Capítulo VI

VARIABLES ALEATORIAS

1. Introducción

Dentro de la estadística se pueden considerar dos ramas perfectamente diferenciadas por sus objetivos y por los métodos que utilizan:

Estadística Descriptiva o Deductiva
Inferencia Estadística o Estadística Inductiva

- Se utiliza cuando la observación de la población no es exhaustiva sino sólo de un subconjunto de la misma de forma que, los resultados o conclusiones obtenidos de la muestra, los generalizamos a la población
- La muestra se toma para obtener un conocimiento de la población pero nunca nos proporciona información exacta, sino que incluye un cierto nivel de incertidumbre
- Sin embargo sí será posible, a partir de la muestra, hacer afirmaciones sobre la naturaleza de esa incertidumbre que vendrá expresada en el lenguaje de la probabilidad, siendo por ello un concepto muy necesario y muy importante en la inferencia estadística
- Según V. Barnett (1982): -La estadística es la ciencia que estudia como debe emplearse la información y como dar una guía de acción en situaciones prácticas que envuelven incertidumbre-. Las "situaciones prácticas que envuelven incertidumbre" son lo que nosotros llamaremos experimentos aleatorios.

2. Fenómenos Aleatorios

Un **experimento** es cualquier situación u operación en la cual se pueden presentar uno o varios resultados de un conjunto bien definido de posibles resultados.

Los experimentos pueden ser de dos tipos según si, al repetirlo bajo idénticas condiciones:

Determinístico
Se obtienen siempre los mismo resultados.
Ej: medir con la misma regla e identicas condiciones la longitud de una barra

Aleatorio
No se obtienen siempre los mismo resultados.
Ej: el lanzamiento de una moneda observando la sucesión de caras y cruces que se presentan

Las siguientes son **características de un experimento aleatorio**:

- El experimento se puede repetir indefinidamente bajo idénticas condiciones
- Cualquier modificación a las condiciones iniciales de la repetición puede modificar el resultado
- Se puede determinar el conjunto de posibles resultados pero no predecir un resultado particular
- Si el experimento se repite gran número de veces entonces aparece algún modelo de regularidad estadística en los resultados obtenidos

3. Espacio Muestral

Se denomina **resultado básico o elemental**, **comportamiento individual** o **punto muestral** a cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio. Los resultados básicos elementales serán definidos de forma que no puedan ocurrir dos simultáneamente pero si uno necesariamente.

Se denomina **conjunto universal**, **espacio muestral** o **espacio de comportamiento** ***E*** al conjunto de todos los resultados elementales del experimento aleatorio. Pueden ser de varios tipos:

Espacio Muestral Discreto

Espacio muestral finito	**Espacio muestral infinito numerable**
Tiene un número finito de elementos.	Tiene un número infinito numerable de elementos es decir, se puede establecer una aplicación biyectiva entre ***E*** y ***N***.
Ejemplo: Experimento aleatorio consistente en lanzar un dado. El espacio muestral es ***E***={1,2,3,4,5,6}	Ejemplo: Experimento aleatorio consistente en lanzar un dado hasta que sea obtenido el número 1 ***E***={{1},{2,1},{3,1} ... {2,2,1},{2,3,1},...}

Espacio Muestral Continuo

Si el espacio muestral contiene un número infinito de elementos, es decir, no se puede establecer una correspondencia biunívoca entre ***E*** y ***N***.

Ejemplo:
Experimento aleatorio consistente en tirar una bola perfecta sobre un suelo perfecto y observar la posición que ocupará esa bola sobre la superficie. ***E***={Toda la superficie del suelo}

4. Sucesos

Un **suceso *S*** es un subconjunto del espacio muestral, es decir, un subconjunto de resultados elementales del experimento aleatorio.
Diremos que **ocurre** o **se presenta el suceso** cuando al realizarse el experimento aleatorio, da lugar a uno de los resultados elementales pertenecientes al subconjunto ***S*** que define el suceso

Se pueden considerar cuatro tipos de sucesos según el nº de elementos que entren a formar parte:

- **Suceso elemental**, **suceso simple** o **punto muestral** es cada uno de los resultados posibles del experimento aleatorio luego los sucesos elementales son subconjuntos de ***E*** con sólo un elemento
- **Suceso compuesto** es aquel que consta de dos o más sucesos elementales
- **Suceso seguro**, **cierto** o **universal** es aquel que consta de todos los sucesos

elementales del espacio muestral ***E***, es decir, coincide con ***E***. Se le denomina seguro o cierto porque ocurre siempre.

- **Suceso imposible** es aquel que no tiene ningún elemento del espacio muestral ***E*** y por tanto no ocurrirá nunca. Se denota por $\varnothing$.

5. Operaciones con sucesos

Con los sucesos se opera de manera similar a como se hace en los conjuntos y sus operaciones se definen de manera análoga. Los sucesos a considerar serán los correspondientes a un experimento aleatorio y por tanto serán subconjuntos del espacio muestral ***E***.

Suceso Contenido en Otro

Dados dos sucesos ***A*** y ***B*** de un experimento aleatorio:

Diremos que ***A*** está incluido en ***B*** si:
Cada suceso elemental de ***A*** pertenece también a ***B***, es decir, siempre que ocurre el suceso ***A***, también ocurre el suceso ***B***.
Diremos también que ***A*** implica ***B***.

$$A \subset B \quad \text{ó} \quad A \Rightarrow B$$

Igualdad de Sucesos

Dados dos sucesos ***A*** y ***B*** de un experimento aleatorio:

Diremos que ***A*** y ***B*** son iguales si:
Siempre que ocurre el suceso ***A*** también ocurre ***B*** y al revés.

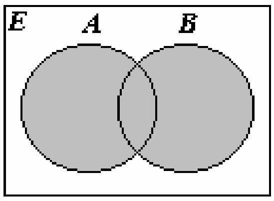
$$A = B \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} A \subset B \\ B \subset A \end{Bmatrix}$$

Unión de Sucesos

Dados dos sucesos ***A*** y ***B*** de un experimento aleatorio:

La union de ambos sucesos ***A*** y ***B*** es:
Otro suceso compuesto por los resultados o sucesos elementales pertenecientes a ***A***, a ***B***, o a los dos a la vez (intersección).

$A \cup B$



En general, dados ***n*** sucesos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, su unión es
otro suceso formado por los resultados o sucesos elementales que pertenecen al menos a uno de los sucesos A_i.

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

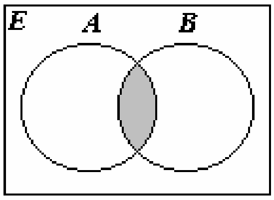
Intersección de Sucesos

Dados dos sucesos ***A*** y ***B*** de un experimento aleatorio:

$A \cap B$

La intersección de ambos sucesos ***A*** y ***B*** es:
Otro suceso compuesto por los resultado o sucesos elementales que pertenecen a ***A*** y a ***B***, simultáneamente.

En general, dados n sucesos A_1, A_2, A_3,..., A_n, su intersección es otro suceso formado por los resultados o sucesos elementales que pertenecen a todos los sucesos A_i.



$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Sucesos Disjuntos, Incompatibles o Excluyentes

Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio:

Diremos que estos sucesos A y B son <u>disjuntos</u>, <u>incompatibles o mutuamente excluyentes</u> cuando:
No tienen ningún suceso elemental en común o dicho de otra forma, si al verificarse A no se verifica B, ni al revés.

$$A \cap B = \emptyset$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \emptyset$$

Sistema Exhaustivo de Sucesos

Dados n sucesos A_1, A_2, A_3,..., A_n de un experimento aleatorio:

Diremos que estos <u>forman una colección</u> o <u>sistema exhaustivo de sucesos</u> si la unión de todos ellos es igual al espacio muestral E.

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$$

Diremos que estos <u>forman un sistema completo de sucesos</u> o <u>una partición de E</u> si, además de la anterior, condición, se cumple que son disjuntos dos a dos, es decir, son mutuamente excluyentes, disjuntos o incompatibles.

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

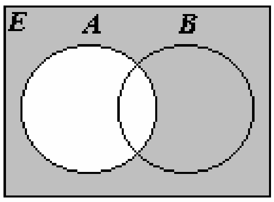
El conjunto de todos los sucesos elementales que constituyen un espacio muestral forman una colección de sucesos mutuamente excluyente y exhaustivo ya que, de todos ellos, sólo uno debe ocurrir y no pueden ocurrir dos simultáneamente.

Suceso Complementario o Contrario

Dado un suceso A de un experimento aleatorio:

Se define como <u>suceso complementario</u> o <u>contrario de A</u> a:
Otro suceso que ocurre cuando no ocurre el suceso A, o bien, es el suceso constituido por todos los sucesos elementales del espacio muestral E que no pertenecen a A.

$$\overline{A}$$

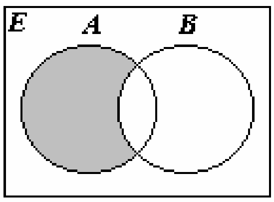


Diferencia de Sucesos

Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio:

Se define como la <u>diferencia de ambos sucesos A y B</u> a:
Otro suceso constituido por los sucesos elementales que pertenecen a A, pero no a B.

$$A - B = A \cap \overline{B}$$



Diferencia Simétrica de Sucesos

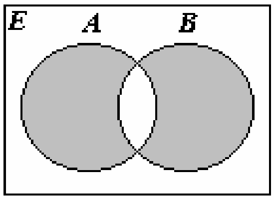
Dados dos sucesos ***A*** y ***B*** de un experimento aleatorio:

Se define como diferencia simétrica de ambos sucesos ***A*** y ***B*** a:

Otro suceso constituido por los sucesos elementales que pertenecen a ***A***, o a ***B***, pero que no simultáneamente a ambos.

$$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$A \,\Delta\, B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$$



6. Propiedades de las Operaciones con Sucesos

Los sucesos asociados a un experimento aleatorio verifican las siguientes propiedades:

- $\overline{E} = \varnothing \quad \overline{\varnothing} = E \quad \overline{\overline{A}} = A$
- $E \cup A = E \quad \varnothing \cup A = A \quad A \cup \overline{A} = E \quad E \cap A = A \quad \varnothing \cap A = \varnothing \quad A \cap \overline{A} = \varnothing$
- Propiedad idempotente: $A \cup A = A \quad A \cap A = A$
- Propiedad conmutativa: $A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A$
- Propiedad asociativa: $A_1 \cup (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cup A_2) \cup A_3 \quad A_1 \cap (A_2 \cap A_3) = (A_1 \cap A_2) \cap A_3$
- Propiedad distributiva: $A_1 \cup (A_2 \cap A_3) = (A_1 \cup A_2) \cap (A_1 \cup A_3)$, $A_1 \cap (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)$
- Propiedad simplificativa: $A \cup (A \cap B) = A \quad A \cap (A \cup B) = A$
- Leyes de Morgan: $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

7. Sucesión de Sucesos

Llamaremos **sucesión de sucesos** a una familia de sucesos A_1, A_2, A_3,..., A_n en la que éstos aparecen ordenados por el subíndice ***n***. La representaremos por { A_n } ***n=1,2,3,...***

Sucesión Creciente

Una sucesión de sucesos { A_n } diremos que es creciente si se verifica:

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$$

la representamos por { A_n↑}

Sucesión Decreciente

Una sucesión de sucesos { A_n } diremos que es <u>decreciente</u> si se verifica: $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ la representamos por { $A_n\downarrow$}

Límite de una Sucesión

El <u>límite de una sucesión creciente / decreciente</u> de sucesos { $A_n\uparrow$} / { $A_n\downarrow$} : $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ / $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

Límites Inferior y Superior de una Sucesión de Sucesos

$$A_0 = \lim_{n\to\infty} \inf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)$$

El <u>límite inferior de la sucesión</u> es un suceso formado por los resultados o sucesos elementales que pertenecen a todos los sucesos de la sucesión excepto quizá a un número finito de sucesos

$$A^0 = \lim_{n\to\infty} \sup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$$

El <u>límite superior de la sucesión</u> es un suceso formado por todos los resultados o sucesos elementales que pertenecen a una infinidad de sucesos de la sucesión

En el supuesto que se verifique diremos que la sucesión es convergente y se expresa como:

$$A_0 = \lim_{n\to\infty} \inf A_n = \lim_{n\to\infty} \sup A_n = A^0 = A \qquad A_n \to A \quad \lim_{n\to\infty} A_n = A$$

8. Algebra de Sucesos

Como se ha venido observando, los sucesos los consideramos como conjuntos, siendo válido para éstos todo lo estudiado en la teoría de conjuntos. Para llegar a la construcción axiomática del Cálculo de Probabilidades, necesitamos dar unas estructuras algebraicas básicas construidas sobre los sucesos, de la misma manera que se construyen sobre los conjuntos.

Colección de Conjuntos o Sucesos

Es otro conjunto cuyos elementos son conjuntos y lo llamaremos **conjunto de las partes de *E***, es decir, ***A=P(E)*** es el conjunto formado por todos los subconjuntos de ***E*** o por todos los sucesos contenidos en el espacio muestral ***E***.

Algebra de Sucesos o Algebra de Boole

Sea ***A=P(E)*** una colección de sucesos donde se han definido las operaciones:
- Unión de sucesos - Intersección de sucesos - Complementario de un suceso
y que ademá verifican las propiedades definidas al exponer las operaciones con sucesos.
Diremos que la colección de sucesos no vacia ***A* tiene estructura de Algebra de Boole** si ***A*** es una clase cerrada frente a las operaciones de complementario, unión e intersección de sucesos en número finito, es decir si se verifican las condiciones siguientes:

- $\forall A \in A = P(E)$ se verifica que su complementario $\overline{A} \in A = P(E)$
- $\forall A_1, A_2 \in A = P(E)$ se verifica que $A_1 \cup A_2 \in A = P(E)$
- Lo relativo a que la intersección sea cerrada y que el número de sucesos sea finito se obtiene como consecuencia de las condiciones anteriores, como ahora se indicará

De las dos condiciones iniciales, se deducen las siguientes consecuencias:

- El espacio muestral $E \in A = P(E)$
- Si los sucesos $A, B \in A = P(E)$ se verifica que $A \cap B \in A = P(E)$
- El suceso imposible $\varnothing \in A = P(E)$
- Si $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \in A = P(E)$ se verifica que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in A = P(E)$ y $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in A = P(E)$

Si hacemos la extensión al caso de un número infinito numerable de sucesos, entonces aparece una nueva estructura algebraica que recibe el nombre de **α-Algebra** o **Campo de Borel**, que es una generalización de la anterior.

Cuando el espacio muestral ***E*** es finito, todos los subconjuntos de ***E*** se pueden considerar como sucesos. Esto no ocurre cuando el espacio muestral es infinito (no numerable), pues es difícil considerar el conjunto formado por todos los subconjuntos posibles, existiendo subconjuntos que no pueden considerarse como sucesos.

En resumen, podemos decir que a partir del espacio muestral ***E***, hemos llegado a definir la colección de sucesos ***A=P(E)*** que tiene estructura de **Algebra de Sucesos o Algebra de Boole** si el espacio muestral es finito o bien tiene la estructura de **α-Algebra** si el espacio muestral es infinito.

Al par (***E, A***) en donde ***E*** es el espacio muestral y ***A*** una **α-Algebra** sobre ***E***, le llamaremos espacio o conjunto medible, en el cual será posible establecer una medida o probabilidad, como se verá después.

9. Métodos de Enumeración o Conteo

Las siguientes son algunas técnicas útiles para contar el número de resultados o sucesos de un experimento aleatorio.

Tablas de Doble Entrada

Es útil para relacionar dos pruebas, indicándonos los resultados que integran el espacio muestral, pudiendo indicar sobre la tabla determinados sucesos en los que estemos interesados. En general con m elementos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ y n elementos $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ es posible formar $m \times n$ pares (a_r, b_s) tales que cada par tiene al menos algún elemento diferente de cada grupo.

Principio de Multiplicación

Sean los conjuntos $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_k$ que tienen respectivamente $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ k-uplas donde, en cada k-upla, el primer elemento pertenece a C_1, el segundo a C_2, etc.

- En el caso particular de que $n_1 = n_2 = n_3 = \ldots = n_k$ el número posible de k-uplas sera n^k .
- En el caso general, el número de posibles resultados será $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k$. Este principio es de utilidad en el caso de un experimento aleatorio compuesto por otros k experimentos.

Diagramas de árbol

Este diagrama nos permite indicar de manera sencilla el conjunto de posibles resultados en un experimento aleatorio siempre y cuando los resultados del experimento puedan

obtenerse en diferentes fases sucesivas.
Ej: Experimento aleatorio consistente en lanzar al aire un dado y después 3 veces consecutivas una moneda.

Combinaciones, Variaciones y Permutaciones

Combinaciones Llamaremos <u>combinaciones de m elementos tomados de n en n</u> al número de subconjuntos diferentes de n elementos que se pueden formar con los m elementos del conjunto inicial	$C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$
Combinaciones con repetición Si en los subconjuntos anteriores se pueden repetir los elementos	$CR_{m,n} = \binom{m+n-1}{n} = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$
Variaciones Llamaremos <u>variaciones de m elementos tomados de n en n</u> a los distintos subconjuntos diferentes de n elementos que se pueden formar con los m elementos, influyendo el orden en el que se toman	$V_{m,n} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-m+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$
Variaciones con repetición Si en los subconjuntos anteriores se pueden repetir los elementos	$VR_{m,n} = m^n$
Permutaciones Llamaremos <u>permutaciones de n elementos</u> a las variaciones de n elementos tomados de n en n	$P_n = n!$
Permutaciones con repetición Llamaremos permutaciones con repetición de n elementos k-distintos que se repiten uno x_1 veces, otro x_2 veces, ... y el último x_k veces	$P_n^{x_1,x_2,\ldots,x_k} = \frac{n!}{x_1!\,x_2!\ldots x_k!}$ $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$