRI, como en el caso de la Teoría de Cartera).

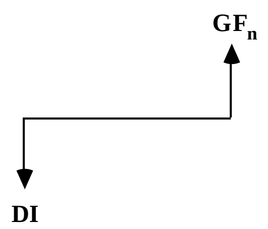


Figura C.1

En estas condiciones, ya hemos dicho que es indiferente utilizar VAN, TRI, o razonar en términos de riquezas actuales o finales, etc.

$$VAN = -DI + \frac{GF_n}{1 + k} \qquad [C.1]$$

$$GF_n = (VAN + DI) \cdot (1 + k) \qquad [C.2]$$

$$0 = -DI + \frac{GF_n}{1 + TRI} \quad \rightarrow \quad TRI = \frac{GF_n}{DI} - 1 \qquad [C.3]$$

$$GF_n = DI \cdot (1 + TRI) \qquad [C.4]$$

$$(VAN + DI) \cdot (1 + k) = DI \cdot (1 + TRI) \qquad [C.5]$$

$$VAN = \frac{DI \cdot (1 + TRI)}{(1 + k)} - DI = DI \cdot \left(\frac{1 + TRI}{1 + k} - 1\right) = DI \cdot \left(\frac{TRI - k}{1 + k}\right) \qquad [C.6]$$

Dado que suponemos que DI es conocido, así como el tipo "k" (sin riesgo) que hay que exigir al proyecto, vemos que si el VAN sigue una distribución normal, también lo hará la TRI (y viceversa), ya que no se trata más que de una transformación lineal. Puede intuirse que la t tiene que ser la misma en VAP y TRIP, como en efecto sucede, y al final de este apéndice lo demostraremos con rigor.

Para justificar que en el VAP usemos una t entre 0 y 2 (entre 1 y 2 en proyectos de cierta importancia), sabiendo que esto contradice la t más pequeña que puede observarse en el mercado bursátil (índice de Sharpe del mercado), pueden hacerse diferentes argumentaciones.

En primer lugar, la aplicación del VAP está pensada para las PYMES, que se enfrentan a mercados de capitales mucho más imperfectos: capital escaso, más posibilidades de bancarrota, etc., que les hace cubrirse más ante el riesgo. También vemos lógico que las grandes empresas actúen con mayor aversión al riesgo cuando en ello va su futuro, y eso es bastante frecuente cuando una PYME se enfrenta a un proyecto de inversión de cierto tamaño.

Por otro lado, el inversor en bolsa suele tener una parte pequeña de su patrimonio invertida en bolsa, frente a muchos accionistas de las PYMES que tienen en la empresa una parte muy alta de su patrimonio. Esto hace que sus posibilidades de diversificación sean pequeñas, y exijan una t mayor.

Además, tal como se puede ver en la figura C.2, la t del VAP (o de la TRIP), cuando se aplica a un proyecto empresarial no tiene por qué ser la misma que la t indicada por el índice de Sharpe del mercado. Así, para penalizar el proyecto P de la figura, siendo coherente con la forma de las curvas de indiferencia (líneas punteadas) debo utilizar la pendiente del ángulo α, que es mayor que la del ángulo α^*, que coincide con el índice de Sharpe del mercado. Y hemos de ser conscientes de que en los proyectos de las PYMES es bastante frecuente encontrarse con promedios y desviaciones superiores a los del mercado.

Para completar el comentario anterior, vemos en la figura que si al proyecto P le aplicáramos la penalización de α^* resultaría mucho más interesante que lo que realmente es a la vista de las curvas de indiferencia.

Y hay una última razón, que puede ser la más convincente. Es lógico que la pendiente de la LMC (Sharpe del mercado) aumente conforme lo hace el plazo de la inversión; esto es así, porque, aproximadamente, si el plazo pasa de un periodo a "n" periodos, la μ se multiplica por n y la σ por $\sqrt{n}$, con lo que la pendiente va creciendo. Así, una pendiente mensual de 0,2 pasaría (multiplicada por $\sqrt{12}$) a una anual de 0,69 y a una para cinco años de 1,55.

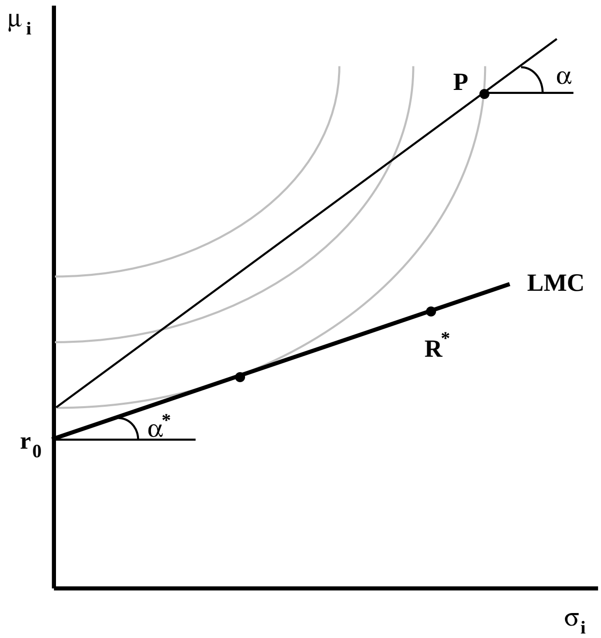


Figura C.2

Pero los proyectos de inversión empresarial que analizamos con el VAP suelen ser proyectos a largo plazo (por lo que la t tiene que ser alta). De hecho, si suponemos que reinvertimos las generaciones de fondos del proyecto al tipo de interés sin riesgo, llegaríamos a una distribución de riqueza final (en el año n) que actualizada al tipo de interés sin riesgo de esos n años, nos daría la distribución del VAN sobre la que se calcula el VAP; luego sería correcto considerar la inversión como equivalente a otra con un único periodo de n años.

• Algunas demostraciones matemáticas suponiendo proyectos uniperiodo.

Sea un periodo donde la riqueza final es $\tilde{R}_F$ y la inicial R_0. Si $\tilde{R}_F$ es N (μ_F , σ_F)[18] y $\tilde{r}$ es la rentabilidad del periodo:

$$\tilde{r} = \frac{\tilde{R}_F - R_0}{R_0} \qquad [C.7]$$

$$\tilde{r} \quad \rightarrow \quad N\left(\frac{\mu_F - R_0}{R_0} , \frac{\sigma_F}{R_0}\right) \qquad [C.8]$$

[18] Sigue la distribución normal con promedio μ_F y desviación típica σ_F.

Si calculo la TRI de la esperanza:

$$\frac{E\left(\tilde{R}_F\right)}{1 + TRI} = R_0 \quad \rightarrow \quad TRI = \frac{\mu_F - R_0}{R_0} = \mu_r \qquad [C.9]$$

luego la TRI de la esperanza es la esperanza de TRI.

Por otro lado, si calculo el VAN al tipo sin riesgo k:

$$\widetilde{VAN} = \frac{\tilde{R}_F}{1 + k} - R_0 \quad \rightarrow \quad N\left(\frac{\mu_F}{1 + k} - R_0 \, , \, \frac{\sigma_F}{1 + k}\right) \qquad [C.10]$$

Si quiero saber a cuántas desviaciones típicas estamos del cero de VAN:

$$\frac{\frac{\mu_F}{1 + k} - R_0}{\frac{\sigma_F}{1 + k}} = \frac{\mu_F - R_0 - R_0 \cdot k}{\sigma_F}$$

Si quiero saber a cuántas desviaciones está μ_r de k:

$$\frac{\mu_r - k}{\sigma_r} = \frac{\frac{\mu_F - R_0}{R_0} - k}{\frac{\sigma_F}{R_0}} = \frac{\mu_F - R_0 - R_0 \cdot k}{\sigma_F} \qquad \text{(que coincide con lo anterior)}$$

Luego queda muy lógico para un periodo (en cuanto a lo que ocurre con varios, puede consultarse el Apéndice D).

Finalmente, veamos qué ocurre en estas condiciones con la t utilizada en ambos criterios.

Para comprobar que la t usada en el VAP (en el caso de un periodo) coincide con la usada en la TRIP lo que hay que demostrar es que supuestos dos proyectos 1 y 2 con el mismo desembolso inicial (R_0) y con distintas distribuciones de riqueza final [(μ_{F1} , σ_{F1}) y (μ_{F2} , σ_{F2})], supuesto un valor de t, tiene que suceder que si $VAP_1 > VAP_2$ —> $TRIP_1 > TRIP_2$; en efecto:

$$VAP_i = E\,(VAN_i) - t \cdot \sigma\,(VAN_i) \qquad [C.11]$$

$$VAP_1 = \frac{\mu_{F1}}{1 + k} - R_0 - t \cdot \frac{\sigma_{F1}}{1 + k}$$

$$VAP_2 = \frac{\mu_{F2}}{1 + k} - R_0 - t \cdot \frac{\sigma_{F2}}{1 + k}$$

si $VAP_1 > VAP_2$, entonces:

$$\frac{\mu_{F1}}{1+k} - R_0 - t \cdot \frac{\sigma_{F1}}{1+k} > \frac{\mu_{F2}}{1+k} - R_0 - t \cdot \frac{\sigma_{F2}}{1+k} \qquad [C.12]$$

luego $\mu_{F1} - t \cdot \sigma_{F1} > \mu_{F2} - t \cdot \sigma_{F2}$

Por otro lado:

$$TRIP_i = E\,(TRI_i) - t \cdot \sigma\,(TRI_i) \qquad [C.13]$$

$$TRIP_1 = \frac{\mu_{F1} - R_0}{R_0} - t \cdot \frac{\sigma_{F1}}{R_0}$$

$$TRIP_2 = \frac{\mu_{F2} - R_0}{R_0} - t \cdot \frac{\sigma_{F2}}{R_0}$$

Si se cumple que $\mu_{F1} - t \cdot \sigma_{F1} > \mu_{F2} - t \cdot \sigma_{F2}$ es evidente que $TRIP_1 > TRIP_2$.

Luego supuesta una t para el VAP, al aplicarla en la TRIP llegamos a idénticos resultados. Por lo que se debe usar la misma t.

APENDICE D: ESTUDIO EMPÍRICO ACERCA DE LA NORMALIDAD DE VAN Y TRI

Así como la normalidad del VAN es más fácil de aceptar, apoyándonos, por ejemplo, en el Teorema Central del Límite, la normalidad de la TRI es más difícil de demostrar. En el Apéndice C veíamos cómo la hipótesis de normalidad de la TRI es fácil de aceptar cuando se trata de proyectos uniperiodo: en tal caso, y supuesta riqueza final del proyecto que sigue la distribución normal, tanto el VAN como la TRI seguirían también la distribución normal. Sin embargo, en el caso de proyectos multiperiodo (los más habituales en la gestión de la PYME), este tema no está tan claro. Abordaremos el tema desde una perspectiva empírica, y a continuación extraeremos algunas conclusiones, que trataremos de relacionar con la aproximación teórica de Hillier, que en determinadas condiciones, justifica la normalidad de TRI.

- **Estudio empírico de la normalidad de VAN y TRI utilizando técnicas de simulación.**

A continuación, presentaremos los resultados obtenidos al realizar un proceso de simulación (por el método de Montecarlo), en seis situaciones diferentes. Todas ellas tienen una serie de hipótesis de partida y de procedimientos de trabajo comunes, así como algunos elementos que cambian de una simulación a otra. A continuación, se describe brevemente el proceso realizado:

- Se define el desembolso inicial del proyecto, que se supone conocido: 1.000 unidades monetarias -u.m.- (en todos los casos).

- Se define la vida útil del proyecto, que se supone también conocida a priori (y que cambia en las diferentes simulaciones realizadas).

- Se define el tipo de descuento a utilizar (coste de los fondos), que se supone conocido e invariable a lo largo de la vida útil del proyecto ($k = 10\%$ en todos los casos).

- Se define el comportamiento de las generaciones de fondos asociadas al proyecto (la última incluye el valor residual), asumiéndose la normalidad de cada una de ellas. En concreto, se ha supuesto generaciones de fondos de promedio $\mu = 500$ y desviación típica $\sigma = 50$ (en todos los casos).

- En cada caso, se supone una determinada relación entre los flujos de fondos de los diferentes años (distinta en cada simulación).

- En cada simulación, se generan 50.000 valores de las variables simuladas, obteniendo por tanto 50.000 valores de VAN y otros tantos de TRI. A partir de estos valores simulados, se calcula el promedio y la desviación típica de VAN y TRI.

- En el caso de la TRI se comparan los valores de promedio obtenidos en cada simulación con los que se obtienen a partir de las generaciones de fondos esperadas.

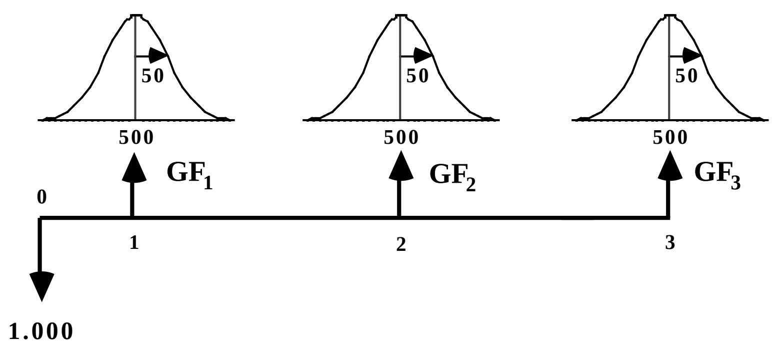
- En cada simulación, se realizan pruebas de hipótesis para comprobar si cabe aceptarse la normalidad de las distribuciones simuladas de VAN y TRI. Asimismo, se indica la distribución teórica que mejor se ajustaría a la obtenida desde el punto de vista experimental.

- En determinadas ocasiones, cuando se considera oportuno, se ofrecen también los resultados empíricos de asimetría y kurtosis (datos referidos a la distribución de la TRI).

Los resultados obtenidos en el proceso descrito son los siguientes:

- **SIMULACIÓN Nº 1: Vida útil de tres años y correlación nula entre las generaciones de fondos de los distintos años.**

El perfil de fondos sobre el que se trabaja es el siguiente:



Y los resultados obtenidos en el proceso descrito son los siguientes:

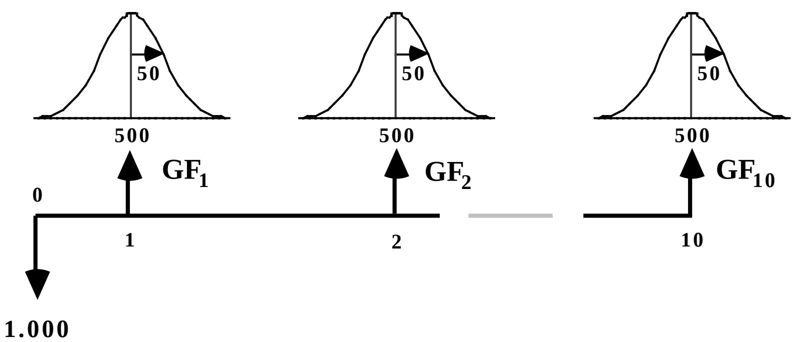
Concepto	Valor
Desembolso inicial	- 1.000
E (GF_1)	500
E (GF_2)	500
E (GF_3)	500
σ (GF_i)	50
Correlación entre GF_i	0
Coste de los fondos (k)	10%
VAN a partir de E (GF_i)	243,43
TRI a partir de E (GF_i)	23,38%
E (TRI) a partir de distribución simulada	23,37%

Análisis de la normalidad de las distribuciones simuladas:

Concepto	VAN	TRI
Kolmogorov-Smirnov[19]	0,003661339	0,003613211
Best Fit	Normal	Normal
Asimetría	-	-
Kurtosis	-	-

- **SIMULACIÓN Nº 2: Vida útil de diez años y correlación nula entre las generaciones de fondos de los distintos años.**

El perfil de fondos sobre el que se trabaja es el siguiente:



[19] Para un error α del 5%, se acepta la normalidad para valores inferiores a 0,0060821.

Y los resultados obtenidos en el proceso descrito son los siguientes:

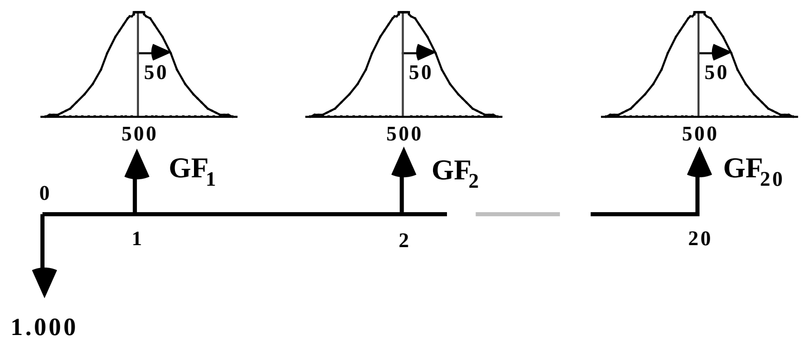
Concepto	Valor
Desembolso inicial	- 1.000
E (GF_1)	500
…	…
E (GF_{10})	500
σ (GF_i)	50
Correlación entre GF_i	0
Coste de los fondos (k)	10%
VAN a partir de E (GF_i)	2.072,28
TRI a partir de E (GF_i)	49,08%
E (TRI) a partir de distribución simulada	49,12%

Análisis de la normalidad de las distribuciones simuladas:

Concepto	VAN	TRI
Kolmogorov-Smirnov	0,003612903	0,007236383
Best Fit	Normal	Beta
Asimetría	-	0,11
Kurtosis	-	3,00

- **SIMULACIÓN Nº 3: Vida útil de veinte años y correlación nula entre las generaciones de fondos de los distintos años.**

El perfil de fondos sobre el que se trabaja es el siguiente:



Y los resultados obtenidos en el proceso descrito son los siguientes:

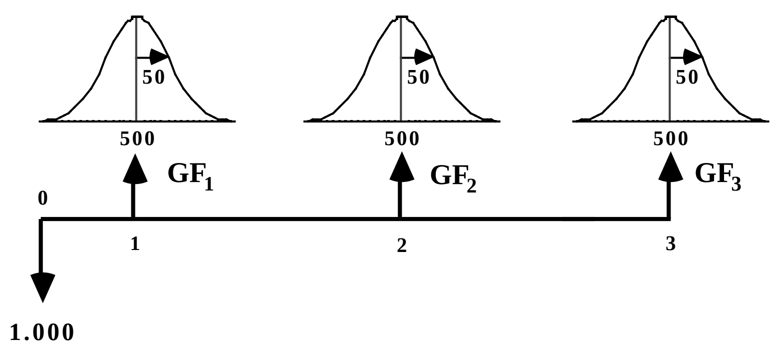
Concepto	Valor
Desembolso inicial	- 1.000
E (GF_1)	500
…	…
E (GF_{20})	500
σ (GF_i)	50
Correlación entre GF_i	0
Coste de los fondos (k)	10%
VAN a partir de E (GF_i)	3.256,78
TRI a partir de E (GF_i)	49,98%
E (TRI) a partir de distribución simulada	50,01%

Análisis de la normalidad de las distribuciones simuladas:

Concepto	VAN	TRI
Kolmogorov-Smirnov	0,002858793	0,008077458
Best Fit	Normal	Beta
Asimetría	-	0,10
Kurtosis	-	3,01

- **SIMULACIÓN Nº 4: Vida útil de tres años y correlación perfecta y positiva entre las generaciones de fondos de los distintos años.**

El perfil de fondos sobre el que se trabaja es el siguiente:



Y los resultados obtenidos en el proceso descrito son los siguientes:

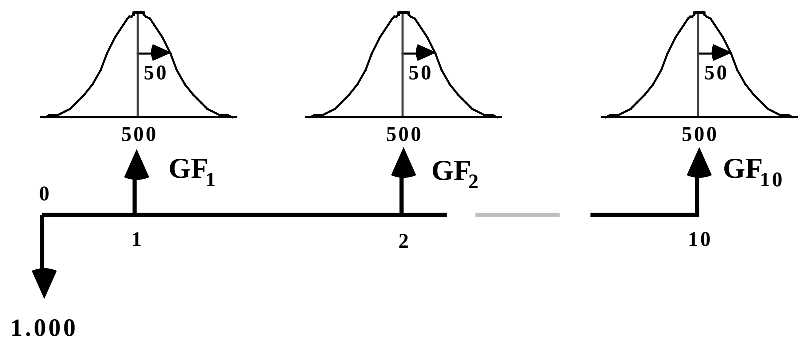
Concepto	Valor
Desembolso inicial	- 1.000
E (GF_1)	500
E (GF_2)	500
E (GF_3)	500
σ (GF_i)	50
Correlación entre GF_i	1
Coste de los fondos (k)	10%
VAN a partir de E (GF_i)	243,43
TRI a partir de E (GF_i)	23,38%
E (TRI) a partir de distribución simulada	23,27%

Análisis de la normalidad de las distribuciones simuladas:

Concepto	VAN	TRI
Kolmogorov-Smirnov	0,002842147	0,006112211
Best Fit	Normal	Normal
Asimetría	-	- 0,07
Kurtosis	-	3,00

• **SIMULACIÓN Nº 5: Vida útil de diez años y correlación perfecta y positiva entre las generaciones de fondos de los distintos años.**

El perfil de fondos sobre el que se trabaja es el siguiente:



Y los resultados obtenidos en el proceso descrito son los siguientes:

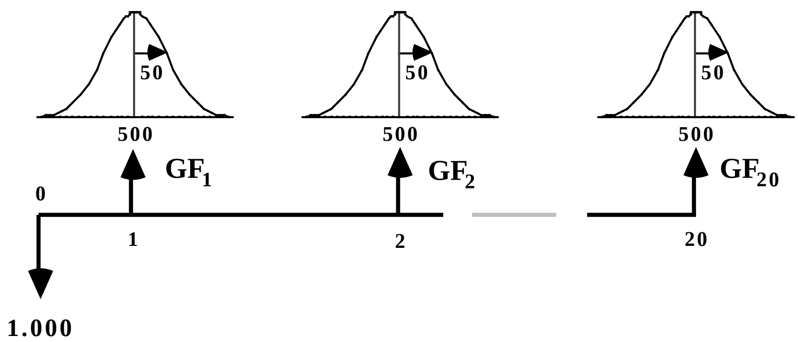
Concepto	Valor
Desembolso inicial	- 1.000
E (GF_1)	500
…	…
E (GF_{10})	500
σ (GF_i)	50
Correlación entre GF_i	1
Coste de los fondos (k)	10%
VAN a partir de E (GF_i)	2.072,28
TRI a partir de E (GF_i)	49,08%
E (TRI) a partir de distribución simulada	49,04%

Análisis de la normalidad de las distribuciones simuladas:

Concepto	VAN	TRI
Kolmogorov-Smirnov	0,001621271	0,002773545
Best Fit	Normal	Normal
Asimetría	-	-
Kurtosis	-	-

• **SIMULACIÓN Nº 6: Vida útil de veinte años y correlación perfecta y positiva entre las generaciones de fondos de los distintos años.**

El perfil de fondos sobre el que se trabaja es el siguiente:



Y los resultados obtenidos en el proceso descrito son los siguientes:

Concepto	Valor
Desembolso inicial	- 1.000
E (GF_1)	500
…	…
E (GF_{20})	500
σ (GF_i)	50
Correlación entre GF_i	1
Coste de los fondos (k)	10%
VAN a partir de E (GF_i)	3.256,78
TRI a partir de E (GF_i)	49,98%
E (TRI) a partir de distribución simulada	49,96%

Análisis de la normalidad de las distribuciones simuladas:

Concepto	VAN	TRI
Kolmogorov-Smirnov	0,001533372	0,001585839
Best Fit	Normal	Normal
Asimetría	-	-
Kurtosis	-	-

Conclusiones acerca de la normalidad de VAN y TRI

- En lo que se refiere al análisis empírico a través de la técnica de simulación, realizada bajo dos hipótesis extremas (correlación nula y correlación perfecta y positiva), y en tres escenarios en cuanto al número de generaciones de fondos (3, 10 y 20, respectivamente), podemos concluir lo siguiente:

  * Puede aceptarse la normalidad del VAN en todos los casos.

  * Sólo en algunos casos puede aceptarse la normalidad de la TRI, pero en cualquier caso, da la impresión de que la distribución empírica es muy similar a la normal, lo que supondría que el cálculo de probabilidades utilizando la curva normal no debe llevar a cometer grandes errores.

- Desde un punto de vista teórico, cabe referirnos al trabajo de Hillier[20], en el que el autor apunta que el VAN sigue la distribución normal si las generaciones de fondos lo hacen, con independencia del valor que tome la correlación entre los diferentes flujos de fondos[21]. Este resultado, además, resulta típico y lógico.

  Por otra parte, el autor razona que la TRI sigue también la distribución normal, apoyando su argumentación en una "sencilla" demostración matemática, que parte de unos supuestos que plantean problemas importantes en cuanto a su aceptación:

  * Por un lado, resulta claro que el promedio de VAN disminuye ante aumentos del tipo de descuento (k) -de hecho, la derivada del promedio con respecto a k es negativa-, pero Hillier supone que las disminuciones de promedio son iguales para cualquier valor de k.

  * Es claro que la varianza del VAN varía ante cambios en el tipo de descuento, pero Hillier supone que la varianza no cambia para cualquier valor de k.

  Así, aceptando las dos hipótesis apuntadas, puede demostrarse la normalidad de la TRI, si bien el propio autor señala las limitaciones de su planteamiento (que vienen dadas por el carácter restrictivo de las condiciones apuntadas).

Una última reflexión

En cuanto a la posibilidad de razonar e identificar el concepto de TRI esperada y la TRI de las generaciones de fondos esperadas, es importante resaltar que esto está totalmente justificado en proyectos uniperiodo. Y es precisamente en este caso en el que la TRI no presenta otros problemas teóricos importantes (como la hipótesis de reinversión a la propia TRI -que puede tener efectos especialmente dramáticos en el caso de que el proyecto devuelva los fondos a ritmos acelerados-, el de inconsistencia, etc.). Por lo tanto, entendemos que los razonamientos realizados a lo largo del artículo están justificados, ya que:

- En proyectos financieros es habitual suponer existencia de un único periodo (cfr. Teoría de Cartera de Markowitz y modelos construidos a partir de la misma).

- En proyectos empresariales, la utilización de TRI sin problemas exige que los proyectos sean uniperiodo. Dado que en muchos casos ello no es así, puede suponerse que trabajamos con la TRI modificada, que supone reinversión de los flujos de fondos al momento n (vida útil del proyecto) al coste de los fondos, y cálculo posterior de la TRI correspondiente a dicho proyecto uniperiodo.

---

[20] Hillier, F.S. (1963): "The derivation of probabilistic information for the evaluation of risky investments", *Management Science*, 9, Abril, págs. 443-457.

[21] Se debería entender aquí distribución normal multivariante.