MORISHIMA Y EL TEOREMA FUNDAMENTAL MARXIANO
(Y ALGO SOBRE EL PROBLEMA DE LA TRANSFORMACIÓN)

Antonio Mora Plaza

Este trabajo tiene la pretensión de ser una crítica al teorema formulado por *Okishio* y recogido por el gran economista marxista *Michio Morishima*. El resultado, como se verá, resulta sorprendente. Pero una advertencia: nada más lejos de mi intención hacer siquiera un análisis histórico de ambos problemas. Eso ya ha sido hecho, hay mucha literatura al respecto y ha servido y seguirá sirviendo para adquirir doctorados o publicar trabajos de recopilación en revistas especializadas. Sí quiero ser novedoso, creativo en el tratamiento, que es lo único que me mueve al escribir sobre estos temas. Lo curioso es que ambos problemas tienen fama como problemas y apenas ninguna las soluciones que se han intentado; y, lo que es peor, las pocas veces que se estudian estos problemas en la universidad se dedica mucho más tiempos a los primeros que a las segundas. Parece claro que el marxismo, sea clásico, crítico o actualizado, no forma parte del *corpus* de conocimientos de una recién licenciado o graduado e, incluso, de los doctorados, salvo por el clan de los especialistas. Se puede culpar a eso que se llama la ideología dominante, pero creo que también el clan de los marxistas tienen culpa por adoptar -en lugar de estudiar- el marxismo como si fuera un catecismo. En mi opinión, el marxismo, como el marginalismo, o los clásicos, son acreedores de nuestro punto de vista en la medida que tengan algo que enseñarnos a los hombres y mujeres del siglo XXI para tratar los problemas de nuestro siglo y de la historia. Es verdad que siempre ha de haber un grupo -o muchos- especializados en la historia del análisis que busque la lógica de las teorías en el seno de la historia. Bienvenido sea. Es más, para evitar dogmatismo y fundamentalismo, las enseñanzas de economía, física, biología, derecho, etc., y hasta el de las matemáticas, debieran hacerse en el marco de la historia, porque la lógica más pedagógica es la lógica histórica . No ocurre así, desgraciadamente, y de ahí también la deformación y simplificación en la enseñanza universitaria de teorías e ideologías. El marxismo o, en concreto, *El Capital*, deben estudiarse como cualquier otro tipo de conocimiento, filosofía o ideología que ha surgido a lo largo de la historia, al igual que se estudia o se ha estudiado el aristotelismo, el tomismo, el racionalismo, el empirismo, el kantismo, el historicismo, etc., y ha de hacerse críticamente o no será conocimiento sino tan sólo creencia. Otra cosa será la praxis de sus consecuencias teóricas.

Tras estas reflexiones y yendo directamente al grano del tema que define el título, en 1963 N. Okishio[1] demostraba que: "*Para que exista un conjunto de precios positivos es necesario y suficiente que se de un tipo de salarios reales tal que el grado de explotación sea positivo*"[2]. Morishima toma el teorema de

[1] *A matematical Note on Marxian Theorems*.
[2] *Marx´s Economics, M. Morishima*, 1973 [*La teoría económica de Marx*, 1977, edit. Tecnos, pág. 66].

Okishio y lo reformula bajo dos aspectos o condiciones: a) la explotación o, dicho en términos más técnicos, la tasa de plusvalía, la arranca el propietario de los medios de producción por el *alargamiento* (sólo) de la jornada de trabajo más allá de la necesario para que el asalariado pueda vivir él y su familia en condiciones históricas dadas. No se entra aquí en temas de alienación, del fetichismo de la mercancía, del trabajo abstracto y concreto, de los procesos de circulación del dinero, mercancías y capitales, etc., que pertenecen a otras esferas de conocimiento, aunque dentro del *corpus* marxista: b) el nexo de unión entre valores y precios lo establece Morishima como hipótesis directamente mediante unos "*números positivos*" (coeficientes) de los que no sabemos cómo se obtienen, pero que Morishima los justifica al suponer que todas las industrias tienen la misma composición orgánica de capital. Que sean positivos es porque van a relacionar precios que previamente se han asegurado que lo son porque deben cumplir la ecuación:

(1) $$p > pA + wL$$

donde $\boldsymbol{p}$ es el vector de precios, $\boldsymbol{A}$ la matriz $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$ de requerimientos, $\boldsymbol{w}$ la tasa de salarios y $\boldsymbol{L}$ el vector de inputs de trabajo. Morishima -que lo toma de Okishio- justifica la ecuación (1) porque parte de que $\boldsymbol{A}$ cumple los requisitos del teorema de Perrón-Froebenius[3], es decir, $\boldsymbol{A}$ es cuadrada, no negativa, indescomponible y productiva. Sin embargo, y con ser eso perfectamente aceptable, no justifica (1), sino sólo la que sigue:

(2) $$p > pA$$

Luego veremos la importancia de esta diferenciación. Al reflexionar sobre el teorema parecería que los marxistas, que además de deudores del conocimiento y posibles contribuyentes al mismo, son personas que quieren cambiar el mundo y *no sólo interpretarlo*, deberían -deberíamos, no me excluyo- sentirnos satisfechos por este apoyo riguroso del conocimiento a nuestros deseos. Yo, en cambio, no lo estoy. La razón es la de que, dado que el corazón del análisis marxiano se basa en la producción de la plusvalía y su obtención de la misma por parte de la clase de los propietarios por esta condición, si todo al final depende *sólo* del tiempo de trabajo (su alargamiento) ocurren tres cosas: 1) la explotación es inevitable, porque siempre es mayor la población general que la población ocupada, y más aún ésta que la asalariada; 2) esta explotación, según la demostración de Morishima, existe, *sea cual sea la tasa de salarios*, puesto que estos no se hacen explícitos en el modelo; 3) el alargamiento de la jornada no retribuida se producirá no sólo en el sistema capitalista, objeto de análisis de Marx, sino en cualquier sistema alternativo, aunque se erradicaran otros posibles males. Por todo ello, me parece que todo modelo que derive en el teorema fundamental marxiano debe -debiera- tener al salario como variable explícita fundamental. Yo

---

[3] El teorema lo recoge Pasinetti en su conocido libro *Lecciones de teoría de la producción*.

mismo -con perdón- tengo unas notas[4] sobre el teorema con conclusiones novedosos, pero obtenidas al igualar ganancias con plusvalías directamente sin coeficientes de transformación. Cuando se opera así se obtiene el teorema fundamental y, a veces, algo más. Morishima da un rodeo mayor y parte de la hipótesis de la productividad de la matriz de requerimientos para poder aplicar el teorema de Perrón-Froebenius. A pesar de todo, el planteamiento de Morishima nos lleva a una sorpresa, como veremos. Veamos primero -aunque sea para dar algo de emoción a un tema no exento de dificultades formales- un modelo alternativo al de Okishio y Morishima.

1- *Alternativa al teorema fundamental marxiano*.

El problema que se plantea es cómo relacionar la tasa de ganancia de la ecuación que define el sistema económico con la tasa de explotación que define el valor de las mercancías según el esquema marxista. Partimos, con Marx, de la ecuación que define el valor de las mercancías en términos de valor-trabajo[5]:

(3) $$K_i + V_i + S_i = V_{f\,i} Y_i \quad \text{para } \boldsymbol{i}=1 \text{ a } \boldsymbol{n}$$

siendo $\boldsymbol{K}_i$ el capital constante[6], $\boldsymbol{V}_i$ el capital variable y $\boldsymbol{S}_i$ la plusvalía de la mercancía $\boldsymbol{i}$ o producida en el sector $\boldsymbol{i}$ en términos de valor-trabajo, $\boldsymbol{V}_f$ el valor-trabajo (unitario) de la mercancía $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{Y}_i$ la cantidad producida de la mercancía en términos físicos. Este valor (3) ha de trasformarse en unidades monetarias mediante unos coeficientes $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{b}_i$, $\boldsymbol{c}_i$, μ_i con las ecuaciones de transformación que hay en (4):

(4) $$a_i K_i + b_i V_i + c_i S_i = \mu_i V_{f\,i} Y_i = p_i Y_i \quad \text{para } \boldsymbol{i}=1 \text{ a } \boldsymbol{n}$$

En términos matriciales la ecuación (4) sería:

(5) $$\underset{1xn}{A}\,\underset{nxn}{K} + \underset{1xn}{B}\,\underset{nxn}{V} + \underset{1xn}{C}\,\underset{nxn}{S} = \underset{1xn}{p}\,\underset{nxn}{Y}$$

---

[4] *Notas sobre el teorema fundamental marxiano*: http://www.eumed.net/ce/2009b/amp.htm

[5] Aunque en este trabajo apenas se discuten conceptos doy aquí la definición de valor-trabajo de Marx: *"Lo que determina la magnitud de valor de un objeto no es más que la cantidad de trabajo socialmente necesario, o sea, el tiempo de trabajo socialmente necesario para su producción"*. Más adelante explica lo de *socialmente necesario*. El Capital, FCE, I tomo, pág. 7. En el tomo III, pág. 100 lo matiza de nuevo Marx diciendo: *"El valor de la mercancía se determina por el tiempo de trabajo necesario contenido en ellas y no por el tiempo de trabajo que en ellas se encierra"*.

[6] Aunque utilizo la ***K*** para no confundir con el coeficiente ***c*** que utilizo para la plusvalía, aquélla no representa al capital neoclásico sino al capital constante marxiano.

donde ***A***, ***B***, ***C*** son vectores fila ***1***x***n*** de los coeficientes y ***K***, ***V***, ***S*** son matrices diagonales de los capitales constante, variable y de la plusvalía, respectivamente, con valores nulos para ***i*** distinto de ***j***.

Para esta transformación, Marx explicitó dos condiciones, aunque a veces habla de una tercera. Estas dos condiciones son: 1) que la plusvalía total de todos los sectores fuera igual a las ganancias totales; 2) que las tasas de plusvalía de todos los sectores (o mercancías) fueran iguales. En otras ocasiones habla de que el valor total de la producción de todos los sectores fuera igual en términos de valor-trabajo (unitario) y en términos de precio[7]. Estas son las dos ecuaciones que definen las condiciones primeras de Marx:

(6) $$\underset{1xn}{C}\ \underset{nxn}{S}\ \underset{nx1}{I} = g\left[\underset{1xn}{w\,L} + \underset{1xn}{p}\ \underset{nxn}{X}\right]\underset{nx1}{I}$$

siendo ***I*** el vector de unos ***n***x***1***.

(7) $$e = \frac{S_i}{V_i} \quad \Rightarrow \quad \underset{nxn}{S} = e\underset{nxn}{V}$$ para todo ***i*** = ***1*** a ***n***

Sin embargo, la ecuación (6) no será necesaria (ni conveniente) para lo que viene. Traemos ahora a colación la ecuación que define el sistema económico con salarios pospagables o, más correctamente dicho, con la tasa de ganancia incluyendo todos los costes. Esta ecuación define el sistema sraffiano y nos vamos apoyarnos en ella y en *la razón-patrón* de Sraffa ***R***. La ecuación es:

(8) $$\underset{1xn}{p}\ \underset{nxn}{Y} = (1+\underset{1x1}{r})\left[\underset{1x1}{w}\ \underset{1xn}{L} + \underset{1xn}{p}\ \underset{nxn}{X}\right]$$

De (8) se obtiene la ecuación marcada por la *razón-patrón* ***R*** haciendo la tasa de salarios ***w*** igual a cero:

(9) $$pY = (1+R)\,pX$$

De las ecuaciones (8) y (9) sale que:

[7] Hemos heredado una confusión que viene más del idioma que de los conceptos. Cuando se habla de valor de una mercancía estamos hablando de *valor unitario*, equivalente al precio en términos monetarios. Sin embargo, en los ejemplos de Marx habla del valor de la producción, que sería equivalente a los ingresos, porque sería precio por la cantidad. Por eso la expresión transformación de valores a precios es confusa. Aquí entendemos los valores ***K***, ***V***, ***S*** como el valor de la producción de un tipo de mercancía equivalente en términos de precios a ***pY*** (ingresos).

(10) $$p = \frac{w(1+r)}{R-r} \times LX^{-1}$$

De las ecuaciones (5), (7) y (10) se da el paso trascendente de eliminar los precios y se obtiene a su vez:

(11) $$[AK + BV + eCV] = \frac{w(1+r)}{R-r} \times LX^{-1}Y$$

Vamos ahora a pos-multiplicar (11) por el vector de unos ***I*** de dimensión ***n**x**1*** para convertir los dos lados de la ecuación en sendos escalares; llamaremos ***f*** a $f = LX^{-1}Y$ por cuestiones de comodidad y tendremos:

(12) $$[AK + BV + eCV]\underset{nx1}{I} = \frac{w(1+r)}{R-r} \times \underset{1xn}{f}\,\underset{nx1}{I}$$

Y de (12) se obtiene la tasa de ganancia ***r***:

(13) $$\boxed{r = R \times \frac{[AK + BV + eCV]I - wf\,I}{[AK + BV + eCV]I + wf\,I}}$$

¡Y la sorpresa es mayúscula porque en (13), aun cuando la tasa de explotación (de plusvalía) ***e*** *sea cero, la tasa de ganancia* ***g*** *es positiva!* Y esto se ha conseguido sólo con el supuesto primero de Marx[8]. También ocurre en (13) que si la tasa de salario ***w*** es cero, la tasa de ganancia ***r*** es igual a ***R***, es decir, la tasa de ganancia marxiana alcanza la razón-patrón de Sraffa (***r***=***R***). Más aún, para que la tasa de ganancia ***g*** sea mayor que cero ha de ocurrir que los salarios ***w*** queden por debajo de:

(14) $$w < R \times \frac{[AK + BV + eCV]I}{f\,I}$$

Y si la tasa de explotación ***e*** es cero, aún es positiva la tasa de ganancia ***g*** con tal de que los salarios queden por debajo de:

(15) $$w < R \times \frac{[AK + BV]I}{f\,I}$$

[8] Que ni siquiera sería necesario una sola tasa de explotación, sino ***n*** tasas de explotación (de plusvalía).

Vemos así que los salarios (la tasa de salarios ***w*** en el modelo) juegan un papel decisivo porque, para niveles bajos de salarios, las ganancias pueden ser positivas aun cuando la tasa de explotación marxiana sea cero. A partir de un cierto nivel de salarios (marcado por (15)), para que las ganancias sean positivas debe haber explotación (***e***>0). Esto está acorde con lo que recoge Morishima del teorema de Okishio al hablar de "*condición necesaria y suficiente que se de un tipo de salarios reales*". Al no hacer explícitos los salarios y hacer depender la tasa de explotación *sólo* de la jornada de trabajo, el modelo de Morishima lleva a la conclusión necesaria y suficiente del teorema de explotación de Okishio. En otro epígrafe discutiremos el tema con más profundidad. Volviendo a (14) y (15), todo esto se puede resumir en:

(16) $$0 < w < R \times \frac{[AK + BV]I}{f\,I} < R \times \frac{[AK + BV + eCV]I}{f\,I}$$

La (16) cumple las fases que recorre la tasa de salarios ***w*** para que la tasa de ganancia ***g*** sea positiva. La ecuación (13) nos dice *que la condición <u>suficiente</u> para que exista una tasa de ganancia positiva es que la tasa de explotación sea positiva,* pero nada dice de la condición necesaria. Esta aparecerá siempre que se igualen directamente *las tasas* de plusvalía (en términos de valor) con *las tasas de* ganancia (en términos monetarios) sin pasar por *las horcas caudinas* de los coeficientes de transformación. Y, por cierto, sin Sraffa no hubiéramos llegado a esto porque no hubiéramos podido eliminar los precios. Mi pronóstico es que con el tiempo no se podrá actualizar a Marx sin pasar por el tamiz del italiano.

<u>2 - *Demostración del teorema a partir de un modelo sraffiano*</u>.

Traigo aquí las ecuaciones del modelo sraffiano complementado con la de la tasa de plusvalía marxiana de un trabajo mío anterior[9] por lo instructivo de la demostración. Estas son las ecuaciones:

(17) $$ewL = r[wL + pX]$$

(18) $$pY = (1+r)[wL + pX]$$

(19) $$pY = (1+R)\,pX$$

(20) $$L\mathrm{I} = 1$$

(21) $$pY\mathrm{I} - pX\mathrm{I} = 1$$

[9] *Aspectos de la economía de Sraffa:* http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=18111418012

La primera de estas 5 resulta de igualar la plusvalía de cada sector a las ganancias directamente, también de cada sector, *pero* sin coeficientes de transformación; la segunda define el sistema; la tercera es, como siempre, la resultante de igualar a cero la tasa de salario ***w*** y obtener así la razón-patrón de Sraffa ***R***; la cuarta y la quinta son fruto de las normalizaciones que introduce Sraffa en sus modelos. De estas 5 ecuaciones sale que:

(22) $$r = \frac{ewR}{1 + (1 - ew)R}$$

donde *¡para que exista una tasa de ganancia* ***r*** *positiva debe ser positiva la tasa de explotación* ***e****!* El resultado es ineludible, porque al igualar plusvalías y ganancias a través de la igualación de la tasa de plusvalía y la tasa de ganancia por sectores (en lugar de hacerlo como Marx con ganancias y plusvalías totales), ambas tasas dependen mutuamente entre sí. El resto de las 4 ecuaciones sirven para eliminar las 4 variables que no interesan (precios, inputs de trabajo, medios de producción y productos finales: 4 variables para 4 ecuaciones)

3 - Sobre la frontera salario-ganancia.

De (12), y como un añadido, obtenemos la frontera salario-ganancia al despejar la tasa de salario ***w***:

(23) $$w = \frac{(R - r) \times [AK + BV + CS]I}{(1 + r) \times f\,I}$$

donde los puntos de corte son:

(24) $$w(r=0) = \frac{R \times [AK + BV + CS]I}{f\,I}$$

(25) $$r(w=0) = R$$

La ecuación (23) es una curva convexa, es decir, decrecientemente creciente por ser la primera derivada menor que cero y la segunda mayor que cero, y ello concuerda con los resultados de la frontera-salario que puede considerarse ortodoxa.

4 - Discusión de la demostración de Morishima.

Veamos ahora con detenimiento el teorema fundamental, versión Morishima[10], que es la versión estándar del teorema. Parte de dos supuestos o hipótesis: 1) que estamos ante un sistema productivo, al menos en el sector de medios de producción. No obstante, y por mi parte, partiré de la economía como un todo porque eso no afecta al teorema; 2) supone que todas las industrias (sectores) obtienen beneficios. En el curso de la demostración no es necesario que haya una única tasa de ganancia[11] sino que puede haber tantas como sectores. De la primera condición nos da que:

(26) $$\underset{nxn}{Y} > \underset{nxn}{X}$$

donde ***Y*** es la matriz de productos finales y ***X*** la de medios de producción. La (26) nos dice que, en todos los sectores, el producto neto (***YI-XI***) es mayor que cero, es decir, que siempre la economía produce más de lo que consume sea cual sea el sector. Si llamamos ***A*** a la matriz de requerimientos que surge de hacer ***X***=***AY***, es decir, con ***A***=***YX***$^{-1}$, tenemos la ecuación (27):

(27) $$Y > AY$$

que en términos de valor-trabajo (unitario) se convierte en:

(28) $$\underset{1xn}{V_f}\,\underset{nxn}{Y} > \underset{1xn}{V_f}\,\underset{nxn}{A}\,\underset{nxn}{Y}$$

donde ya no tenemos ***n*** bienes producidos en ***n*** sectores, sino ***n*** valores-trabajo de ***n*** bienes. Ahora Morishima, tras muchos pasos intermedios y muchas consideraciones previas sobre el alargamiento de la jornada de trabajo, llega a la ecuación:

(29) $$\underset{1xn}{V_f}\,\underset{nxn}{Y} - \underset{1xn}{V_f}\,\underset{nxn}{A}\,\underset{nxn}{Y} - \underset{1xn}{V_f}\,\underset{nxn}{B}\,\underset{nxn}{L} > \underset{1x1}{e}\,\underset{1xn}{V_f}\,\underset{nxn}{B}\,\underset{nxn}{L}$$

siendo $\boldsymbol{V}_\mathrm{f}$ la matriz final de valores-trabajo, ***A*** la matriz de requerimientos, ***B*** la matriz de bienes y servicios o bienes-salario -que diríamos hoy- que consumen los trabajadores, ***L*** los inputs de trabajo directo por bien o servicio, y, por último, ***e*** la tasa de explotación (de plusvalía) que surge de la ecuación $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{eV_f BL}$, donde ***S*** es la plusvalía; de forma análoga, $\boldsymbol{V_f}$ ***BL*** sería el capital variable y $\boldsymbol{V_f}$ ***AY*** el capital constante, todos ellos, claro está, en unidades de valor-trabajo. El punto crucial de la versión Morishima del teorema fundamental es la del signo *mayor que* de (29). Viene, por supuesto, de la condición primera de la productividad que

[10] Ver *La teoría económica de Marx,* cap. 5.
[11] Más adelante se dedica un epígrafe a ver esto.

asegura un vector de positivo de productos netos (***Y-AY***) al aplicar Perrón-Froebenius a ***Y***>***AY***. La pregunta es: ¿da para tanto como para suponer -como hace Morishima- que se cumpla (30)?:

$$\underset{1xn}{V_f}\underset{nxn}{Y} - \underset{1xn}{V_f}\underset{nxn}{A}\underset{nxn}{Y} - \underset{1xn}{V_f}\underset{nxn}{B}\underset{nxn}{L} > \underset{1xn}{0} \tag{30}$$

Está claro que si se cumple (30) entonces $eV_f BL$ ha de ser mayor que cero, por lo que ***e*** ha de serlo también porque se supone que ***B*** -la matriz de consumo de los bienes-salario- ha de ser positiva. Sin embargo, con ***A*** productiva puede cumplirse (28) y no necesariamente (30). Pero, incluso en este caso, Morishima obtendría sólo la condición suficiente, pero no la necesaria. Incluso ***A*** puede ser productiva y cumplirse (30), pero con el signo de igualdad, de lo que se deduce que la primera de las condiciones del japonés tampoco es una condición suficiente. En definitiva, *la versión del teorema fundamental marxiano en versión Morishima no nos da ni la condición necesaria ni la suficiente*. No tenemos teorema. Ya hemos visto anteriormente, no obstante, que con supuestos menos restrictivos, es decir, sin tener siquiera una matriz ***A*** productiva[12], se puede demostrar la condición de suficiencia del teorema si hacemos explícitos los salarios; tampoco es necesario en este caso que todas las tasas de explotación sean iguales. Lo único que se hizo fue igualar los valores-trabajo -premultiplicados previamente por unos coeficientes de transformación- e igualar para cada bien o servicio producido a los precios de producción (multiplicados por las cantidades). Y, al igual que la razón-patrón de Sraffa, tampoco ha sido necesario calcular previamente los coeficientes de transformación. En definitiva, tenemos la ecuación (5).

5 - Generalización del teorema fundamental marxiano.

El teorema fundamental que acabamos de ver en (13) en versión rebajada lo podemos generalizar para ***n*** tasas de ganancia ***g***, ***n*** tasas de ganancia máxima ***G***, ***n*** tasas de salario ***w*** y ***n*** tasas de explotación ***e***. Veamos como. Partimos de la misma ecuación (5) que define el sistema en términos de valor, pero cambiamos la ecuación (8) que define a su vez el sistema en términos de precios por (31). Esta será una ecuación matricial como sigue:

$$\underset{1xn}{p}\underset{nxn}{Y} = \left[\underset{1xn}{L}\underset{nxn}{W} + \underset{1xn}{p}\underset{nxn}{X}\right](\underset{nxn}{I} + \underset{nxn}{g}) \tag{31}$$

con las novedades de que ***W*** es ahora una matriz ***n***x***n*** de salarios, con $w_{ij}=0$ si ***i***<>***j y*** con ***g*** como la matriz de tasas de ganancia por sectores de dimensión también

[12] Como es el caso de la producción conjunta del que partimos en nuestra demostración.

$\boldsymbol{n}$x$\boldsymbol{n}$ con $\boldsymbol{g}_{ij}=\boldsymbol{0}$ si $\boldsymbol{i}$<>$\boldsymbol{j}$. También buscamos la ecuación que surge de hacer cero todas las tasas de salario $\boldsymbol{W}$ y sale:

$$(32)\qquad \underset{1xn}{p}\ \underset{nxn}{Y} = \left[\underset{1xn}{p}\ \underset{nxn}{X}\right]\underset{nxn}{(I} + \underset{nxn}{g)}$$

De (31) y (32) obtenemos (33) de forma análoga a (9)

$$(33)\qquad p = LW(1+g)(G-g)^{-1}X^{-1}$$

que combinada con (5) y con (7) y posmultiplicado el resultado por el vector $\boldsymbol{I}$ de unos $\boldsymbol{n}$x$\boldsymbol{1}$ sale:

$$(34)\qquad [AK+BV+CVE]I = LW(1+g)(G-g)^{-1}X^{-1}YI$$

donde, al igual que antes para el caso de la producción simple, se cumple la condición <u>suficiente</u> del teorema: *basta que las tasas de explotación sean positivas para que las tasas de ganancia lo sean también, aunque también son posibles tasas de ganancia positivas sin tasas de explotación positivas*. La versión aritmética de (34) es interesante por lo que viene después:

$$(35)\quad \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} K_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{j=1}^{n} V_{ij} + \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{n} V_{ij} E_{ij} = \sum_{i=1}^{n} l_i \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \times \frac{(1+g_{ij})}{(G_{ij}-g_{ij})} \times \frac{y_{ij}}{x_{ij}}$$

Es verdad que de (35) no se pueden despejar las $\boldsymbol{n}$ tasas de salario $\boldsymbol{g}_{ij}$ por motivos obvios, pero sí puede obtenerse una tasa media de salarios $\boldsymbol{w}_m$, una tasa media de ganancias $\boldsymbol{g}_m$ y una tasa media de ganancias máximas $\boldsymbol{G}_m$ a partir de (35) haciendo que:

$$(36)\qquad \frac{w_m(1+g)_m}{G_m - g_m} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} l_i \sum_{j=1}^{n} \frac{w_{ij}(1+g_{ij})}{(G_{ij}-g_{ij})} \times \frac{y_{ij}}{x_{ij}}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} l_i \sum_{j=1}^{n} \frac{y_{ij}}{x_{ij}}}$$

y despejando de (36) la tasa media de ganancia $\boldsymbol{g}_m$, queda la notable:

$$(37)\qquad g_m = \frac{G_m\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{n} l_i \sum_{j=1}^{n} \frac{w_{ij}(1+g_{ij})y_{ij}}{(G_{ij}-g)x_{ij}}\right] - w_m \sum_{i=1}^{n} l_i \sum_{j=1}^{n} \frac{y_{ij}}{x_{ij}}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} l_i \sum_{j=1}^{n} \frac{w_{ij}(1+g_{ij})y_{ij}}{(G_{ij}-g_{ij})x_{ij}} + w_m \sum_{i=1}^{n} l_i \sum_{j=1}^{n} \frac{y_{ij}}{x_{ij}}}$$

Ahora en (36) tenemos 3 variables en el lado izquierdo de la ecuación, pero siempre podemos dar valores *ad hoc* a la tasa media de máxima de ganancia $\boldsymbol{G}_m$ y a la tasa media de salarios $\boldsymbol{w}_m$ para obtener en (37) la tasa de ganancia media $\boldsymbol{g}_m$. Si despejamos la tasa de salario media $\boldsymbol{w}_m$ en (36), sale *la frontera de salario-ganancia* siempre que tomemos, en este caso como *ad hoc*, la tasa de ganancia media $\boldsymbol{g}_m$ y la tasa media de ganancia máxima $\boldsymbol{G}_m$. Estos valores *ad hoc* no tienen porqué ser arbitrarios, pero sí quedar fijos bajo otras condiciones. Esta frontera, en definitiva, vendrá dada por la ecuación (38):

(38)
$$w_m = \frac{G_m - g_m}{1+g_m} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i \sum_{j=1}^{n} \frac{w_{ij}\,(1+g_{ij})}{(G_{ij}-g_{ij})} \times \frac{y_{ij}}{x_{ij}}}{\sum_{i=1}^{n} l_i \sum_{j=1}^{n} \frac{y_{ij}}{x_{ij}}}$$

donde, de forma análoga que en la producción simple, los puntos de corte con los ejes son:

(39)
$$g_m(w_m = 0) = G_m$$

(39)
$$w_m(g_m = 0) = \frac{G_m \sum_{i=1}^{n} l_i \sum_{j=1}^{n} \frac{w_{ij}}{G_{ij}} \times \frac{y_{ij}}{x_{ij}}}{\sum_{i=1}^{n} l_i \sum_{j=1}^{n} \frac{y_{ij}}{x_{ij}}}$$

Como ya he apuntado en otras ocasiones, en este caso, tanto la (37) como la (38) permiten el recurso a la planificación sin necesidad de conocer los precios. Es verdad que una planificación muy laxa, porque operamos con muchos grados de libertad, pero susceptible de concretarse si se conocen o se parte de los valores físicos de producción de productos finales $\boldsymbol{Y}$, de medios de producción $\boldsymbol{X}$ y de los inputs de trabajo $\boldsymbol{L}$. Sólo tenemos que operar con las tasas de ganancia, salarios y tasas de ganancia máximas de cada sector. En el caso que se propone a partir de (37) y (38), podemos (deberíamos) ensayar también con tasas medias de estas variables. No se trata sólo de planificar la distribución, sino que, a través del control de $\boldsymbol{g}_m$, $\boldsymbol{w}_m$ y $\boldsymbol{G}_m$, poder modificar $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{Y}$ y $\boldsymbol{X}$ para mejorar las condiciones de producción, productividad, excedente y empleo. Pero, en fin, esto da para otros trabajos y hasta para un libro. Obsérvese que tanto la (37) como la (38) pueden rellenarse con datos estadísticos reales, salvo las valoraciones de las tasas máximas de ganancia y de dos de las tres tasas medias. Es decir, tenemos ***2+n*** grados de libertad para la planificación si consideramos como dados los $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{L}$; en caso contrario, los grados de libertad se multiplican por ***3xn***, con lo que tendríamos $(\boldsymbol{2}+\boldsymbol{n})\text{x}\boldsymbol{3n} = \boldsymbol{6n}+\boldsymbol{3n}^2$ grados de libertad: las quejas de dirigismo no estarían justificadas.

Resumiendo el teorema fundamental marxiano, versión Morishima, se puede decir lo siguiente: el gran economista japonés -que lo es a pesar de lo criticado- aborda el teorema fundamental a partir de Okishio bajo aspectos muy restrictivos y además comete un error. Por lo primero, aborda el teorema fundamental bajo el supuesto de que toda la teoría de la explotación se basa *sólo* en el alargamiento de la jornada; no hace explícitos los salarios, con lo que, sea cual sea el nivel de estos, siempre existe explotación; parte de que la matriz ***A*** de requerimientos sea cuadrada, no negativa, indescomponible y productiva para poder aplicar Perrón-Froebenius y asegurarse con ello un vector de precios de productos finales positivos ***p*** y un vector final de productos *netos* finales ***YI-XI*** positivos. Con lo cual, sólo puede operar bajo la reproducción simple y pasar de valores a precios sin coeficientes de transformación. Al final se le escapa a Morishima las condiciones necesarias y suficientes del teorema fundamental. Pero, como hemos visto, casi todo tiene arreglo. Por nuestra parte, hemos generalizado la condición suficiente del teorema fundamental a ***n*** tasas de salario ***w***, a ***n*** tasas de ganancia ***g*** y a ***n*** tasas sraffianas de ganancia máxima[13] ***G***, aunque no hayamos podido obtener, bajo nuestras hipótesis en este trabajo, la condición necesaria. Además hemos insinuado las posibilidades de planificación con este modelo: no hay bien que por mal no venga.

6 - Transformación de valores (unitarios) a precios.

Tampoco se pretende aquí hacer ni tan siquiera un esbozo de la historia de este problema que, desde que Bohm-Bawerk señalara las contradicciones de Marx entre los tomos I y III de *El Capital*, ha corrido mucha tinta. Bortkiewicz dio la primera solución y luego se han dado muchas otras, incluso a partir de la primera de Marx que, aunque errónea, era la primera fase de una solución de una cadena ergódica de Markov. De nuevo pretendo ser novedoso porque, de lo contrario, no merece la pena hacer meras recopilaciones. Sí diré como reflexión que siempre me ha parecido un problema menor porque el sistema de valores y el de precios pertenecen a mundos intelectuales y preocupaciones diferentes: el sistema de basado en los valor-trabajo, que procede de Ricardo, de Smith y con sus precedentes, le sirvió a Marx para desentrañar la aparente contradicción que da el trabajo como mercancía en un mercado aparentemente libre entre desposeídos de capital (oferentes de trabajo) y poseedores del mismo (demandantes) podría haber explotación, es decir, apropiación de parte del trabajo ajeno. Esta se produciría -según Marx- porque el mercado y las relaciones sociales de producción que se establecen en la producción por intermedio del mercado obligan al asalariado a trabajar más horas de las necesarias para

[13] Al no estar ahora en producción simple no tenemos la razón-patrón sraffiana R, pero sí tasas de ganancias máximas.

alimentarse él y su familia en condiciones históricas dadas. Esa diferencia, que llama y distingue entre *el valor del trabajo y el valor de la fuerza de trabajo*, es la plusvalía absoluta; el cociente entre esta y el capital variable, es decir, el que se consume en el seno de la producción, sería la tasa de plusvalía. Ricardo buscaba una mercancía inmune a la variación de los precios para indagar sobre la distribución. Puso el ejemplo del trigo, pero en el fondo fracasó en su intento: un siglo después encontró Sraffa la solución con su *mercancía-patrón*. Marx, en cambio, no buscó una mercancía sino una forma de contabilizar el valor de las cosas que fueran inmune a los precios. Esta es la teoría del valor-trabajo como "*la cantidad de trabajo socialmente necesario, o sea, el tiempo de trabajo socialmente necesario para su producción*". Con ello, Marx mataba dos pájaros de un tiro: a) encontraba la solución a la aparente contradicción entre un mundo de hombres y mujeres aparentemente libres que, sin embargo, no se les paga por el tiempo total de trabajo asalariado; b) halló además una medida del valor de las cosas (mercaderías, hoy bienes y servicios) inmune, inane a los precios. Dos por una. Pero las cosas hay que valorarlas en su justa medida, en lo que dan y, sobre todo, en lo que no dan. Los planificadores soviéticos, por ejemplo, fueran economistas o meros ideólogos, cometieron el error -entre otros- de utilizar el marxismo y, en concreto, la teoría del valor-trabajo, para el análisis de costes y precios en las empresas y, claro está, la cosa no funcionó. Confundieron el nivel de abstracción en el que se mueve la teoría del valor-trabajo con el nivel de concreción en el que se mueve la teoría y la práctica de la formación de los precios en los mercados. Esto puede ocurrir también al abordar el problema de la transformación: ambos se mueven en distintos planos de abstracción, de problemática, de respuesta teorética y de solución práctica. Quizá hubiera sido lo mejor que Marx no se hubiera empecinado en solucionar un problema mal planteado. Pero la historia no puede volver atrás y ahora siempre es mejor tomar el toro por los cuernos -si se puede- que estar vacilando a tan noble mamífero.

Vayamos ahora a Morishima, porque este trabajo parte y llega a él, aunque sea como centro gravitatorio de los dos problemas de que trata : el del teorema fundamental marxiano y el de la transformación de valores (unitarios) a precios. El gran economista japonés dedica el capítulo 7 de su libro al tema y lo asombroso es que no da ninguna solución, porque en ningún momento nos da una forma de calcular los ***3***x***n*** coeficientes de transformación que son necesarios si partimos de ***n*** sectores de la economía y ***3*** capitales distinguibles dentro del valor de una mercancía: el capital constante, el variable y la plusvalía. Es más parte de la hipótesis de que los precios son proporcionales a los valores mediante la ecuación:

(40) $$\frac{p_i}{w} = \alpha_i V_{f\,i} \quad \text{para todo } \boldsymbol{i} = \boldsymbol{1} \text{ a } \boldsymbol{n}$$

siendo $\boldsymbol{p}_i$ los precios de la mercancía ***i***, ***w*** la tasa de salario, α_i el coeficiente de transformación de ***i***, y $\boldsymbol{V}_f$ el importe de la mercancía en valor-trabajo (horas de trabajo). Más tarde sustituye el coeficiente anterior en la ecuación que define el sistema:

(41) $$pY = (1 + r)\left[wL + pA\right]$$

siendo ***Y*** los bienes finales, ***A*** la matriz de medios y ***L*** los inputs de trabajo, como es habitual. Como quiera que (41) es un vector ***n***, al sustituir (40) en (41) se pueden despejar ***n*** coeficientes porque tenemos también ***n*** ecuaciones. Sin embargo, el problema es que tenemos ***3***x***n*** coeficientes de los ***n*** sectores para los ***3*** capitales (constante, variable y plusvalía) que divide Marx los componentes incorporados al valor de las mercancías. Por si fuera poco, partir de (40) es aceptar como hipótesis de que los precios son proporcionales a los valores sin más consideraciones[14]. Parece, pues, que la aportación de Morishima en este punto en lugar de ser un paso adelante es un paso atrás.

El problema lo hemos señalado con el mero recuento de ecuaciones y variables: tenemos ***3***x***n*** variables y ***n*** ecuaciones, es decir, ***2***x***n*** grados de libertad. La conclusión es la de que en la resolución del problema de la transformación han de separarse el método de cálculo -con sus hipótesis- de los coeficientes de transformación y el problema a posteriori de la transformación. Existen varias soluciones de esto último: la primitiva de Marx, la ergódica de Markov, la de Bortkiewicz generalizada[15], etc. Yo por mi parte, aporto una solución con propiedades sorprendentes: la del cálculo de los coeficientes a partir de la proporcionalidad a las sumas por sectores y capitales (constante, variable, plusvalía). Según esto, hay tantas ecuaciones como coeficientes porque hay ***3***x***n*** sumas posibles en cuadros de doble entrada de ***3*** capitales y de ***n*** sumandos por los ***n*** sectores; con ello, los coeficientes saldrían de los siguientes sistemas de ecuaciones:

(42) $$a_i = \frac{(C_i + V_i + S_i) \times \Sigma_1^n C_i}{\Sigma_1^n (C_i + V_i + S_i)}$$

(43) $$b_i = \frac{(C_i + V_i + S_i) \times \Sigma_1^n V_i}{\Sigma_1^n (C_i + V_i + S_i)}$$

(44) $$c_i = \frac{(C_i + V_i + S_i) \times \Sigma_1^n S_i}{\Sigma_1^n (C_i + V_i + S_i)}$$

[14] Cosa distinta es deducir, bajo algunas hipótesis, que lo son, como hace Samuelson al señalar que con tasas de ganancia cero son proporcionales precios y valores o, como también se deduce esto último, si se suponen composiciones orgánicas de capital iguales para todos los sectores.

[15] Ver mi artículo (con perdón) *Sobre la transformación de valores a precios*: http://www.ucm.es/info/nomadas/25/antoniomora.pdf

El mayor inconveniente de la que aquí se presenta es la de que da como conclusión que los precios obtenidos de esta forma cumplen tres 3 características que, en otros modelos, se parte como hipótesis: que hay igualdad de tasas de ganancia, de plusvalía y de composiciones de capital para todas las mercancías[16]; y ello ocurre aunque no se den ninguna de estas igualdades en los valores de partida. No obstante es un ejemplo. Ahora daremos las ecuaciones para obtener los precios a partir de los valores y los coeficientes (obtenidos a partir de estos). La ecuación básica sería:

(44) $$\underset{nxn}{p}\,\underset{nxn}{Y} = \underset{nx3}{C_f}\,\underset{3xn}{V_t}$$

siendo ***p*** la matriz diagonal de precios, ***Y*** la matriz de productos finales, ***C***$_f$ la matriz ***n***x***3*** de coeficientes y ***V***$_t$ la matriz de dimensión ***3***x***n*** de valores-trabajo de los productos finales. Vale la pena dar las matrices desarrolladas de (44 bis)

(44 bis) $$\begin{bmatrix} p_1 & & \\ & \ddots & \\ & & p_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Y_1 & & \\ & \ddots & \\ & & Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k_1 & \cdots & k_n \\ v_1 & \cdots & v_n \\ s_1 & \cdots & s_n \end{bmatrix}$$

donde son cero en ambos lados de la igualdad los elementos de las matrices resultantes donde ***i*** es diferente de ***j***.

Como quiera que tenemos los coeficientes calculados de (42), (43) y (44), podemos despejar los precios con (45):

(45) $$\boxed{\underset{nxn}{p} = \underset{nx3}{C_f}\,\underset{3xn}{V_t}\,\underset{nxn}{Y^{-1}}}$$

Podríamos igualmente despejar los valores en función de precios y coeficientes, pero eso carece de sentido económico, y menos de sentido económico marxista. Con ***3***x***n*** coeficientes y ***n*** ecuaciones de (45) queda claro el problema formal -por no hablar de los conceptuales- con que se enfrentó Marx, sus epígonos, sus críticos y sus detractores, aunque muchos no fueran conscientes de ello. De la resta entre coeficientes y ecuaciones nos queda ***2***x***n*** grados de libertad para el cálculo de los ***3***x***n*** coeficientes. En los ejemplos se oscurecía el problema porque había ***3*** sectores y ***3*** tipo de capitales (constante, variable y plusvalía); si además, se convertía un precio en numerario -como hace Bortkiewicz- la oscuridad es total. Ahora, con ***2***x***n*** grados de libertad, podemos eliminar un grado de libertad suponiendo que todos los sectores (o mercancías) operan bajo el mismo grado de plusvalía, es decir, ***S***$_i$=***eV***$_i$, desde ***i***=***1*** a ***n***; además le añadimos una de estas dos

[16] Si se dan 2 de las 3 condiciones, se da la tercera porque las 3 están relacionadas por definición.

condiciones: o la de la igualdad de las tasas de ganancia para todos los sectores (o mercancías) o la de la igualdad de las composiciones orgánicas de capital también para todos los sectores (o mercancías). Con estas condiciones reducimos los grados de libertad a cero y los coeficientes pueden ser calculados. Otra cosa es la conveniencia o no de las hipótesis. Con ***n*** sectores -y no con ***3***- se ve lo erróneo de añadir como condición la igualdad de la suma total de valores y de precios (en realidad, ingresos): sólo se añade ***1*** ecuación cuando tenemos en principio ***2***x***n*** grados de libertad que debemos eliminar, por un lado; por otro, esa igualdad carece de sentido económico y más parece propia de un contable. Aquí Marx cuando la formuló, ciertamente, no estuvo muy afortunado.

Con lo anterior, una conclusión al menos es clara: no existe un único y ortodoxo procedimiento de conversión de valores a precios: todo depende de las hipótesis de partida. No existe una solución única porque los grados de libertad -según las hipótesis que se hagan- *no* son cero. No es pues este un problema cerrado y/o solucionado, sino un problema permanentemente abierto: será la realidad, la contrastación empírica -cosa que se ha hecho con más o menos éxito- la que puede determinar la bondad de algunas de estas hipótesis (o de ninguna).

Transformación de valores a precios

cuadro 1 — *Valores: entrada de datos*

	K	V	S	valor total	cantidades	t. gan.	t. explot.	C/V
1	225	90	60	375,0	355	0,19	0,67	2,50
2	100	120	80	300,0	340	0,36	0,67	0,83
3	50	90	60	200,0	180	0,43	0,67	0,56
	375	300	200	875,0		0,30	0,67	1,25

cuadro 2 — *Solución histórica de Marx*

	K	V	S	precios x Q	precios	t. gan.	t. explot.	C/V
1	225,0	90,0	93,3	408,3	1,150	0,30	1,04	2,50
2	100,0	120,0	65,2	285,2	0,839	0,30	0,54	0,83
3	50,0	90,0	41,5	181,5	1,008	0,30	0,46	0,56
	375,0	300,0	200,0	875,0		0,30	0,67	1,25

cuadro 3 — *Solución correcta según Marx*

	K	V	S	precios x Q	precios	t. gan.	t. explot.	C/V
1	112,5	90,0	93,3	295,8	0,833	0,46	1,04	1,25
2	150,0	120,0	65,2	335,2	0,986	0,24	0,54	1,25
3	112,5	90,0	41,5	244,0	1,355	0,20	0,46	1,25
	375,0	300,0	200,0	875,0		0,30	0,67	1,25

cuadro 4 — *Solución histórica de Bortkiewicz*

	K	V	S	precios x Q	precios	t. gan.	t. explot.	C/V
1	288	96	96	480,0	1,352	0,25	2,50	3,00
2	128	128	64	320,0	0,941	0,25	1,67	1,00
3	64	96	40	200,0	1,111	0,25	1,47	0,67
	480	320	200	1.000,0		0,25	1,92	1,50

cuadro 5 — *Solución normalizada de Bortkiewicz*

	K	V	S	precios x Q	precios	t. gan.	t. explot.	C/V
1	225,0	90,0	96,0	411,0	1,158	0,30	2,21	2,50
2	100,0	120,0	64,0	284,0	0,835	0,29	1,54	0,83
3	50,0	90,0	40,0	180,0	1,000	0,29	1,38	0,56
	375,0	300,0	200,0	875,0		0,30	1,75	1,25

cuadro 6 — *Solución proporcional a las sumas*

	K	V	S	precios x Q	precios	t. gan.	t. explot.	C/V
1	126,8	101,4	67,6	295,8	0,833	0,30	0,67	1,25
2	143,7	114,9	76,6	335,2	0,986	0,30	0,67	1,25
3	104,6	83,7	55,8	244,0	1,355	0,30	0,67	1,25
	375,0	300,0	200,0	875,0		0,30	0,67	1,25

El primer y cuarto cuadros son los datos originales de Marx y Bortkiewicz; el cuadro 2 es la solución de Marx; el cuadro 3 sería la solución correcta si se cumplieran las dos condiciones de Marx; el cuadro 5 es la solución de Bortkiewicz normalizada a las sumas de los capitales constante, variable y plusvalía originales; el cuadro 6 es la solución proporcional a la sumas de la que trata el epígrafe 6 del artículo.

Transformación de valores a precios y Coeficientes

cuadro 1 Valores (datos originales)

	K	V	S	valor total	cantidades	t. ganan.	t. explot.	C/V
1	225	90	60	375,0	355	19,0%	0,67	2,50
2	100	120	80	300,0	340	36,4%	0,67	0,83
3	50	90	60	200,0	180	42,9%	0,67	0,56
	375	300	200	875,0		29,6%	0,67	1,25

cuadro 2 Solución histórica de Marx — Coeficientes de transformación

	K	V	S	precios x Q	precios	K	V	S
1	225,0	90,0	93,3	408,3	1,150	1,000	1,000	1,556
2	100,0	120,0	65,2	285,2	0,839	1,000	1,000	0,815
3	50,0	90,0	41,5	181,5	1,008	1,000	1,000	0,691
	375,0	300,0	200,0	875,0				

cuadro 3 Solución correcta según Marx — Coeficientes de transformación

	K	V	S	precios x Q	precios	K	V	S
1	112,5	90,0	93,3	295,8	0,833	0,500	1,000	1,556
2	150,0	120,0	65,2	335,2	0,986	1,500	1,000	0,815
3	112,5	90,0	41,5	244,0	1,355	2,250	1,000	0,691
	375,0	300,0	200,0	875,0				

cuadro 4 Solución histórica de Bortkiewicz — Coeficientes de transformación

	K	V	S	precios x Q	precios	K	V	S
1	288	96	96	480,0	1,352	1,280	1,067	1,029
2	128	128	64	320,0	0,941	1,280	1,067	0,982
3	64	96	40	200,0	1,111	1,280	1,067	0,964
	480	320	200	1.000,0				

cuadro 5 Solución normalizada de Bortkiewicz — Coeficientes de transformación

	K	V	S	precios x Q	precios	K	V	S
1	225,0	90,0	96,0	411,0	1,158	1,000	1,000	1,600
2	100,0	120,0	64,0	284,0	0,835	1,000	1,000	0,800
3	50,0	90,0	40,0	180,0	1,000	1,000	1,000	0,667
	375,0	300,0	200,0	875,0				

cuadro 6 Solución proporcional a las sumas — Coeficientes de transformación

	K	V	S	precios x Q	precios	K	V	S
1	126,8	101,4	67,6	295,8	0,833	0,563	1,127	1,127
2	143,7	114,9	76,6	335,2	0,986	1,437	0,958	0,958
3	104,6	83,7	55,8	244,0	1,355	2,091	0,929	0,929
	375,0	300,0	200,0	875,0				

Los coeficientes de transformación son los cocientes entre los precios de los cuadros 2 a 6 y el cuadro 1 de valores.

Bibliografía

Afriat, S.: “Sraffa´s Prices”, Universitá degli Studi di Siena, quaderni 474. www.econ-pol.unisi.it/quaderni/474.pdf

Ahijado, M.: “Distribucción, precios de producción y crecimiento”, 1982, Centro de Estudios Universitarios Ramón Areces.

Caballero, A. y Lluch, E.: “Sraffa en España”, Investigaciones Económicas (2ª época, vol. X, n.º 2), 1986.

Dobb, M.: “Teoría del valor y de la distribución desde Adam Smith, edit. Siglo XXI editores.

Desai, M.: “Marxian Economic Theory”, 1974 [“Lecciones de teoría económica marxista”, 1977, edit. Siglo XXI].

Dobb, M.: “The Sraffa system and the critique of neoclassical theory of distribution”, 1970.

Estrin, S. y Laidler, D: “Introduction microeconomics”.

Fiorito, Alejandro: “La implosión de la economía neoclásica”. Está en la red: www.geocities.com/aportexxi/sraffa12.pdf

Foncerrada, Luis Antonio: “Sraffa y Böhm-Bawerk”. Está en la red: http://www.economia.unam.mx/secss/docs/tesisfe/FoncerradaPLA/tesis.pdf

Garegnani, P.: “El capital en la teoría de la distribución”, 1982, ed. Oikos-Tau (“Il capitale nelle teorie delladistribuzone”, 1982)

Gehrke, Ch.y Kurz, D.: “Sraffa on von Bortkiewicz”. Está en la red: http://www.newschool.edu/cepa/events/papers/050509_Bortkiewicz.pdf

Harcourt, G.C.: “Teoría del capital” (*Some Cambridge controversies in the theory of capital, 1975*), apéndice al cap. 4, 1975, edit. Oikos-tau.

Heahtfield, D. F.: “Productions funtions”.

Lange, O., Taylor, F. M.: “On tthe Economic Theory of Socialism, 1938 [Sobre la teoría económica del socialismo, 1971, edit. Ariel]

Marx, Carlos: “El método en la Economía Política”, 1974, Ediciones Grijalbo, S.A.

Marx, Carlos: “El Capital”, en el FCE, traducción de Wenceslao Roces.

Meade, J.: “A neo Classical Theory of Economic Growth”, 1961.

Meek, R.: “Mr. Sraffa´s Rehabilitationof Classical Economics”, 1961.

Mendoza, Gabriel: “La transformación de valores en precios de producción”, 1997 http://www.izt.uam.mx/economiatyp/numeros/numeros/10/articulos_PDF/10_2_La_transformacion.pdf

Mora Plaza, A.: “Aspectos de la economía de Sraffa”, revista: Nómadas, n. 23, U. Complutense de Madrid, enlace: http://www.ucm.es/info/nomadas/23/antoniomora.pdf

Mora Plaza, A.: “Notas sobre la producción simple y conjunta a consecuencia de Sraffa: http://redalyc.uaemex.mx/pdf/181/18112179020.pdf;

Mora Plaza, A.: “Sobre la transformación de valores a precios”: http://www.eumed.net/ce/2009b/amp2.htm

Mora Plaza, A.: “Notas sobre el teorema fundamental marxiano” http://www.eumed.net/ce/2009b/amp.htm

Morhisima, M.: “La teoría económica de Marx” (*Marx´s Economics, 1973*), 1977, pág. 15, edit. Tecnos.

Moseley, F.: “El método lógico y el problema de la transformación”. http://www.azc.uam.mx/publicaciones/etp/num7/a8.htm

Murga, Gustavo: “Piero Sraffa”. http://marxismo.cl/portal/index.php?option=com_content&task=view&id=100&Itemid=1

Nuti, D.: “Capitalism, Socialism and Sleady Growth”, 1970.

Okishio, N.: “A mathematical note on marxian theorems”, 1963.

Pasinetti. L.: “Critical of the neoclassical theory of growth and distribution”. Está en la red: http://www.unicatt.it/docenti/pasinetti/pdf_files/Treccani.pdf

Pasinetti, L.: “Structural Change and Economic Growth: a theoretical essay on the dynamics of Wealth of Nations”, 1981, Cambridge University Press.

Pasinetti, L.: “Rate of profit and income distribution in relation to the rate of economic growth”, 1961/2.

Pasinetti, L.: “Switches of technique and the rate of return in Capital Theory”, 1969.

Pasinetti, L.: “Crecimiento económico y distribucción de la renta” (“*Growth and Income Distribution*”, 1974), 1978, Alianza Editorial.

Pasinetti, L.: “Lecciones de teoría de la producción” (“Lezioni di teoria della produzioni”, 1975), 1983, FCE.

Peris i Ferrando, J.E: “Análisis de la resolubilidad de modelos lineales de producción conjunta”, 1987, en internet: http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/3829/1/Peris%20Ferrando,%20Josep.pdf

Potier, J.P.: “Piero Sraffa”, 1994, edicions Alfons Magnànim.

Ricardo, D.: “Principios de Economía Política y Tributación” (*On the Principles of Political Economy and Taxation,*), 1973, F.C.E.

Robinson, J.: “Ensayos críticos”, 1984, Ediciones Orbis.

Samuelson, Paul: “Understanding the Marxian notion of Exploitation”, 1971.

Sargent, T.J.: “Teoría macroeconómica” (*Macroeconomic Theory, 1979*), 1988, Antoni Bosch editor.

Schefold, Bertram: *Mr. Sraffa on Joint Production*, 1971

Schumpeter, J. A.: “Historia del Análisis Económico” (*History of Economic Analisis*, 1954), 1971, Ediciones Ariel.

Segura, J.: “Análisis microeconómico”, pág. 88, 2004, Alianza editorial Tecnos.

Steedman, I.: “Marx, Sraffa y el problema de la transformación” (*Marx after Sraffa, 1977*), 1985, F.C.E.

Sraffa, Piero: “Producción de mercancías por medio de mercancías” (*Production of commodities by means commodities, 1960*), 1975.

Schumpeter, J. A.: “Historia del Análisis Económico” (*History of Economic Analisis*, 1954), 1971, Ediciones Ariel.

Segura, J.: “Análisis microeconómico”, 2004, Alianza editorial Tecnos.

Solow, R.: “The interest rate and transition between techniques”, 1967.

Sraffa, Piero: “Producción de mercancías por medio de mercancías” (*Production of commodities by means commodities, 1960*), 1975, Oikos-Tau.

Ricardo, D.: “Principios de Economía Política y Tributación” (*On the Principles of Political Economy and Taxation,*), 1973, F.C.E.

Vegara, J. M.: “Economía política y modelos multisectoriales”,1979, edit. Tecnos.

Varios,: “Matemáticas avanzadas aplicadas a la Economía”, UNED, 2001.

Madrid, 16 de agosto de 2010.