EL CAPM: METODOLOGÍAS DE CONTRASTE

por Fernando Gómez-Bezares, José A. Madariaga y Javier Santibáñez*
Comunicación presentada al *III Foro de Finanzas*, Universidad Comercial de Deusto, Bilbao, Nov.-Dic. de 1.995
Publicado en Gómez-Bezares, F. y J. V. Ugarte, ed., *III Foro de Finanzas,* 1.995, págs. 663-695 y en el *Boletín de Estudios Económicos*, nº156, Diciembre, 1.995, págs. 557-582

1. Introducción

Este trabajo pretende presentar al lector diferentes métodos de contrastar el Modelo de Valoración de Activos de Capital, más conocido por las siglas CAPM, desarrollado por Sharpe (1964), Lintner (1965), Mossin (1966), etc. Es bien conocido que el modelo preconiza que, en el equilibrio, los títulos deben rendir linealmente en función de su riesgo medido por la beta (o covarianza entre la rentabilidad del título y del mercado relativizada por la varianza de ésta última). La expresión matemática del mismo es la siguiente:

$$E(r_i) = r_0 + [E(r_m) - r_0]\ \beta_i \qquad [1]$$

donde:

- $E(r_i)$ Valor esperado o esperanza matemática de la rentabilidad del título i.
- r_0 Tipo de interés sin riesgo.
- $E(r_m)$ Valor esperado o esperanza matemática de la rentabilidad de la cartera de mercado.
- β_i Riesgo sistemático del título i.

La deducción matemática del modelo puede verse en cualquier manual de teoría financiera como, por ejemplo, el de Copeland y Weston (1988)[1].

---

* Queremos agradecer a Gonzalo Rubio, de la UPV, sus interesantes sugerencias, así como la documentación que nos facilitó. Los errores, en todo caso, son responsabilidad exclusiva de los autores.

[1] Una exposición detallada del modelo CAPM puede verse en Gómez-Bezares (1991) y de sus contrastes en Gómez-Bezares (1993).

A raíz de su desarrollo teórico a lo largo de la década de los sesenta, se realizaron los primeros contrastes empíricos relevantes a comienzos de los setenta. Concretamente, nos estamos refiriendo a los trabajos de Black, Jensen y Scholes (1972), Blume y Friend (1973) y el de Fama y MacBeth (1973), que marcaron un hito en la historia de los contrastes, ya que establecieron las metodologías básicas de contrastación que, con pocas novedades, han sobrevivido hasta nuestros días. Estas novedades, como veremos posteriormente, son básicamente de carácter econométrico y consisten en el sucesivo afinamiento de los procedimientos de estimación de los diferentes modelos empíricos.

Nuestra intención es la de recoger las metodologías básicas de contrastación del modelo, señalando los problemas estadísticos que hay que afrontar en cada caso. Para ello nos basaremos en un amplio estudio del mercado español (en un periodo que va desde 1959 hasta 1993), cuyo resumen puede encontrarse en Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez (1994), en donde nos enfrentamos con todos los problemas y adoptamos las soluciones que vamos a exponer.

También comentaremos una línea de investigación que sólo fue tenida en cuenta parcialmente en el trabajo mencionado y que constituye los denominados contrastes multivariantes del modelo. Efectivamente, a raíz del trabajo de Gibbons (1982), este campo se ha convertido en uno de los más relevantes y ha sido objeto de diversos estudios empíricos, de entre los que podríamos destacar los trabajos de Shanken (1985, 1986) y, en el caso español, Rubio (1988).

2. El modelo teórico: problemas preliminares

El primer problema con el que nos encontramos a la hora de realizar la contrastación empírica es que el modelo teórico [1] está expresado en expectativas, tanto de rendimiento, como de riesgo. Ello nos obliga a acudir a la hipótesis de expectativas racionales, para poder testar el modelo en base a datos del pasado.

Otra dificultad consiste en la elección del periodo básico sobre el que se miden las rentabilidades, así como el conjunto de periodos sobre los que contrastamos el modelo. La decisión al respecto suele ser a conveniencia del investigador y se suelen tener en cuenta los criterios marcados por autores de prestigio. Así, Fama y MacBeth (1973) se decidieron por utilizar el mes como periodo sobre el que se miden las rentabilidades y el cuatrienio como periodo de contraste del modelo. Sin embargo, Kothari, Shanken y Sloan (1992) utilizaron periodos anuales para medir las rentabilidades obteniendo resultados aceptables. Nosotros utilizamos para el conjunto de datos comprendido entre 1959 y 1988 ambas posibilidades (véase Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez, 1994). En cualquier caso, creemos que en este campo queda mucho por investigar y que posteriores estudios vendrán a esclarecer el tema.

Un tercer problema consiste en la elección de la cartera de mercado r_m. En este sentido, conviene recordar la crítica de Roll (1977), ya que si la cartera elegida es eficiente, el CAPM funcionará, y no lo hará en caso contrario. En la contrastación empírica, al tener que usar aproximaciones, no deben sorprender los malos resultados (Roll y Ross, 1994). En cualquier caso, Stambaugh (1982) concluyó que los contrastes del modelo son poco sensibles a la aproximación utilizada como cartera de mercado.

3. Metodología de serie temporal

La metodología que Black, Jensen y Scholes (1972) denominan de serie temporal, realiza el contraste del CAPM apoyándose en el Modelo de Mercado (propuesto por Sharpe, 1963), planteado en excesos sobre el tipo sin riesgo. La ecuación del modelo para el título i en forma matricial es:

$$(\mathbf{r_i}-\mathbf{r_0}) = \alpha_i \mathbf{1_n} + \beta_i (\mathbf{r_m}-\mathbf{r_0}) + \varepsilon_\mathbf{i} \qquad t = 1, 2, \ldots, n \qquad [2]$$

donde:

$(\mathbf{r_i}-\mathbf{r_0})$	Vector columna que contiene los excesos de rentabilidad del título i sobre el tipo sin riesgo, desde t = 1, 2, ..., n.
α_i	Ordenada en el origen del título i.
$\mathbf{1_n}$	Vector columna que contiene n unos.
β_i	Riesgo sistemático del título i.
$(\mathbf{r_m}-\mathbf{r_0})$	Vector columna que contiene los excesos de rentabilidad de la cartera de mercado[2] sobre el tipo sin riesgo, desde t = 1, 2, ..., n.
$\varepsilon_\mathbf{i}$	Vector que contiene los valores que toman las perturbaciones aleatorias del título i en cada uno de los momentos de tiempo, desde t = 1, 2, ..., n.

Las hipótesis de comportamiento de los términos aleatorios se pueden recoger de la siguiente manera[3]:

$$\varepsilon_\mathbf{i} \rightarrow \mathbf{DN_n}\left(0_\mathbf{n}; \sigma^2_{\varepsilon_i} \mathbf{I_n}\right) \qquad [3]$$

[2] A pesar de que a lo largo del trabajo la denominemos cartera de mercado y la designemos como r_m, debe tenerse en cuenta que nos referimos a la aproximación utilizada en el contraste empírico, que puede obtenerse a partir de las rentabilidades de los títulos estudiados o de los de un índice. La más habitual es la obtenida como media aritmética, aunque también pueden utilizarse promedios ponderados. En cualquier caso, la media equiponderada presenta ventajas de cara a la realización del contraste.

[3] Además de éstas, también están implícitas las hipótesis estructurales de linealidad (relación lineal entre la variable explicada y la explicativa) y estructura única (coeficientes α_i y β_i constantes durantes los n periodos considerados).

donde:

$\mathbf{DN_n}$	Distribución normal multivariante n dimensional.
$\mathbf{0_n}$	Vector columna que contiene n ceros.
σ_ε^2	Varianza de las perturbaciones aleatorias del título i.
$\mathbf{I_n}$	Matriz unidad de orden n•n.

La variable explicativa en sentido estricto del modelo [2], es decir, el exceso de rentabilidad de la cartera de mercado ($\mathbf{r_m}$-$\mathbf{r_0}$), es estocástica, lo que nos lleva a entender las hipótesis anteriores en términos condicionales, y a añadir una nueva hipótesis que establece la independencia entre el regresor y las perturbaciones aleatorias[4]:

$$\mathbf{Cov}\,(\varepsilon_\mathbf{i},\ \mathbf{r_m}\text{-}\mathbf{r_0}) = \mathbf{0_{nn}} \qquad [4]$$

donde:

$\mathbf{Cov}$ ( )	Matriz de covarianzas entre los vectores de variables que aparecen entre paréntesis.
$\mathbf{0_{nn}}$	Matriz de ceros de orden n•n.

El procedimiento óptimo de estimación del modelo [2] con las hipótesis consideradas es el de Mínimos Cuadrados Ordinarios (a partir de ahora MCO). Vamos a expresar los estimadores, para lo que pasaremos el modelo [2] a notación matricial convencional:

$$(\mathbf{r_i}\text{-}\mathbf{r_0}) = \mathbf{X}\beta + \varepsilon_\mathbf{i} \qquad [5]$$

donde:

$\mathbf{X}$	Matriz que contiene las variables explicativas. Se corresponde con la siguiente matriz particionada de dos vectores columna [$\mathbf{1_n}$; ($\mathbf{r_m}$-$\mathbf{r_0}$)].
β	Vector que contiene los parámetros de la relación: el término independiente α_i y el coeficiente angular β_i.

La expresión en forma matricial de los estimadores MCO del modelo [5] es la siguiente[5]:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X'X})^{-1}\ \mathbf{X'}\ (\mathbf{r_i}\text{-}\mathbf{r_0}) \qquad [6]$$

---

4 Esta hipótesis supone, en realidad, que las perturbaciones aleatorias son independientes de los valores pasados, presentes y futuros de la rentabilidad del mercado.

5 Puede verse cualquier manual de econometría como, por ejemplo, Johnston (1984).

donde:

b Vector que contiene el estimador del término independiente a_i y del coeficiente angular b_i.

La estimación de la matriz de varianzas y covarianzas de los estimadores resulta ser:

$$\mathbf{S_{bb}} = s^2_{\varepsilon_i}(\mathbf{X'X})^{-1} \qquad [7]$$

donde:

s^2_ε Estimación de la varianza de las perturbaciones aleatorias. Su cálculo se realiza a partir de los residuos del modelo [5], como cociente entre la suma cuadrática y los grados de libertad (n-2).

Si el CAPM es cierto, deben cumplirse las siguientes condiciones:

$$\alpha_i = 0 \qquad \beta_i = \frac{Cov(r_{it}-r_{0t}, r_{mt}-r_{0t})}{V(r_{mt}-r_{0t})} \qquad [8]$$

donde:

Cov ( ) Covarianza entre las variables que aparecen entre paréntesis.

V ( ) Varianza de la variable que aparece entre paréntesis.

Es decir, el término independiente de la relación [2], α_i, debe ser igual a cero, y el coeficiente angular, β_i, igual al cociente expresado. La comprobación de ambas condiciones exige la realización de sendas pruebas de hipótesis individuales, que en la práctica se resumen en una única, la relativa a la ordenada en el origen[6], ya que la estimación puntual de la pendiente coincide precisamente con el cociente de estimaciones indicado en [8]. En cualquier caso, Black, Jensen y Scholes (1972) critican la prueba propuesta, debido a que para la aceptación o rechazo del modelo únicamente se utiliza la información relativa a un título concreto, el activo i. Una alternativa, utilizada por los autores señalados, consiste en la realización del contraste a partir de carteras de títulos en lugar de activos individuales[7].

[6] La prueba, suponiendo que las perturbaciones aleatorias siguen la distribución normal, se realiza comparando el resultado del cociente entre la estimación puntual del término independiente y la estimación insesgada de su desviación típica, con un valor teórico de la t de Student con n-2 grados de libertad para un error α especificado.

[7] Existen diferentes criterios para la construcción de carteras no exentos de complicaciones, hasta el punto que algunos autores, como Lo y MacKinlay (1990), desconfían de su utilización. En nuestro estudio (véase Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez, 1994), aplicamos el contraste únicamente a títulos individuales. En realidad, las razones de tal decisión están en relación con el mercado objeto de estudio, la Bolsa española, pues al tratarse de un

Otra posibilidad, más actual, consiste en la consideración del conjunto de g Modelos de Mercado (tantos como títulos individuales se están estudiando) como un único sistema de ecuaciones. En realidad, todas las ecuaciones se pueden considerar como un sistema aparentemente no relacionado (conocido en la literatura econométrica como SUR[8]), debido a la existencia de relaciones cruzadas entre las perturbaciones aleatorias de los diferentes títulos. Estas relaciones cruzadas incluyen, entre otros, los denominados efectos sectoriales (véase Blume, 1971)[9].

El problema se puede expresar de la siguiente manera:

$$\mathbf{Cov}\ (\varepsilon_{\mathbf{i}},\ \varepsilon_{\mathbf{j}}) = \sigma_{ij}\ \mathbf{I_n} \qquad i \neq j \qquad [9]$$

donde:

σ_{ij} Covarianza contemporánea entre las perturbaciones aleatorias de los títulos i y j.

Es importante observar que únicamente se consideran relaciones cruzadas contemporáneas, suponiendo, por tanto, la inexistencia de relaciones para diferentes retardos temporales.

La ecuación [2] junto con las correspondientes al resto de activos considerados, en total g, pueden expresarse:

$$(\mathbf{r} \text{-} \mathbf{1_g} \quad \mathbf{r_0}) = [\mathbf{I_g} \quad \mathbf{1_n}]\ \alpha + [\mathbf{I_g} \quad (\mathbf{r_m} \text{-} \mathbf{r_0})]\ \beta + \varepsilon \qquad t = 1, 2, \ldots, n \qquad [10]$$

donde:

$(\mathbf{r} \text{-} \mathbf{1_g} \quad \mathbf{r_0})$ Vector columna que contiene los g•n excesos de rentabilidad de los g títulos.

$\mathbf{I_g}$ Matriz unidad de orden g•g.

α Vector que contiene los g términos independientes.

β Vector que contiene los g coeficientes angulares o riesgos sistemáticos.

ε Vector que contiene los g•n valores que toman las perturbaciones aleatorias de los g títulos.

---

mercado de tamaño intermedio, no permite la selección de suficientes títulos como para formar carteras, si ponemos condiciones exigentes de frecuencia y volumen de contratación.

[8] Seemingly Unrelated Regression, puede verse Johnston (1984).

[9] Obsérvese que la utilización del procedimiento de estimación de MCO para las ecuaciones individuales no tiene en cuenta dicha información, lo que puede afectar a la propiedad de eficiencia de los estimadores.

Operador del producto directo o de Kronecker, véase Johnston (1984).

Las hipótesis de los términos de error se pueden recoger en este caso[10]:

$$\varepsilon \rightarrow DN_{\mathbf{ng}}\left(0_{\mathbf{ng}};\ \Sigma_{\varepsilon\varepsilon} \otimes \mathbf{I_n}\right) \qquad [11]$$

donde:

$\mathbf{0_{ng}}$ Vector columna que contiene n•g ceros.

$\Sigma_{\varepsilon\varepsilon}$ La matriz g•g de varianzas y covarianzas contemporáneas de las perturbaciones aleatorias, donde el elemento general de la misma es σ_{ij}. Es cuadrada, simétrica y definida positiva.

El procedimiento de estimación óptimo del sistema planteado en [10] es el de Mínimos Cuadrados Generalizados (a partir de ahora MCG). En cualquier caso, la coincidencia de la única variable explicativa en sentido estricto ($\mathbf{r_m}$-$\mathbf{r_0}$) para el conjunto de g ecuaciones, hace que los resultados de aplicar MCG al sistema coincidan con los obtenidos por MCO en lo que se refiere a las estimaciones puntuales (expresión [6]), pero no con respecto a las varianzas y covarianzas[11].

La hipótesis nula multivariante a comprobar, si el CAPM se cumple, es:

$$H_0: \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_i \\ \cdots \\ \alpha_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad H_a: \quad \alpha \neq 0 \qquad [12]$$

En nuestro estudio (véase Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez, 1994) realizamos la prueba planteada en [12] apoyándonos en la F de Fisher[12]. Otra posibilidad, debida a Gibbons, Ross y Shanken (1989), se basa en un estadístico que, bajo el supuesto de normalidad, es el siguiente:

---

10 En cualquier caso, debe tenerse en cuenta que, para el conjunto de ecuaciones, también se suponen las hipótesis estructurales indicadas anteriormente: linealidad y estructura única.

11 Debe tenerse en cuenta que la denominación SUR hace únicamente referencia al sistema [10], debido a la relación existente entre las perturbaciones aleatorias de las ecuaciones individuales. En cambio, la estimación del modelo [10] se realiza por MCG, como ya hemos indicado. Pueden verse Johnston (1984) o Novales (1993), donde se ofrece una exposición más detallada.

12 Puede encontrarse la expresión general del estadístico en Novales (1993).

$$W_u = \frac{\mathbf{a}' \, \mathbf{S}_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} \, \mathbf{a}}{\left(1 + \hat{\theta}_m^2\right)} \; ; \; \text{siendo } \hat{\theta}_m = \frac{\bar{r}_m}{s_m} \qquad [13]$$

donde:

a Vector que contiene los estimadores del término independiente del Modelo de Mercado de los g títulos.

$\mathbf{S}_{\varepsilon\varepsilon}$ Estimación de la matriz de varianzas y covarianzas contemporánea de las perturbaciones aleatorias, obtenida a partir de los residuos de la estimación del modelo [2] para todos los títulos[13]. También puede calcularse el estadístico basado en la estimación máximo verosímil de dicha matriz.

$\bar{r}_m$ Promedio de rentabilidad de la cartera de mercado.

s_m Estimador máximo verosímil de la desviación típica de la rentabilidad de la cartera de mercado[14].

Puede demostrarse que el estadístico propuesto tiene una relación exacta con la F de Fisher que viene dada por:

$$\left[\frac{n\,(n\text{-}g\text{-}1)}{g\,(n\text{-}2)}\right] W_u \;\rightarrow\; F(g;\, n\text{-}g\text{-}1) \qquad [14]$$

Otra alternativa que, apoyándose en el Modelo de Mercado, sirve para contrastar el CAPM, y que omitimos en este trabajo, consiste en la utilización del Método Generalizado de Momentos (puede verse MacKinlay y Richardson, 1991). Su interés se basa en que los contrastes planteados son robustos a desviaciones en el supuesto de normalidad de las rentabilidades de los títulos, que, aunque desde el punto de vista teórico no resulta necesario de cara a demostrar el CAPM, sí resulta imprescindible desde el punto de vista estadístico, para que las propiedades de muestra finita de los tests planteados sean fácilmente derivables.

4. Metodología de corte transversal sin medias

La metodología de corte transversal sin medias fue utilizada por Fama y MacBeth en su influyente trabajo de 1973. En esta ocasión, el contraste se basa en datos de corte transversal y consta de dos etapas:

[13] Para ello basta con dividir los numeradores de las estimaciones de las varianzas y covarianzas entre (n-2), es decir, el número de periodos considerado menos los grados de libertad que se pierden por el hecho de estimar α_i y β_i.

[14] Se calcula dividiendo la raíz de la suma cuadrática de desviaciones respecto a la media entre la raíz de n, sin considerar la pérdida de un grado de libertad por la estimación del promedio.

-Periodo de estimación: A partir de observaciones anteriores al momento t de contraste del modelo, se obtienen las estimaciones del riesgo sistemático de los títulos mediante el Modelo de Mercado[15].

-Periodo de contraste: Se plantea una regresión para cada momento t que configura el periodo en su conjunto (t = 1, 2, ..., n)[16], explicando las rentabilidades de los g títulos mediante el riesgo sistemático estimado en la etapa anterior.

Suponiendo g activos, el modelo empírico planteado en rentabilidades[17] para cada momento de tiempo t, y expresado en forma matricial, es:

$$\mathbf{r_t} = \gamma_t \, \mathbf{1_g} + \delta_t \, \mathbf{b_t} + \mathbf{w_t} \qquad i = 1, 2, \ldots, g \qquad [15]$$

donde:

$\mathbf{r_t}$ Vector columna que contiene las rentabilidades de los g títulos en el momento de tiempo t.

γ_t Término independiente de la relación establecida en el modelo empírico.

$\mathbf{1_g}$ Vector columna que contiene g unos.

δ_t Pendiente de la relación establecida en el modelo empírico.

$\mathbf{b_t}$ Vector columna que contiene las estimaciones de las expectativas de los riesgos sistemáticos de los g títulos en el momento t.

$\mathbf{w_t}$ Vector que contiene las perturbaciones aleatorias de los g títulos en el momento t.

Es importante observar que en la ecuación [15] está implícita la primera etapa señalada anteriormente, ya que, precisamente, la variable explicativa $\mathbf{b_t}$ es el resultado obtenido en la misma, es decir, el vector que contiene las estimaciones de los riesgos sistemáticos de los títulos basados en periodos anteriores al momento t de contraste del modelo[18]. Dicho vector se obtiene a partir de las series históricas de rentabilidad de los títulos mediante el Modelo de Mercado expresado en la ecuación [2]. Como se trata de una estimación, es evidente que se encuentra sujeta

[15] Fama y MacBeth (1973) hacen, además, una agrupación previa en carteras. Pero no entraremos ahora en ello.

[16] No deben confundirse estos momentos con el periodo previo, es decir, el utilizado para estimar las betas y que configura la primera etapa mencionada anteriormente.

[17] También cabe la posibilidad de realizar el planteamiento en excesos sobre el tipo sin riesgo.

[18] Esta característica, que parece poco relevante, plantea una importante diferencia respecto al contraste de serie temporal, ya que permite que el riesgo sistemático de los títulos pueda cambiar en cada momento t en el que se contraste el modelo, aunque la utilización del Modelo de Mercado para realizar la estimación obliga a introducir la hipótesis de riesgo constante (véase la nota 3) en los periodos previos a t en los que se basa la misma.

a error, por lo que el modelo [15] presenta regresores estocásticos debido a errores de medición en la variable explicativa. El problema que plantea la existencia de los mismos se ve agravado por el hecho de que se encuentran relacionadas las perturbaciones empíricas $\mathbf{w_t}$ con la variable explicativa observada $\mathbf{b_t}$.

El modelo [15] planteado de manera convencional queda:

$$\mathbf{r_t} = \mathbf{X}\,\gamma_\mathbf{t} + \mathbf{w_t} \quad [16]$$

donde:

X Matriz que contiene a las variables explicativas formada por dos vectores columna $[\mathbf{1_g}; \mathbf{b_t}]$.

$\gamma_\mathbf{t}$ Vector columna que contiene los parámetros γ_t y δ_t.

En cuanto a las hipótesis necesarias para la correcta definición estadística del modelo, se puede demostrar que el comportamiento de las perturbaciones aleatorias $\mathbf{w_t}$[19] es el siguiente:

$$\mathbf{w_t} \rightarrow DN_g\left[0_\mathbf{g},\ \Sigma_\mathbf{ww}\right] \quad [17]$$

donde:

$\mathbf{0_g}$ Vector columna que contiene g ceros[20].

$\Sigma_\mathbf{ww}$ La matriz g•g de varianzas y covarianzas contemporáneas de las perturbaciones aleatorias, donde el elemento general de la misma es σ_{ij}. Es cuadrada, simétrica y definida positiva.

Es importante destacar la existencia de dos problemas clásicos en las perturbaciones aleatorias de [15]:

-Por un lado, existe un problema de heteroscedasticidad debido a las diferencias entre los riesgos específicos de los títulos, siendo éste un problema inevitable. Puede observarse que las perturbaciones aleatorias del modelo [15], recogen la parte de la rentabilidad no explicada por el riesgo sistemático, es decir, la debida a

[19] Además, aunque no las indiquemos, se suponen las hipótesis estructurales habituales de linealidad y estructura única.

[20] En realidad, las perturbaciones aleatorias del modelo [15] engloban un componente aleatorio específico de los títulos, al que se le incorpora un término adicional debido a los errores de medición en la beta. Suponiendo promedio cero para el primero, para que se cumpla la hipótesis de promedio cero de las perturbaciones empíricas, es necesario que el promedio de los errores de medición sea cero, para lo cual basta con que el estimador utilizado para estimar el riesgo sistemático sea insesgado, como el obtenido a partir del Modelo de Mercado (véase la expresión [6]). Puede verse una exposición más detallada en Madariaga (1994).

componentes específicos. La varianza de la rentabilidad se descompondrá en dos partes: la sistemática y la diversificable, y ambas serán distintas para cada título, lo que justifica el problema de la heteroscedasticidad.

-Por otro, puede existir un problema de autocorrelación si se detectan relaciones cruzadas significativas entre las perturbaciones de los diferentes activos, aunque, en este caso, la cuestión queda supeditada a la existencia de dichas relaciones. El problema es evidente si se aceptan relaciones entre los títulos aparte de la común que tienen con el mercado, lo cual es coherente, por ejemplo, con los denominados efectos sectoriales.

Además, la variable explicativa del modelo empírico y las perturbaciones aleatorias están relacionadas[21], por lo que:

$$\mathbf{Cov}(\mathbf{b},\ \mathbf{w}) \neq 0_{\mathbf{gg}} \qquad [18]$$

donde:

$\mathbf{0_{gg}}$ Matriz de ceros de orden g•g.

Si el CAPM es cierto, en el modelo [15] debe suceder que:

$$\gamma_t = r_{0t} \qquad \delta_t = (r_{mt} - r_{0t}) \qquad [19]^{22}$$

El procedimiento de estimación del modelo [15] ha tenido diversas soluciones desde que fue utilizado por Fama y MacBeth (1973). Fundamentalmente, las diferencias entre todas ellas vienen por la distinta consideración del problema de los errores de medición en las betas y las especiales

[21] Ya hemos indicado con anterioridad cómo las perturbaciones aleatorias del modelo [15] engloban dos términos: una parte específica de cada título y otra debida a los errores de observación en las betas. Es precisamente ésta última la que origina la relación mencionada, ya que debe tenerse en cuenta que, por otro lado, la beta estimada con error se puede descomponer como suma de la verdadera beta y el error cometido en el proceso de estimación. En definitiva, tanto la estimación de la beta como la perturbación empírica son combinación de los errores de medición, por lo que existirá un problema de relación entre ambas. Es interesante señalar que, por otro lado, los errores de medición no se encuentran relacionados con la parte específica de los títulos debido al procedimiento utilizado, como señalaremos posteriormente.

[22] Si el planteamiento del modelo se realiza en excesos sobre el tipo sin riesgo, el término independiente debe anularse y, al igual que en el planteamiento en rentabilidades, el coeficiente angular coincidir con el premio por riesgo de la cartera de mercado. En cualquier caso, cabe señalar que la utilización de una aproximación a la cartera de mercado hace que dichas condiciones se sustituyan por otras alternativas: el término independiente puede tomar cualquier valor y el coeficiente angular debe ser significativo (versión de Black, 1972). Puede consultarse Gómez-Bezares (1991, apéndice V-B).

características de las perturbaciones aleatorias[23] de [15]. Como ya hemos indicado con anterioridad, el proceso de contraste consta de dos fases: periodo de estimación, en el que se obtienen las aproximaciones a los riesgos sistemáticos de los títulos[24] y periodo de contraste, en el que se estima el modelo [15] y se contrasta el CAPM mediante la realización de las pruebas sugeridas en [19]. Así, Fama y MacBeth (1973) estimaron las betas de los títulos a partir del Modelo de Mercado[25], utilizando en la segunda fase el método de MCO para estimar el premio por riesgo. El problema de este método es que no considera la problemática introducida por los errores de observación en las betas[26]. Para ello, tal y como indica Fama (1976), se pueden adoptar dos posibles soluciones:

-En primer lugar, la utilización de series temporales más largas para la obtención de las estimaciones de las betas a partir del Modelo de Mercado [2], ya que la variabilidad del coeficiente angular es inversamente proporcional al tamaño muestral.

-En segundo lugar, la utilización de carteras, ya que al ser la beta de las mismas combinación lineal de las de los títulos[27], se garantiza la disminución de variabilidad de las estimaciones[28].

De ambas posibilidades la primera no es idónea, ya que, como indica Fama (1976, pág. 132), partiendo de datos mensuales y de cara a la estimación de las betas, es conveniente la utilización de series de rentabilidad comprendidas entre cinco y siete años, debido a que para periodos superiores cambian[29]. Fama y MacBeth (1973) adoptaron la segunda solución, esto es, estimaron el modelo [15] no para títulos individuales, sino para carteras. Con ello, como hemos dicho con anterioridad, se puede conseguir disminuir el problema de los errores de medición, pero lo cierto es que sus consecuencias están presentes en mayor o menor grado[30]. Por ello, el método de MCO, utilizado por Fama y MacBeth (1973), no garantiza la obtención de estimadores con propiedades estadísticas deseables, ya que, por otra parte, no aborda los problemas de heteroscedasticidad y

---

[23] Es interesante señalar que la principal complicación de esta metodología no consiste en la realización de las pruebas de hipótesis señaladas en [19], sino en la estimación del modelo empírico [15]. Esta es una característica fundamental de los contrastes de corte transversal (de éste y del que analizaremos en el apartado siguiente), frente al de serie temporal, donde el método de estimación no plantea problemas y existen diferentes alternativas en cuanto a cómo realizar el contraste del modelo.

[24] Con ello, aunque se provoca un problema de errores de estimación, al hacerlo a partir de datos previos a t se garantiza la independencia de éstos con la parte de las perturbaciones aleatorias empíricas que no engloban el efecto del error de medición.

[25] Véase ecuación [2].

[26] Tampoco heteroscedasticidad y autocorrelación, aunque lo comentaremos en detalle más adelante. En cualquier caso, sí se debe indicar que estos problemas no implican sesgo ni inconsistencia, mientras que los errores en la variables explicativas hacen que se pierdan todas las propiedades de los estimadores, lo que da muestra de la gravedad del problema.

[27] Puede verse Copeland y Weston (1988).

[28] En realidad, la disminución de variabilidad se produce siempre, excepto si la relación entre las estimaciones de ambos títulos es exacta y positiva, como puede verse en Madariaga (1994).

[29] Incumpliéndose la hipótesis de estructura única señalada en la nota 3.

[30] Regresores estocásticos relacionados con las perturbaciones aleatorias del modelo.

autocorrelación de las perturbaciones aleatorias del modelo. Una alternativa que considera estas cuestiones es la utilización de MCG para la estimación del modelo [15], aunque dejaría de lado el problema de los errores de observación. Lo cierto es que, si las estimaciones de las betas fuesen precisas, podría ser considerado como método óptimo, aunque esta condición no se puede garantizar para las aproximaciones obtenidas a partir del Modelo de Mercado, ni siquiera agrupando los títulos en carteras.

Litzenberger y Ramaswamy (1979) ofrecieron una solución parcial al problema de la estimación del modelo [15]. Concretamente, abordaron la problemática de los errores de observación y la existencia, únicamente, de heteroscedasticidad en las perturbaciones aleatorias del modelo. El supuesto de no autocorrelación implica que el comportamiento de los términos estocásticos puede resumirse de la siguiente manera:

$$\mathbf{w_t} \rightarrow \mathrm{DN_g}\left[0_{\mathbf{g}},\ \mathbf{Diag}\left(\sigma^2_{w_i}\right)\right] \quad [20]$$

donde:

$\mathbf{Diag}\left(\sigma^2_{w_i}\right)$ La matriz de varianzas y covarianzas diagonal de orden g•g de las perturbaciones aleatorias.

La suposición de inexistencia de relaciones cruzadas implica, por otra parte, que las covarianzas entre las variables contenidas en el vector de errores de medición son nulas[31], lo que facilita la transformación del modelo [15], dividiendo las variables entre la desviación típica de la estimación de la beta, llegando al siguiente modelo transformado:

$$\mathbf{r_t}^* = \gamma_t\, \mathbf{1_g}^* + \delta_t\, \mathbf{b_t}^* + \mathbf{w_t}^* \quad [21]$$

donde los términos con asterisco se corresponden con las variables de la expresión [15] transformadas[32], es decir, divididas por la desviación típica de la estimación de la beta correspondiente, lógicamente, a cada título. Simplificando más la ecuación anterior y llevándola a notación convencional queda:

$$\mathbf{r_t}^* = \mathbf{X}^*\ \boldsymbol{\gamma}_\mathbf{t} + \mathbf{w_t}^* \quad [22]$$

donde:

$\mathbf{r_t}^*$ Vector columna que contiene el cociente entre las rentabilidades de los g títulos en el momento de tiempo t y las desviaciones típicas de los estimadores de las betas.

$\mathbf{X}^*$ Matriz que contiene a las variables explicativas formada por dos vectores columna $[\mathbf{1_g}^*; \mathbf{b_t}^*]$.

---

31 Puede verse Litzenberger y Ramaswamy (1979).

32 Téngase en cuenta que el vector de unos asociado al término independiente también debe ser dividido entre dicha desviación típica.

$\mathbf{w_t}^*$ Vector columna que contiene las perturbaciones aleatorias del modelo transformado.

El comportamiento de las perturbaciones aleatorias es ahora:

$$\mathbf{w}_\mathbf{t}^* \rightarrow \mathrm{DN_g}\left[0_\mathbf{g},\ \sigma^2_{w^*}\,\mathbf{I_g}\right] \qquad [23]$$

donde:

$\sigma^2_{w^*}$ Varianza de las perturbaciones aleatorias del modelo [22][33].

El método de estimación propuesto por Litzenberger y Ramaswamy (1979) para el modelo expresado en las ecuaciones [22] y [23], es el de Máxima Verosimilitud (a partir de ahora MV). La expresión del estimador es:

$$\mathbf{g_t} = \left[\frac{\mathbf{X}^{*'}\mathbf{X}^*}{g} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} \frac{\mathbf{X}^{*'}\mathbf{r}_\mathbf{t}^*}{g} \qquad [24][34]$$

[33] En realidad, otra posibilidad que resuelve el problema de la heteroscedasticidad consiste en transformar las variables del modelo [15] dividiéndolas por el riesgo diversificable, ya que, como hemos indicado, es la causa de la diferente variabilidad de las perturbaciones aleatorias. En cualquier caso, al ser la varianza de la estimación de la beta obtenida a partir del Modelo de Mercado proporcional al riesgo diversificable, se consigue, de igual manera, resolver el problema. Esta última posibilidad presenta una ventaja adicional de cara a la estimación posterior del modelo, ya que, mediante dicha transformación, se puede suponer que el vector de errores se comporta normal e idénticamente distribuido, con un vector de ceros por promedio y matriz de varianzas y covarianzas unidad. Efectivamente, ya hemos indicado que bajo la hipótesis supuesta por Litzenberger y Ramaswamy (1979), es decir, ausencia de relaciones cruzadas, las covarianzas entre los errores de medición son nulas. Pero las varianzas del error de cada título serán diferentes, ya que, si recordamos que el riesgo sistemático estimado es suma de la verdadera beta y el error de medición, la varianza del error coincide con la varianza de la estimación de la beta y ésta no es igual para los activos analizados. Así, al dividir la beta estimada para cada título entre la desviación típica de su estimación, se consigue que los errores de medición tengan varianza uno, lo que unido al hecho de que (al ser la beta estimada mediante el Modelo de Mercado un estimador insesgado) tienen promedio cero, e introduciendo la hipótesis de normalidad, constituyen las hipótesis de comportamiento de los errores de medición.

[34] No debe confundirse $\mathbf{g_t}$, es decir, el vector columna que contiene los estimadores del modelo, con g, que coincide con el número de títulos considerados en el contraste de corte transversal.

Por otra parte se puede observar cómo al momento de segundo orden respecto al origen correspondiente a la variable explicativa del modelo transformado se le resta 1, es decir, la varianza del error de medición.

Además, puede obtenerse la matriz de varianzas y covarianzas del vector de estimadores propuesto en [24], como puede verse en Madariaga (1994)[35], donde además se presenta otra solución alternativa basada en el método de MV[36].

En cualquier caso, la solución planteada por Litzenberger y Ramaswamy (1979) no considera la existencia de relaciones cruzadas, lo que en definitiva limita ciertamente la validez del procedimiento. En este sentido, una solución más adecuada es la de Shanken (1982), que aborda la problemática completa del modelo expresado en [16] y [17], y para el que propone el siguiente estimador:

$$\mathbf{g_t} = \left[\mathbf{X}'\mathbf{S}_{\varepsilon\varepsilon}^{-1}\mathbf{X} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_v^2 \end{pmatrix} \right]^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{S}_{\varepsilon\varepsilon}^{-1}\mathbf{r_t} \qquad [25]^{37}$$

donde:

σ_v^2 Varianza del error de medición.

En la aplicación empírica, la estimación de la varianza del error toma el siguiente valor:

$$s_v^2 = \frac{(n-2)\,g}{(n-g-3)\sum_{t=1}^{n}(r_{mt}-\bar{r}_m)^2} \qquad [26]^{38}$$

Puede demostrarse que las propiedades del estimador propuesto son: eficiencia asintótica (cuando el número de periodos tiende a infinito) y consistencia (cuando el número de activos tiende a infinito).

En cualquier caso, existe un problema adicional, ya que las estimaciones del término independiente y coeficiente angular obtenidas para el momento de contraste t carecen de precisión estadística. Ello hizo que Fama y MacBeth (1973) utilizaran un procedimiento interesante,

---

35 El caso general puede encontrarse en Fuller (1987).

36 En concreto (véase, también, Fuller, 1987), se presenta un estimador que se puede demostrar suponiendo fijos los valores de la variable explicativa no observada (verdadera beta). En cualquier caso, debe señalarse que se trata de una solución parcial a los problemas del modelo, al igual que la de Litzenberger y Ramaswamy (1979).

37 La estimación de la matriz de varianzas y covarianzas que aparece en la expresión [25] se obtiene a partir de los resultados obtenidos en la primera etapa del método, es decir, a partir de los residuos de los Modelos de Mercado planteados para estimar las betas. Dicha estimación está corregida por los grados de libertad, o lo que es lo mismo, dividida por n-2.

38 Obsérvese que la estimación de la varianza del error hace referencia a las betas obtenidas a partir del Modelo de Mercado, por ello en la fórmula [26] aparece n, que coincide, precisamente, con la amplitud del periodo de estimación de las mismas (primera etapa de la metodología de corte transversal sin medias); g, que es el número de títulos; y la suma cuadrática de desviaciones respecto al promedio de la rentabilidad de la cartera de mercado en el periodo de estimación.

aplicable a todos los métodos de estimación propuestos, consistente en estimar el modelo [15] para una serie de momentos de tiempo que constituyen el periodo de contraste (t = 1, 2, ..., n). Con ello se obtienen series temporales de términos independientes y coeficientes angulares, a partir de las cuales estiman el promedio de las mismas suponiendo que se comportan normal, independiente e idénticamente distribuidas[39].

Las pruebas que deben realizarse en este caso, si el CAPM es cierto, coinciden con las indicadas en [19], pero, evidentemente, haciendo referencia a los valores promedio. Así, para el periodo de contraste considerado (t = 1, 2, ..., n), el promedio del término independiente debe coincidir con el promedio del tipo sin riesgo y el promedio de coeficientes angulares con el premio por riesgo promedio[40].

Posteriores estudios vinieron a confirmar la posibilidad de obtener estimaciones eficientes de dichos promedios, ya que, aunque la serie sea aleatoria, las estimaciones pueden tener diferente variabilidad, lo que en definitiva implica un problema de heteroscedasticidad. Su consideración obliga a la utilización de Mínimos Cuadrados Ponderados (a partir de ahora MCP[41]) y, si además existiera autocorrelación, sería necesaria la utilización de MCG.

Con ello hemos dado un repaso a las diferentes soluciones adoptadas por diversos autores de cara a la contrastación del CAPM mediante la metodología de corte transversal sin medias. Suele ser norma habitual utilizar todos los métodos propuestos, para comparar los resultados derivados de cada uno de ellos. Así, en nuestro estudio (véase Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez, 1994), se presentan los resultados derivados de cada uno de ellos y se puede apreciar una gran coherencia en cuanto a las pocas diferencias que se derivan de la utilización de los mismos[42].

---

39 En realidad, Fama y MacBeth (1973) comprobaron la aleatoriedad de la serie a partir del cálculo de autocorrelaciones, siendo aceptada.

40 Véase la nota 22 para matizar las condiciones en el caso de que el planteamiento del modelo [15] se haga en excesos, donde el promedio de términos independientes deberá ser igual a cero, coincidiendo el resultado en cuanto al promedio de coeficientes angulares. Por otra parte, resaltar de nuevo las condiciones para que se pueda aceptar la versión de Black (1972) del modelo: el promedio de términos independientes puede tomar cualquier valor y el de los coeficientes angulares debe ser significativo.

41 Esta idea la plantean Litzenberger y Ramaswamy (1979) y consiste, en la versión de MCP, en obtener un promedio de los coeficientes estimados (términos independientes y coeficientes angulares) ponderado, donde los pesos sean inversamente proporcionales a las varianzas de las estimaciones. Obsérvese que, frente a esta solución, Fama y MacBeth (1973) optaron por un promedio equiponderado. La discusión puede centrarse en torno al cálculo de las estimaciones de las varianzas de los estimadores del promedio, tanto del término independiente como de los coeficientes angulares. En este caso, Litzenberger y Ramaswamy (1979) proponen su obtención a partir de las estimaciones de las varianzas de los coeficientes del modelo [15] como combinación lineal. Por otro lado, Fama y MacBeth (1973) lo realizan a partir de las series históricas, mientras que en nuestro trabajo (véase Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez, 1994), además de esta última vía, optamos por calcular dichas estimaciones a partir del método utilizado, es decir, MCP (según si el cálculo del promedio se hacía equiponderado o a partir de MCP).

42 Por supuesto, cuando hablamos de coherencia hacemos referencia a que los diferentes métodos llevan a parecidas conclusiones en cuanto a la aceptación o rechazo del CAPM. Evidentemente, tanto las estimaciones

5. Metodología de corte transversal con medias

La metodología de corte transversal con medias fue utilizada por Miller y Scholes en su trabajo de 1972. De la misma manera que en el contraste presentado en el apartado anterior, el procedimiento requiere de dos etapas:

-Periodo de estimación: A partir de las observaciones del periodo de contraste del modelo, se calculan las estimaciones de las betas de los títulos[43].

-Periodo de contraste: Se plantea una regresión explicando las rentabilidades medias de los títulos mediante el riesgo sistemático en el periodo considerado.

El modelo empírico de corte transversal para el periodo de contraste, planteado en rentabilidades[44] y expresado en forma matricial, es:

$$\bar{\mathbf{r}} = \gamma\ \mathbf{1_g} + \delta\ \mathbf{b} + \mathbf{w} \qquad [27]$$

donde:

$\bar{\mathbf{r}}$ Vector columna que contiene los promedios de rentabilidad de los g títulos a lo largo del periodo de tiempo considerado.

γ Término independiente de la relación establecida en el modelo empírico.

δ Pendiente de la relación establecida en el modelo empírico.

$\mathbf{b}$ Vector columna que contiene las estimaciones de las betas de los g títulos a lo largo del periodo de tiempo considerado.

$\mathbf{w}$ Vector que contiene las perturbaciones aleatorias de los g títulos del modelo empírico.

---

puntuales como las desviaciones típicas de los estimadores del término independiente y premio por riesgo del modelo [15] son diferentes en cada caso.

[43] Aquí tenemos una primera diferencia respecto de la metodología de corte transversal sin medias. En esta ocasión, las betas se estiman a partir de la información del periodo en el que se contrasta el CAPM, mientras que en el caso anterior las estimaciones se basaban en datos previos.

[44] También puede realizarse el planteamiento en excesos sobre el tipo sin riesgo. Posteriormente señalaremos las diferencias de cara a la contrastación del CAPM.

Como se puede apreciar, el modelo [27] introduce como variable explicativa las estimaciones de las betas obtenidas a partir del periodo de contraste del modelo. Ello, además de obligar a considerar la hipótesis de expectativas de riesgo constantes si se utiliza el Modelo de Mercado, introduce, nuevamente, un problema de regresores estocásticos por errores de observación en la variable explicativa **b**, que, además, se encuentra relacionada con las perturbaciones aleatorias del modelo **w**[45].

Expresando [27] en forma convencional, tenemos que:

$$\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{X}\,\gamma + \mathbf{w} \qquad [28]$$

donde:

- **X** Matriz que contiene a las variables explicativas formada por dos vectores columna $[\mathbf{1_g}; \mathbf{b}]$.
- γ Vector columna que contiene los parámetros γ y δ.

La correcta definición estadística del modelo exige, además, la especificación de las hipótesis de comportamiento de los términos aleatorios del modelo [27][46]. En cuanto a las perturbaciones aleatorias tenemos que:

$$\mathbf{w} \rightarrow DN_g\left[0_{\mathbf{g}},\ \Sigma_{\mathbf{ww}}\right] \qquad [29]$$

donde:

- $\Sigma_{\mathbf{ww}}$ La matriz g•g de varianzas y covarianzas contemporáneas de las perturbaciones aleatorias, donde el elemento general de la misma es σ_{ij}. Es cuadrada, simétrica y definida positiva.

De nuevo nos encontramos con una matriz de varianzas y covarianzas no escalar, debido a la presencia de perturbaciones heteroscedásticas y autocorrelacionadas, justificables por las mismas razones que en el apartado anterior[47].

---

[45] Nos remitimos al planteamiento del modelo empírico de corte transversal sin medias analizado en el apartado anterior, donde se estudiaron las características fundamentales de las perturbaciones aleatorias, que, prácticamente, pueden extenderse al modelo que nos ocupa. Nos centraremos en esta ocasión en las características diferenciales del contraste que ahora se analiza.

[46] Además, por supuesto, de las habituales hipótesis estructurales de linealidad y estructura única.

[47] Recordemos que la heteroscedasticidad constituye un problema inevitable debido al diferente riesgo específico de los títulos, mientras que la autocorrelación está supeditada a la existencia de relaciones cruzadas entre los mismos.

Por otro lado, la variable explicativa y las perturbaciones aleatorias no son independientes, lo que equivale a señalar que la matriz de covarianzas entre ambos vectores de variables es distinta de la matriz de ceros (puede verse la expresión [18]).

Si el CAPM es cierto, en el modelo [27] debe suceder que:

$$\gamma = \bar{r}_0 \qquad \delta\ (\bar{r}_m - \bar{r}_0) \qquad [30]^{48}$$

Los modelos de corte transversal, tanto el analizado en este apartado como el estudiado en el anterior, tienen una característica especial que, en el caso que nos ocupa, se torna en dificultad adicional de cara a la estimación del mismo. Efectivamente, se puede demostrar que las pendientes teóricas resultan ser aleatorias, ya que dependen de la rentabilidad de la cartera de mercado r_m[49] en el momento t, para el caso del modelo analizado en el apartado anterior, y del promedio de rentabilidad de dicha cartera, en el caso del modelo [27]. Esa nueva fuente de aleatoriedad debe ser tenida en cuenta en la varianza del estimador del premio, considerando la variabilidad de la rentabilidad del mercado a lo largo del periodo de contraste analizado. En cualquier caso, la metodología descrita en el apartado anterior resuelve implícitamente la cuestión, ya que, una vez estimados los coeficientes del modelo [15] para cada momento t, se obtiene, como ya indicamos, una estimación conjunta para el periodo de contraste del CAPM. Así, si el procedimiento de cálculo de la varianza del estimador para el periodo en su conjunto se realiza, bien al estilo de Fama y MacBeth (1973), es decir, a partir de las series históricas de estimadores para cada momento t, o bien a partir del método de MCP señalado en el apartado anterior (que también tiene en cuenta la serie histórica, aunque con las correspondientes ponderaciones), el efecto de la rentabilidad del mercado recogida en cada estimación de t y, por tanto, el efecto de la variabilidad del mercado, ya es considerado al calcular la varianza del estimador conjunto[50]. Esta cuestión es conocida en la literatura financiera como problema de los coeficientes aleatorios y fue señalado por Black, Jensen y Scholes (1972). En cualquier caso, las consecuencias del problema son especialmente importantes en la metodología de contraste que nos ocupa, como señalaremos a continuación[51].

---

[48] En el caso de realizarse el planteamiento del modelo empírico [27] en excesos sobre el tipo sin riesgo, el término independiente debe anularse y se mantiene la condición sobre el coeficiente angular, es decir, debe coincidir con el premio por riesgo promedio del periodo de contraste. En cualquier caso, debe recordarse de nuevo que la utilización de una aproximación a la verdadera cartera de mercado hace que dichas condiciones no tengan por qué cumplirse. Así, se puede comprobar la existencia de un premio por riesgo significativo, aceptando cualquier valor para el término independiente, lo que equivale a aceptar la versión de Black (1972) del CAPM.

[49] Que puede obtenerse, como ya hemos comentado, a partir de las rentabilidades de los títulos utilizados en la contrastación del modelo, o de un índice.

[50] Obsérvese que el cálculo de la varianza del estimador conjunto como combinación lineal de las varianzas de los estimadores para cada momento t no resuelve el problema.

[51] Otra forma de entender el problema de los coeficientes aleatorios es observando que el CAPM, como puede verse en la expresión [1], plantea una restricción sobre las esperanzas de las rentabilidades. En cambio, el análisis empírico obliga a utilizar una aproximación a la rentabilidad de mercado r_m que es aleatoria, por lo que los resultados quedan condicionados a dichos valores. Ello obliga a considerar la restricción equivalente a [1] sobre los rendimientos esperados condicionales y este proceso lleva a que las pendientes de los modelos empíricos de corte transversal resulten aleatorias, al ser función de la rentabilidad del mercado.

Desde el trabajo de Miller y Scholes (1972) han sido bastantes las soluciones ofrecidas de cara a la estimación y, en definitiva, contrastación del CAPM. En primer lugar, los métodos habituales de estimación de [27], como son MCO y MCG, no ofrecen estimadores que garantizan las propiedades adecuadas. Es interesante señalar que, en este caso, ni siquiera suponiendo que las betas sean estimadas con poco error (algo que, como hemos señalado con anterioridad, no garantiza el Modelo de Mercado que, por otra parte, es el método habitual de cara a obtener el riesgo sistemático de los títulos), MCG garantiza que los estimadores de [27] consideren todos los problemas, ya que, además, debería tenerse en cuenta el efecto de los coeficientes aleatorios[52].

Otras posibilidades, como MV, en una versión similar a la planteada por Litzenberger y Ramaswamy (1979)[53], también fue utilizada por Bergés (1984), aunque no se puede negar la existencia de problemas. Idéntica base y dificultad[54] tienen las planteadas por Madariaga (1994), cuyos resultados pueden verse en Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez (1994).

Una alternativa que posibilita la realización del contraste teniendo en cuenta el problema de los errores de estimación en las betas y el de los coeficientes aleatorios (además de heteroscedasticidad y autocorrelación), garantizando la propiedad de consistencia en n, consiste en utilizar el estimador MCG y calcular la estimación de la matriz de varianzas y covarianzas a partir de una expresión corregida (véase Shanken, 1992).

Así, los estimadores de los parámetros por el método de MCG[55] para el modelo [28] son:

$$\mathbf{g} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{S}_{\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\left(\mathbf{X}'\mathbf{S}_{\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}}^{-1}\bar{\mathbf{r}}\right); \text{ siendo } \mathbf{S}_{\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{n}\mathbf{S}_{\varepsilon\varepsilon} \qquad [31]$$

donde:

$\mathbf{S}_{\varepsilon\varepsilon}$ La estimación de la matriz g•g de varianzas y covarianzas contemporáneas de las perturbaciones aleatorias corregidas por los grados de libertad, donde el elemento general de la misma es s_{ij}, y que es calculada a partir de los residuos obtenidos mediante los Modelos de Mercado estimados en la primera etapa o periodo de estimación. Es cuadrada, simétrica y definida positiva. En cualquier caso, obsérvese cómo en la expresión [31] aparece la matriz de varianzas y covarianzas de

52 Debe tenerse presente que los programas de ordenador utilizan las fórmulas habituales que pueden encontrarse en Johnston (1984) y éstas requerirían de la inclusión de un factor corrector que afectase a la variabilidad de la estimación de la pendiente por efecto de la varianza del mercado.

53 Que aborda los problemas de errores en las variables y heteroscedasticidad de las perturbaciones aleatorias, bajo el supuesto de inexistencia de relaciones cruzadas.

54 Son soluciones parciales a los problemas del modelo, ya que no consideran la existencia de relacionescruzadas entre las perturbaciones aleatorias y, además, no abordan la problemática introducida por los coeficientes aleatorios.

55 Puede verse Johnston (1984).

los residuos medios, ya que el modelo empírico está expresado en promedios para un periodo considerado.

La matriz de varianzas y covarianzas de los estimadores [31] viene dada por:

$$\mathbf{S}_{\mathbf{gg}} = \frac{1}{n}\left(\mathbf{X}'\mathbf{S}_{\varepsilon\varepsilon}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\left(1 + \frac{d^2}{s_m^2}\right) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{s_m^2}{n} \qquad [32]$$

donde:

d Estimación del premio por riesgo obtenida mediante la aplicación de la expresión [31].

s_m^2 Estimador consistente de la varianza de la rentabilidad de la cartera de mercado.

Concretamente, en la expresión [32] el cociente entre el cuadrado del premio estimado y la varianza de la rentabilidad del mercado aparece debido a los errores de estimación en las betas y, a la varianza del coeficiente angular, se le suma el efecto de la variabilidad media del mercado para considerar el problema de los coeficientes aleatorios[56].

Una interesante posibilidad consiste en el planteamiento de un test multivariante en el contexto de los contrastes de corte transversal que comentaremos brevemente. La idea del mismo se basa en que, si el CAPM es cierto, los residuos derivados de la estimación del modelo [28], mediante la aplicación del estimador de Shanken (1982) expresado en [25], deben ser cero[57]. Evidentemente, los resultados obtenidos a partir de una muestra concreta no tienen por qué anularse, por lo que se debe comprobar si son, efectivamente, pequeños. Ello se realiza creando una variable a partir del vector de residuos, la suma de cuadrados residual, y planteando como hipótesis nula la igualdad de la misma a cero.

---

[56] Se puede apreciar claramente cómo, no tener en cuenta los problemas, exagera la significación de los coeficientes, ya que la precisión de la estimación parece mayor si no se suman los términos correspondientes.

[57] Ello sería indicio de que la relación entre rentabilidad y riesgo es lineal y además la beta es la única medida del riesgo. Estas condiciones han sido comprobadas profusamente en la literatura financiera, así Fama y MacBeth (1973) lo comprueban mediante la introducción de otras variables explicativas en el modelo empírico: riesgo sistemático elevado al cuadrado (para comprobar la linealidad del modelo) y riesgo específico (para testar la existencia de un único riesgo beta retribuido por el mercado). En el caso español, Santibáñez (1994) realiza un análisis similar, cuyos resultados fundamentales pueden encontrarse en Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez (1994). La principal ventaja del contexto multivariante consiste en que no resulta necesario especificar ninguna hipótesis alternativa para contrastar el CAPM, con lo que supera los contrastes clásicos señalados anteriormente. Téngase en cuenta que los trabajos clásicos únicamente prueban algunas variables adicionales, y lo mismo sucede con otros más modernos que, en el contexto de los denominados modelos multifactoriales, tratan de comprobar la influencia de variables fundamentales en las rentabilidades de los títulos. En este sentido son interesantes los trabajos de Chan, Hamao y Lakonishok (1991), Fama y French (1992, 1993a y 1993b) y Kothari, Shanken y Sloan (1992), así como nuestro trabajo, cuyo resumen puede encontrarse en Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez (1994).

El estadístico utilizado para la realización del contraste, sugerido por Shanken (1985), es:

$$Q = \frac{n\ \mathbf{e}'\ \mathbf{S}_{\varepsilon\varepsilon}^{-1}\ \mathbf{e}}{\left(1 + \frac{d^2}{s_m^2}\right)} \qquad [33]$$

donde:

- n Número de momentos considerados para el contraste del modelo.
- **e** Vector columna de residuos del modelo de corte transversal con medias.
- $\mathbf{S}_{\varepsilon\varepsilon}$ Estimación de la matriz de varianzas y covarianzas de las perturbaciones aleatorias corregida por los grados de libertad y calculada a partir de los residuos obtenidos mediante los Modelos de Mercado estimados en la primera etapa, o periodo de estimación.
- d Estimador consistente del premio por riesgo. Se calcula, como ya hemos indicado, utilizando el propuesto por Shanken (1982) aplicado al contraste de corte transversal con medias (véase la expresión [25]). Para su cálculo debe tenerse en cuenta las especificidades de la metodología que nos ocupa, es decir, coincidencia de los periodos de estimación y de contraste del modelo que, además, se realiza en base a los promedios de rentabilidad de los activos. Por ello, en [25] debe sustituirse el vector de rentabilidades por el vector de los promedios para el periodo considerado.

Shanken (1985) muestra que el estadístico Q sigue aproximadamente la T de Hotelling [T^2(g-2, n-2)][58]. Por otra parte, si no se considera el ajuste por los errores de estimación en las betas que aparece en el denominador, el estadístico sigue la T de Hotelling acotada por arriba por T^2(g-2, n-2), de tal manera que, si realizada la prueba se rechaza la hipótesis nula, la conclusión no puede ser considerada como resultado para muestras pequeñas.

Para realizar la prueba hay que tener en cuenta la relación existente entre la T de Hotelling y la F de Fisher, que expresada para nuestro caso es:

$$F = \frac{Q(n\text{-}g\text{+}1)}{(g\text{-}2)(n\text{-}2)}; \quad F(g\text{-}2;\ n\text{-}g\text{+}1) \qquad [34]$$

Así, la prueba se realiza mediante la relación expresada en [34] y puede demostrarse que si se acepta la hipótesis nula el resultado obtenido es exacto. En caso contrario, es posible obtener una cota por abajo a la distribución exacta de Q, que ayuda a realizar las inferencias en el caso de muestras pequeñas (véase Shanken, 1986). Esta cota inferior hace que se pueda rechazar la hipótesis nula sin necesidad de apelar a procedimientos asintóticos.

---

[58] El ajuste que aparece en el denominador del cociente [33] es debido a los errores de estimación en las betas.

La cota por abajo, que se basa en estimaciones del término independiente y coeficiente angular por el método de MV[59], es:

$$Q^* = \frac{n\,\mathbf{e}'\,\mathbf{S}_{\varepsilon\varepsilon}^{-1}\,\mathbf{e}}{\left(1 + \frac{d_{MV}^2}{s_m^2}\right)}; \quad d_{MV} = \bar{r}_m - g_{MV} \qquad [35]$$

donde:

g_{MV} Estimador MV del término independiente.

d_{MV} Estimador MV del coeficiente angular.

La prueba se puede realizar teniendo en cuenta que en términos de F:

$$F = \frac{Q^*\,(n\text{-}g\text{-}1)}{(g)\,(n\text{-}2)}; \quad F(g;\, n\text{-}g\text{-}1) \qquad [36]^{60}$$

Bibliografía

BERGES, A. (1984): *El mercado español de capitales en un contexto internacional,* Ministerio de Economía y Hacienda, Madrid.

BLACK, F. (1972): “Capital market equilibrium with restricted borrowing”, *Journal of business*, Julio, págs. 444-455.

BLACK, F., M.C. JENSEN and M. SCHOLES (1972): “The capital asset pricing model: some empirical tests”, en Jensen, ed., *Studies in the theory of capital markets*, Praeger, Nueva York, págs. 79-121.

BLUME, M.E. (1971): “On the assessment of risk”, *Journal of finance*, Marzo, págs. 1-10.

BLUME, M.E. and I. FRIEND (1973): “A new look at the capital asset pricing model”, *Journal of finance*, Marzo, págs. 19-33.

---

59 Para ello, se obtiene en primer lugar una estimación del término independiente, partiendo de una regresión por MCG en la que se cruza la ordenada en el origen estimada en el Modelo de Mercado en función de uno menos la beta estimada. El estimador del premio se obtendrá como diferencia entre el promedio de rentabilidad del mercado y la estimación del término independiente obtenida. A partir de estos resultados se obtienen las estimaciones máximo verosímiles resolviendo una función cuadrática (véase Shanken, 1986).

60 Los grados de libertad no coinciden, puesto que resulta más sencillo trabajar con la especificación de Black, Jensen y Scholes (1972), como ya hemos indicado en la nota anterior (véase Shanken, 1986).

CHAN, L.K.C., Y. HAMAO and J. LAKONISHOK (1991): "Fundamentals and stock returns in Japan", *Journal of finance*, Diciembre, págs. 1739-1764.

COPELAND, T.E. and J.F. WESTON (1988): *Financial theory and corporate policy*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 3ª ed.

FAMA, E.F. (1976): *Foundations of finance*, Basic Books, Nueva York.

FAMA, E.F. and K.R. FRENCH (1992): "The cross-section of expected stock returns", *Journal of finance*, Junio, págs. 427-465.

FAMA, E.F. and K.R. FRENCH (1993a): "Common risk factors in the returns on stocks and bonds", *Journal of financial economics*, 33, Febrero, págs. 3-56.

FAMA, E.F. and K.R. FRENCH (1993b): *Size and book-to-market factors in earnings and returns*, Working paper, Center for research in security prices, Septiembre, Universidad de Chicago.

FAMA, E.F. and J.D. MacBETH (1973): "Risk, return and equilibrium: empirical tests", *Journal of political economy*, Mayo-Junio, págs. 607-636.

FULLER, W.A. (1987): *Measurement error models*, John Wiley & Sons, Nueva York.

GIBBONS, M.R. (1982): "Multivariate tests of financial models: a new approach", *Journal of financial economics*, 10, págs. 3-27.

GIBBONS, M.R., S.A. ROSS and J. SHANKEN (1989): "A test of the efficiency of a given porfolio", *Econometrica*, 57, págs. 1121-1152.

GOMEZ-BEZARES, F. (1991): *Dirección financiera (teoría y aplicaciones)*, Desclée de Brouwer, Bilbao, 2ª ed.

GOMEZ-BEZARES, F. (1993): *Gestión de carteras*, Desclée de Brouwer, Bilbao.

GOMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBAÑEZ (1994): *Valoración de acciones en la bolsa española (un análisis de la relación entre la rentabilidad y el riesgo)*, Desclée de Brouwer, Bilbao.

JOHNSTON, J. (1984): *Econometric methods*, McGraw Hill, Singapur, 3ª ed.

KOTHARI, S.P., J. SHANKEN and R.G. SLOAN (1992): *Another look at the cross-section of expected stock returns*, Working paper, Bradley policy research center, Diciembre, Universidad de Rochester, New York.

LINTNER, J. (1965): "The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets", *Review of economics and statistics*, Febrero, págs. 13-37.

LITZENBERGER, R.H. and K. RAMASWAMY (1979): "The effect of personal taxes and dividends on capital asset prices: theory and empirical evidence", *Journal of financial economics*, Junio, págs. 163-195.

LO, A.W. and A.C. MacKINLAY (1990): “Data-snooping biases in tests of financial asset pricing models”, *Review of financial studies*, 3, págs. 431-467.

MacKINLAY, A.C. and M.P. RICHARDSON (1991): “Using Generalized Method of Moments to test Mean-Variance Efficiency”, *Journal of finance*, Junio, págs. 511-527.

MADARIAGA, J.A. (1994): *Rentabilidad y riesgo de las acciones en el mercado continuo español*, Tesis doctoral, Universidad Comercial de Deusto, Bilbao.

MILLER, M.H. and M. SCHOLES (1972): “Rates of return in relation to risk: a re-examination of some recent findings”, en Jensen, ed., *Studies in the theory of capital markets*, Praeger, Nueva York, págs. 47-78.

MOSSIN, J. (1966): “Equilibrium in a capital asset market”, *Econometrica*, Octubre, págs. 768-783.

NOVALES, A. (1993): *Econometría*, McGraw-Hill, Madrid, 2ª ed.

ROLL, R. (1977): “A critique of the asset pricing theory’s tests”, *Journal of financial economics*, Marzo, págs. 129-176.

ROLL, R. and S.A. ROSS (1994): “On the cross-sectional relation between expected returns and betas”, *Journal of finance*, Marzo, págs. 101-121.

RUBIO, G. (1988): “Further international evidence on asset pricing. The case of the spanish capital market”, *Journal of banking and finance*, 12, págs. 221-242.

SANTIBAÑEZ, J. (1994): *Valoración de acciones en la bolsa española (1959-1988)*, Tesis doctoral, Universidad Comercial de Deusto, Bilbao.

SHANKEN, J. (1982): *An analysis of the traditional risk-return model*, Unpublished doctoral dissertation, Graduate School of Business, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, PA.

SHANKEN, J. (1985): “Multivariate tests of the zero-beta CAPM”, *Journal of financial economics*, 14, págs. 327-348.

SHANKEN, J. (1986): “Testing portfolio efficiency when the zero-beta rate is unknown: A note”, *Journal of finance*, Marzo, págs. 269-276.

SHANKEN, J. (1992): “On the estimation of beta-pricing models”, *The review of financial studies*, 5, págs. 1-33.

SHARPE, W.F. (1963): “A simplified model for portfolio analysis”, *Management science*, Enero, págs. 277-293.

SHARPE, W.F. (1964): “Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk”, *Journal of finance*, Septiembre, págs. 425-442.

STAMBAUGH, R.F. (1982): “On the exclusion of assets from tests of the two-parameter model: a sensitivity analysis”, *Journal of financial economics*, Noviembre, págs. 237-268.