MODELO INTEGRADO KEYNES-SRAFFA

It´s intention from the author of this short paper to make a true integration among the Keynesian function of consumption and investment obtained from his book “General Theory…“ and the sraffian foundations based also in his book “Production commodities by means commodities”. From both economists has been keeped theirs principals features of their model economic. The reader of the following pages will can to make a judgement about this intention.

by/por

<u>Antonio Mora Plaza</u>

MODELO INTEGRADO KEYNES-SRAFFA

Antonio Mora Plaza

Ambas, *razón-patrón* y *propensión al consumo*[1], son sin duda dos conquistas intelectuales dentro del pensamiento económico, aunque de diferente peso y significado. En Sraffa la razón-patrón atañe a unos posibles fundamentos de la economía que tendrían como origen su obra "*Producción de mercancías por medio de mercancías*"; en Keynes es la función de consumo con su *propensión a consumir* y su derivada, *el multiplicador*, lo que ha hecho posible la contratación de su modelo. En Sraffa, lo que el llama razón-patrón, es la relación entre el excedente y los medios de producción del sistema. Esta razón está íntimamente ligada a *la mercancía-patrón*. Esta sería una canasta virtual de mercancías que tuviera una propiedad: que los *excedentes netos relativos* de todas las mercancías fueran iguales. Este concepto de excedente neto relativo no está en Sraffa, pero es simplemente una forma de llamar lo que está en su libro. Este excedente sería el cociente entre la diferencia de lo producido de una mercancía por los medios empleados por el conjunto de esa mercancía (pero no necesariamente como factor de producción de la mercancía medida) y esos mismo medios actuando como denominador. La mercancía-patrón sería esa *cesta* constituida por mercancías tales que esos cocientes fueran iguales para todas las mercancías. Yendo ahora a Keynes, dice el economista inglés que "*definiremos la propensión a consumir como la relación funcional entre un nivel de ingreso dado* (*PY*), *medido en unidades de salario, y el gastos para el consumo* (*C*)"[2]. Vamos a ver como ambos conceptos, ambas ideas nacidas de visiones de la economía tan distintas pueden casar sin que el matrimonio resulte conflictivo.

---

[1] Nada de lo que viene tiene que ver con la idea del supermultiplicador de Sraffa. Para cerciorarse puede verse en Internet en Franklin Serrano: http://www.elgermen.com.ar/wordpress/wp-content/uploads/Serrano-F-Hist%C3%A9resis-Din%C3%A1mica-Inflacionaria-y-el-Supermultiplicador-Sraffiano.pdf

[2] *Teoría General de la Ocupación, el Interés y el Dinero*, FCE, 1992, pág. 88 [The General Theory of Employment, Interest and Money, 1936]

La función de consumo.

Partimos como siempre de la ecuación que define el sistema de Sraffa:

(1) $$PY = wL + (1+r)PX$$

donde ***P*** es el vector de precios **1**x***n***, ***Y*** la matriz diagonal ***n***x***n*** de ***n*** productos finales, ***w*** la tasa de salarios, ***L*** el vector horizontal de inputs de trabajo, ***r*** la tasa de ganancia y ***X*** la matriz cuadrada no diagonal de ***n***x***n*** medios de producción. De Keynes tomamos como nivel de ingreso ***PY***, es decir, toda la producción, sin más distingos, para poder enlazar las ecuaciones que definen un sistema con el que definen el otro:

(2) $$C = bPYI$$

siendo ***C*** el consumo keynesiano, ***b*** la propensión marginal al consumo, y cuyo valor está comprendido entre cero y uno, e **I** el vector vertical de unos. Con ello pasamos del vector de valores de productos final formados por el conjunto de las mercancías a un valor agregado de este producto final susceptible de ser comparado con la idea de consumo de Keynes. La inversión keynesiana $\mathbf{I}_{(K)}$ sería equivalente al conjunto de los medios de producción ***X*** del modelo esrafiano agregado mediante sus precios tal que se cumple:

(3) $$I_{(k)} = PXI$$

La suma del consumo ***C*** y la inversión keynesiana $\mathbf{I}_{(k)}$ sería lo que llama Keynes *el ingreso dado* tal que:

(4) $$C + I_{(k)} = PYI$$

con lo que el sistema está en equilibrio y hechos los enlaces entre las variables esrafianas y keynesianas. En efecto, si ahora sumamos miembro a miembro (2) y (3) obtenemos (1). Sigamos. Ahora nos faltan los habituales numerarios esrafianos:

(6) $$PYI - PXI = 1$$

(7) $$LI = 1$$

A todas estas añadimos una última ecuación más típicamente esrafiana que es aquella que resulta de hacer cero la tasa de salarios en la ecuación de definición de sus sistema (1):

(8) $$PY = (1+R)PX$$

siendo ***R*** la razón-patrón a la vez que la tasa máxima de ganancia en el modelo de producción simple de Sraffa. Pues bien, de este conjunto ecuaciones surge la siguiente:

(9) $$\boxed{w = \frac{(1+R)b - r}{(1+R)b}}$$

donde vemos enlazados la razón-patrón de Sraffa ***R*** y la propensión al consumo ***b*** de Keynes. Y aparecen los conceptos keynesianos y esrafianos sin, aparentemente, violentar los sistemas conceptuales de ambos. La ecuación (9) es una función lineal decreciente entre salarios y ganancias, y con ***w***=**1** como ordenada en el origen cartesiano y como pendiente **-1**/(1+***R***)***b***.

Si los salarios hubieran sido *pre-factum*, es decir, si la tasa de ganancia ***r*** se extendiera a todos los costes ***wL***+***PX***, entonces la ecuación de definición del sistema estaría representada por:

(10) $$PY = (1+r)\left[wL + PX\right]$$

Y el resultado final hubiera sido:

(11) $$\boxed{w = \frac{(1+R)b - r}{(1+r)(1+R)b}}$$

Y la relación entre salarios y ganancias en (11) es una función ¡convexa!, porque su primera derivada es negativa y la segunda positiva, lo que configura un decrecimiento creciente, con puntos de corte tales como ***w***(***r***=**0**)=**1** y ***r***(***w***=**0**)=(**1**+***R***)***b***.

Propensión al consumo y razón-patrón.

Sabemos además que existe la relación esrafiana en la producción simple entre tasa de salarios, de ganancia y razón-patrón tal como:

(13) $$w = \frac{R - r}{R}$$

Si ahora eliminamos los salarios entre (9) y (13) queda la relación entre *la propensión del consumo* keynesiano ***b*** y *la razón-patrón* de Sraffa ***R***:

(14) $$\boxed{b = \frac{R}{1 + R}}$$

La ecuación (14) sería ¡*la condición de estabilidad del sistema keynesiano-esrafiano*! Hay que recordar que en el caso de la producción simple de Sraffa, la razón-patrón es a la vez la tasa máxima de ganancia posible del sistema cuando los salarios son cero y una medida del excedente. Pero esta condición sólo puede darse por casualidad, porque responde a motivaciones y actores diferentes: la propensión al consumo representa la cantidad destinada al consumo del total de lo producido, mientras que las tasas máximas de ganancia representa las posibilidades máximas de ganancia de los empresarios. Dicho de otra forma, la producción (***PY*I**), sus rentas derivadas (***wL*I** más ***rPX*I**) y el consumo consiguiente de bienes de consumo (***bPY*I**), sólo pueden reproducir el sistema con estabilidad por casualidad. El desequilibrio entre producción y consumo sería lo habitual en un mundo –como el nuestro- representado por el conjunto ecuaciones anteriores. Y eso que de entrada se ha supuesto equilibrio en la renovación de los medios de producción por (3).

I - Generalizaciones del modelo integrado: la función de consumo

Todo se puede generalizar a ***n*** tasas de salario mediante la matriz diagonal ***W***, a ***n*** tasas de ganancia mediante la matriz diagonal ***G*** y a ***n*** tasas de ganancia máximas mediante la matriz también diagonal $\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}}$, con $\mathbf{I}_{\mathrm{d}}$ como matriz diagonal de unos, **I** como el vector vertical de unos, y todo ello con salarios *pre-factum*. Hecho esto, el sistema de ecuaciones que queda es como sigue:

(15) $$PY = \left[LW + PX\right](I_d + G)$$

(16) $$PY = PX\,(I_d + G_m)$$

(17) $$C = bPYI$$

(18) $$I_{(k)} = PXI$$

(19) $$PYI = C + I_{(k)}$$

El conjunto de ecuaciones apenas merece comentarios novedosos. La (15) es la que define el sistema de forma generalizada y, tal es así, que casi podemos insertar en la ecuación los datos obtenidos de las tablas *Input-Output*. En (16) ya no tenemos la razón-patrón de la producción simple, pero tenemos lo equivalente en la producción conjunta *esrafiana* o conjunta generalizada: las ***n*** tasas de ganancia máximas $\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}}$. La (17) es la función keynesiana de consumo. Las ecuaciones (18) y (19) son ecuaciones de comportamiento y permiten al sistema reproducirse en las mismas condiciones, al menos en lo que respecta a los medios de producción (Sraffa) o bienes de inversión (Keynes). De este conjunto de ecuaciones sale la ecuación de equilibrio, es decir, de reproducción del sistema:

(21) $$\boxed{PYI = \frac{1}{1-b} \times LW\,(I + G)(G_m - G)^{-1}\,I}$$

En lado izquierdo de la ecuación representa la oferta agregada de la economía y en la derecha están las rentas salariales y las ganancias que van a representar la demanda, tanto de bienes de consumo como de inversión. Que ambos lados de la ecuación coincidan va a depender de la propensión al consumo de Keynes, es decir, de ***b***. Pero este representa los deseos de los consumidores y que se concreta en (17). Al igual que en los casos anteriores de reproducción simple –*pre* y *post-*

factum- la igualdad (21) podrá darse sólo por casualidad, porque el nexo de unión –la propensión al consumo keynesiano- debiera servir para caracterizar un comportamiento –el consumo- a la vez que el equilibrio de la economía entre productores y consumidores. La igualdad (21) podrá cumplirse si los precios actúan con flexibilidad, pero aún así, eso no garantiza el equilibrio (21) y, roto el equilibrio, sobreviene la crisis.

Para que no se vea esto como un ejercicio abstracto, aquí se puede jugar un papel lo público, es decir, utilizando los impuestos y el gasto público para hacer que se cumpla (21). Otra forma de ver esto es como sigue. Del conjunto de ecuaciones anteriores obtenemos la ecuación:

(22) $$b = \frac{LW(I_d+G)(G_m-G)^{-1}\left[X^{-1}Y-I_d\right]I}{LW(I_d+G)(G_m-G)^{-1}X^{-1}YI}$$

Ahora se puede ver que la propensión al consumo ***b*** de (22) sólo coincidirá con la ecuación de comportamiento keynesiana (17) por pura casualidad. En el modelo anterior, a pesar de sus avances en cuanto al realismo por sus ***n*** tasas de salario, ***n*** tasas de ganancias y ***n*** tasas ganancias máximas, nos faltaban dos sectores: el público y el exterior. Comencemos con el primero. Según eso, el modelo definido por las ecuaciones de (15) a (19), estaría ahora modificado de la siguiente manera:

(23) $$PY = \left[LW + PX\right](I_d+G)$$

(24) $$PY = PX(I_d+G_m)$$

(25) $$C = b\left[PYI - T\right]$$

(26) $$I_{(k)} = PXI$$

(27) $$PYI = C + I_{(k)} + G_P$$

Aquí ha desaparecido la ecuación (20) del numerario con el fin de que los datos reflejados por las variables sean reales. Ahora en la ecuación de consumo de Keynes (25) se han descontado los impuestos **T** de la renta total ***PY*I**, cosa habitual en los modelos macroeconómicos de raíz keynesiana porque ***PY*I-*T*** refleja mejor la renta disponible para el gasto. Y, lógicamente, el producto total (oferta) en (27) está confrontado con el gasto total (demanda) que representan el Consumo **C**, la Inversión $\mathbf{I}_{(K)}$ y el Gasto Público $\boldsymbol{G}_{\mathrm{P}}$. De este conjunto de ecuaciones sale la siguiente:

(28) $$PYI = \frac{1}{1-b} \times \left[PXI + G_P - bT \right]$$

(28bis) $$\boxed{PYI = \frac{1}{1-b} \times \left[LW(I_d + G)(G_m - G)^{-1} I + G_P - bT \right]}$$

Esta ecuación es de equilibrio y nos dice que el producto agregado o total de la economía ***PY*I** será igual *por casualidad* a la expresión de la derecha, donde están una versión nueva del multiplicador keynesiano **1**/(**1**-***b***), el conjunto de los medios de producción empleados, el Gasto Público $\boldsymbol{G}_{\mathrm{P}}$ y los impuestos ***T***. Hay que insistir en lo de la casualidad, porque nada hay en el comportamiento de los consumidores que indique que van a consumir -a partir de una propensión al consumo ***b***- una cantidad que haga igual el lado izquierda de (28) con el derecho. En cambio, sí podemos darle la vuelta a (28) y considerarlo como una guía para el gobierno en cuanto a la relación y cantidades entre gastos públicos e impuestos, de tal forma que estos alcancen niveles que hagan posible esa igualación. Dicho de otra manera, la ecuación (28) sólo puede cumplirse si, desde lo público, se buscan niveles de gasto público e impuestos tales que, dados la propensión al consumo ***b***, los precios ***P***, los productos finales ***Y*** y los medios de producción ***X***, se cumpla la igualdad (28). Si despejamos los gastos públicos para tener una idea algebraica para tal fin obtenemos:

(29) $$\boxed{G_P = (1-b)PYI - PXI + bT}$$

En (29) tenemos los niveles de gasto público $\boldsymbol{G}_{\mathrm{P}}$ necesarios para mantener la igualdad (el equilibrio) entre producción y gasto de la ecuación (27). En (29) se puede comprobar que si tomamos el producto neto ***PY*I-*PX*I** como numerario y reducimos los salarios ***W***, las tasas de ganancias ***G*** y las tasas máximas de ganancia $\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}}$ a un escalar, entonces la ecuación (29), con las sustituciones pertinentes de (23) a (27), se convierte en la ecuación (14), solo que con la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$ en lugar de la razón-patrón ***R***. Estamos pues muy lejos del modelo keynesiano-versión Hicks-Hansen[3] de equilibrio *IS-LM*, porque aquí nada asegura que, sin el concurso de lo público, pueda haber equilibrio y, por tanto, reproducción del sistema. Y eso a pesar de que hemos empujado desde el principio al equilibrio, porque hemos supuesto que *la inversión deseada* keynesiana $\mathbf{I}_{(K)}$ sea igual al valor de todos los medios de producción esrafianos $\boldsymbol{PX}\mathbf{I}$, es decir, (26). Con la (29) en la mano, un gobierno podría combatir o paliar las crisis debidas a una caída de la demanda –o por cualquier cosa que implique desequilibrio en (28)- subiendo el gasto público, o lo contrario si el hecho fuera una subida de la demanda. También puedo hacerlo con los impuestos $\boldsymbol{T}$, pero en sentido contrario al gasto público que hemos visto. ¿Y dónde está Sraffa en (29)? Pues justo en los fundamentos, porque de (23) y (24) se obtiene la ecuación de precios: $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{LW}(\mathbf{I}_d+\boldsymbol{G})(\boldsymbol{G}_m-\boldsymbol{G})^{-1}\boldsymbol{X}^{-1}$, que sustituida en (29) queda:

(29bis) $$\boxed{G_P=(1-b)LW(I_d+G)(G_m-G)^{-1}(X^{-1}Y-I_d)I+bT}$$

Si para hacer más realista el modelo introducimos además el sector exterior, siendo $\boldsymbol{E}_X$ las exportaciones e $\boldsymbol{I}_M$ las importaciones, el modelo quedaría igual que el anterior sólo que con la ecuación (27) convertida en:

(30) $$PYI=C+I_{(k)}+G_P+E_X-I_M$$

Con la anterior y el resto de ecuaciones de la (23) a la (28), obtenemos la ecuación casual –no causal, no hay errata- de equilibrio análoga a la (28):

(31) $$\boxed{PYI=\frac{1}{1-b}\times\left[LW(I_d+G)(G_m-G)^{-1}I+G_P-bT+E_X-I_M\right]}$$

Y despejando el Gasto Público que, junto a los impuestos, es un factor autónomo (relativamente al menos) porque dependen de los gobiernos, tenemos:

(32) $$G_P=(1-b)PYI-PXI+bT-E_X+I_M$$

[3] A nivel de introducción se puede ver *Microeconomics* de Olivier Blanchard, 2000 (*Microeconomía*, edit. Prentice Hall), que es un manual muy utilizado en la enseñanza universitaria.

Lo notable del modelo es que nos da un tratamiento a partir de lo público (gasto público e impuestos) apenas con hipótesis condicionantes. Partimos de fundamentos *esrafianos* con ***n*** tasas de salario, ganancia y ganancia máximas, y, en realidad, sólo se han hecho dos hipótesis de comportamiento económico: una relación entre renta disponible y consumo, y una reproducción de las inversiones al permanecer estables, es decir iguales de un año para otro, los medios de producción (Sraffa) o inversión (Keynes). En (29), (30), (31) y (32) no aparecen las variables esrafianas, pero están implícitas, porque para eso hemos conectado a Keynes con Sraffa. En efecto, de (23) y (24) obtenemos el vector de precios de equilibrio:

(33) $$P = LW(I+G)(G_m - G)^{-1} X^{-1}$$

y sustituidos los precios en (32), sale una ecuación de equilibrio –por casualidad- tal como:

(34) $$G_P = LW(I_d + G)(G_m - G)^{-1}\left[(1-b)X^{-1}Y - I_d\right]I + bT - E_X + I_M$$

En esta ecuación como en las anteriores, el equilibrio se da si es buscado, porque en realidad conecta dos aspectos de la realidad que no tienen nada que ver: por un lado, los deseos de los consumidores ***b***, los salarios ***W***, las ganancias deseadas ***G***, las exportadores $\boldsymbol{E}_X$ y las importadores $\boldsymbol{I}_M$; y por otro lado, el nivel de desarrollo de la economía dado por los inputs de trabajo ***L***, los productos finales ***Y***, los medios de producción ***X*** y las tasas máximas de ganancia $\boldsymbol{G}_M$ (que depende a su vez de ***X*** y de ***Y***).

Vamos a dar otro paso más y haremos dos supuestos adicionales: que las importaciones, su demanda, depende de los niveles de renta y que el Estado desea mantener equilibrio los ingresos públicos con los gastos públicos. Hacemos ahora explícitos todas las ecuaciones que definen el sistema:

(35) $$PY = \left[LW + PX\right](I_d + G)$$

(36) $$PY = PX(I_d + G_m)$$

(37) $$PYI = C + I_{(k)} + G_P + E_X - I_M$$

(38) $$C = b[PYI - T]$$

(39) $$I_{(k)} = PXI$$

(40) $$I_M = cPYI$$

(41) $$G_P = T$$

Como puede comprobarse, hemos añadido las ecuaciones (40) y (41) al sistema anterior. La primera (40) indica esa relación de los modelos keynesianos de que las importaciones (su demanda) depende de los niveles de renta del país importador; la (41) es fruto de un deliberado comportamiento de lo público a medio y largo plazo, aunque nada hay en el mundo real que demuestre que eso sea óptimo desde, por ejemplo, el lado del empleo. Hemos tenido que acomodar la (37) -que es la ecuación de equilibrio global del sistema- para dar entrada tanto a las exportaciones como a las importaciones. Del conjunto de ecuaciones que van de la (37) a la (41) se obtiene la siguiente ecuación que se corresponde con el típico multiplicador keynesiano, aunque rebajado por la relación de proporcionalidad que se ha supuesto entre importaciones y producto agregado:

(42) $$PYI = \frac{1}{1-b+c} \times [PXI + (1-b)G_P + E_X]$$

(42) $$\boxed{PYI = \frac{1}{1-b+c} \times [LW(I_d + G)(G_M - G)^{-1} I + (1-b)G_P + E_X]}$$

Como en los casos anteriores esta igualdad es sólo posible si el gasto público actúa como compensador del sector privado como para evitar caer en desequilibrio. Eso no quita para ver el efecto de *la propensión al consumo* de Keynes ***b*** y la producción agregada ***PY*I**. Ello nos da *el multiplicador* **1**/(**1**-***b***+***c***). Es útil valorar cómo crece ***PY*I** ante variaciones del resto de las variables.

(43) $$\frac{dPYI}{dc} < 0 \quad \frac{dPYI}{dG_P} > 0 \quad \frac{dPYI}{dE_X} > 0$$

El valor de la derivada del producto agregado ***PY*I** respecto a la propensión al consumo ***b*** de Keynes va a depender de los valores del resto de las variables. Y el resto de las variaciones del producto agregado respecto a las variables explícitas son típicas de los modelos keynesianos. Ahora procedemos, como de costumbre, sustituyendo la ecuación de precios que salen de la ecuación (35) de definición del sistema esrafiano y de la (36) que surge al hacer cero la matriz diagonal de salario ***W***. Es decir, sustituyendo:

$$P = LW(I + G)(G_m - G)^{-1} X^{-1} \tag{44}$$

en (42) y, tras algunas transformaciones algebraicas elementales y trasponiendo términos, queda:

$$G_P = \frac{1}{1-b} \times \left[LW(I_d + G)(G_m - G)^{-1} \left[(1-b+c) X^{-1} Y - I_d \right] I - E_X \right] \tag{45}$$

Y (45) nos da el nivel de gasto público compensatorio que iguale el lado derecho de la ecuación. Puede observarse que la necesidad de gasto público con el fin de equilibrar el sistema, es proporcional a los salarios ***W***, creciente –aunque no proporcional- con las tasas de ganancia ***G*** de la economía privada, proporcional respecto a la propensión de las importaciones ***c***, creciente respecto a las tasas máximas de ganancia (tasas a su vez proporcionales del excedente, es decir, de $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{Y}$) e inversamente proporcional a las exportaciones, como cabía esperar. Es notable la riqueza de información contenida en (45), lo delicado que es el gasto público equilibrador, y que todo esto se haya conseguido a partir de supuestos tan sencillos como los implicados. Resumiendo, todo surge de las dos propensiones keynesianas (las del consumo y las de las importaciones) y de los dos supuestos de reproducción equilibrada del sistema: el de las inversiones y el del equilibrio del presupuesto público. Este modelo tan simple requiere un cálculo preciso del gasto público para mantener la economía en equilibrio por los efectos del multiplicador keynesiano $\mathbf{1}/(\mathbf{1}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$, que actúa como altavoz de los valores del resto del sistema. La excepción son las exportaciones, que es independiente del multiplicador al depender aquellas del desarrollo y crecimiento de los países con los que se comercia.

Quizá lo más importante de lo anterior en este modelo es que no hay fuerza ni comportamientos de los mercados que lleven a la economía al equilibrio. Más bien todo lo contrario, porque los actores del drama tienen intereses propios que no son necesariamente acordes con posibles objetivos de optimización del crecimiento o de reparto de la renta, por ejemplo. Con este modelo representando a la economía de un país, el desequilibrio entre oferta agregada y demanda agregada sería la norma y no la excepción. Y todo ello a pesar del supuesto hecho de la igualdad entre *inversión deseada* keynesiana $\mathbf{I}_{(k)}$ y medios de producción esrafianos ***PX*I**.

Con el fin de acercarnos a la realidad sin perder capacidad de explicación (es decir, teoría), podemos generalizar aún más la ecuación de definición del sistema con la siguiente:

(46) $$P_y Y + PX = \left[LW + PX \right](I_d + G)$$

donde en (46) hemos separado los bienes básicos (la matriz ***X***) de los no básicos (la matriz ***Y***). Además, esta última matriz de bienes básicos no la tenemos que mantener cuadrada, sino que podemos tenerla con un número de filas ***m*** mayor que el de columnas ***n***, que es tanto como decir que el número de bienes no básicos son mayores que los básicos. O Simplemente la podemos suponer distinta, es decir, con ***m*** distinta de ***n***. A gusto del lector. De esta surge la ecuación típicamente esrafiana cuando los salarios ***W*** se hacen cero:

(47) $$P_y Y + PX = PX\,(I_d + G)$$

Otra ecuación que cambia es la de las importaciones, porque en este caso dependen proporcionalmente tanto de lo bienes básicos como de los no básicos:

(48) $$I_M = c\left[PYI_M + PXI \right]$$

El resto de las ecuaciones son (37), (38), (39) y (41). De estas, más la (46), (47) y (48) anteriores, surge la ecuación del multiplicador de la renta habitual con alguna modificación:

(49) $$\boxed{P_y YI = \frac{1}{1-b+c} \times \left[E_X - cLW\,(I_d + G)(G_M - G)^{-1} I + (1-b)\,G_P \right]}$$

Y donde (49) ya no nos da el multiplicador de toda la producción agregada (***PYI***), sino la de los productos no básicos ($\boldsymbol{P}_{y}\boldsymbol{YI}$). El Gasto Público de equilibrio ha de estar fijado mediante:

(50) $$\boxed{G_P = \frac{1}{1-b} \times \left[(1-b+c)P_y YI + cLW(I_d + G)(G_m - G)^{-1} I - E_X \right]}$$

Estimación de la tasa máxima de ganancia.

Este maridaje entre Sraffa y Keynes guarda también otros aspectos de interés. La mayor innovación respecto a los puros modelos keynesianos son las inquietantes tasas máximas de ganancia. Aunque no se pueden desligar en este modelo de los precios $\boldsymbol{P}$ –a diferencia que en la producción simple de Sraffa-, aquí podemos considerar la posibilidad de extraerlos de la ecuación (36) si convertimos la matriz diagonal de tasas máximas $\boldsymbol{G}_{\mathrm{M}}$ en un escalar mediante las ecuaciones:

$$(51) \qquad PYI - PXI = PXG_m I = g_m PXI$$

Y despejando el escalar (una media) de las tasas máximas $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$. De (51), por definición, se obtiene que esa tasa máxima única de ganancia $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$ es una medida del excedente. En efecto, de (51) sale:

$$(52) \qquad g_m = \frac{P(Y - X)I}{PXI}$$

De lo anterior podemos conjeturar que existe una relación entre $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$ y la expresión $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{Y}$ que ya ha aparecido en (45). Una forma de calcular mediante el método de prueba y error las tasas máximas de ganancia es con (44). Ahí vemos que podemos aumentar las tasas de ganancia hasta acercarlas a las máximas porque tenemos un criterio para tal acercamiento: los precios. Aquellas serán máximas cuando los precios tiendan a infinito y pasen súbitamente a precios negativos viniendo desde el infinito. Aunque Sraffa no aporta casi nunca los aspectos formales de sus deducciones, este método aparece implícito –o se puede deducir de ello- en el apéndice *B* de su libro sobre "*los productos no básicos que se auto- reproducen*", donde, en cambio, sí aparece un gráfico que justifica (44). La expresión $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{Y}$ es importante por varias cosas: porque aparece (45) para determinar el gasto público de equilibrio; porque es genuino de la aportación de Sraffa en este modelo que en un principio parece sesgado al lado de Keynes; porque es una medida del excedente, porque da la ganancia máxima, y por último, porque es a su vez una medida de la productividad del sistema, aunque no referido directamente a los inputs de trabajo. En efecto, cuanto más altos sean los elementos de la matriz resultante $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{Y}$, más alto serán la productividad del sistema, más amplio el excedente y mayores las tasas máximas posibles del sistema. Y hay que recordar que el Gasto Público en (45) es proporcional a $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{Y}$.

Otra forma de abordar la estimación de las tasas máximas de ganancia es como sigue. Por un lado tenemos la ecuación de precios derivada de la definición del sistema (35):

(53) $$P = LW(I_d + G)\left[Y - X(I+G)\right]^{-1}$$

Por otro la ecuación de precios derivada de hacer cero las tasas de salario también en la ecuación de definición del sistema (35):

(54) $$P = LW(I_d + G)\left[(G_m - G)^{-1}X^{-1}\right]$$

A simple vista se puede observar que se puede establecer una relación lineal entre la resultante de la matriz entre corchetes de (53) y la de (54) y por ello se puede establecer la siguiente relación:

(55) $$\left[Y - X(I_d + G)\right]^{-1} = \left[(G_m - G)^{-1}X^{-1}\right]F$$

siendo ***F*** una matriz *diagonal* que podemos calcular porque tenemos ***n*** ecuaciones y ***n*** incógnitas. Si ahora hacemos las tasas de salario igual a cero, la nueva relación de (50) queda:

(56) $$\left[Y - X\right]^{-1} = G_m^{-1}X^{-1}H$$

siendo a su vez ***H*** la nueva matriz diagonal que hace posible (56). Y pre-multiplicando (51) por $\boldsymbol{G}_m$ y post-multiplicando por ($\boldsymbol{Y}$-$\boldsymbol{X}$) sale:

(57) $$G_m = X^{-1}H(Y - X)$$

Y (57) puede escribirse como:

(58) $$G_m = X^{-1}H(Y - X) = MX^{-1}Y$$

Con $\boldsymbol{M}$ también como matriz *diagonal* -y dependiente de $\boldsymbol{H}$- que permite estimar las tasas máximas de ganancia. La ecuación (58) nos dice que las tasa máximas de ganancia son proporcionales a una media ponderada de los coeficientes de productividad del sistema que representa $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{Y}$.

II – Generalización del modelo integrado: la función de inversión.

Vamos ahora a completar el modelo *Keynes-Sraffa* de funcionamiento de una economía con otra pieza básica: la inversión. Hasta ahora no hemos supuesto comportamiento alguno sobre la inversión planeada keynesiana porque al igualarla al conjunto de los medios de producción empleados ha quedado camuflado en esta condición de equilibrio. En Keynes permanece esa confusión entre el capital como una suma de dinero y como un conjunto de bienes de producción, porque sigue la tradición neoclásica de que lo que importa "*es la relación entre el rendimiento probable de un bien de capital y su precio de oferta o de reposición, es decir, la que hay entre el rendimiento probable de una unidad más de esa clase de capital y el costo de producirla*"[4]. Esa relación nos da "*la eficiencia marginal del capital*"[5], concepto que el propio Keynes recoge de Irving Fisher en el libro de este último *Theory of Interest*. Aceptando que un bien de capital en Keynes es equivalente a un medio de producción en Sraffa, la idea de la eficiencia marginal del capital entraña la posibilidad de ordenar los diferentes proyectos de inversión (los del pasado y los planeados) de acuerdo con lo que en lenguaje financiero es *la tasa interna de rendimiento* de las inversiones o tasa de retorno, entendidas estas antes de su concreción como un monto de dinero dispuesto a la compra/creación de bienes de capital físico. Con la salvedad de que Keynes es un economista y no un simple financiero o mero contable –como los que salen de las escuelas de negocios de ahora- y sabe que lo relevante desde el punto de vista global –lo que será luego la macroeconomía- son los bienes de capital físicos y que son activos en sí mismos, mientras que los activos financieros tienen sus correspondientes pasivos (son activos para los que lo poseen y pasivos para los que los emiten), por lo que se compensan entre sí. Y lo que queda en la retribución del capital financiero (o monto de dinero dispuesto para la inversión) es la posibilidad de arañar a la tasa de ganancia derivada de la economía real una proporción de ella. Sin embargo, la dificultad de distinguir entre ambos es grande –e interesada- como se ve en la que el propio Keynes recoge de Fisher de *tasa de rendimiento sobre* coste como aquella que "*usada para medir el valor presente de todos los costos y el de todos los rendimientos igualará ambos*"[6]. Se vuelve de nuevo a la confusión, sin saber

[4] Teoría General del Interés, la Ocupación y el Dinero, FCE, 1992 (1932), pág. 125.
[5] Teoría General del Interés, la Ocupación y el Dinero, FCE, 1992 (1932), pág. 129.
[6] Teoría General del Interés, la Ocupación y el Dinero, FCE, 1992 (1932), pág. 129.

exactamente si ese valor presente de los costes se refiere a un monto de dinero o al desgaste del capital (amortización) como medio de producción físico. Sobreentendemos que se refiere a esto último. En definitiva, lo de *la eficiencia marginal del capital* ha de entenderse como un método de ordenación de la rentabilidad de las inversiones en medios de producción (aquí se enlaza con Sraffa), de tal manera que, a mayor exigencia en la tasa de rentabilidad (o rendimiento), menores inversiones (gastos, monto de dinero) en medios de producción; y, a menor rentabilidad, mayor dedicación a aumentar esos medios. Con ello se puede escribir la siguiente ecuación de comportamiento de la inversión (real, en medios de producción):

(59) $$I_{(k)} = PDXe^{-rt}$$

siendo ***P*** el vector de precios de medios ya conocido, ***D*** una matriz diagonal de *coeficientes de proporcionalidad* que nos da el gasto en inversiones en función de los medios utilizados ***X*** y ***r*** *la tasa de interés del capital* que pretende evaluar la eficiencia marginal del capital keynesiano. Esta tasa es diferente de la tasa de rendimiento interno de las inversiones antes apuntada, pero íntimamente relacionada mediante:

(60) $$I_{(k)} = \sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{R_i}{(1+r_k)^i}$$

con $\boldsymbol{r}_{\mathrm{k}}$ como *tasa interna de rendimiento de las inversiones*. En realidad (60) sería también una ecuación de equilibrio, porque esa tasa interna es la que iguala los rendimientos actualizados (lado derecho de la ecuación) con los costes (véase la definición de Fisher anteriormente aludida). Con lo anterior vamos a especificar un nuevo *modelo integrado Keynes-Sraffa* con las siguientes ecuaciones:

(61) $$P_y Y + P_z Z = \left[LW + PX\right](I_d + G)$$

donde $\boldsymbol{P}_{\mathrm{y}}$ son los ***m*** precios de bienes de consumo (no básicos), ***Y*** la matriz ***m***x***n*** de ***m***x***n*** bienes de consumo, $\boldsymbol{P}_{\mathrm{z}}$ los ***n*** precios de los ***n***x***n*** productos finales ***Z*** que se utilizan como medios de producción en el período siguiente (básicos), ***P*** los precios de medios del producción de la matriz ***X*** que es ***n***x***n***. El resto de las variables ya se han definido con profusión anteriormente. De (56) surge:

(62) $$P_y Y + P_z Z = PX(I_d + G_m)$$

al hacer cero la matriz diagonal de salarios ***W***. Entonces $\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}}$ sería la matriz de tasas de ganancia máxima que ya hemos visto que se puede estimar mediante $\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{Y}$, siendo ***M*** una matriz diagonal que establece esa proporcionalidad entre tasas máximas y relaciones producto/medio, aunque en este caso puede variar esa relación al separar en el producto final bienes de consumo ***Y*** y medios de producción producidos ***Z***. La ecuación de equilibrio del sistema keynesiano es como sigue:

(63) $$P_y YI + P_z ZI + I_M = C + I_{(k)} + G_P + E_X$$

A veces se presenta la anterior como una identidad, pero es un error, una manera de sobrevivencia de la *ley de Say*. Que es un equilibrio –si lo es- se debe a que los actores de esas demandas y ofertas no son los mismos, o al menos, no coinciden exactamente, y las motivaciones son distintas. Partimos de entrada de esa situación y que los precios, su variabilidad, han obrado el milagro de (63). La ecuación del consumo ***C*** es la keynesiana habitual de aquel como una proporción estable de la renta disponible para el gasto, que traducida al modelo que presentamos, es el conjunto de bienes de consumo ***Y***:

(64) $$C = b\left[P_y YI - T\right]$$

que no exige más explicación, aunque recordamos que ***T*** son los impuestos (todos) del sistema y ***b*** la propensión al consumo keynesiana. Pues bien, del conjunto de ecuaciones que van de la (59) a la (64), donde la (61) y (62) son esrafianas y el resto keynesianas, obtenemos el multiplicador de la renta (del producto de bienes de consumo en nuestro caso):

(65) $$P_y YI = \frac{1}{1-b} \times \left[G_P - bT + E_X - I_M + PDXe^{-rt}I - P_z ZI\right]$$

Al igual que en los modelos anteriores, la ecuación (65) sólo puede existir con el signo de igualdad si el Gasto Público $\boldsymbol{G}_P$ y los impuesto $\boldsymbol{T}$ se establecen a propósito. Si ahora establecemos la condición de equilibrio presupuestario, es decir, si hacemos que:

(66) $$G_P = T$$

y despejamos el Gasto Público $\boldsymbol{G}_P$, se obtiene la ecuación que podríamos llamar de *gasto público compensatorio*:

(67) $$\boxed{G_P = P_y YI - \frac{1}{1-b} \times (E_X - I_M) + \frac{1}{1-b} \times \left[PZ_Z I - PDXe^{-rt} \right]}$$

De la realidad que hay detrás de las variables en (67) podemos asegurar que nada augura que pueda darse la igualdad por las fuerzas del mercado. Veamos: los precios de los bienes de consumo $\boldsymbol{P}_y$ y de medios de producción obtenidos $\boldsymbol{P}_z$ responden, en el mejor de los casos, a las leyes de oferta y demanda de sus mercados, y no tienen que ver ni con el déficit (o superávit) exterior $\boldsymbol{E}_X$-$\boldsymbol{I}_M$, ni con las decisiones de inversión que intenta recoger $\boldsymbol{PDXe}^{-rt}\mathbf{I}$; las exportaciones responden a los deseos de consumo de los países con los que se comercia; las decisiones de inversión tienen que ver con los tipos de interés financiero $\boldsymbol{r}$ con los que se está operando y/o previendo que van a dar en el futuro. Son actores y mercados distintos que responden motivaciones distintas. Sólo desde lo público se puede establecer un nivel del gasto público que produzca la igualdad (67). Vemos ya lo alejado que estamos del modelo de equilibrio *IS-LM* de Hicks-Hansen. Con el fin de simplificar el modelo, vamos a suponer que los medios de producción producidos $\boldsymbol{Z}$ y su precios son los mismos que los medios empleados $\boldsymbol{X}$ y también sus precios, es decir, que se cumpla:

(68) $$P_z Z = PX$$

Con ello (62) queda en:

(69) $$G_P = P_y YI - \frac{1}{1-b} \times (E_X - I_M) + \frac{1}{1-b} \times P\left[X - DXe^{-rt} \right] I$$

Viendo (69) apenas hemos pasado de Keynes a Sraffa, pero es ahora cuando se va a poder utilizar las ecuaciones de definición del sistema (61) más la (62) de definición al hacer cero los salarios ***W***, más la (68) de igualación de medios de producción y sus precios con los productos finales, que van a ser medios a su vez en el período siguiente (básicos). Manipulando algebraicamente estas ecuaciones y sustituyéndolas convenientemente en (69) quedan:

$$\boxed{P_y YI = G_p + \frac{1}{1-b} \times \left[(E_X - I_M) + LW(I+G)(G_m - G)^{-1}(X^{-1}DXe^{-rt} - I_d \right] I} \tag{70}$$

$$\boxed{G_P = \frac{1}{1-b} \times (I_M - E_X) + \frac{1}{1-b} \times LW(I+G)(G_m - G)^{-1}\left[(1-b)G_m + I_d - X^{-1}DXe^{-rt} I_d \right] I} \tag{70b}$$

Aquí las variables monetarias son las ganancias, los salarios y la tasa interna de rendimiento de la inversión ***r***, que está relacionada con la eficiencia marginal del capital de Keynes con (59) y (60). No así, en cambio, las ganancias máximas, que hemos visto que dependen muy directamente de los medios de producción y de los productos finales (58). En este *modelo integrado Keynes-Sraffa* no hay posibilidad de que los precios jueguen ningún papel equilibrador en la ecuación anterior simplemente porque no están. Tampoco pueden jugarlo salarios y ganancias que responden a los deseos de trabajadores y empresarios en mejorar sus rentas. Y nada tiene que ver éstas con los posibles déficits comerciales o con las decisiones de inversión, con la salvedad de que es posible que una mejora de las ganancias ***G*** permitan abordar inversiones en medios de producción independientemente de las tasas de retorno o rendimiento de las inversiones planeadas.

Resulta tentador establecer algún tipo de relación formal entre estas tasas de ganancia ***G*** en pos de la disputa del excedente y las tasas de rendimiento interno ***r*** que van a incidir en la inversión futura. Ello exige conectar dos mundos muy diferentes: el esrafiano de la lucha por el excedente y el keynesiano de la inversión a través de la evaluación de la eficiente marginal del capital. Demasiado distintos como para forzar su conjunción. Mejor dejar ambas como variables exógenas, al menos en este modelo. Cosa distinta sería si completáramos el mismo con la teoría keynesiana de la demanda de dinero y su preferencia por la liquidez[7]. En (70) se puede ver que hay una relación creciente (a veces proporcional) entre gasto público $\boldsymbol{G}_{P}$ y déficit comercial ($\boldsymbol{I}_{M}$-$\boldsymbol{E}_{X}$), propensión marginal al consumo $\boldsymbol{b}$, salarios $\boldsymbol{W}$, tasas de ganancia $\boldsymbol{G}$ y tasa de rendimiento $\boldsymbol{r}$. Con las tasas de ganancia máxima es ambiguo. Dicho de otra manera, *si se quiere mantener el equilibrio en la economía y no caer en ciclos o recesiones –o lo contrario-, ha de aumentarse el gasto público si aumenta el déficit comercial, la propensión al consumo, los salarios, las tasas de ganancia y la tasa de rendimiento interno de las inversiones planeadas; ha de reducirse si ocurre lo contrario.*

La mayor parte de la explicación económica de estas dependencias que surgen de (70) se derivan de la necesidad de mantener en equilibrio del sistema retratado en (63), pero también al efecto multiplicador típico keynesiano de la propensión al consumo $\boldsymbol{b}$, que hace que un aumento suyo haga aumentar las rentas y con ello el consumo y la producción. Este es el caso de los impuestos $\boldsymbol{T}$ en (64), que aumentan al aumentar la propensión al consumo debido a un aumento de la renta disponible para el gasto derivada del consumo en bienes (no básicos $\boldsymbol{Y}$); con ello ha de aumentarse el gasto público para mantener el equilibrio presupuestario. Por otro lado, en (68) vemos que si da equilibrio en el sector exterior –es decir, si $\boldsymbol{I}_{M}$=$\boldsymbol{E}_{X}$- el resultado final es nulo en cuanto a la incidencia en el gasto público, pero si se produce un déficit porque las importaciones superen a las exportaciones, ha de aumentarse el gasto público para igualar la demanda con la oferta en (63); ha de reducirse si sucede lo contrario. En este modelo no hay un mecanismo vía *producción-renta-consumo* que permita equilibrar los déficits exteriores, porque no se ha supuesto dependencia entre las importaciones y la producción interna, pero en los modelo keynesianos habituales sí se hace.

No hemos tomado ningún numerario, por lo que estas afirmaciones se pueden hacer en términos relativos, es decir, en términos del numerario que se tome. En el caso de Keynes el candidato a numerario sería lo que el llama *los salarios nominales*[8]. No se ha hecho porque eso nada hace cambiar las conclusiones, salvo que se

[7] Teoría General del Interés, la Ocupación y el Dinero, FCE, 1992 (1932), pág. 218.
[8] Teoría General del Interés, la Ocupación y el Dinero, FCE, 1992 (1932), pág. 231.

suponga un comportamiento distinto para el consumo entre los salarios nominales y los reales (descontados la inflación).

Resumiendo lo aportado, se puede afirmar que en este modelo de la función de consumo y de inversión ambos economistas han aportado lo característico de ambos: Keynes su función de consumo basado en la estabilidad (supuesta) de la propensión al gasto y la decisión planeada de inversión basada en la eficiencia marginal del capital (íntimamente relacionada con la tasa de rendimiento interno de la inversión); Sraffa ha aportado su modelo económico de formación de los precios basado en un margen sobre los costes (ecuación de definición del sistema) más la tasa máxima de ganancia dependiente los medios de producción y productos finales, que es en sí misma una medida del excedente. Y del maridaje de ambos se ha producido una verdadera integración en (70), donde han desaparecido los precios y nos hemos quedado con lo característico de ambos: propensión al consumo, tasa de interés según eficiencia marginal, tasas de ganancia, tasas de salarios y tasas máxima de ganancia como medida del excedente. Y este modelo corrobora la idea de Keynes de la demanda efectiva. De hecho, la igualdad en (70) sólo es posible mediante un acto deliberado del Estado aportando un gasto público equilibrador. Y nos indica el camino antes señalado para combatir el ciclo. Y todo eso a pesar de las concesiones al equilibrio que se han hecho: se ha partido de un equilibrio entre la demanda agregada con la oferta agregada (63), se ha equilibrado el presupuesto (66) y se han igualado los medios y precios de los productos producidos con los empleados (68). La visión neoclásica –imperante en los textos que se enseñan- ha quedado abandonada, las neo-keynesianas amoldables a los supuestos neoclásicos de flexibilidad de precios y salarios también quedan apartadas, y la keynesiana de la demanda efectiva ha mostrado los límites y las condiciones previas para mantener su eficacia en la lucha contra los ciclos y crisis mediante una política compensatoria del gasto público. El modelo se podría complicar aún más si hiciéramos depender las importaciones de la producción interna o si no se respetaran los equilibrios mencionados.

La demanda de dinero keynesiana.

En la obra de Sraffa *Producción de mercancías por medio de mercancías* no intenta siquiera esbozar algo parecido a una teoría de la inflación que pudiera derivarse de su modelo. No obstante, en el apéndice B que lleva el largo título de “Notas sobre productos no-básicos que se auto reproducen”, contempla la posibilidad de que los precios de un producto aumentaran exponencialmente si “una mercancía entra en su propia producción de en un grado desusadamente grande”. Pone como ejemplo las habas aunque creo que podría haber puesto cualquier otro producto. Como es habitual Sraffa no hace explícita las ecuaciones de definición de su sistema, lo cual dificulta seguir el razonamiento económico que sigue. El argumento de Sraffa es que un producto no-básico puede aumentar su precio sin límite por que se le aplique una tasa de ganancia superior a la media dado que eso dará lugar origen a un precio que no va a influir en el resto de los precios –y por tanto en los precios de productos finales que compran medios de producción- por ser precisamente no-básico.

Pues bien, el caso de las habas de Sraffa se puede generalizar a partir de su propio esquema. Partimos de la ecuación que define su modelo, pero con tasas de ganancia *pre-factum* del tipo:

(1) $$PY = (1+g)\left[PX + wL\right]$$

donde $\boldsymbol{P}$ es el vector de precios $\boldsymbol{1}$x$\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{Y}$ la matriz cuadrada diagonal $\boldsymbol{n}$x$\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{g}$ la tasa de ganancia, $\boldsymbol{X}$ la matriz $\boldsymbol{n}$x$\boldsymbol{n}$ de medios de producción, $\boldsymbol{w}$ la tasa de salarios y $\boldsymbol{L}$ el vector de inputs de trabajo. Conseguido (1) obtenemos (2) haciendo cero el tipo de salarios:

(2) $$PY = (1+g_M)PX\,]$$

donde lo nuevo es que ahora a la tasa de ganancia media $\boldsymbol{g}$ se le añade la tasa de ganancia máxima $\boldsymbol{g}_M$ a consecuencia del supuesto sobre los salarios. De las ecuaciones (1) y (2) se obtiene:

(3) $$P = \frac{w(1+g)}{g_M - r} \times LX^{-1}$$

La inflación de (3) se deriva de que si los empresarios, gestores, etc. aumentaran la tasa de ganancia hasta acercarlas a $\boldsymbol{g}_{\mathrm{M}}$ entonces el quebrado de (3) aumentaría sin límite. Sin embargo en el modelo de Sraffa el dinero y su demanda no juega ningún papel nada más que sabemos existe en la economía real. Parece un vacío de Sraffa, aunque comprensible, si el italiano lo que sólo deseaba era atacar a neoclásicos y marginalistas. Ahora bien, en el esquema de Sraffa, salarios y ganancias se determina a partir de la resolución del sistema conjuntamente con los precios. Si ahora tuviéramos aparte un modelo de que relacionara las ganancias de Sraffa con una variable que representa el dinero en circulación, la oferta monetaria o la cantidad de dinero (hay varias posibilidades), entonces, de la coyunda de ambos modelos debería surgir otro mixto donde los precios estarían relacionados explícitamente con la variable monetaria mencionada. Pues bien, el libro de Keynes *Teoría general de la ocupación, el interés y el dinero* ofrece semejante posibilidad. En su página[9] 154 señala tres posibles de demanda de dinero y sus motivos: por la necesidad de efectuar transacciones "para operaciones corrientes de cambios, personal y de negocios"; el segundo es el de "precaución" por "el deseo de seguridad ante el futuro"; el tercero es el "especulativo" para conseguir ganancias "por saber mejor lo que el mercado traerá consigo". Según esto, una posible ecuación que concretara lo anterior podría ser:

(3) $$M_d = h(PYI, g)$$

donde $\boldsymbol{M}_{\mathrm{d}}$ es la demanda de dinero, ***PYI*** es el valor del producto final tal y como la medimos en el modelo de Sraffa y $\boldsymbol{g}$ es la misma tasa o tipo que se han utilizado en las ecuaciones que definen la economía de Sraffa. Es verdad que no parece fácil fusionar en una misma variable la tasa de ganancia *esrafiana* que mide las ganancias ganadas con la tasa de interés keynesiana que da origen a la demanda de dinero por motivos especulativos. Pero no haremos diferenciación y supondremos que ambas son la misma tasa. ***PYI*** representa el nivel de producción keynesiano, pero con las variables que recoge el modelo de Sraffa. Lo característico de (3) es que:

[9] En FCE

(4) $$\frac{dM_d}{dPYI} > 0$$

(5) $$\frac{dM_d}{dg} < 0$$

es decir, que la demanda de dinero aumenta con la actividad económica y disminuye con el deseo "de saber lo que el futuro traerá consigo", es decir, debido a la incertidumbre sobre el futuro.

Supondremos ahora que la demanda de dinero $\boldsymbol{M}_{\mathrm{d}}$ se corresponde con la variable monetaria de la que va a ser la autoridad monetaria o gubernamental, que suele ser la oferta monetaria. Puesto que es una autoridad pública o no condicionada por intereses privados se puede suponer –pero se puede hacer otros supuestos- que es autónoma, es decir, que la autoridad fija los niveles de la oferta en función del interés general. Suponiendo que ello es así, si la demanda de dinero es satisfecha por la oferta, surge la ecuación:

(6) $$M = h(PYI, g)$$

Ahora, como nos interesa eliminar la tasa de ganancia del modelo, convertimos en dependiente (endógena) la tasa de ganancia $\boldsymbol{g}$, de tal forma que (6) queda:

(7) $$g = h^{-1}(PYI, M)$$

cuyas derivadas respecto al nivel de producción ***PYI*** es positiva y respecto a la oferta monetaria $\boldsymbol{M}$ es negativa. Si ahora sustituimos (7) en (3) y pos-multiplicamos la ecuación por el vector de unos **I**, es decir, sumamos los precios, queda:

(8) $$PI = \frac{w(1 + h^{-1}(PYI, M))}{g_M - h^{-1}(PYI, M)} \times LX^{-1}I$$

Y en (8) hemos conseguido una función implícita de precios y oferta monetaria, donde no se puede obtener los unos en función de la otra, pero ahí están Sraffa (nivel de precios ***PI***) y Keynes (oferta monetaria ***M***). Incluso podemos tomar precios relativos en términos de salario (numerario) dividiendo (8) entre la tasa de salarios ***w***.

Pero (8) no sólo tiene el problema aludido, sino otro más. En efecto, si tomamos el valor de los productos finales ***PYI*** como motivo de demanda ocurre que el nivel de precios (o suma de precios) que queremos explicar en función de la oferta monetaria aparecen en ambos lados de la ecuación. En la macroeconomía que surge con Keynes la producción nacional o el PIB se suele tomar como variable real a pesar de que la producción en términos físicos va valorada a los precios de mercado. Para comparar períodos entre sí lo que se hace es deflactar esa variable mediante algún índice de precios apropiado. Aquí no podemos porque no tenemos ese índice, y de construirlo parece difícil no hacerle depender de la tasa de ganancia ***g***, con lo cual se volvería a caer en problemas de circularidad como ha ocurrido con los precios en ***P*** (8). Por todo ello, vamos a modificar (3) para hacer depender la demanda de dinero de los bienes físicos y servicios sin que aparezcan los precios que son los que han de explicarse posteriormente. Según eso, (3) se convierte en:

(9) $$M_d = h(qYI, g)$$

siendo ***q*** unos multiplicadores semejantes a los multiplicadores de la mercancía-patrón pero que permiten hallar un valor del producto nacional sin referencia a los precios. En cualquier caso, estos multiplicadores deberían estimarse o tomar una medida del producto nacional exento de los precios y de su posible variación de precios. Si ahora repetimos el proceso anterior queda:

(10) $$PI = \frac{w(1+h^{-1}(qYI, M))}{g_M - h^{-1}(qYI, M)} \times LX^{-1}I$$

En (10) vemos que los precios dependen proporcionalmente de los salarios, directamente del nivel de producción (pero no proporcional), directamente de la proporción entre inputs de trabajo ***L*** y medios de producción utilizados en el proceso productivo, inversamente de la tasa máxima de ganancia (que es una medida de la productividad del sistema) y positivamente de la oferta monetaria, aunque no proporcionalmente. La (10) nos dice que los precios aumentan con la oferta monetaria, pero que esa dependencia puede hacerse exponencial si como consecuencia de un aumento de la oferta la expresión $\boldsymbol{h}^{-1}(\boldsymbol{qYI})$ tiende a la tasa máxima de ganancia. Hay que recordar que la expresión anterior era la tasa de ganancia normal del sistema. Luego con (10) se hila la oferta monetaria keynesiana con la tasa ganancia de Sraffa y con su tasa máxima de ganancia. La originalidad que surge del modelo de Sraffa es precisamente esto último: la importancia que tiene la tasa de ganancia habitual $\boldsymbol{g}$ (en este caso sustituidos sus efectos por la oferta monetaria keynesiana) cuando aumenta a la tasa máxima de ganancia. Hay que recordar que esta tasa de ganancia máxima surge ante la imposibilidad de aceptar la razón-patrón de Sraffa cuando nos salimos de la producción simple. En la producción simple la razón-patrón representaba dos cosas muy distintas conceptualmente: una medida del excedente y la máxima ganancia que se puede obtener para que se viable el sistema. Llegado a esta punto, que $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$, es decir esta tasa máxima, sea una sola cosa (ganancia máxima) o la dos (la razón-patrón $\boldsymbol{R}$) va a depender si estamos en la producción conjunta o en la producción simple, respectivamente. Ello a su vez dependerá de la matriz $\boldsymbol{Y}$ de productos finales: si $\boldsymbol{Y}$ es diagonal estamos en la producción simple, si no lo es, es decir, si en $\boldsymbol{Y}$ pueden tener un valor positivo cada uno de sus elementos, entonces estamos en la conjunta *esrafiana.*

Otro paso. Vamos a concretar la función de demanda de dinero con el fin de poder llegar a una ecuación de precios en función de la oferta monetaria que pudiera ser contrastada empíricamente. Sea esta función:

$$M_d = a(q_1 YI)e^{-tg} \tag{11}$$

siendo $\boldsymbol{a}$ un coeficiente que surgirá de la contrastación, $\boldsymbol{e}$ la base de los logaritmos neperianos y $\boldsymbol{q}_1$ es un vector de multiplicadores de los productos finales. En (11) se cumple que la demanda de dinero depende positivamente de la producción (esrafiana) y inversamente (pero no proporcional) de la tasa de ganancia (esrafiana). Si despejamos de (11) la tasa de ganancia $\boldsymbol{g}$ y teniendo en cuenta la ecuación de equilibrio $\boldsymbol{M}_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{M}$, obtenemos:

(12) $$g = \frac{1}{t}\log\frac{M}{aq_1YI}$$

Si ahora sustituimos (12) en (3) sale:

(13) $$PI = \frac{w[1+\frac{1}{t}\log\frac{M}{aq_1YI}]}{g_M - \frac{1}{t}\log\frac{M}{aq_1YI}} \times LX^{-1}I$$

Quedaría ahora estimar la tasa de ganancia máxima $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$ para tener una posibilidad empírica de contrastar (13) con la realidad, además de los multiplicadores $\boldsymbol{q}$ y de los parámetros $\boldsymbol{a}$, y $\boldsymbol{c}$. Esta tasa $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$ ha surgido de hacer cero la tasa de salarios en la ecuación que define el sistema de Sraffa. De hecho, $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$ puede ser obtenida despejándola de (2) y queda:

(14) $$g_m = \frac{P[Y - X]I}{PXI}$$

Esta ecuación nos vuelve a la discusión anterior: si estamos en la producción simple sería la razón-patrón independiente de los precios; si estamos en la conjunta la tasa máxima de ganancia en (14) depende de los precios, que es justamente la variable que se quiere estimar (endógena), por lo que (14) no nos vale. Eso sí, nos da una pista: la tasa máxima de ganancia depende del valor global del excedente relativo. Por ello, una manera de estimarlo sería a través de (15):

(15) $$g_m = cq_2X^{-1}[Y - X]I$$

siendo $\boldsymbol{q}_2$ el segundo vector de multiplicadores que posibilitan (15). Si ahora sustituimos (15) en (13) queda;

(16) $$\boxed{PI = \frac{w[1+\frac{1}{t}\log\frac{M}{aq_1YI}]}{cq_2X^{-1}[Y - X]I - \frac{1}{t}\log\frac{M}{aq_1YI}} \times LX^{-1}I}$$

Y en (16) tenemos los precios ***PI*** dependientes de la oferta monetaria pasados por el tamiz *esrafiano*. Es verdad que quedan los multiplicadores $\boldsymbol{q}_1$ y $\boldsymbol{q}_2$ que hay que estimar, pero (16) ya parece más cerca de la realidad que cuando empezábamos el artículo.

<u>Bibliografía</u>

Afriat, S.: “Sraffa´s Prices”, Universitá degli Studi di Siena, quaderni 474. www.econ-pol.unisi.it/quaderni/474.pdf

Ahijado, M.: “Distribución, precios de producción y crecimiento”, 1982, Centro de Estudios Universitarios Ramón Areces.

Ahijado, M.: “Piero Sraffa: notas para una biografía intelectual”, 1985, Centro de Estudios Universitarios Ramón Areces.

Barceló, A. y Sánchez, J.: “Teoría económica de los bienes autorreproducibles”, Edit. Oikos-Tau, 1988.

Blanchard. O.: “Macroeconomía”, edit. Prentice-Hall, 2000 (*Macroeconomics*, 2000).

Bour, Enrique A.: “Marx y la teoría económica moderna”, 2007 http://www.aaep.org.ar/anales/works/works2007/bour.pdf

Caballero, A. y Lluch, E.: “Sraffa en España”, Investigaciones Económicas (2ª época, vol. X, n.º 2), 1986.

Dobb, M.: “Teoría del valor y de la distribución desde Adam Smith”, edit. Siglo XXI editores.

Desai, M.: “Marxian Economic Theory”, 1974 [*Lecciones de teoría económica marxista*, 1977, edit. Siglo XXI].

Dobb, M.: “The Sraffa system and the critique of neoclassical theory of distribution”, 1970.

Estrin, S. y Laidler, D: “Introduction microeconomics”.

Fiorito, Alejandro: “La implosión de la economía neoclásica”. Está en la red: www.geocities.com/aportexxi/sraffa12.pdf

Foncerrada, Luis Antonio: “Sraffa y Böhm-Bawerk”. Está en la red: http://www.economia.unam.mx/secss/docs/tesisfe/FoncerradaPLA/tesis.pdf

García, N.E.: “La crisis de la macroeconomía”, edit. Marcial Pons, 2010.

Garegnani, P.: “El capital en la teoría de la distribución”, 1982, ed. Oikos-Tau (“Il capitale nelle teorie delladistribuzone”, 1982)

Garegnani, P.: “Heterogeous Capital, The Production Function and the Theory Distribuction”, 1970

Gehrke, Ch.y Kurz, D.: “Sraffa on von Bortkiewicz”. Está en la red: http://www.newschool.edu/cepa/events/papers/050509_Bortkiewicz.pdf

Harcourt, G.C.: “Teoría del Capital” (*Some Cambridge controversies in the theory of capital, 1975*), apéndice al cap. 4, 1975, edit. Oikos-tau.

Heahtfield, D. F.: “Productions functions”.

Keynes, J.M.: “Teoría General de la Ocupación, el Interés y el Dinero”, FCE, 1992 (The General Theory of Employement, the Interest and Money, 1936).

Korsch, Karl; “Karl Marx”, 1975, traducción de Manuel Sacristán, edit. Ariel.

Kurz, Pasinetti, Salvador y otros: “Piero Sraffa: The Man and the Scholar”, Routledge, 2008.

Kurz D. Heinz; “Critical Essays on Piero Sraffa´s Legacy in Economics”, 2000, Cambrigde University Press.

Lange, O., Taylor, F. M.: “On tthe Economic Theory of Socialism, 1938 [*Sobre la teoría económica del socialismo*, 1971, edit. Ariel]

Marsahll, Alfred: “Principios de Economía, Fundación ICO, 2005 [*Principles of Economy*, 1890]

Marx, Carlos: “El método en la Economía Política”, 1974, Ediciones Grijalbo, S.A.

Marx, Carlos: “El Capital”, en el FCE, traducción de Wenceslao Roces.

Meade, J.: “A neo Classical Theory of Economic Growth”, 1961.

Meek, R.: “Mr. Sraffa´s Rehabilitationof Classical Economics”, 1961.

Mendoza, Gabriel: “La transformación de valores en precios de producción”, 1997 http://www.izt.uam.mx/economiatyp/numeros/numeros/10/articulos_PDF/10_2_La_transformacion.pdf

Mora Plaza, A.: “Aspectos de la economía de Sraffa”, revista: Nómadas, n. 23, U. Complutense de Madrid, enlace: http://www.ucm.es/info/nomadas/23/antoniomora.pdf

Mora Plaza, A.: “Notas sobre la producción simple y conjunta a consecuencia de Sraffa”: http://redalyc.uaemex.mx/pdf/181/18112179020.pdf;

Mora Plaza, A.: “Sobre la transformación de valores a precios”:
http://www.eumed.net/ce/2009b/amp2.htm
http://revistas.ucm.es/cps/15786730/articulos/NOMA1010140379A.PDF

Mora Plaza, A.: “Notas sobre el teorema fundamental marxiano”
http://www.eumed.net/ce/2009b/amp.htm
http://econpapers.repec.org/article/ervcontri/y_3a2009_3ai_3a2009-10_3a22.htm

Morhisima, M.: “La teoría económica de Marx” (*Marx´s Economics, 1973*), 1977, pág. 15, edit. Tecnos.

Moseley, F.: “El método lógico y el problema de la transformación”.
http://www.azc.uam.mx/publicaciones/etp/num7/a8.htm

Murga, Gustavo: “Piero Sraffa”.
http://marxismo.cl/portal/index.php?option=com_content&task=view&id=100&Itemid=1

Neri, Salvador: “Besicovitch, Sraffa and the existence of Standard Commodity”, 2010: http://host.uniroma3.it/eventi/sraffaconference2010/abstracts/pp_salvadori.pdf

Nuti, D.: “Capitalism, Socialism and Sleady Growth”, 1970.

Okishio, N.: “A mathematical note on marxian theorems”, 1963.

Pasinetti. L.: “Critical of the neoclassical theory of growth and distribution”. Está en la red:
http://www.unicatt.it/docenti/pasinetti/pdf_files/Treccani.pdf

Pasinetti, L.: “Structural Change and Economic Growth: a theoretical essay on the dynamics of Wealth of Nations”, 1981, Cambridge University Press.

Pasinetti, L.: “Rate of profit and income distribution in relation to the rate of economic growth”, 1961/2.

Pasinetti, L.: “Switches of technique and the rate of return in Capital Theory”, 1969.

Pasinetti, L.: “Crecimiento económico y distribución de la renta” (“*Growth and Income Distribution*”, 1974), 1978, Alianza Editorial.

Pasinetti, L.: “Lecciones de teoría de la producción” (“*Lezioni di teoria della produzioni*”, 1975), 1983, FCE.

Peris i Ferrando, J.E: “Análisis de la resolubilidad de modelos lineales de producción conjunta”, 1987, en internet:
http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/3829/1/Peris%20Ferrando,%20Josep.pdf

Potier, J.P.: “Piero Sraffa”, 1994, edicions Alfons Magnànim.

Ricardo, D.: “Principios de Economía Política y Tributación” (*On the Principles of Political Economy and Taxation,*), 1973, F.C.E.

Robinson, J.: “Ensayos críticos”, 1984, Ediciones Orbis.

Roncaglia, Alessandro: “Piero Sraffa”, Edit. Palgrave MacMillan, 2009.

Roncaglia, Alessandro: “La riqueza de las ideas”, Prensas Universitarias de Zaragoza, 2009 (“*The Wealth of Ideas. A History of Economic Thought*”, Cambridge University Press, 2005).

Roncaglia, Alessandro: “Sraffa and the Theory of Prices”, 1978 [*Sraffa e la teoria dei prezzi*, 1975]

Samuelson, Paul: “Understanding the Marxian notion of Exploitation”, 1971.

Sánchez Choliz, Julio: “La razón-patrón de Sraffa y el cambio técnico”, 1989, Investigaciones Económicas, 2ª época, Vol. XIII.
ftp://ftp.funep.es/InvEcon/paperArchive/Ene1989/v13i1a7.pdf

Sargent, T.J.: “Teoría macroeconómica” (*Macroeconomic Theory, 1979*), 1988, Antoni Bosch editor.

Schefold, Bertram: “Mr. Sraffa on Joint Production”, 1971

Schumpeter, J. A.: “Historia del Análisis Económico” (*History of Economic Analisis*, 1954), 1971, Ediciones Ariel.

Segura, J.: “Análisis microeconómico”, pág. 88, 2004, Alianza editorial Tecnos.

Serrano, Franklin: “Histérisis, Dinámica inflacionaria y el Supermultiplicador Sraffiano”, 2006: http://www.elgermen.com.ar/wordpress/wp-content/uploads/Serrano-F-Hist%C3%A9resis-Din%C3%A1mica-Inflacionaria-y-el-Supermultiplicador-Sraffiano.pdf

Steedman, I.: “Marx, Sraffa y el problema de la transformación” (*Marx after Sraffa, 1977*), 1985, F.C.E.

Segura, J.: “Análisis microeconómico”, 2004, Alianza editorial Tecnos.

Subiza Martínez, B.: “Juegos matriciales y su aplicación a la teoría Perron-Frobenius”, U. de Alicante; http://www.ine.es/revistas/estaespa/112_3.pdf

Solow, R.: “The interest rate and transition between techniques”, 1967.

Sraffa, Piero: “Produción de mercancías por medio de mercancías” (*Production of commodities by means commodities, 1960*), 1975, Oikos-Tau.

Ricardo, D.: “Principios de Economía Política y Tributación” (*On the Principles of Political Economy and Taxation,*), 1973, F.C.E.

Vegara, J. M.: “Economía política y modelos multisectoriales”,1979, edit. Tecnos.

Varios: “Matemáticas avanzadas aplicadas a la Economía”, UNED, 2001.

Varios: “The Keynesian Multiplier”, edit. Routledge Frontiers of Political Economy, 2008

$$p_j y_j = w\, l_j + (1+r)\sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} \quad \text{desde } j=1 \text{ a } j=n$$

$$p_j y_j = (1+R)\sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} \quad \text{desde } j=1 \text{ a } j=n$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j y_j - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} = 1$$

$$\sum_{1}^{n} l_j = 1$$