APLICACION PRACTICA DE LA TEORIA DE CARTERA

Trabajo inédito preparado por Miguel Angel Larrínaga Ojanguren,
Universidad Comercial de Deusto

INTRODUCCION

La teoría de cartera es un modelo general para el estudio de la inversión en condiciones de riesgo, basado en que la decisión sobre cuál es la cartera de inversiones óptima se fundamenta en el estudio de la media y la variabilidad de los diferentes títulos existentes en el mercado.

A continuación vamos a suponer que en el mercado existen 5 títulos con riesgo y un título sin riesgo, de modo que las carteras estarán compuestas de combinaciones de los diferentes títulos, con o sin riesgo.

A efectos prácticos hemos escogido como títulos con riesgo los 5 que a continuación - y sin ánimo de darles un mayor interés sobre otros títulos - referenciamos:

- Banco Popular (Título 1)
- Iberduero (Título 2)
- Sarrio, Papelera de Leiza (Título 3)
- Dragados y Construcciones (Título 4)
- Papelera Española (Título 5)

Para aplicar esta teoría de cartera, hemos dicho que necesitamos conocer los valores de las medias y desviaciones de las rentabilidades de los mismos. Para ello hemos calculado las rentabilidades anuales a lo largo de 20 años (1968-1988) a partir de los datos obtenidos de la Agenda Financiera publicada por el Servicio de Estudios del Banco de Bilbao y referidos a la Bolsa de Madrid.

Las fórmulas y gráficos que a continuación se expresan no son más que el reflejo práctico de la exposición teórica que sobre la Teoría de la Cartera puede encontrarse en el libro de Fernando Gómez-Bezares, “Dirección Financiera (Teoría y Aplicaciones)”, Editorial Desclée de Brouwer, Bilbao, 1991, 2º ed., en su capitulo IV y en el apéndice IV-D sobre “la forma de la frontera”. Para diferenciar esta doble referencia, anotaremos (1) cuando se refiere al capitulo IV y notaremos como (1A) cuando la expresión o el gráfico hagan referencia al apéndice mencionado. También puede verse el libro del mismo autor “Gestión de Carteras”, Editorial Desclée de Brouwer, Bilbao, 1993, capítulo 3.

PROBLEMA BASICO SIN TITULO SIN RIESGO

El problema básico es el más sencillo. En este caso podemos emitir los títulos, y por tanto no hay ningún tipo de restricción en forma de desigualdad.

Tenemos el vector de rentabilidades, proporciones y matriz de varianzas y covarianzas:

$$R' = (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5) \qquad (4.1) \quad (1\ A)$$

$$E(R') = (E(r_1), E(r_2), E(r_3), E(r_4), E(r_5)) = \\ = (27{,}866 \quad 18{,}855 \quad 46{,}647 \quad 32{,}181 \quad 15{,}371)$$

$$W' = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) \qquad (4.2) \quad (2\ A)$$

y la matriz $\sum$ de varianzas y covarianzas

$$\sum = \begin{array}{ccccc} 3116 & 984 & 4569 & 2536 & 895 \\ 984 & 1244 & 2876 & 982 & 523 \\ 4569 & 2876 & 11206 & 4806 & 1333 \\ 2536 & 982 & 4806 & 3044 & 733 \\ 895 & 523 & 1333 & 733 & 625 \end{array}$$

Así, vamos a hallar la frontera de mínima varianza para estos títulos aplicando las fórmulas (4.14), (4.15), (4.16), que no son otras que las que aparecen en el Apéndice IV-D como (3), (4) y (5). Recordemos que resolvemos un problema en el que minimizamos la varianza de la cartera, sujeta a un valor dado de promedio de la misma (E^*). Lógicamente, la suma de las proporciones invertidas en cada título debe dar la unidad.

Para ello incluimos aquí algunos valores, por si el lector desea comprobar algún resultado:

A = 0,03428
B = 0,59514
C = 0,00257
D = 0,00035

$$\sum^{-1} = \begin{matrix} 0{,}00148 & 0{,}00077 & -0{,}0005 & -0{,}0005 & -0{,}0013 \\ 0{,}00077 & 0{,}00344 & -0{,}0013 & 0{,}00079 & -0{,}0022 \\ -0{,}0005 & -0{,}0013 & 0{,}00078 & -0{,}0006 & 0{,}0008 \\ -0{,}0005 & 0{,}00079 & -0{,}0006 & 0{,}00158 & -0{,}0005 \\ -0{,}0013 & -0{,}0022 & 0{,}0008 & -0{,}0005 & 0{,}00412 \end{matrix}$$

De esta forma podemos despejar los valores de los multiplicadores de Lagrange λ_1, λ_2

$$\lambda_1 = 14{,}685 \text{ E(P)} — 195{,}885 \qquad (15 \text{ A})$$
$$\lambda_2 = 3400{,}8 — 195{,}885 \text{ E(P)} \qquad (16 \text{ A})$$

De este modo podemos representar las expresiones que recogen la frontera en el mapa de esperanzas y varianzas (19 A) y en el mapa de esperanzas y desviaciones (20 A)

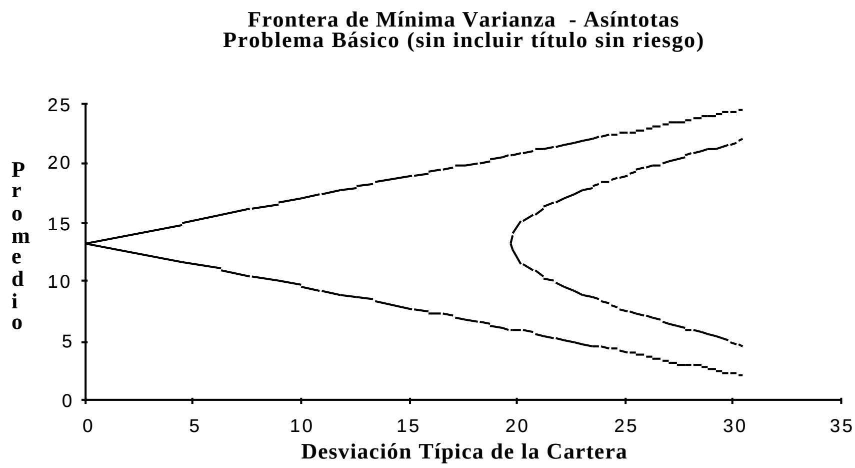
$$[\text{DES (P)}]^2 = 7{,}2733 \text{ E(P)}^2 — 194{,}212 \text{ E(P)} + 1685{,}95 \qquad (19 \text{ A})$$

$$0{,}00257 \text{ E(P)}^2 – 0{,}06856 \text{ E(P)} + (0{,}59514 – (0{,}00035 * [\text{DES (P)}]^2)) = 0 \qquad (20 \text{ A})$$

Y antes de dibujar la frontera, vamos a indicar las ecuaciones de las asíntotas:

$$\text{E(P)} = 13{,}351 \pm 0{,}3708 * \text{DES(P)} \qquad (32 \text{ A})$$

En el gráfico siguiente recogemos la Frontera de Mínima Varianza que hace referencia a la figura 1 del apéndice IV-D.

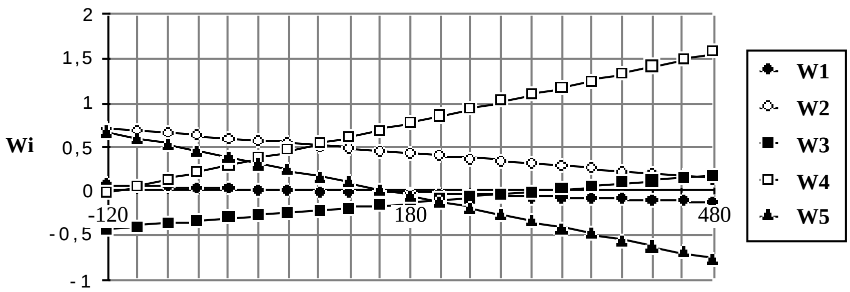


Una vez obtenida la frontera, podemos llegar a obtener la figura 5.1 del capítulo IV en donde recogemos cómo varía la composición de la cartera a medida que varían los valores de los multiplicadores de Lagrange, dando respuesta a las ecuaciones planteadas con los números (5.1) y siguientes del capitulo IV.

$$w_1 = -0{,}00032\ \lambda_1 + 0{,}03023$$
$$w_2 = -0{,}00095\ \lambda_1 + 0{,}59722$$
$$w_3 = 0{,}001007\ \lambda_1 - 0{,}3045$$
$$w_4 = 0{,}002648\ \lambda_1 + 0{,}30111$$
$$w_5 = -0{,}00239\ \lambda_1 + 0{,}37694$$

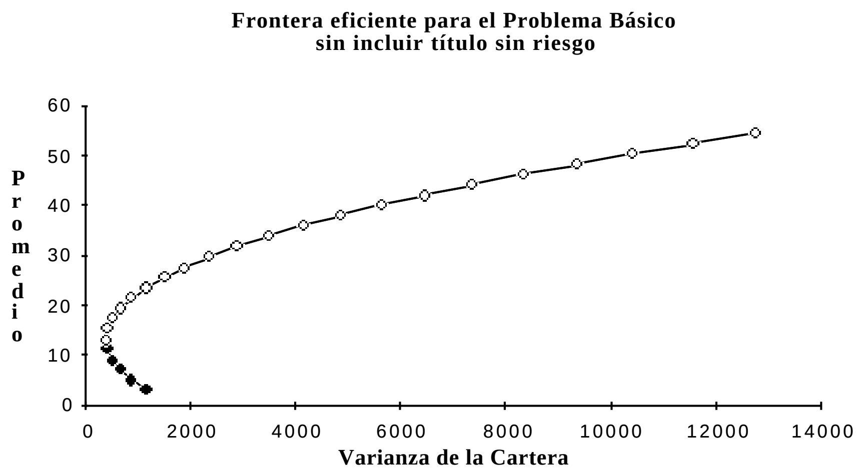
Así el gráfico 5.1 de dicho capítulo IV queda como sigue:

Proporciones de títulos para el Problema Básico sin incluir título sin riesgo

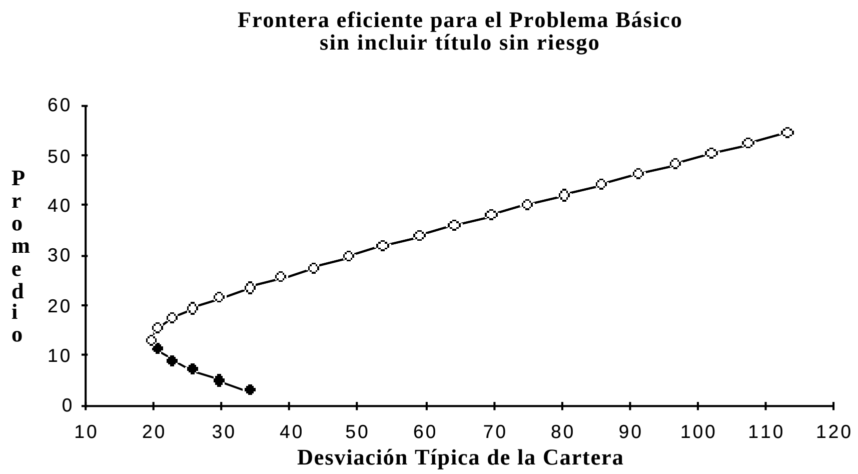


Valores de Lambda o multiplicador de lagrange referido a la restricción de cierto promedio de la cartera E(P)

Terminamos este apartado aproximándonos a la obtención de la frontera eficiente, que sabemos es la parte de la frontera de mínima varianza que se corresponde con valores positivos de λ_1 . Expresamos el gráfico 4.1 del capítulo IV. Así, la frontera eficiente está representada por el tramo de curva que une puntos blancos. De este modo, podemos comprobar cómo, efectivamente, la frontera eficiente es el subconjunto de puntos de la frontera de mínima varianza en los que se cumple que para una esperanza dada la varianza es mínima, y que para una varianza dada, la esperanza es máxima. Dibujamos la frontera eficiente tanto en el mapa de esperanzas y varianzas como en el mapa de esperanzas y desviaciones.



Vemos que en el mapa de promedios y varianzas, la frontera de mínima varianza tiene una forma de parábola, mientras que en el mapa de promedios y desviaciones tenemos una forma de hipérbola.



PROBLEMA BASICO CON TITULO SIN RIESGO

En este caso introducimos el título sin riesgo, que suponemos tiene una rentabilidad del 13%. No lo referenciamos a ningún título en concreto.

Para ello incluimos aquí el valor de algunas variables y matrices, por si el lector desea comprobar algún resultado. Recordemos que en este caso la matriz de varianzas y covarianzas $\sum$ es una matriz singular y no tiene inversa, por lo que debíamos sortear este problema de otro modo. Así se indica en las fórmulas (35),(36) del apéndice IV-D. Así, los valores de los diferentes escalares se mantienen los mismos, con lo que se simplifica la obtención de los resultados, a partir de lo obtenido en el apartado anterior.

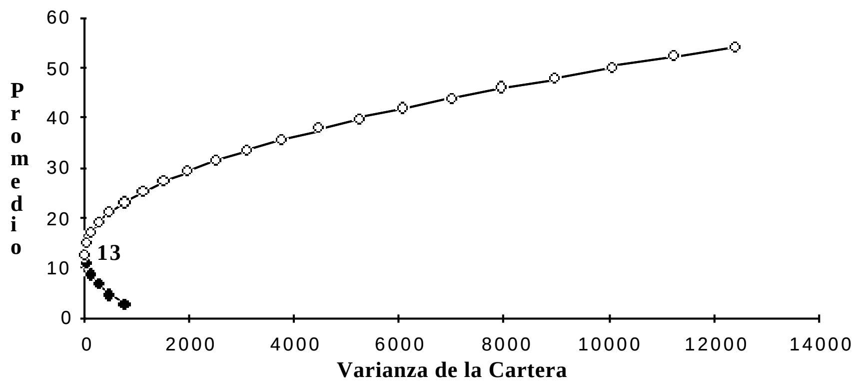
A = 0,03428
B = 0,59514
C = 0,00257
D = 0,00035

De este modo podemos representar las expresiones que recogen la frontera en el mapa de esperanzas y varianzas (42 A) y en el mapa de esperanzas y desviaciones (44 A)

$$VAR(P) = (E(P) — 13)^2 / 0{,}13781 \qquad (42\ A)$$
$$E(P) = 13 \pm DES(P) \sqrt{(0{,}59514 – 2 * 0{,}03428 * 13 + 0{,}00257 * 13^2)} \qquad (44\ A)$$

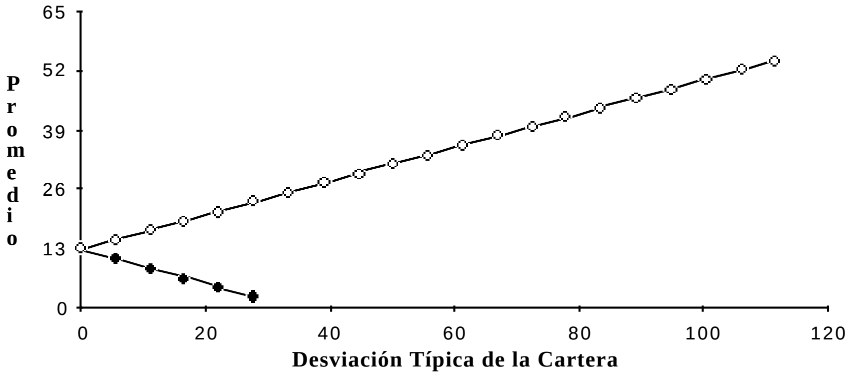
En los siguientes gráficos recogemos la expresión de la frontera de mínima varianza, señalando en puntos blancos el subconjunto de puntos de la frontera eficiente. Compruébese la diferencia con los gráficos obtenidos en el problema básico sin incluir el título sin riesgo:

Frontera Eficiente para el Problema Básico con título sin riesgo



Comprobemos cómo realmente la frontera eficiente en el mapa de promedios y desviaciones es una recta. Teóricamente se recoge en la figura 2 del apéndice IV-D.

Frontera Eficiente para el Problema Básico con título sin riesgo

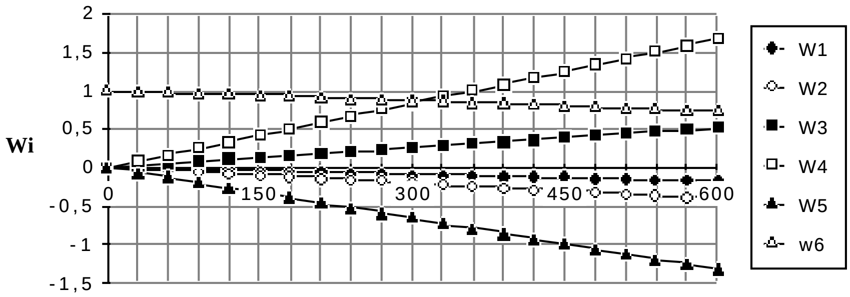


Una vez obtenida la frontera podemos reflejar numéricamente la figura 5.2 del capítulo IV, en la que plasmamos cómo varía la composición de la cartera a medida que cambia el valor del multiplicador de Lagrange λ_1 . Esta relación (indicada en la exposición teórica como ecuación (46 A) del apéndice IV-D) la exponemos a continuación:

$$w_1 = -0{,}0003\ \lambda_1$$
$$w_2 = -0{,}00068\ \lambda_1$$
$$w_3 = 0{,}00087\ \lambda_1$$
$$w_4 = 0{,}002783\ \lambda_1$$
$$w_5 = -0{,}00222\ \lambda_1$$
$$w_6 = -0{,}00045\ \lambda_1 + 1$$

Fijémonos ahora en que los vectores de proporciones W forman un espacio unidimensional. Es el teorema de separación: al existir un título sin riesgo, en la frontera, todos los vectores de proporciones (que en el fondo representan carteras) tendrán las mismas proporciones de títulos, variando sólo la proporción entre éstos y el título sin riesgo. Así, para un valor de $\lambda_1 = 0$, todo se invierte en título sin riesgo.

Proporciones de Títulos para el Problema Básico con título sin riesgo



Valores de Lambda o multiplicador de Lagrange referido a la restricción de promedio de la cartera

PROBLEMA ESTANDAR SIN TITULO SIN RIESGO

En este caso, vamos a introducir la restricción adicional de que NO SE PUEDEN EMITIR TITULOS. Es decir, que aparecen unas restricciones en desigualdad del tipo siguiente:

$$0 \le w_i \le \infty \qquad (5.9)$$

En este caso, el gráfico de variación de la composición de la cartera no ofrece linealidad total con los valores del multiplicador, sino que aparecen tramos lineales entre diferentes valores de dicho multiplicador. Son los puntos singulares.

Dentro de cada intervalo nos encontramos con subproblemas básicos donde el problema se plantea exclusivamente con restricciones de igualdad. Por ello, podemos resolver el problema globalmente, o más cómodamente, resolver dichos subproblemas básicos dentro de cada intervalo. La solución es exactamente la misma. Los valores de los multiplicadores de Lagrange permanecen iguales, puesto que se mantiene la lógica de su valor: ese multiplicador nos refleja el impacto que tiene en la varianza de la cartera una variación de nuestras exigencias sobre el promedio de dicha cartera.

Así tenemos las ecuaciones que recogen la relación entre λ_1 y w_i, que como vemos son lineales por tramos:

$$-58{,}108961 \le \lambda_1 \le 19{,}7008604$$

$$\mathbf{W_2} = 0{,}1231195329 + 0{,}0021187812\,\lambda_1$$
$$\mathbf{W_5} = 0{,}8768804671 - 0{,}0021187812\,\lambda_1$$

$19{,}7008604 \leq \lambda_1 \leq 215{,}761512$

$\mathbf{W_2} = 0{,}1544400506 + 0{,}00052898562\ \lambda_1$
$\mathbf{W_4} = -\ 0{,}0734962165 + 0{,}0037306075\ \lambda_1$
$\mathbf{W_5} = 0{,}919055559 - 0{,}0042595957\ \lambda_1$

$215{,}761512 \leq \lambda_1 \leq 246{,}965642$

$\mathbf{W_2} = 0{,}8869753172 - 0{,}0028661304\ \lambda_1$
$\mathbf{W_4} = 0{,}1130246828 + 0{,}0028661304\ \lambda_1$

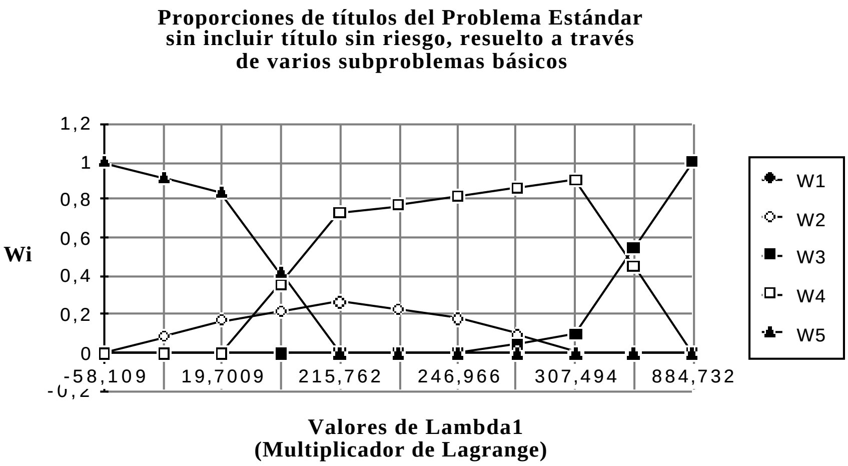
$246{,}965642 \leq \lambda_1 \leq 307{,}494038$

$\mathbf{W_2} = 0{,}9100572967 - 0{,}0029595970\ \lambda_1$
$\mathbf{W_3} = -0{,}4060886544 + 0{,}0016443122\ \lambda_1$
$\mathbf{W_4} = 0{,}4960307906 + 0{,}0013152823\ \lambda_1$

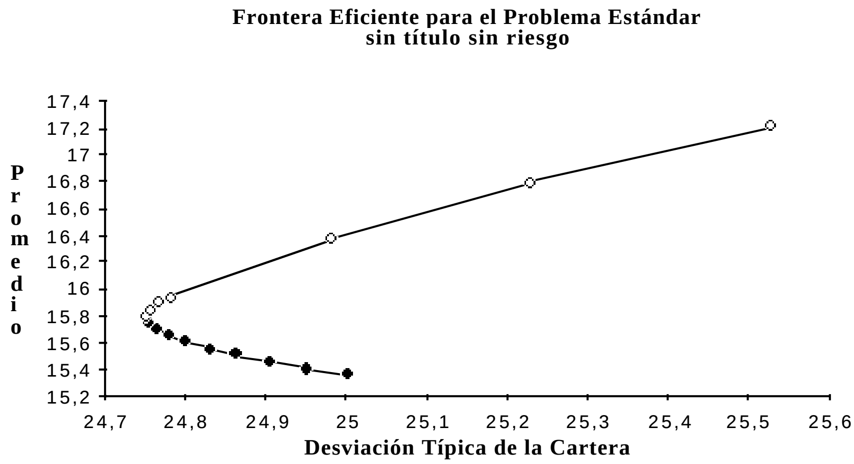
$307{,}494038 \leq \lambda_1 \leq 884{,}731932$

$\mathbf{W_3} = -0{,}3801530494 + 0{,}0015599676\ \lambda_1$
$\mathbf{W_4} = 1{,}3801530494 - 0{,}0015599676\ \lambda_1$

El gráfico 5.3 del capítulo IV queda como sigue en este ejemplo:



Así llegamos a la siguiente expresión de la frontera eficiente que se recoge en la figura 3.6.(b) del capítulo IV.



Los diferentes intervalos, que representan los diversos subproblemas básicos y, así, recogen los diferentes tramos de curva y combinaciones de los diferentes títulos, son:

$15{,}37 < E^* < 15{,}945$

En este caso el problema queda como sigue:

$W_1 = W_3 = W_4 = 0$

$\text{Min } Z = 1244{,}9\ W_2^2 + 625{,}18\ W_5^2 + 1047{,}9178\ W_2\ W_5$

$18{,}85495\ W_2 + 15{,}37095\ W_5 = E^*$

$W_2 + W_5 = 1$

De este forma nos da la solución:

$\sigma^2 = 67{,}7338426\ E^{*2} - 2140{,}37571\ E^* + 17521{,}5813$

$15{,}945 < E^* < 28{,}60196$

En este caso el problema queda como sigue:

$W_1 = W_3 = 0$

$\text{Min } Z = 1244{,}9\, W_2^2 + 3044{,}1427\, W_4^2 + 625{,}18\, W_5^2 + 1964{,}3012\, W_2 W_4 +$

$+ 1047{,}9178\, W_2 W_5 + 1466{,}0084\, W_4 W_5$

$18{,}85495\, W_2 + 32{,}181\, W_4 + 15{,}37095\, W_5 = E^*$

$W_2 + W_4 + W_5 = 1$

De este forma nos da la solución:

$\sigma^2 = 7{,}74537119\, E^{*2} - 227{,}304096\, E^* + 2269{,}30476$

28,6 < E^* < 29,79

En este caso el problema queda como sigue:

$W_1 = W_3 = W_5 = 0$
$\text{Min } Z = 1244{,}9\, W_2^2 + 3044{,}1427\, W_4^2 + 1964{,}3012\, W_2 W_4$
$18{,}85495\, W_2 + 32{,}181\, W_4 = E^*$
$W_2 + W_4 = 1$

De este forma nos da la solución:

$\sigma^2 = 13{,}0909934\, E^{*2} - 533{,}094649\, E^* + 6642{,}40948$

29,79 < E^* < 33,62

En este caso el problema queda como sigue:

$W_1 = W_5 = 0$

$\text{Min } Z = 1244{,}9\, W_2^2 + 11206{,}20937\, W_3^2 + 3044{,}1427\, W_4^2 + 5753{,}9\, W_2 W_3 +$

$+ 1964{,}3012\, W_2 W_4 + 9613{,}62\, W_3 W_4$

$18{,}85495\, W_2 + 46{,}6473\, W_3 + 32{,}181\, W_4 = E^*$

$W_2 + W_3 + W_4 = 1$

De este forma nos da la solución:

$$\sigma^2 = 7{,}90803592\ E^{*2} - 224{,}254886\ E^* + 2041{,}65786$$

$33{,}62 < E^* < 46{,}6473$

En este caso el problema queda como sigue:

$$W_1 = W_2 = W_5 = 0$$

$$\text{Min } Z = 11206{,}20937\ W_3^2 + 3044{,}1427\ W_4^2 + 9613{,}62\ W_3\ W_4$$

$$46{,}6473\ W_3 + 32{,}181\ W_4 = E^*$$

$$W_3 + W_4 = 1$$

De este forma nos da la solución:

$$\sigma^2 = 22{,}1562857\ E^{*2} - 1182{,}32988\ E^* + 18147{,}2798$$

PROBLEMA ESTANDAR CON TITULO SIN RIESGO QUE SE PUEDE EMITIR

Es un caso bastante normal en el que no se pueden emitir títulos (excepto el título sin riesgo), pero que sí se pueden comprar.

En este caso tenemos sólo dos puntos singulares dentro de los cuales siempre adquirimos W_3 y W_4 mientras que podemos emitir o comprar título sin riesgo

$$W_1 = W_2 = W_5 = 0$$

$$\text{Min } Z = 11206{,}209\ W_3^2 + 3044{,}1427\ W_4^2 + 9613{,}62\ W_3\ W_4$$

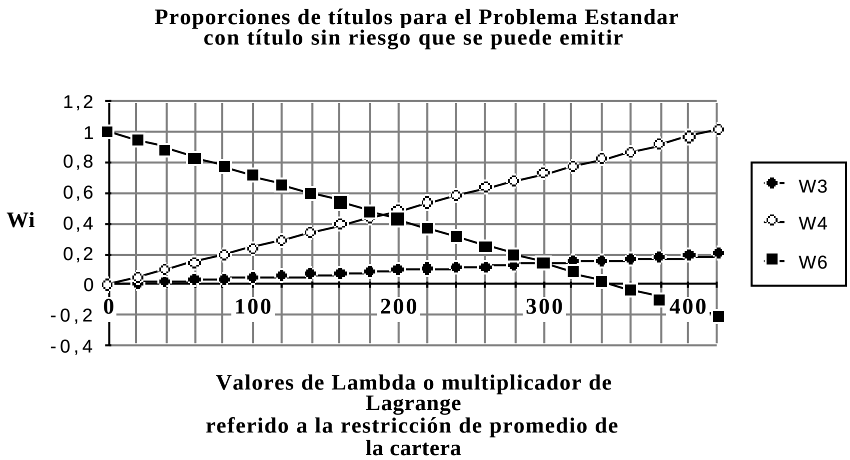
$$46{,}6473\ W_3 + 32{,}181\ W_4 + 13\ W_6 = E^*$$

$$W_3 + W_4 + W_6 = 1$$

De este forma nos da la solución:

$$\sigma^2 = 8{,}0657987\ E^{*2} - 209{,}7107665\ E + 1363{,}12$$

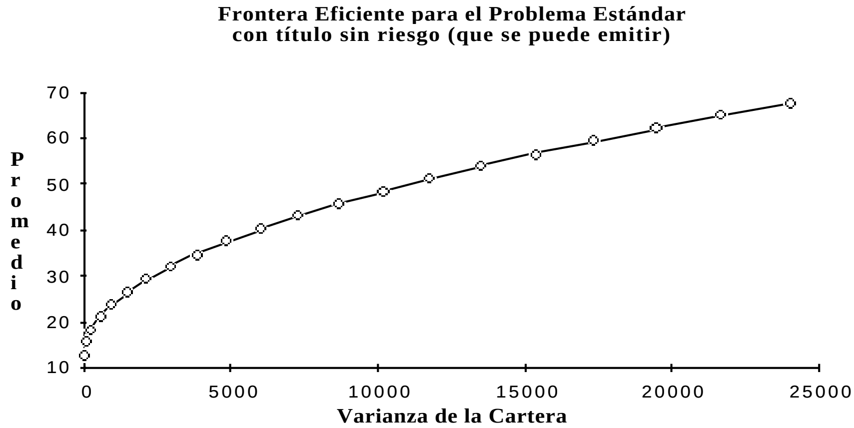
Las proporciones de títulos varían en el siguiente modo: fijémonos que sólo existe un punto singular, que hace referencia al punto inicial. Es una expresión de la figura 5.4 del capítulo IV.



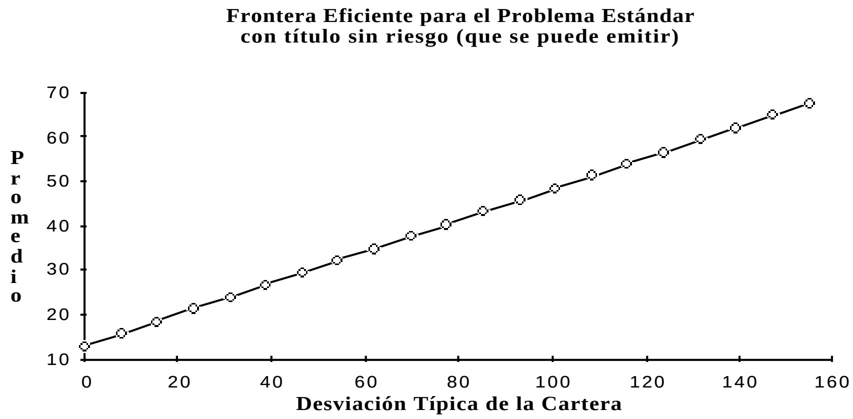
Vemos que únicamente existe un punto singular que corresponde al valor de $\lambda_1 = 0$. Las proporciones reflejadas en el gráfico anterior son numéricamente las siguientes:

$\mathbf{w_3} = 0{,}00046457\ \lambda_1$
$\mathbf{w_4} = 0{,}00241691\ \lambda_1$
$\mathbf{w_6} = -0{,}00288148\ \lambda_1 + 1$

A partir de un valor como $\lambda_1 = 347{,}044294$, que se corresponde con un valor promedio de la cartera $E^* = 34{,}513$ pasamos de comprar títulos sin riesgo a emitirlos. A continuación reflejamos la frontera eficiente como el subconjunto (en puntos blancos) de la frontera de mínima varianza en el que para una esperanza dada la varianza es mínima, y para una varianza dada la esperanza es máxima. La reflejamos en el mapa de varianzas y esperanzas, y en el mapa de desviaciones y esperanzas (donde el gráfico es justamente una recta).



Este gráfico refleja en parte el resultado final de los razonamientos explicados en la páginas 156 y 157 y plasmados, en parte, en la figura 6 del mencionado apéndice.



PROBLEMA ESTANDAR CON TITULO SIN RIESGO

Finalmente incluimos el caso en el que la restricción en desigualdad, $w_i \geq 0$, también afecta al título sin riesgo y por tanto no podemos emitirlo, sólo comprarlo.

Tenemos un problema estándar, con varios puntos singulares. Como en todo problema estándar podemos resolverlo por subproblemas básicos.

$0 \leq \lambda_1 \leq 347{,}044294$

$\mathbf{w_3} = 0{,}00046457\ \lambda_1$
$\mathbf{w_4} = 0{,}00241691\ \lambda_1$
$\mathbf{w_6} = -0{,}00288148\ \lambda_1 + 1$

$347{,}044294 \leq \lambda_1 \leq 884{,}731922$

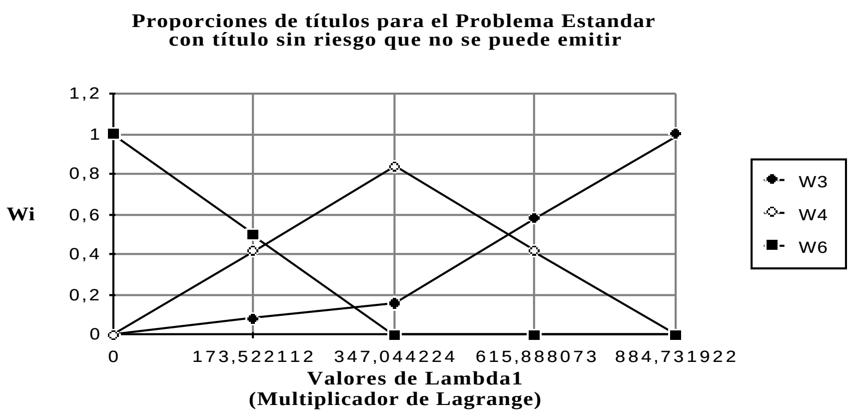
$\mathbf{W_3} = -0{,}3801530494 + 0{,}0015599676\ \lambda_1$
$\mathbf{W_4} = 1{,}3801530494 - 0{,}0015599676\ \lambda_1$

Si nos fijamos en las proporciones:

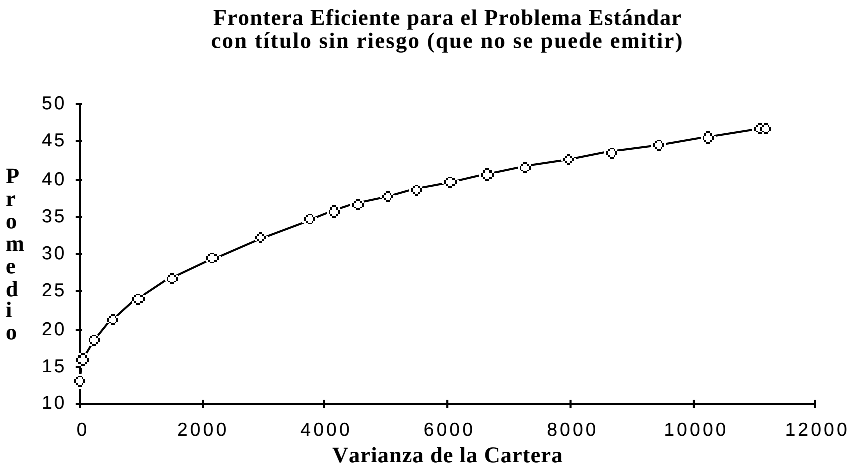
- las del primer intervalo, son las mismas que las expresadas para el problema estándar con título sin riesgo que se puede emitir

- las del segundo intervalo, son las mismas que las expresadas en el último intervalo considerado para el problema estándar sin título sin riesgo, por lo que la frontera eficiente en este caso, se confundirá con la frontera eficiente del problema estándar sin titulo sin riesgo en el valor de promedio y varianza que se corresponde con un valor del multiplicador de Lagrange $\lambda_1 = 347{,}044294$.

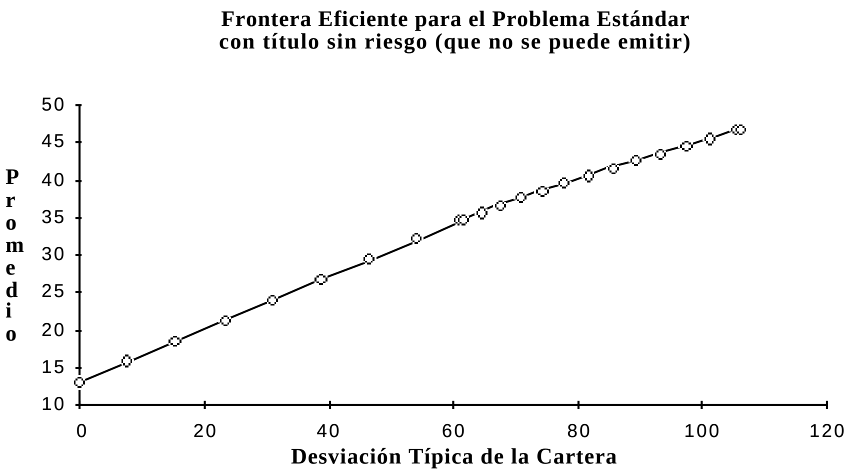
En el gráfico siguiente de proporciones recogemos el resultado de la resolución de este problema:



Reflejamos finalmente la frontera eficiente como subconjunto de la frontera de mínima varianza en el mapa de promedios y desviaciones y en el de varianzas y promedios.



Fijémonos que en el mapa de promedios y desviaciones, la frontera eficiente tiene un tramo inicial recto, en que todas las carteras tienen título sin riesgo, hasta un punto en el que toma la figura de una hipérbola. Es la figura 3.6. c) del capítulo IV que hemos estado comentando en todo nuestro ejemplo.

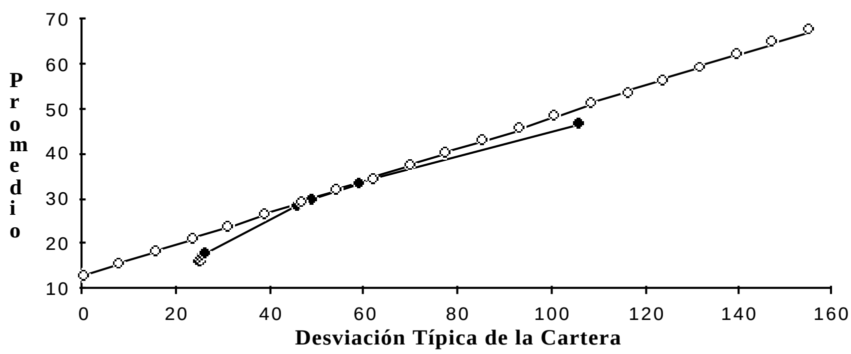


PROBLEMA ESTANDAR: INFLUENCIA DE LA EXISTENCIA DEL TITULO SIN RIESGO

En este punto, analizamos el efecto de la introducción de un título sin riesgo en el mercado, con las dos posibilidades comentadas de emisión o no del título.

Así, en este gráfico, en el que recogemos la influencia de un título sin riesgo que se puede emitir, la frontera eficiente (señalada con puntos blancos) es totalmente recta y tangente a la frontera eficiente del problema estándar normal (señalado con puntos negros). Es tangente en el punto R^*, como aparece indicado en el gráfico 6 del apéndice IV-D. En nuestro caso, $R^* = 34\%$.

Comparación entre las Fronteras Eficientes del Problema Estándar, al incluirse el título sin riesgo que se puede emitir



En cambio, si no es posible la emisión del título sin riesgo, su frontera eficiente es recta hasta dicho valor R^* y posteriormente se confunde con la frontera eficiente del problema estándar normal.

Comparación entre las Fronteras Eficientes del Problema Estándar al incluirse el título sin riesgo que no se puede emitir