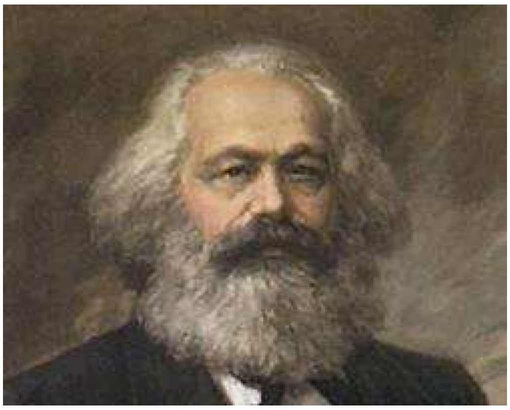
LA ECONOMÍA DE CARLOS MARX
(CRÍTICA SOBRE LOS FUNDAMENTOS)

MARX´S ECONOMIC
(a fundamental critical)



Carlos Marx

por

Antonio Mora Plaza

I - SOBRE LA TEORÍA DEL VALOR-TRABAJO Y DE LA PLUSVALÍA EN MARX.

Comienzo con una acotación: sólo trato de algunas cuestiones que escribió Marx como economista, entendida la economía como el conocimiento que surge de tratar la actividad humana encaminada (aunque sea no elegida, aunque sea forzosa) a producir bienes y servicios. No acepto el principio de que sea para satisfacer necesidades, ni de que los medios empleados sean de usos alternativos (*Lionnel Robins*). Eso da igual. En tiempos de guerra se trabaja en el armamento y maldita satisfacción tiene eso. Y en cuanto a los usos alternativos, si no existen, no por eso deja de ser un trabajo esa actividad, no por eso deja de producir bienes (o males) y servicios y a generar una renta. Eso, a los obreros, asalariados, autónomos, etc., les da igual. Pero esto era una digresión. Viene a cuento para acotar a Marx, porque esa es la única manera de abordar todo el legado del revolucionario alemán. Y como economista, también se ha de ser selectivo, forzosamente, pero a cambio de ser profundo. O al menos intentarlo. Porque Marx es un economista, además de ser marxista, ideólogo, historiador, político, filósofo, periodista, revolucionario, etc. Y como economista no hay otra manera de empezar con Marx que darle el primer turno a la teoría del valor-trabajo, guste o -como es mi caso- no guste.

Esta teoría es distinta de la de D. Ricardo. Dice el economista inglés que para "*poseer utilidad los bienes obtienen su valor de dos fuentes: de su escasez y de la cantidad de trabajo requerida para obtenerlos*"[1]. Más tarde añade a ello una consideración que Piero Sraffa aprovechará para la consideración del capital como trabajo fechado: "*El valor de los bienes no sólo resulta afectado por el trabajo que se le aplica de inmediato, sino también por el trabajo que se empleó en los instrumentos, herramientas y edificios con el que se complementa el trabajo inmediato*"[2]. Esta última cita es el título de un epígrafe, por lo que no caben matizaciones. Marx, con su agudeza habitual, se dio cuenta enseguida de que esta definición o consideración (¿o ley?) del trabajo tenía un defecto insoslayable: si era verdad, cuanto más vago e inexperto sea el trabajador, más tiempo tardará en llevar a cabo el trabajo y ¡valdrá más lo que produce! Quizá Ricardo pensaba más en trabajos autónomos, agrícolas, etc. propios de

[1] *Principios de Economía Política y Tributación*, FCE, pág. 9
[2] *Principios de Economía Política y Tributación*, FCE, pág. 17

una sociedad primitiva. De hecho, el ejemplo que pone en su libro es el ya famoso cazador. La paradoja de la agregación ha perseguido a los economistas siempre. Marx, escribiendo exactamente 50 años más tarde[3], ya piensa en el *trabajado asalariado* organizado en empresas y cambia la consideración de Ricardo y dice que "*la magnitud de valor de un objeto no es más que la cantidad de trabajo socialmente necesario, o sea, el tiempo socialmente necesario para su producción*"[4]. El valor para Marx es una especie del trabajo que por término medio -dada la competencia- es necesario para fabricar un objeto (mercancía). A más competencia puede haber igual valor, pero más producción. Al menos eso es lo que yo interpreto leyendo a Marx, que si le despojamos de su lenguaje *hegelés* (de Hegel, claro) que dice la gran economista Joan Robinson con que está escrito *El Capital*, es diáfano. Eso no quiere decir que sea acertado. En páginas más adelante comienza Marx con el que decía la Robinson, porque dice que: "*el obrero añade al objeto sobre el que recae el trabajo nuevo valor, incorporándole una determinada cantidad de trabajo, cualesquiera que el contenido concreto, el fin y el carácter técnico*"[5]. La realidad es el todo. Aquí está Hegel no sólo como lenguaje. Entonces cabe preguntarse: ¿La teoría del valor-trabajo es una *ley* económica o una *definición*? ¿La teoría de la tasa de plusvalía (no la plusvalía absoluta) es una ley económica o también una definición? Acepto el principio *popperiano* de la falsibilidad, es decir, que una ley aplicada o proveniente de cualquier campo del conocimiento, para ser cierta ha de poder ser falsa, de tal manera que sólo la contrastación empírica le puede dar marchamo de fenómeno regular merecedora del calificativo de ley. Popper negaba el carácter científico al marxismo y al psicoanálisis porque no podían ser falsos. Para dar respuesta a las preguntas que hacíamos sobre la teoría del valor-trabajo las podemos desdoblar a su vez en dos: ¿depende la plusvalía y la tasa de plusvalía del nivel de salarios? ¿Puede ser la tasa de plusvalía, según Marx, diferente para los diversos sectores en alguna circunstancia? A la primera pregunta contestan Seton, Okishio y Morishima con el teorema fundamental marxiano (versión Morishima) diciendo que para que "*exista un conjunto de precios y un tipo de salarios reales capaz de producir beneficios positivos, en otras palabras, para que pueda mantenerse una sociedad capitalista, es condición necesaria y*

[3] La primera edición en alemán del I tomo de El Capital es de 1867.
4 El Capital, I tomo, FCE, pág. 7.
[5] *El Capital,* I tomo, FCE, pág. 150.

suficiente que los capitalistas exploten a los trabajadores”[6]. Yo he demostrado[7] que en la versión de Morishima de este teorema no son válidas ni la condición necesaria ni suficiente, es decir, no hay demostración; por contra, lo que se demuestra es que puede haber salarios sin explotación y precios positivos; que a partir de un cierto nivel de salarios, estos sólo son posibles si hay explotación; Steedman recoge la demostración[8] de que puede haber salarios y precios positivos aún con tasas de explotación negativas, aunque conceptualmente no se puede admitir la posibilidad de una tasa de explotación negativa, al menos en un contexto marxiano. A la segunda pregunta sobre si puede haber diferentes tasas de explotación según sectores, yo nunca advierto en Marx esa posibilidad, sea cual sea la longitud de la jornada de trabajo. La explotación marxiana depende -me atrevo a decir- sólo de la posibilidad del alargamiento de la jornada de trabajo *sea cual sea el nivel de salarios*. Al menos Morishima no tiene duda: “*El problema de la determinación del grado de explotación se reduce al de la duración de la jornada de trabajo*”[9], lo cual es coherente con el resto de su libro. Con respecto a Marx yo no tengo dudas: leyendo el conjunto de su obra, para el alemán la tasa de plusvalía es única para todos los sectores, aunque pueda haber algún texto particular que pueda indicar lo contrario o, al menos, establecer alguna duda. Hay que tener en cuenta que para Marx sólo el trabajo crea y *transfiere* valor. Esta constancia de la tasa de plusvalía es inaceptable sea cual sea el contexto en que se establezca, incluso en un contexto de nuevo plenamente marxiano. Y menos aún que esa constancia pueda ser independiente de la tasa de salarios. Aún más dificultad se añade el hecho de que no plantee Marx *qué* fuerzas obligan o llevan a la constancia de la tasa de plusvalía en todos los sectores, cosa que sí hace con la tasa de ganancia. Por esta última dificultad es por lo que traíamos a colación a Popper, gran epistemólogo de la ciencia por más reaccionario que se presente y se nos presente. El criterio de Popper es aceptable, aunque no siempre sea estrictamente el laboratorio el juez de la verdad, como por ejemplo en la astrofísica. Y en las ciencias sociológicas el laboratorio son las encuestas, las estadísticas y la Historia. Por ello -al menos desde mi punto de vista-, o la tasa de

---

[6] *Marx Economics*, 1973

[7] *Morishima y el teorema fundamental marxiano*: http://www.eumed.net/ce/2010b/amp4.htm

[8] *Marx after Sraffa*, 1977.

[9] Marx´Economics, 1973.

plusvalía marxiana es una mera definición que no añade nada al conocimiento de la realidad social[10] y, en particular, del laboral, o se han de admitir tres cosas: primero, que las tasas de explotación (de plusvalía) han de ser variables según sectores (incluso según empresas); segundo, que han de depender de los salarios[11] y no sólo de la jornada de trabajo; tercero, que ha de demostrarse que existe una ley sobre esta tasa (de plusvalía) al respecto propia del sistema capitalista -objeto de análisis de Marx en *El Capital*- que no se daría en otro sistema social teórico y que no se ha dado en otros sistemas de producción del pasado.

Pero es que además hay otra dificultad insalvable para la constancia sectorial de la tasa de plusvalía. Existe una relación formal -matemática- producto de las definiciones de tasa de plusvalía, de composición orgánica de capital y de la tasa de ganancia, que lleva a que una de ellas depende de las otras dos[12]. Ocurre entonces que si mantenemos el criterio de la tendencia a la igualación -al menos como tendencia- de las tasas de ganancia en el sistema capitalista producto de la competencia y el criterio marxiano de la constancia sectorial de las tasas de plusvalía, ello nos da como resultado la constancia sectorial de las composiciones orgánicas de capital, lo cual es rechazable de entrada: ¿cómo pensar, por ejemplo, que la relaciones capital/trabajo son iguales en el sector del automóvil que en la recolección del trigo, en el de la construcción de obra civil o en el de los servicios bancarios? ¿Qué ley económica puede imaginarse que lleve al mismo puerto la

---

[10] Kant diría que es un juicio analítico a priori.

[11] Para ver porqué la tasa de plusvalía ha de depender del nivel de salarios podemos recurrir a uno de esos experimentos mentales que hacía Einstein para la Física, pero aquí en lo social. Supongamos que aumentan los salarios hasta un nivel tal que con los ingresos salariales pueden los asalariados comprar todo el excedente que se produce, es decir, que sólo se deja de cobrar lo necesario para la reproducción de los medios de producción del sistema. Las ganancias serían cero. ¿Habría en ese caso explotación? La respuesta es no porque todo el capital variable y toda la llamada plusvalía han ido a parar a los asalariados. Conclusión: la tasa de plusvalía debe depender del nivel de salarios. Si ***Z*** son los salarios, ***X*** los medios de producción, ***Y*** los productos finales, ***L*** el input de trabajo, ***P*** los precios y ***W*** los salarios, entonces, si ***WL***=***PZ*** y ***X***=***Y***-***PZ***, no hay excedente y tampoco plusvalía. Si no es así se cae en una contradicción insoslayable: aunque los ingresos por salarios alcancen todo el excedente (***Y***-***X***), sigue habiendo tasa de plusvalía (según Marx) y la teoría de la explotación de Marx se viene abajo. En el apéndice V se amplia este punto.

[12] Véase apéndice III.

igualdad de composiciones orgánicas a estos sectores? Ninguna, y si alguien la propusiera, la rechazaríamos por cuestiones de contrastación empírica, porque hoy sabemos que ha sectores muy intensivos en trabajo (construcción, turismo, servicios sociales) y otros en capital y tecnología (investigación, informática).

Mi opinión sobre la teoría del valor-trabajo es la de que Marx, queriendo solucionar un problema se dio de bruces con otro que no pudo resolver. Marx vio, leyendo a Ricardo principalmente, que *el valor de las cosas no podía depender de los precios*, porque estos eran un mecanismos de intercambio, pero no un depósito de valor. Los precios de los bienes y servicios bajaban y subían - y bajan y suben- por efecto de las leyes de la oferta y la demanda ante *las mismas cantidades* de aquellos. Con ello, el aparente valor de las cosas podían subir o bajar ante variaciones de los precios. En lenguaje moderno diríamos que el *PIB* de un país puede aumentar porque aumenten los precios de los bienes y servicios que entran en esa macromagnitud y no porque haya aumentado la cantidad de esos bienes. Marx solucionó ese problema dándole un valor a lo que se produce en términos de trabajo socialmente necesario que era, por definición, independiente de los precios. Un bien o servicio producido vale según Marx por *la contabilización* de las horas de trabajo que por término medio se incorpora a ese bien en el conjunto de la sociedad. El éxito por este lado está conseguido: Marx puede decir lo que vale una cosa sin necesidad de saber su precio. Hasta ahí correcto. El problema viene porque esta teoría así considerada no sólo es independiente de los precios, sino que también los es de la cantidad producida. Da igual que 100.000 horas de trabajo al año sean necesarias para producir 50.000 litros de leche que las mismas hora de trabajo produciendo 150.000 litros. El valor total es el mismo. Cambia, eso sí, su valor unitario. Ello permite la transformación de valores (unitarios) a precios. De paso hay que considerar que la teoría *contable* de Marx del valor -trabajo, con los ejemplos en la mano, en realidad transforma valores en términos de horas de trabajo en ingresos. Pero, como hemos visto, eso es subsanable dividiendo por la cantidad producida, para poder comparar valores-trabajo (unitarios) con precios. En Marx los bienes y servicios (mercancías) tienen incorporado un valor en horas de trabajo y a su vez el trabajo le transfiere valor, es decir, lo aumenta; en Sraffa, por ejemplo, los precios son meros mecanismos de intercambio. Este problema de Marx -el de la independencia de los valores-trabajo de las cantidades producidas con esas horas- carece de solución. Con la teoría del *valor-contable* del trabajo no se puede revalorizar en sentido literal el trabajo por la mera incorporación de la tecnología y la productividad que ello conlleva. Las cosas producidas seguirán valiendo lo mismo, porque sólo puede aumentar su valor mediante la prolongación de la jornada de trabajo. Por eso, si alguien consigue demostrar que la teoría de la explotación (plusvalía) no es una definición sino una ley, tenemos una brillante teoría económica. Pero no hay que olvidar para ello que hay que demostrar tres cosas: 1) que pueda ser falsa y no que sea cierta por definición de tasa de plusvalía; 2) que deba depender de los salarios, aunque sea en términos absolutos, porque de lo contrario, si los salarios aumentaran hasta acaparar todo el excedente, deja de haber explotación y apropiación -sea cual sea la jornada de trabajo- se ponga Marx como se ponga, porque con todo el excedente incorporado a la masa de salarios no existe plusvalía absoluta; 3) debe demostrarse que esta teoría de la explotación es sólo y propia del sistema capitalista (o del modo de producción capitalista) y no lo es de otros sistemas o modos habidos y por haber.

Si se quiere integrar a Marx en el mundo del conocimiento, en el universitario, en pie de igualdad con otros grandes economistas[13], se ha de actualizar a Marx o abandonarlo, al menos como economista. También, en mi opinión, se debe abandonar la teoría del valor-trabajo según para qué fines. En realidad a mí siempre me ha parecido una *teoría contable* de los costos buscando la independencia de los precios para evitar la volatilidad de aquellos (costos) en función de la variabilidad de los últimos (precios)[14]. Como teoría contable no me parece aceptable porque tiene defectos de coherencia interna, como se ha señalado repetidamente, y ejemplos de eso son la imposibilidad de tener tres leyes (las mencionadas sobre las tasas de ganancia, plusvalía y la composición orgánica) *diferentes*; la posibilidad de tasas de ganancia positivas con tasas de explotación negativas[15]; la incorrecta transformación marxiana de valores a precios, etc. Puede ser mantenida la teoría de la explotación en el mundo de los valores-trabajo porque

[13] No entro en el resto de los campos del conocimiento en los que entró Marx porque mi conocimiento de ese *resto* no es lo suficiente para juzgarlo. En esto sigo a Wittgenstein.
[14] Similar a la búsqueda de Ricardo de una distribución independiente de los precios.
[15] *Marx after Sraffa*, Steedman, 1977

eso no depende sólo del nivel cuantitativo, sino del cualitativo, de las relaciones sociales de producción que se producen en el mundo del trabajo asalariado, con distinción entre *valor del trabajo* y *valor de la fuerza de trabajo*. Ello puede mantenerse de alguna manera porque vemos que *la población activa* es siempre menor que la población en general, y menor la activa aún que *la ocupada* merced al paro indeseado (incluso aunque no sea tal). En el pasado, en el estudio de la Historia o en la evolución de las relaciones de producción (primitiva, esclavista, feudal, asiática) ha ocurrido siempre que la población *ocupada* es menor que la población *alimentada*. De todas las maneras y aun cuando desecháramos la teoría del valor-trabajo como simple método contable y pasáramos a Marx por el tamiz, por ejemplo, del modelo *esrafiano* (el de la mercancía-patrón, de la razón-patrón, de la producción simple y conjunta, de la distinción entre productos básicos, y no básicos), aún tenemos mucho Marx. Tenemos el Marx de la caída (o no) de la tasa de ganancia, el del las esferas de circulación de mercancías y capitales, el del trabajo abstracto y concreto, el del fetichismo de la mercancía (sociología), el de la rotación de los capitales, el de la acumulación primitiva, el de las rentas diferenciales, el de las teorías del subconsumo y sobreproducción, el de los ciclos, el de la reproducción simple y ampliada, etc. Y esto sólo lo que respecta a la economía.

II - MORISHIMA Y EL TEOREMA FUNDAMENTAL MARXIANO (TEORÍA DE LA EXPLOTACIÓN)

Este trabajo tiene la pretensión de ser una crítica al teorema formulado por *Okishio* y recogido por el gran economista marxista *Michio Morishima*. El resultado, como se verá, resulta sorprendente. Pero una advertencia: nada más lejos de mi intención hacer siquiera un análisis histórico de ambos problemas. Eso ya ha sido hecho, hay mucha literatura al respecto y ha servido y seguirá sirviendo para adquirir doctorados o publicar trabajos de recopilación en revistas especializadas. Sí quiero ser novedoso, creativo en el tratamiento, que es lo único que me mueve al escribir sobre estos temas. Lo curioso es que ambos problemas tienen fama como problemas y apenas ninguna las soluciones que se han intentado; y, lo que es peor, las pocas veces que se estudian estos problemas en la universidad se dedica mucho más tiempos a los primeros que a las segundas. Parece claro que el marxismo, sea clásico, crítico o actualizado, no forma parte del *corpus* de conocimientos de una recién licenciado o graduado e, incluso, de los doctorados, salvo por el clan de los especialistas. Se puede culpar a eso que se llama la ideología dominante, pero creo que también el clan de los marxistas tienen culpa por adoptar -en lugar de estudiar- el marxismo como si fuera un catecismo. En mi opinión, el marxismo, como el marginalismo, o los clásicos, son acreedores de nuestro punto de vista en la medida que tengan algo que enseñarnos a los hombres y mujeres del siglo XXI para tratar los problemas de nuestro siglo y de la historia. Es verdad que siempre ha de haber un grupo -o muchos- especializados en la historia del análisis que busque la lógica de las teorías en el seno de la historia. Bienvenido sea. Es más, para evitar dogmatismo y fundamentalismo, las enseñanzas de economía, física, biología, derecho, etc., y hasta el de las matemáticas, debieran hacerse en el marco de la historia, porque la lógica más pedagógica es la lógica histórica . No ocurre así, desgraciadamente, y de ahí también la deformación y simplificación en la enseñanza universitaria de teorías e ideologías. El marxismo o, en concreto, *El Capital*, deben estudiarse como cualquier otro tipo de conocimiento, filosofía o ideología que ha surgido a lo largo de la historia, al igual que se estudia o se ha estudiado el aristotelismo, el tomismo, el racionalismo, el empirismo, el kantismo, el historicismo, etc., y ha de hacerse críticamente o no será conocimiento sino tan sólo creencia. Otra cosa será la praxis de sus consecuencias teóricas.

Tras estas reflexiones y yendo directamente al grano del tema que define el título, en 1963 N. Okishio[16] demostraba que: "*Para que exista un conjunto de precios positivos es necesario y suficiente que se de un tipo de salarios reales tal que el grado de explotación sea positivo*"[17]. Morishima toma el teorema de Okishio y lo reformula bajo dos aspectos o condiciones: a) la explotación o, dicho en términos más técnicos, la tasa de plusvalía, la arranca el propietario de los medios de producción por el *alargamiento* (sólo) de la jornada de trabajo más allá de la necesario para que el asalariado pueda vivir él y su familia en condiciones históricas dadas. No se entra aquí en temas de alienación, del fetichismo de la mercancía, del trabajo abstracto y concreto, de los procesos de circulación del dinero, mercancías y capitales, etc., que pertenecen a otras esferas de conocimiento, aunque dentro del *corpus* marxista: b) el nexo de unión entre valores y precios lo establece Morishima como hipótesis directamente mediante unos "*números positivos"* (coeficientes) de los que no sabemos cómo se obtienen, pero que Morishima los justifica al suponer que todas las industrias tienen la misma composición orgánica de capital. Que sean positivos es porque van a relacionar precios que previamente se han asegurado que lo son porque deben cumplir la ecuación:

$$p > pA + wL \tag{1}$$

donde $\boldsymbol{p}$ es el vector de precios, $\boldsymbol{A}$ la matriz $\boldsymbol{n}$x$\boldsymbol{n}$ de requerimientos, $\boldsymbol{w}$ la tasa de salarios y $\boldsymbol{L}$ el vector de inputs de trabajo. Morishima -que lo toma de Okishio- justifica la ecuación (1) porque parte de que $\boldsymbol{A}$ cumple los requisitos del teorema de Perron-Froebenius[18], es decir, $\boldsymbol{A}$ es cuadrada, no negativa e indescomponible. Sin embargo, y con ser eso perfectamente aceptable, no justifica (1), sino sólo la que sigue:

$$p > pA \tag{2}$$

Luego veremos la importancia de esta diferenciación. Al reflexionar sobre el teorema parecería que los marxistas, que además de deudores

[16] *A matematical Note on Marxian Theorems*.

[17] *Marx´s Economics, M. Morishima*, 1973 [*La teoría económica de Marx*, 1977, edit. Tecnos, pág. 66].

[18] El teorema lo recoge Pasinetti en su conocido libro *Lecciones de teoría de la producción*.

del conocimiento y posibles contribuyentes al mismo, son personas que quieren cambiar el mundo y *no sólo interpretarlo*, deberían -deberíamos, no me excluyo- sentirnos satisfechos por este apoyo riguroso del conocimiento a nuestros deseos. Yo, en cambio, no lo estoy. La razón es la de que, dado que el corazón del análisis marxiano se basa en la producción de la plusvalía y su obtención de la misma por parte de la clase de los propietarios por esta condición, si todo al final depende *sólo* del tiempo de trabajo (su alargamiento) ocurren tres cosas: 1) la explotación es inevitable, porque siempre es mayor la población general que la población ocupada, y más aún ésta que la asalariada; 2) esta explotación, según la demostración de Morishima, existe, *sea cual sea la tasa de salarios*, puesto que estos no se hacen explícitos en el modelo; 3) el alargamiento de la jornada no retribuida se producirá no sólo en el sistema capitalista, objeto de análisis de Marx, sino en cualquier sistema alternativo, aunque se erradicaran otros posibles males. Por todo ello, me parece que todo modelo que derive en el teorema fundamental marxiano debe -debiera- tener al salario como variable explícita fundamental. Yo mismo -con perdón- tengo unas notas[19] sobre el teorema con conclusiones novedosos, pero obtenidas al igualar ganancias con plusvalías directamente sin coeficientes de transformación. Cuando se opera así se obtiene el teorema fundamental y, a veces, algo más. Morishima da un rodeo mayor y parte de la hipótesis de la productividad de la matriz de requerimientos para poder aplicar el teorema de Perron-Froebenius. A pesar de todo, el planteamiento de Morishima nos lleva a una sorpresa, como veremos. Veamos primero -aunque sea para dar algo de emoción a un tema no exento de dificultades formales- un modelo alternativo al de Okishio y Morishima.

1- Alternativa al teorema fundamental marxiano.

El problema que se plantea es cómo relacionar la tasa de ganancia de la ecuación que define el sistema económico con la tasa de explotación que define el valor de las mercancías según el esquema

[19] *Notas sobre el teorema fundamental marxiano*: http://www.eumed.net/ce/2009b/amp.htm

marxista. Partimos, con Marx, de la ecuación que define el valor de las mercancías en términos de valor-trabajo[20]:

$$K_i + V_i + S_i = V_{f\,i} Y_i \qquad \text{para } \boldsymbol{i}=1 \text{ a } \boldsymbol{n} \tag{3}$$

siendo $\boldsymbol{K}_i$ el capital constante[21], $\boldsymbol{V}_i$ el capital variable y $\boldsymbol{S}_i$ la plusvalía de la mercancía ***i*** o producida en el sector ***i*** en términos de valor-trabajo, $\boldsymbol{V}_f$ el valor-trabajo (unitario) de la mercancía ***i*** e $\boldsymbol{Y}_i$ la cantidad producida de la mercancía en términos físicos. Este valor (3) ha de trasformarse en unidades monetarias mediante unos coeficientes $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{b}_i$, $\boldsymbol{c}_i$, μ_i con las ecuaciones de transformación que hay en (4):

$$a_i K_i + b_i V_i + c_i S_i = \mu_i V_{f\,i} Y_i = p_i Y_i \qquad \text{para } \boldsymbol{i}=1 \text{ a } \boldsymbol{n} \tag{4}$$

En términos matriciales la ecuación (4) sería:

$$\underset{1xn}{A}\,\underset{nxn}{K} + \underset{1xn}{B}\,\underset{nxn}{V} + \underset{1xn}{C}\,\underset{nxn}{S} = \underset{1xn}{\mu}\, V_f \,\underset{nxn}{Y} = \underset{1xn}{p}\,\underset{nxn}{Y} \tag{5}$$

$$\text{(5b)}\quad [a_1 \cdots a_n] \times \begin{bmatrix} K_1 & & \\ & \ddots & \\ & & K_n \end{bmatrix} + [b_1 \cdots b_n] \times \begin{bmatrix} V_1 & & \\ & \ddots & \\ & & V_n \end{bmatrix} + [c_1 \cdots c_n] \times \begin{bmatrix} S_1 & & \\ & \ddots & \\ & & S_n \end{bmatrix} =$$

$$= [\mu_1 \cdots \mu_n] \times \begin{bmatrix} \Delta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Delta_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 & & \\ & \ddots & \\ & & y_n \end{bmatrix} = [p_1 \cdots p_n] \times \begin{bmatrix} y_1 & & \\ & \ddots & \\ & & y_n \end{bmatrix}$$

---

[20] Aunque en este trabajo apenas se discuten conceptos doy aquí la definición de valor-trabajo de Marx: *"Lo que determina la magnitud de valor de un objeto no es más que la cantidad de trabajo socialmente necesario, o sea, el tiempo de trabajo socialmente necesario para su producción"*. Más adelante explica lo de *socialmente necesario*. El Capital, FCE, I tomo, pág. 7. En el tomo III, pág. 100 lo matiza de nuevo Marx diciendo: *"El valor de la mercancía se determina por el tiempo de trabajo necesario contenido en ellas y no por el tiempo de trabajo que en ellas se encierra".*

[21] Aunque utilizo la ***K*** para no confundir con el coeficiente ***c*** que utilizo para la plusvalía, aquélla no representa al capital neoclásico sino al capital constante marxiano.

donde ***A***, ***B***, ***C*** son vectores fila ***1***x***n*** de los coeficientes y ***K***, ***V***, ***S*** son matrices diagonales de los capitales constante, variable y de la plusvalía, respectivamente, con valores nulos para ***i*** distinto de ***j***.

Para esta transformación, Marx explicitó dos condiciones, aunque a veces habla de una tercera. Estas dos condiciones son: 1) que la plusvalía total de todos los sectores fuera igual a las ganancias totales; 2) que las tasas de plusvalía de todos los sectores (o mercancías) fueran iguales. En otras ocasiones habla de que el valor total de la producción de todos los sectores fuera igual en términos de valor-trabajo (unitario) y en términos de precio[22]. Estas son las dos ecuaciones que definen las condiciones primeras de Marx:

(6) $$\underset{1xn}{C}\,\underset{nxn}{S}\,\underset{nx1}{I} = g\left[\underset{1xn}{w\,L} + \underset{1xn}{p}\,\underset{nxn}{X}\right]\underset{nx1}{I}$$

siendo ***I*** el vector de unos ***n***x***1***.

(7) $$e = \frac{S_i}{V_i} \quad \Rightarrow \quad \underset{nxn}{S} = e\underset{nxn}{V} \qquad \text{para todo } \boldsymbol{i} = \boldsymbol{1} \text{ a } \boldsymbol{n}$$

Sin embargo, la ecuación (6) no será necesaria (ni conveniente) para lo que viene. Traemos ahora a colación la ecuación que define el sistema económico con salarios pos-pagables o, más correctamente dicho, con la tasa de ganancia incluyendo todos los costes. Esta ecuación define el sistema *esrafiano* y vamos a apoyarnos en ella y en *la razón-patrón* de Sraffa ***R***. La ecuación es:

(8) $$\underset{1xn}{p}\,\underset{nxn}{Y} = (1 + \underset{1x1}{r}) \times \left[\underset{1x1}{w}\,\underset{1xn}{L} + \underset{1xn}{p}\,\underset{nxn}{X}\right]$$

[22] Hemos heredado una confusión que viene más del idioma que de los conceptos. Cuando se habla de valor de una mercancía estamos hablando de *valor unitario*, equivalente al precio en términos monetarios. Sin embargo, en los ejemplos de Marx habla del valor de la producción, que sería equivalente a los ingresos, porque sería precio por la cantidad. Por eso la expresión transformación de valores a precios es confusa. Aquí entendemos los valores ***K***, ***V***, ***S*** como el valor de la producción de un tipo de mercancía equivalente en términos de precios a ***pY*** (ingresos), cosa que se desprende implícitamente de las ecuaciones de Morishima.

De (8) se obtiene la ecuación marcada por la *razón-patrón* ***R*** haciendo la tasa de salarios ***w*** igual a cero:

(9) $$pY = (1+R)pX$$

De las ecuaciones (8) y (9) sale que:

(10) $$p = \frac{w(1+r)}{R-r} \times LX^{-1}$$

De las ecuaciones (5), (7) y (10) se da el paso trascendente de eliminar los precios y se obtiene a su vez:

(11) $$[AK + BV + eCV] = \frac{w(1+r)}{R-r} \times LX^{-1}Y$$

Vamos ahora a pos-multiplicar (11) por el vector de unos ***I*** de dimensión ***nx1*** para convertir los dos lados de la ecuación en sendos escalares; llamaremos ***f*** a $f = LX^{-1}Y$ por cuestiones de comodidad y tendremos:

(12) $$[AK + BV + eCV]\underset{nx1}{I} = \frac{w(1+r)}{R-r} \times \underset{1xn}{f}\underset{nx1}{I}$$

Y de (12) se obtiene la tasa de ganancia ***r***:

(13) $$\boxed{r = R \times \frac{[AK + BV + eCV]I - wf\,I}{[AK + BV + eCV]I + wf\,I}}$$

(13b) $$r = R \times \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i K_i + \sum_{i=1}^{n} b_i V_i + \sum_{i=1}^{n} e c_i V_i - w\sum_{i=1}^{n} l_i \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{ij}}{x_{ij}}}{\sum_{i=1}^{n} a_i K_i + \sum_{i=1}^{n} b_i V_i + \sum_{i=1}^{n} e c_i S_i + w\sum_{i=1}^{n} l_i \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{ij}}{x_{ij}}}$$ con $\boldsymbol{y}_{ij}=0$ si ***i***<>***j***

¡Y la sorpresa es mayúscula porque en (13), aun cuando la tasa de explotación (de plusvalía) ***e*** *sea cero, la tasa de ganancia* ***g*** *es positiva!* Y esto se ha conseguido sólo con el supuesto primero de

Marx[23]. También ocurre en (13) que si la tasa de salario ***w*** es cero, la tasa de ganancia ***r*** es igual a ***R***, es decir, la tasa de ganancia marxiana alcanza la razón-patrón de Sraffa (***r***=***R***). Más aún, para que la tasa de ganancia ***g*** sea mayor que cero ha de ocurrir que los salarios ***w*** queden por debajo de:

(14) $$w < R \times \frac{[AK + BV + eCV]I}{f\,I}$$

Y si la tasa de explotación ***e*** es cero, aún es positiva la tasa de ganancia ***g*** con tal de que los salarios queden por debajo de:

(15) $$w < R \times \frac{[AK + BV]I}{f\,I}$$

Vemos así que los salarios (la tasa de salarios ***w*** en el modelo) juegan un papel decisivo porque, para niveles bajos de salarios, las ganancias pueden ser positivas aun cuando la tasa de explotación marxiana sea cero. A partir de un cierto nivel de salarios (marcado por (15)), para que las ganancias sean positivas debe haber explotación (***e***>0). Esto está acorde con lo que recoge Morishima del teorema de Okishio al hablar de "*condición necesaria y suficiente que se de un tipo de salarios reales*". Al no hacer explícitos los salarios y hacer depender la tasa de explotación *sólo* de la jornada de trabajo, el modelo de Morishima lleva a la conclusión necesaria y suficiente del teorema de explotación de Okishio. En otro epígrafe discutiremos el tema con más profundidad. Volviendo a (14) y (15), todo esto se puede resumir en:

(16) $$0 < w < R \times \frac{[AK + BV]I}{f\,I} < R \times \frac{[AK + BV + eCV]I}{f\,I}$$

La (16) cumple las fases que recorre la tasa de salarios ***w*** para que la tasa de ganancia ***g*** sea positiva. La ecuación (13) nos dice *que la condición* <u>*suficiente*</u> *para que exista una tasa de ganancia positiva es que la tasa de explotación sea positiva*, pero nada dice de la condición necesaria. Esta aparecerá siempre que se igualen directamente *las tasas*

[23] Que ni siquiera sería necesario una sola tasa de explotación, sino ***n*** tasas de explotación (de plusvalía).

de plusvalía (en términos de valor) con *las tasas de* ganancia (en términos monetarios) sin pasar por *las horcas caudinas* de los coeficientes de transformación. Y, por cierto, sin Sraffa no hubiéramos llegado a esto porque no hubiéramos podido eliminar los precios. Mi pronóstico es que con el tiempo no se podrá actualizar a Marx sin pasar por el tamiz del italiano.

Otra sorpresa, aunque no tanta, es la de la posibilidad de tasa de plusvalía negativa y, sin embargo, compatible con una tasa de ganancia positiva en (13). Ya lo contempla Steedman[24], pero lo achaca a la definición de valor de Marx, lo cual resulta sorprendente, porque si no se admite las ideas de Marx sobre la teoría del valor, simplemente, no existe plusvalía. Señala además que puede darse este fenómeno cuando haya producción conjunta, pero no es necesario. En (13) se ve que puede darse con producción conjunta y simple. Sin embargo, que se de la posibilidad matemática no significa que tenga sentido económico una plusvalía negativa. La plusvalía, según Marx, es el trabajo que realiza el asalariado más allá de lo que necesita para vivir él y su familia en condiciones históricas dadas. Puede haber acortamiento de la jornada de trabajo por obra de su labor de resistencia colectiva y con ello acortar los beneficios a las empresas y empresarios, pero el trabajo excedente, por definición, no puede ser menor que cero. Otra cosa es que estemos en un sistema de precios: ahí puede pasar cualquier cosa. Es decir, lo contrario de lo que dice Steedman.

2 - Demostración del teorema a partir de un modelo *esrafiano*.

Traigo aquí las ecuaciones del modelo *esrafiano* complementado con la de la tasa de plusvalía marxiana de un trabajo mío anterior[25] por lo instructivo de la demostración. Estas son las ecuaciones:

(17) $$ewL = r[wL + pX]$$

(18) $$pY = (1+r)[wL + pX]$$

(19) $$pY = (1+R)\,pX$$

[24] *Marx after Sraffa, 1977.*

[25] *Aspectos de la economía de Sraffa:* http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=18111418012

(20) $$LI = 1$$

(21) $$pYI - pXI = 1$$

La primera de estas 5 resulta de igualar la plusvalía de cada sector a las ganancias directamente, también de cada sector, *pero* sin coeficientes de transformación; la segunda define el sistema; la tercera es, como siempre, la resultante de igualar a cero la tasa de salario ***w*** y obtener así la razón-patrón de Sraffa ***R***; la cuarta y la quinta son fruto de las normalizaciones que introduce Sraffa en sus modelos. De estas 5 ecuaciones sale que:

(22) $$r = \frac{ewR}{1 + (1 - ew)R}$$

donde *¡para que exista una tasa de ganancia **r** positiva debe ser positiva la tasa de explotación **e**!* El resultado es ineludible, porque al igualar plusvalías y ganancias a través de la igualación de la tasa de plusvalía y la tasa de ganancia por sectores (en lugar de hacerlo como Marx con ganancias y plusvalías totales), ambas tasas dependen mutuamente entre sí. El resto de las 4 ecuaciones sirven para eliminar las 4 variables que no interesan (precios, inputs de trabajo, medios de producción y productos finales: 4 variables para 4 ecuaciones)

3 - Sobre la frontera salario-ganancia.

De (12), y como un añadido, obtenemos la frontera salario-ganancia al despejar la tasa de salario ***w***:

(23) $$w = \frac{(R - r) \times [AK + BV + CS]I}{(1 + r) \times fI}$$

donde los puntos de corte son:

(24) $$w(r=0) = \frac{R \times [AK + BV + CS]I}{fI}$$

(25) $$r(w=0) = R$$

La ecuación (23) es una curva convexa, es decir, decrecientemente creciente por ser la primera derivada menor que cero y la segunda mayor que cero, y ello concuerda con los resultados de la frontera-salario que puede considerarse ortodoxa. Puede comprobarse que si la tasa de ganancia ***r*** se acercara a la tasa máxima de ganancia ***R*** (que es a la vez la razón-patrón en la producción simple) los salario se haría cero, es decir, todo el excedente se lo llevaría las ganancias. La economía sólo sería viable si lo que consumen los asalariados está incluido en los medios de producción. Como cabía esperar, las conclusiones son las mismas empleando valores-trabajo (unitarios) o precios.

4 - Discusión de la demostración de Morishima.

Veamos ahora con detenimiento el teorema fundamental, versión Morishima[26], que es la versión estándar del teorema. Parte de dos supuestos o hipótesis: 1) que estamos ante un sistema productivo, al menos en el sector de medios de producción. No obstante, y por mi parte, partiré de la economía como un todo porque eso no afecta al teorema; 2) supone que todas las industrias (sectores) obtienen beneficios. En el curso de la demostración no es necesario que haya una única tasa de ganancia[27] sino que puede haber tantas como sectores. De la primera condición nos da que:

(26) $$\underset{nxn}{Y} > \underset{nxn}{X}$$

donde ***Y*** es la matriz de productos finales y ***X*** la de medios de producción. La (26) nos dice que, en todos los sectores, el producto neto (***YI***-***XI***) es mayor que cero, es decir, que siempre la economía produce más de lo que consume sea cual sea el sector. Si llamamos ***A*** a la matriz de requerimientos que surge de hacer ***X***=***AY***, es decir, con ***A***=***XY***$^{-1}$, tenemos la ecuación (27):

(27) $$Y > AY$$

[26] Ver *La teoría económica de Marx*, cap. 5.
[27] Más adelante se dedica un epígrafe a ver esto.

que en términos de valor-trabajo (unitario) se convierte en:

(28) $$\underset{1xn}{V_f}\,\underset{nxn}{Y} > \underset{1xn}{V_f}\,\underset{nxn}{A}\,\underset{nxn}{Y}$$

donde ya no tenemos ***n*** bienes producidos en ***n*** sectores, sino ***n*** valores-trabajo de ***n*** bienes. Ahora Morishima, tras muchos pasos intermedios y muchas consideraciones previas sobre el alargamiento de la jornada de trabajo, llega a la ecuación:

(29) $$\underset{1xn}{V_f}\,\underset{nxn}{Y} - \underset{1xn}{V_f}\,\underset{nxn}{A}\,\underset{nxn}{Y} - \underset{1xn}{V_f}\,\underset{nxn}{B}\,\underset{nxn}{L} > \underset{1x1}{e}\,\underset{1xn}{V_f}\,\underset{nxn}{B}\,\underset{nxn}{L}$$

siendo $\boldsymbol{V}_{\mathrm{f}}$ la matriz final de valores-trabajo, ***A*** la matriz de requerimientos, ***B*** la matriz de bienes y servicios o bienes-salario -que diríamos hoy- que consumen los trabajadores, ***L*** los inputs de trabajo directo por bien o servicio, y, por último, ***e*** la tasa de explotación (de plusvalía) que surge de la ecuación $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{eV_f BL}$, donde ***S*** es la plusvalía; de forma análoga, $\boldsymbol{V_f}$ ***BL*** sería el capital variable y $\boldsymbol{V_f}$ ***AY*** el capital constante, todos ellos, claro está, en unidades de valor-trabajo. El punto crucial de la versión Morishima del teorema fundamental es la del signo *mayor que* de (29). Viene, por supuesto, de la condición primera de la productividad que asegura un vector de positivo de productos netos (***Y-AY***) al aplicar Perron-Froebenius a ***Y***>***AY***. La pregunta es: ¿da para tanto como para suponer -como hace Morishima- que se cumpla (30)?:

(30) $$\underset{1xn}{V_f}\,\underset{nxn}{Y} - \underset{1xn}{V_f}\,\underset{nxn}{A}\,\underset{nxn}{Y} - \underset{1xn}{V_f}\,\underset{nxn}{B}\,\underset{nxn}{L} > \underset{1xn}{0}$$

Está claro que si se cumple (30) entonces $\boldsymbol{eV_f}$ ***BL*** ha de ser mayor que cero, por lo que ***e*** ha de serlo también porque se supone que ***B*** -la matriz de consumo de los bienes-salario- ha de ser positiva. Sin embargo, con ***A*** productiva puede cumplirse (28) y no necesariamente (30). Pero, incluso en este caso, Morishima obtendría sólo la condición suficiente, pero no la necesaria. Incluso ***A*** puede ser productiva y cumplirse (30), pero con el signo de igualdad, de lo que se deduce que la primera de las condiciones del japonés tampoco es una condición suficiente. En definitiva, *la versión del teorema fundamental marxiano en versión Morishima no nos da ni la condición necesaria ni la* *suficiente*. No tenemos teorema. Ya hemos visto anteriormente, no obstante, que con supuestos menos restrictivos, es decir, sin tener siquiera una matriz ***A*** productiva[28], se puede demostrar la condición de suficiencia del teorema si hacemos explícitos los salarios; tampoco es necesario en este caso que todas las tasas de explotación sean iguales. Lo único que se hizo fue igualar los valores-trabajo -premultiplicados previamente por unos coeficientes de transformación- e igualar para cada bien o servicio producido a los precios de producción (multiplicados por las cantidades). Y, al igual que la razón-patrón de Sraffa, tampoco ha sido necesario calcular previamente los coeficientes de transformación. En definitiva, tenemos la ecuación (5).

5 - Generalización del teorema fundamental marxiano.

El teorema fundamental que acabamos de ver en (13) en versión rebajada lo podemos generalizar para ***n*** tasas de ganancia ***g***, ***n*** tasas de ganancia máxima ***G***, ***n*** tasas de salario ***w*** y ***n*** tasas de explotación ***e***. Veamos como. Partimos de la misma ecuación (5) que define el sistema en términos de valor, pero cambiamos la ecuación (8) que define a su vez el sistema en términos de precios por (31). Esta será una ecuación matricial como sigue:

$$(31) \qquad \underset{1xn}{p}\,\underset{nxn}{Y} = \left[\underset{1xn}{L}\,\underset{nxn}{W} + \underset{1xn}{p}\,\underset{nxn}{X} \right] \left(\underset{nxn}{I} + \underset{nxn}{g} \right)$$

con las novedades de que ***W*** es ahora una matriz ***n***x***n*** de salarios, con $\boldsymbol{w}_{ij}=\mathbf{0}$ si ***i***<>***j y*** con ***g*** como la matriz de tasas de ganancia por sectores de dimensión también ***n***x***n*** con $\boldsymbol{g}_{ij}=\boldsymbol{0}$ si ***i***<>***j***. También buscamos la ecuación que surge de hacer cero todas las tasas de salario ***W*** y sale:

$$(32) \qquad \underset{1xn}{p}\,\underset{nxn}{Y} = \left[\underset{1xn}{p}\,\underset{nxn}{X} \right] \left(\underset{nxn}{I} + \underset{nxn}{g} \right)$$

De (31) y (32) obtenemos (33) de forma análoga a (9)

[28] Como es el caso de la producción conjunta del que partimos en nuestra demostración.

(33) $$p = LW(1+g)(G-g)^{-1}X^{-1}$$

que combinada con (5) y con (7) y posmultiplicado el resultado por el vector ***I*** de unos ***n***x***1*** sale:

(34) $$\left[AK+BV+CVE\right]I = LW(1+g)(G-g)^{-1}X^{-1}YI$$

donde, al igual que antes para el caso de la producción simple, se cumple la condición <u>suficiente</u> del teorema: *basta que las tasas de explotación sean positivas para que las tasas de ganancia lo sean también, aunque también son posibles tasas de ganancia positivas sin tasas de explotación positivas*. La versión aritmética de (34) es interesante por lo que viene después:

(35) $$\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} K_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{j=1}^{n} V_{ij} + \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{n} V_{ij} e_{ij} = \sum_{i=1}^{n} l_i \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \times \frac{(1+g_{ij})}{(G_{ij}-g_{ij})} \times \frac{y_{ij}}{x_{ij}}$$

Es verdad que de (35) no se pueden despejar las ***n*** tasas de salario $\boldsymbol{g}_{\mathrm{ij}}$ por motivos obvios, pero sí puede obtenerse una tasa media de salarios $\boldsymbol{w}_{\mathrm{m}}$, una tasa media de ganancias $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$ y una tasa media de ganancias máximas $\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}}$ a partir de (35) haciendo que:

(36) $$\frac{w_m (1+g)_m}{G_m - g_m} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} l_i \sum_{j=1}^{n} \frac{w_{ij}(1+g_{ij})}{(G_{ij}-g_{ij})} \times \frac{y_{ij}}{x_{ij}}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} l_i \sum_{j=1}^{n} \frac{y_{ij}}{x_{ij}}}$$

y despejando de (36) la tasa media de ganancia $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$, queda la notable:

(37) $$g_m = \frac{G_m \left[\displaystyle\sum_{i=1}^{n} l_i \sum_{j=1}^{n} \frac{w_{ij}(1+g_{ij})y_{ij}}{(G_{ij}-g)x_{ij}} \right] - w_m \displaystyle\sum_{i=1}^{n} l_i \sum_{j=1}^{n} \frac{y_{ij}}{x_{ij}}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} l_i \sum_{j=1}^{n} \frac{w_{ij}(1+g_{ij})y_{ij}}{(G_{ij}-g_{ij})x_{ij}} + w_m \displaystyle\sum_{i=1}^{n} l_i \sum_{j=1}^{n} \frac{y_{ij}}{x_{ij}}}$$

Ahora en (36) tenemos 3 variables en el lado izquierdo de la ecuación, pero siempre podemos dar valores *ad hoc* a la tasa media de máxima de ganancia $\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}}$ y a la tasa media de salarios $\boldsymbol{w}_{\mathrm{m}}$ para obtener en (37) la tasa de ganancia media $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$. Si despejamos la tasa de salario media $\boldsymbol{w}_{\mathrm{m}}$ en (36), sale *la frontera de salario-ganancia* siempre que tomemos, en este caso como *ad hoc*, la tasa de ganancia media $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$ y la tasa media de ganancia máxima $\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}}$. Estos valores *ad hoc* no tienen porqué ser arbitrarios, pero sí quedar fijos bajo otras condiciones. Esta frontera, en definitiva, vendrá dada por la ecuación (38):

$$(38) \qquad w_m = \frac{G_m - g_m}{1 + g_m} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i \sum_{j=1}^{n} \frac{w_{ij}\,(1 + g_{ij})}{(G_{ij} - g_{ij})} \times \frac{y_{ij}}{x_{ij}}}{\sum_{i=1}^{n} l_i \sum_{j=1}^{n} \frac{y_{ij}}{x_{ij}}}$$

donde, de forma análoga que en la producción simple, los puntos de corte con los ejes son:

$$(39) \qquad g_m(w_m = 0) = G_m \qquad\qquad w_m(g_m = 0) = \frac{G_m \sum_{i=1}^{n} l_i \sum_{j=1}^{n} \frac{w_{ij}}{G_{ij}} \times \frac{y_{ij}}{x_{ij}}}{\sum_{i=1}^{n} l_i \sum_{j=1}^{n} \frac{y_{ij}}{x_{ij}}}$$

Como ya he apuntado en otras ocasiones, en este caso, tanto la (37) como la (38) permiten el recurso a la planificación sin necesidad de conocer los precios. Es verdad que una planificación muy laxa, porque operamos con muchos grados de libertad, pero susceptible de concretarse si se conocen o se parte de los valores físicos de producción de productos finales ***Y***, de medios de producción ***X*** y de los inputs de trabajo ***L***. Sólo tenemos que operar con las tasas de ganancia, salarios y tasas de ganancia máximas de cada sector. En el caso que se propone a partir de (37) y (38), podemos (deberíamos) ensayar también con tasas medias de estas variables. No se trata sólo de planificar la distribución, sino que, a través del control de $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$, $\boldsymbol{w}_{\mathrm{m}}$ y $\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}}$, poder modificar ***L***, ***Y*** y ***X*** para mejorar las condiciones de producción, productividad, excedente y empleo. Pero, en fin, esto da para otros trabajos y hasta para un libro. Obsérvese que tanto la (37) como la (38) pueden rellenarse con datos estadísticos reales, salvo las valoraciones de las tasas máximas de ganancia y de dos de las tres tasas medias. Es decir, tenemos **2**+***n*** grados de libertad para la planificación si consideramos como dados los ***Y***, ***X*** y ***L***; en caso contrario, los grados de libertad se multiplican por **3**x***n***, con lo que tendríamos **3*xn*+3*xn* = 6*xn*** grados de libertad: las quejas de dirigismo no estarían justificadas.

Resumiendo el teorema fundamental marxiano, versión Morishima, se puede decir lo siguiente: el gran economista japonés -que lo es a pesar de lo criticado- aborda el teorema fundamental a partir de Okishio bajo aspectos muy restrictivos y además comete un error. Por lo primero, aborda el teorema fundamental bajo el supuesto de que toda la teoría de la explotación se basa *sólo* en el alargamiento de la jornada; no hace explícitos los salarios, con lo que, sea cual sea el nivel de estos, siempre existe explotación; parte de que la matriz ***A*** de requerimientos sea cuadrada, no negativa, indescomponible para poder aplicar Perron-Froebenius y asegurarse con ello un vector de precios de productos finales positivos ***p*** y un vector final de productos *netos* finales ***YI-XI*** positivos. Con lo cual, sólo puede operar bajo la reproducción simple y pasar de valores a precios sin coeficientes de transformación. Al final se le escapa a Morishima las condiciones necesarias y suficientes del teorema fundamental. Pero, como hemos visto, casi todo tiene arreglo. Por nuestra parte, hemos generalizado la condición suficiente del teorema fundamental a ***n*** tasas de salario ***w***, a ***n*** tasas de ganancia ***g*** y a ***n*** tasas *esrafianas* de ganancia máxima[29] ***G***, aunque no hayamos podido obtener, bajo nuestras hipótesis en este trabajo, la condición necesaria. Además hemos insinuado las posibilidades de planificación con este modelo: no hay bien que por mal no venga.

[29] Al no estar ahora en producción simple no tenemos la razón-patrón sraffiana R, pero sí tasas de ganancias máximas.

III - TRANSFORMACIÓN DE VALORES A PRECIOS[30]

1- Introducción

Pretende ser este un trabajo creativo del manido problema de la transformación de valores a precios. Para algunos este problema está resuelto, para otros, no. Claro está que todo depende de las hipótesis de partida y de los problemas que se trata de resolver. No es este una recopilación histórica del problema. Nada más lejos de mi intención, dado que existen ya excelentes trabajos al respecto, tanto en inglés como alguno en español. Desde que Böhm-Bawerk analizó el problema en Marx (III libro de "El Capital") y llegó a la conclusión de que todo el sistema marxiano era irrecuperable por no dar el germano con la solución correcta -que no la dio- y con Samuelson más tarde, proclamando su inutilidad aunque se hallara una solución correcta, ha decaído el peso de su importancia. Sin embargo es difícil huir de ello a pesar de que no me parece transcendente, ni se va a derribar el sistema marxiano para disgusto de la memoria del austríaco por no dar con una solución lógico-matemática al problema. Soluciones existen. Aquí se apunta alguna original. Algunas se presentan como la raíz de un posible método de planificación o de guía para la política económica desde lo público. Cualquiera que observe las teorías económicas, los armazones en los que se sostienen los análisis económicos, se puede comprobar que casi toda la teoría está en crisis, porque lo que derriban los paradigmas no son el surgimiento de nuevo paradigmas -como algún historiador de la ciencia ha pretendido sostener-, sino que es la propia realidad las que lo derriban. En la fecha en la que escribo, a finales del año 2009, la mayor recesión económica desde la Gran Depresión del 29 ha derribado el paradigma neoliberal -neoclásico en la teoría pura- del sólo mercado y de que el Estado es el problema y el mercado la solución. Con el Cambridge inglés de los años 30 de Robinson, Kaldor, Sraffa, Dobb, etc., se produjo la primera crisis de la teoría[31]; los períodos de inflación han martilleado las teorías keynesianas o intervencionistas de los estados a través del gasto público; ahora los teóricos neoliberales balbucean pero no saben que

[30] Una excelente introducción al problema véase "Un vistazo histórico y metodológico al problema de la transformación de valores a precios de producción", por Ian J. Seda-Irizarry, en internet: http://economia.uprrp.edu/notas%20de%20clase%2012.pdf

[31] Joan Robinson dice en sus Ensayos críticos (*Collected Economic Papers*) que es la segunda, porque la primera data -según ella- de los años 20.

decir, aunque se puede afirmar que la vuelta -creo que coyuntural, por desgracia- de un keynesianismo limitado en el tiempo y en la intensidad han salvado el sistema. Ni la micro neoclásica de los mercados ni la macro de la expectativas racionales han sido paradigmas que hayan dado mecanismo solventes de acción a la política económica y a los políticos en los períodos de crisis.

Con un Marx actualizado, con Sraffa, Leontief, Morishima, Newmann, Passineti, Garegnani, Steedman, Kurz, etc., se puede afirmar que ha abierto la teoría económica a un nuevo paradigma en la teoría: la mesoeconomía. No es que se esté ahora dando los pasos teóricos, porque estos comienzan con Sraffa en los años 30 y antes con Marx, sino que, derribados los existentes, acabarán imponiéndose otros. La mesoeconomía -o como quiera llamársele- sería el estudio *y la construcción de una teoría* de las relaciones económicos de producción, distribución y consumo entre los sectores de la economía. La micro estudia los mercados; la macro de raíz keynesiana, los aspectos globales de la economía centrada en unas cuantas variables producto de agregaciones. Ha de haber de alguna manera una teoría de las interrelaciones sectoriales más allá de los análisis input-ouput más o menos empíricos.

Este trabajo es una modesta contribución a dar contenido lógico-matemático correcto al problema de la transformación, porque pasar de los valores a los precios de producción y luego si es posible a los de mercado -toda esta cadena- sí puede ser importante para ayudar al nuevo paradigma a abrirse paso *en el mercado de los conocimientos* que se enseñan, que no ocurrirá si permanecen atesorados sólo entre los especialistas y entre olvidadas tesis doctorales.

2 - La crítica de Steedman

Un libro clásico sobre el problema de la transformación es el de Ian Steedman, *Marx after Sraffa*, publicado en inglés en 1977. El autor dedica todo un libro al tema que surgió en Marx en el **I** tomo de El Capital y que intentó resolverlo en el **III** tomo. Ya señaló Bortkiewicz el error de pasar de valores a precios, sustituyendo la plusvalía medida en términos de valor[32] por la ganancia media calculada como el cociente de la plusvalía absoluta dividida entre la suma de los capitales constante y variable. Marx también igualaba la plusvalía total a las ganancias totales y el valor agregado de la producción (en términos de precios) al valor agregado en términos de valor-trabajo. Desde entonces se ha hablado de dos cosas diferentes: error y/o contradicción casi de forma sinónima. Aquí vamos a concretar cuál es cuál y ello nos llevará a una sorpresa. Sí se puede afirmar que Marx cometió un error conceptual -del que era consciente perfectamente- al sumar valores con precios, es decir, al sumar los capitales constante y variable a la plusvalía transformada en ganancia, porque los capitalistas -ahora se les llama empresarios- intercambian, compran y venden sus productos a sus precios, y eso incluye la compra-venta entre las propias empresas. Steedman llega a decir: "*La idea de que la ganancia total es igual a plusvalía total es tan falsa como la idea de que **S/(V+C)** es la tasa de ganancia*"[33]. Buena parte del libro del autor se basa en esta idea. ¿Tiene razón Steedman y Marx se equivocó también en esta última parte, es decir, en la que atañe a la tasa de plusvalía y a la tasa de ganancia? Veamos quién tenía razón. Partimos de la ecuación matricial (1) que define el sistema de precios:

(1) $$\underset{1xn}{p}\underset{nxn}{Y} = \left[\underset{1xn}{L}\underset{nxn}{w} + \underset{1xn}{p}\underset{nxn}{X}\right] \times \left(1 + \underset{nxn}{g}\right)$$

con ***n*** precios (***p***), ***n*** productos finales (***Y***), ***n*** inputs de trabajo directo (***L***), ***nxn*** medios de producción (***X***) y ***n*** tasas de ganancia (***g***)[34]. Y (2) que es la que define el sistema de valores marxiano para ***n*** sectores:

---

32 Como vamos a hablar mucho de valor y valor-trabajo, merece la pena traer a colación, al menos por una vez, qué entendía Marx por valor: "*El valor de la mercancía se determina por el tiempo de trabajo necesario contenido en ellas y no por el tiempo de trabajo que en ellas se encierra*" (El Capital, pág. 100, FDE). Y a continuación Marx señala que es el capital el que acorta el tiempo de trabajo necesario; son más las horas de trabajo *potenciales* que *reales* las que dan valor, siendo la competencia el catalizador que permite el acortamiento de las horas de trabajo necesarias socialmente. Esto está íntimamente relacionado con su concepción de trabajo abstracto y concreto. Pero no tenemos espacio para seguir por ahí; por otro lado hay ya muchos estudios hechos al respecto (en español: "Karl Marx, economista", Enrique M. Ureña, 1977, edit. Tecnos)

33 "Marx, Sraffa y el problema de la transformación", pág. 46, FCE.

34 tanto **w**, **Y**, **g** son matrices diagonales, donde todos sus elementos son cero, salvo los de la diagonal principal.

(2) $$\underset{1xn}{\Lambda}\underset{nxn}{Y}\underset{nxn}{\mu}=\underset{1xn}{C}\underset{nxn}{\mu}+\underset{1xn}{V}\underset{nxn}{\mu}+\underset{1xn}{S}\underset{nxn}{\mu}$$

donde "μ" es la matriz diagonal de *coeficientes de transformación* de valores a precios, ***C***, ***S*** y ***V*** son los *capitales constante, variable y la plusvalía,* respectivamente, de cada sector y "Λ" es *el valor agregado unitario* del producto total de cada sector medido en horas de trabajo por producto. Marx hizo el supuesto de que las plusvalías totales fueran igual a las ganancias totales. Nosotros haremos que *la plusvalía de cada sector* (o mercancía) en términos de valor sea igual a *la ganancia total de cada sector* en términos de precio, lo cual es un supuesto aún más exigente que el del propio de Marx, es decir, haremos:

(3) $$\left[\underset{1xn}{L}\underset{nxn}{W}+\underset{1xn}{p}\underset{nxn}{X}\right]\underset{nxn}{g}=\underset{1xn}{S}\underset{nxn}{\mu}$$

La segunda condición en la transformación de valores a precios que impuso Marx, es decir, la de la igualación del producto total en términos de precios al producto en términos de valor no es necesaria en este contexto, pero sí lo son otras dos condiciones de equilibrio que también están en Marx, que proceden de la filosofía del *tableau* de Quesnay. Estas condiciones o similares se aplican cuando queremos valorar la capacidad de reproducción del sistema y de su acumulación. En definitiva, igualaremos -dentro de la filosofía marxiana- *la masa de salarios (**Lw**)* con *el capital variable* de todos los sectores que producen mercancías-salarios, es decir, las que consumen los trabajadores directos y sus familias (***Vu***), por un lado; por otro, igualaremos también *los capitales constante* (***Cu***) con los sectores de *medios de producción* (***pX***), y quedará reflejado todo ello en las ecuaciones que siguen:

(4) $$L\,w=V\,\mu$$

(5) $$p\,X=C\,\mu$$

Al proceder así hacemos que el sistema encuentre su equilibrio y su reproducción igualando ofertas con demandas: la de los bienes-salario (mercaderías en Marx) con los salarios de los trabajadores que los van a consumir; la amortización de los medios de producción con nuevos medios que se igualan en términos de valor (no necesariamente en término físicos), y la de las plusvalías que derivarán en demandas de bienes no salariales por parte de los capitalistas. Estos 3 sistemas de ecuaciones matriciales supone el cumplimiento también de la igualación de (1) y (2), es decir, la (6) no es una nueva condición, sino una combinación lineal de (3), (4) y (5)[35]. Esta ecuación es:

(6) $$pY = \Lambda Y \mu$$

Si Steedman hubiera hecho estas consideraciones sobre el sistema marxiano en términos de valor y el sistema de ecuaciones que definen al sistema en términos de precios se hubiera llevado una sorpresa y, en cualquier caso, nadie hubiera podido acusarle de alejarse del espíritu marxiano en el capítulo de la reproducción simple del sistema capitalista. No lo hizo y no se percató de lo que sigue. De (3) podemos despejar *la tasa de ganancia* ($\boldsymbol{g_j}$) de cada sector gracias a que se trata de una matriz diagonal con ceros en todos los elementos en los que $\boldsymbol{i \neq j}$:

(7) $$g_j = \frac{S_j \mu_j}{l_j w_j + \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_{ij}} \qquad \text{para } j = 1 \text{ a } n$$

y lo mismo hacemos con (4) y (5) y queda:

(8) $$u_j = \frac{l_j w_j}{V_j} \qquad \text{para } j = 1 \text{ a } n$$

(9) $$\sum_{i=1}^{i=n} p_i x_{ij} = C_j \mu_j \qquad \text{para } j = 1 \text{ a } n$$

y si se procede a la sustitución de (8) y (9) en (7), Steedman se llevaría un disgusto o una sorpresa si viera la ecuación resultante:

(10) $$\boxed{g_j (\textit{tasa de ganancia}) = \frac{S_j}{C_j + V_j} (\textit{tasa de plusvalía})}$$

para todo $\boldsymbol{j = 1}$ a $\boldsymbol{n}$

[35] De hecho es su suma.

Es decir, *la tasa de ganancia de cada sector* (*sean* ***3*** *sectores, como en los ejemplos de Marx, o* ***n*** *sectores, como aquí) definida en términos de precios por la ecuación (1) del sistema, es igual a la tasa de plusvalía marxiana en términos de valor-trabajo (definida por la ecuación* (2)).

Lo notable de la demostración es que hemos utilizado los coeficientes de transformación como puente desde la (2) a la (10), pero al final han desaparecido (igual que la razón-patrón *esrafiana*, que se utiliza como medida del excedente y de beneficios máximos del sistema, pero no es necesario calcularla). Steedman estaba equivocado y Marx tenía justificación al usar la tasa de ganancia como equivalente a la tasa de plusvalía. Y por si fuera poco, no ha hecho falta suponer tampoco tipo de ganancia cero y composiciones orgánicas de capital determinadas para llegar a (10)[36]. Las dificultades surgen cuando emplea Marx una *sola tasa de ganancia* y sustituye la plusvalía por las ganancias obtenidas a partir de esta tasa global en función de los capitales constante y variable de cada sector. Es decir, lo que es cierto para cada tasa de ganancia (como aquí se ha demostrado), no lo es para una única tasa de ganancia. Claro que Marx tenía sus razones para obrar así porque el germano tomaba una sola tasa por dos cosas: como primer paso para demostrar que los precios comerciales o de venta giran *gravitatoriamente* en torno a los precios de producción derivados a partir de una tasa única de ganancia global; y porque así preparaba el capítulo de la decadencia del sistema capitalista a partir de el descenso histórico de la *tasa de ganancia global*. El otro error de Marx es querer sumar las ganancias así obtenidas con los capitales constantes y variables en términos de valor; ahí han tenido razón Böhm-Bawerk, Bortkiewicz, Dmitriev, Samuelson, Steedman, etc. y... el propio Marx, que ya lo explicitó en el **III** tomo del Capital -elaborado incluso antes que el **I,** como sabemos- y que era perfectamente consciente del problema al redactarlo. No hay pues contradicción en la manera que usa Marx sus ecuaciones del sistema para pasar de los valores-trabajo a los precios (de producción, hay que suponer) y sí error al sumar, como diría un castellano, churras (valores) con merinas (precios). Nunca llegó Marx a solucionar el problema que el mismo había planteado por

[36] Cosa que deberíamos hacer si no hubiéramos supuesto las igualdades (3), (4) y (5) conjuntamente y por sectores (o en su caso por mercancías).

falta de herramientas matemáticas[37]: de poder hacerlo, se hubiera dado cuenta de otro problema más poderoso, que veremos en próximos epígrafes.

3 - La solución de Bortkiewicz y su generalización

Se tiene al economista ruso como el primero que dio una solución lógica correcta al problema planteado por Marx en el tomo III de la transformación de valores a precios. En efecto, Marx pasó a precios la ganancia de cada sector (o mercancía) de la economía, sustituyendo la plusvalía de cada sector por la ganancia obtenida al multiplicar la suma de los capitales constante y variable sectoriales por la tasa de ganancia global. Pero ahí se quedó y nada hizo más con los valores de los capitales constante (medios de producción) y variable (masa de salarios). Bortkiewicz planteó con un ejemplo el siguiente sistema de ecuaciones:

(…) $$(1+g)(225x+90y)=375z$$

(11) $$(1+g)(100x+120y)=300z$$

(...) $$(1+g)(50x+90y)=200z$$

donde ***x***, ***y***, ***z*** serían los coeficientes de transformación que harían posible pasar de valores a precios de producción una vez calculados y sustituidos su valor en (11). Se puede comprobar además que el esquema de realidad dibujado levemente por el sistema (11) tiene la bondad de permitir su reproducción simple, puesto que la suma por columnas para el capital constante nos da la suma en términos de valor del sector primero de medios de producción, y la segunda suma -la del capital variable- se iguala al valor de lo producido en el sector de bienes-salario (fila 2). Surge el problema de que tenemos 3 ecuaciones y 4 incógnitas, y eso parece un pecado, porque ese grado de libertad haría depender una variable de otra con una infinidad de soluciones. Lo que se ha hecho tradicionalmente ha sido introducir un numerario para relativizar los precios, bien sea mediante un precio (puede ser la

[37] Aún no se había demostrado el teorema (teoremas) de Perron-Froebenius, o no se habían "inventado" las cadenas de Markov o la programación lineal.

producción de oro y su relación estable con respecto a la moneda en curso de cada país) o bien tomar como numerario la propia renta nacional o suma vertical del valor de la producción final de todos los sectores. Lo primero es equivalente a eliminar una variable al hacerla igual a **1**; lo segundo es introducir una ecuación más (como hace Sraffa en su modelo[38]), con lo que igualamos -en ambos casos- el número de ecuaciones e incógnitas y el sistema tiene solución[39]. Con esto se soluciona en efecto el modelo desde el punto de vista lógico-matemático; cosa distinta es si las ecuaciones, hipótesis o numerarios empleados siguen el espíritu marxiano o se apartan de él. Sobre ello hay trabajos ya hechos y no voy a entrar. En cambio -y este es el objeto del epígrafe- me parece que el modelo del ruso padece un error de partida: que el número de sectores es sólo de **3**. Y eso suele ocurrir cuando se toman los modelos -aparentemente inocentes- de Marx, de epígonos y críticos (Böhm-Bawerk, etc.) casi sin pensar, de forma natural, porque de partir -como hipótesis- de **4** sectores entonces, por ejemplo, tendríamos más ecuaciones que incógnitas; otras veces, al multiplicar el número de sectores, son más las incógnitas que las ecuaciones. Por todo esto no valen hipótesis sobre un número de ecuaciones determinados sino sobre un número ***n*** indefinido de sectores con su correspondiente número de ecuaciones. Veremos entonces como surgen de forma natural y a la luz algunos problemas que en los casos particulares no se perciben. Y también son válidas -aunque no es lo habitual- que el número de ecuaciones sea menor que el de incógnitas, porque aún cuando no resolvamos el sistema para obtener valores concretos de las variables, es útil manejar modelos en los que podamos ver cómo unas variables dependan de otras y bajo qué condiciones. Buscar soluciones -que la mayoría de las veces además son de equilibrio- es una obsesión marginalista que esconde una ideología concreta, que es la siguiente: las fuerzas e inercias de la economía, ocultas o a la luz, son impersonales, no tienen nombre y apellido, las producen normalmente los mercados, nos dicen lo que podemos cobrar, las cantidades a consumir, el precio que hay que poner a los bienes finales e intermedios, las amortizaciones que hay que llevar a cabo. Es en efecto -según esta ideología- una especie de mano invisible, como el dios católico que nada pasa sin que sea obra su hacedor supremo. Vemos que hasta un simple sistema de ecuaciones

[38] "*Producción de mercancías por medio de mercancías*".

[39] Desechamos el caso de que por pura casualidad una de las ecuaciones fuera combinación lineal del resto.

esconde ideologías, deseos y complicidades. Pero, en cualquier caso, permite asentar las hipótesis y su proceso lógico, tanto histórico como meramente matemático de forma correcta: más vale un poco de lógica que un mucho de vergonzante retórica. Pero sigamos con Bortkiewicz. El sistema generalizado de ecuaciones a lo Bortkiewicz podría expresarse de la siguiente manera:

(…) $C_1 + V_1 + S_1 = \Lambda_1 Y_1 \rightarrow C_1 a_1 + V_1 b_1 + S_1 c_1 = \Lambda_1 Y_1 u_1$

(12) --

(…) $C_n + V_n + S_n = \Lambda_n Y_n \rightarrow C_n a_n + V_n b_n + S_n c_n = \Lambda_n Y_n u_n$

para ***n*** sectores

donde ***C***, ***V*** y ***S*** son los capitales constantes, variables y plusvalías marxianas de cada sector; ***a***, ***b***, ***c***, ***u*** son los coeficientes de transformación de valores a precios, "Λ" es el valor unitario total del sector correspondiente y, por último, ***Y*** es el producto final del sector en términos físicos. El problema de la transformación se plantea como la necesidad de calcular los coeficientes ***a***, ***b***, ***c*** y ***u*** de tal forma que se puede pasar del lado izquierdo de las ecuaciones (11) -en términos de valor- a las del lado derecho -en términos de precio-. La ecuación general sería:

(12) $C_i + V_i + S_i = \Lambda_i Y_i \quad \rightarrow \quad C_i a_i + V_i b_i + S_i c_i = \Lambda_i Y_i u_i$ para i=1 a n

Casi a simple vista se ve la naturaleza del problema: tenemos ***n*** ecuaciones y ***4n*** incógnitas (***n*** a_i + **n** b_i + **n** c_i + **n** u_i). El sistema tiene por tanto ***3n*** grados de libertad: una barbaridad, al menos desde algunas concepciones económicas buscadoras de existencias de equilibrios, precios que vacían los mercados y demandas que casan con ofertas. A partir de aquí, según se hagan diferentes hipótesis, tendremos diferentes soluciones y la discusión girará no sobre la corrección lógica-matemática descriptor del sistema, sino sobre lo apropiado o no desde el punto de vista económico de las hipótesis. Por nuestra parte vamos a seguir los pasos de Marx -con alguna modificación- y diremos que:

(a) *Los valores finales de los productos (un producto por cada sector, producción simple) en términos de valor-trabajo marxiano los igualamos a los valores en términos de precio*.

Marx no llegó tan lejos y estableció como hipótesis que la suma de los valores finales fueran iguales a la suma de los productos totales en términos de precio. Sin embargo, con esta hipótesis sólo añadimos una ecuación más al sistema y nada soluciona; con la hipótesis (*a*) añadimos ***n*** ecuaciones. Esta hipótesis es equivalente a dar el valor de **1** al coeficiente u_i desde ***i = 1*** a ***n***. Pero aún tenemos ***2n*** grados de libertad (***3n*** incógnitas y ***n*** ecuaciones). Por esos vamos a añadir otra hipótesis, y esta vez enteramente marxiana:

(b) *Se igualarán las plusvalías de cada sector a sus ganancias correspondientes, calculadas a partir de la tasa ganancia global de la economía*.

Para lo anterior debemos calcular *la tasa global de ganancia* (**G**) como:

(13) $$G = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} S_i}{\sum_{i=1}^{i=n} C_i + \sum_{i=1}^{i=n} V_i}$$

A partir de esta ecuación podemos escribir el siguiente sistema de ***n*** ecuaciones:

(14) $$(C_i a_i + V_i b_i)(1+G) = S_i c_i \qquad \text{para i =1 a n}$$

donde hemos igualado la plusvalía de cada sector (o mercancía) -expresada en el lado derecho de la ecuación- con las ganancias en términos de precio, de acuerdo con la hipótesis marxiana (b). Ahora hemos reducido un grado de libertad, pero aún tenemos ***n*** ecuaciones libres y, por tanto, ***n*** grados de libertad. Por eso y por último, inspirados en Marx o directamente de su visión global de la explotación -y al igual que la de la tasa de ganancia como fuerza motriz, como atractor de tendencias-, vamos a sentar la tercera y última hipótesis:

(c) *Calculada la tasa de explotación global, pasaremos al sistema de precios a partir de la hipótesis de que las tasas de explotación sean* *iguales en términos de precios, aunque no lo sean en términos de valor*.

Parece el mundo al revés, porque la tasa de explotación -alma y justificación final de todos el sistema marxiano, donde la producción y trasmisión de valor se hace mediante el trabajo vivo (capital variable) que da lugar a la plusvalía y el trabajo muerto (capital constante)- se desvela ahora en términos de precios, cuando en cambio permanecía oculto en términos de valor. La ecuación que justifica este supuesto es:

(15) $$EV_i b_i = S_i c_i$$ para i = 1 a n

donde ***E*** es la tasa de explotación (16):

(16) $$E = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} S_i}{\sum_{i=1}^{i=n} V_i}$$

Ahora ya tenemos ***3n*** ecuaciones (las (12), (14) y (15)) y ***3n*** incógnitas ($\boldsymbol{n}a_i$ + $\boldsymbol{n}b_i$ + $\boldsymbol{n}c_i$), con lo cual el sistema tiene solución. Lo que sigue son las fórmulas de obtención de los coeficientes simplemente resolviendo el sistema de ***3n*** ecuaciones mencionado. De ello salen los ***3n*** coeficientes de transformación:

(17) $$\boxed{a_i = \frac{\Lambda_i Y_i (E-G)}{C_i E(1+G)}}$$ para i = 1 a n

(18) $$\boxed{b_i = \frac{\Lambda_i Y_i G}{V_i E(1+G)}}$$ para i = 1 a n

(19) $$\boxed{c_i = \frac{\Lambda_i Y_i G}{S_i (1+G)}}$$ para i = 1 a n

y estos coeficientes -así calculados-, reemplazados en (12), nos dan los precios de producción de acuerdo con las hipótesis planteadas (ver anexo 1). La solución originada no depende del caso particular de que tengamos tres ecuaciones o que debamos emplear un numerario para reducir el número de incógnitas; esta una solución general de acuerdo con las hipótesis planteadas. Samuelson, por tanto, también se equivocaba cuando niega la posibilidad de pasar de valores a "precios de producción"[40].

Sin embargo, como la felicidad no puede ser completa ni eterna, cuando se plantea en un sistema marxiano de ecuaciones las hipótesis de la sustitución de las plusvalías por las ganancias a partir de la tasa de ganancia global y la igualdad de las tasa de explotación, por más que puedan justificarse desde una interpretación ortodoxa de Marx, surge un problema: que al hacer simultáneas esas hipótesis produce un corolario desagradable: *se igualan las composiciones orgánicas de capital en términos de precios, aunque no lo hayan estado en términos de valor-trabajo*. En efecto, de las definiciones de tasa de ganancia, tasa de plusvalía que ya hemos visto y de composición orgánica de capital "θ" como cociente entre el capital constante y el variable, surge inevitablemente la ecuación:

(20) $$G = \frac{E}{1+\theta}$$

O dicho de otro modo, establecer o partir de dos de estas tres hipótesis es como hacerlo con las tres. Aún así, es mejor que sea un corolario a que sea una hipótesis de partida.

4 - Reproducción simple con tasa de ganancia global marxiana

Ahora que ya sabemos cómo calcular los coeficientes de transformación vamos a dar el paso de buscar el equilibrio de la reproducción simple marxiana igualando las demandas a partir de los capitales constantes con las ofertas de los sectores de medios (de **1** a **r**); la de la demanda con las rentas obtenidas a partir de los capitales

[40] "*Understanding the Marxian notion of Exploitation*", 1971. No obstante podemos hacer una concesión a Samuelson. En efecto, estos "precios de producción" están entrecomillados porque su obtención no tienen porqué coincidir con los obtenidos mediante la ecuación que define el sistema en términos de precios de producción: $\underset{1xn}{p}\,\underset{nxn}{Y} = \left[\underset{1xn}{L}\,\underset{nxn}{w} + \underset{1xn}{p}\,\underset{nxn}{X}\right] \times \left(1 + \underset{nxn}{g}\right)$

Podríamos llamar pues a los precios obtenidos a través del sistema de valores-trabajo de este epígrafe "*valores unitarios finales de producción*" para evitar confusiones y dejar al economista americano tranquilo.

variables con las ofertas de los sectores de bienes-salario (de **r**+**1** a **s**); por último, las demandas obtenidas de las plusvalías con las ofertas de los sectores de bienes-no salariales (de **s**+**1** a **n**). Marx dedicó toda la sección **III** del **II** libro de *El Capital*[41] a la reproducción simple, a la reproducción ampliada y a la acumulación, y constituye el núcleo duro de su teoría de los ciclos, de la sobreproducción y subconsumo y de sus consecuencias, las crisis. Suponemos que la economía bajo los conceptos marxianos se puede describir mediante el siguiente esquema de ecuaciones:

(…) $C_1a_1 + V_1b_1 + S_1c_1 = \Lambda_1 Y_1 u_1$

(…) ....

(…) $C_ra_r + V_rb_r + S_rc_r = \Lambda_r Y_r u_r$

(21) ....

(…) $C_sa_s + V_sb_s + S_sc_s = \Lambda_s Y_s u_s$

(…) ....

(…) $C_na_n + V_nb_n + S_nc_n = \Lambda_n Y_n u_n$

Sigue en pie la tasa de ganancia general (**G**) calculada en (13) y que servirá para sustituir las plusvalías de cada sector por las ganancias tal y como hemos hecho en el epígrafe anterior. Con ello desaparecerán ***n*** coeficientes de transformación (las $\mathbf{c_i}$ para **i** desde **1** a **n**) y tendremos, como en el caso anterior, ***2n*** coeficientes de transformación (los $\boldsymbol{a_i}$ y $\boldsymbol{b_i}$). La reproducción simple exige igualar los distintos capitales (contante, variable y plusvalías) con los sectores de la economía tal como se ha descrito en la introducción del epígrafe. Las tres ecuaciones que describen la reproducción simple son como sigue:

(…) $\Sigma_1^n C_i a_i = \Sigma_1^r C_i a_i + \Sigma_1^r V_i b_i + G \times (\Sigma_1^r C_i a_i + \Sigma_1^r V_i b_i)$

(22) $\Sigma_1^n V_i b_i = \Sigma_{r+1}^s C_i a_i + \Sigma_{r+1}^s V_i b_i + G \times (\Sigma_{r+1}^s C_i a_i + \Sigma_{r+1}^s V_i b_i)$

(…) $\Sigma_1^n S_i c_i = \Sigma_{s+1}^n C_i a_i + \Sigma_{s+1}^n V_i b_i + G \times (\Sigma_{s+1}^n C_i a_i + \Sigma_{s+1}^n V_i b_i)$

siendo $0 < r < s < n$

[41] "El Capital", tomo II, págs. 350 a 464.

Tras eliminar los elementos comunes de los dos lados del sistema de ecuaciones anterior, quedan estos sistemas -que podemos llamar de equilibrio, porque nada motivaría a la economía internamente a cambiar sus niveles de producción[42] y de demanda- como siguen. Las ecuaciones de (22) son ahora:

(23) $$\Sigma_{r+1}^{n} C_i a_i = \Sigma_1^r V_i b_i + \Sigma_1^r S_i c_i$$

(24) $$\Sigma_1^r V_i b_i + \Sigma_{s+1}^{n} V_i b_i = \Sigma_{r+1}^{s} C_i a_i + \Sigma_{r+1}^{s} S_i c_i$$

(25) $$\Sigma_1^s S_i c_i = \Sigma_{s+1}^{n} C_i a_i + \Sigma_{s+1}^{n} V_i b_i$$

y sustituyendo la (23) y (25) en la (24), se obtiene la ecuación básica de la reproducción simple:

(26) $$\boxed{\Sigma_{s+1}^{n} C_i a_i + \Sigma_{s+1}^{n} V_i b_i = G(\Sigma_1^s C_i a_i + \Sigma_1^s S_i c_i)}$$

que puede ser leído como que: *en la reproducción simple, donde se han igualado los capitales constantes de los medios de producción a los sectores productores de estos en términos de valor, donde se ha hecho lo mismo con los capitales variables (masa de salarios) con la oferta de bienes-salario, y las plusvalías con los sectores productores de bienes no salariales, el resultado es un equilibrio entre capitales y sectores de producción tales que los capitales constantes de los sectores de bienes no salariales más los capitales variables de estos mismo sectores se igualan al producto de la tasa de ganancia general marxiana (**G**) por la suma de los capitales constantes de los sectores de medios y bienes salariales más las plusvalías de estos mismos sectores.*

Se da un ejemplo de todo ello en el anexo II, donde se ha utilizado como ayuda la programación lineal para pasar de un sistema de no reproducción a otro de reproducción simple acorde con lo comentado en este epígrafe. Si se examina la conclusión anterior, se puede constatar que los capitales constantes de los medios de

[42] Hay que suponer dados, en términos de valor (aunque no necesariamente física), las características técnicas de producción (Y=**A**X, siendo **A** la matriz de requerimientos), los inputs de trabajo **L** y las pautas de consumo.

producción ($\Sigma_1^r C_i a_i$), los capitales variables de los sectores de producción de bienes salariales ($\Sigma_{r+1}^s V_i b_i$) y las plusvalías de los sectores de bienes no salariales ($\Sigma_{s+1}^n S_i c_i$) no perturban ni descuadran la reproducción simple, sean cuales sean los niveles de sus capitales.

Observando el anexo II y las consideraciones anteriores, aún con un esquema tan simple, nos da para una guía para la planificación. En efecto, nos dice qué sectores no cuadran los capitales empleados (las columnas) -que generan demandas- con la producción de bienes y servicios (las filas); cuáles generan ofertas y cuáles debemos aumentar y cuáles disminuir; también nos dicen cómo han de variar los precios de producción en función de los valores unitarios.

5 - Transformación proporcional a las sumas

Para rematar este artículo se presenta en este epígrafe una transformación alternativa a la de los epígrafes anteriores que presenta dos curiosas propiedades. Que existan varias y no una sólo posibilidades de esta transformación se debe a que los modelos suelen presentar más incógnitas que ecuaciones cuando pasamos de las 3 habituales a "***n***"; también que son factibles diversas hipótesis. En este caso partimos de las sumas, tanto verticales como horizontales, que nos da la matriz original de capitales en términos de valor, y de lo que se trata es de hallar los sumandos, lo cual es siempre posible si lo hacemos de acuerdo con las ecuaciones que siguen:

(27) $$C_{p,i} = \frac{(C_i + V_i + S_i) \times \Sigma_{i=1}^{i=n} C_i}{\Sigma_{i=1}^{i=n} (C_i + V_i + S_i)}$$ para i = 1 a n

(28) $$V_{p,i} = \frac{(C_i + V_i + S_i) \times \Sigma_{i=1}^{i=n} V_i}{\Sigma_{i=1}^{i=n} (C_i + V_i + S_i)}$$ para i = 1 a n

(29) $$S_{p,i} = \frac{(C_i + V_i + S_i) \times \Sigma_{i=1}^{i=n} S_i}{\Sigma_{i=1}^{i=n} (C_i + V_i + S_i)}$$ para i = 1 a n

siendo $\boldsymbol{C_{pi}}$, $\boldsymbol{S_{pi}}$ y $\boldsymbol{V_{pi}}$ los capitales contante, variable y plusvalías transformados de cada sector ***i***.

En principio, el sentido económico de esta transformación sería el de que los valores transformados dependerían proporcionalmente del valor de sus sumas respectivas, es decir, de su propio peso, así como del peso del resto de los otros 2 capitales, cuya suma es el valor final del sector (filas); también dependería proporcionalmente del peso de la suma de los capitales que representa su modalidad (o constante, o variable o plusvalías, es decir, por columnas)[43]. Lo notable es que esta transformación presente 3 propiedades que no se perciben a simple vista:

(a) *Las plusvalías transformadas de acuerdo con (29) son las mismas que las que surgen de la transformación marxiana a partir de la tasa de plusvalía global (13).*

En efecto, sean $\boldsymbol{S_{mi}}$ y $\boldsymbol{S_{pi}}$ las plusvalías derivadas de la transformación marxiana por medio de la cuota global de plusvalía y las plusvalías que surgen del método de proporcionalidad, respectivamente, de acuerdo con las ecuaciones:

(30) $S_{mi} = (C_i + V_i) \times G$ siendo $G = \dfrac{\Sigma_i^n S_i}{\Sigma_1^n (C_i + V_i)}$ para todo $\boldsymbol{i} = \mathbf{1}$ a $\boldsymbol{n}$

(31) $S_{pi} = \dfrac{(C_i + V_i) \times \Sigma_i^n S_i}{\Sigma_1^n (C_i + V_i)}$ por criterio de proporcionalidad

por simple sustitución de G en (30) se ve que $\boldsymbol{S_{mi}} = \boldsymbol{S_{pi}}$

Y con las tasas de explotación (***E***) y composición orgánica de capital (***COC***) ocurre algo análogo a partir de las ecuaciones (27), (28) y (29), es decir $\boldsymbol{E_m} = \boldsymbol{E_{pi}}$ y $\boldsymbol{COC_m} = \boldsymbol{COC_{pi}}$, para todo i=1 a n[44]. Dicho de otra manera, las tasas globales de explotación ($\boldsymbol{E_{pi}}$) y composiciones orgánicas ($\boldsymbol{COC_{pi}}$) que surgen por el método proporcional de todos los sectores (i), son iguales entre sí e iguales a su vez a las tasas de explotación globales marxianas ($\boldsymbol{E_m}$) y a las composiciones orgánicas globales marxianas (COC_m), respectivamente (ver anexo III).

(b) *Los coeficientes de transformación (y por tanto los valores) que surgen por el método de proporcionalidad (a la sumas dadas de*

[43] Para una mayor comprensión véase el anexo III.
[44] Se deja como ejercicio lúdico al lector.

filas y columnas) son los mismos que los coeficientes que obtenidos por el método de Bortkiewicz generalizado[45] .

Esta vez nada hacía presagiar este notable resultado y la demostración es más larga, pero conceptualmente es sencilla. Partimos de los coeficientes obtenidos (17), (18) y (19) por Bortkiewicz generalizado:

(32) $$a_i = \frac{\Lambda_i Y_i (E - G)}{C_i E(1+G)} \qquad b_i = \frac{\Lambda_i Y_i G}{V_i E(1+G)} \qquad c_i = \frac{\Lambda_i Y_i G}{S_i (1+G)}$$

Ahora sólo queda desarrollar las ecuaciones anteriores por sus definiciones:

(33) $$\Lambda_i Y_i = C_i + V_i + S_i \qquad E_i = S_i / V_i \qquad G = \frac{\Sigma_1^n S_i}{\Sigma_1^n (C_i + V_i)}$$

y calcular los coeficientes transformados ***Ca_i* , *Vb_i* , *Sc*_i**:

(34) $$Ca_i = \frac{(C_i + V_i + S_i) \times \left[\frac{\Sigma_1^n S_i}{\Sigma_1^n V_i} - \frac{\Sigma_i^n S_i}{\Sigma_1^n (C_i + V_i)} \right]}{\frac{\Sigma_1^n S_i}{\Sigma_1^n V_i} \times \left[1 + \frac{\Sigma_1^n S_i}{\Sigma_1^n (C_i + V_i)} \right]} = \frac{(C_i + V_i + S_i) \times \Sigma_1^n C_i}{\Sigma_1^n (C_i + V_i + S_i)} = C_{pi}$$

(35) $$Vb_i = \frac{(C_i + V_i + S_i) \times \left[\frac{\Sigma_i^n S_i}{\Sigma_1^n (C_i + V_i)} \right]}{\frac{\Sigma_1^n S_i}{\Sigma_1^n V_i} \times \left[1 + \frac{\Sigma_1^n S_i}{\Sigma_1^n (C_i + V_i)} \right]} = \frac{(C_i + V_i + S_i) \times \Sigma_1^n V_i}{\Sigma_1^n (C_i + V_i + S_i)} = V_{pi}$$

(36) $$Sc_i = \frac{(C_i + V_i + S_i) \times \left[\frac{\Sigma_i^n S_i}{\Sigma_1^n (C_i + V_i)} \right]}{\left[1 + \frac{\Sigma_1^n S_i}{\Sigma_1^n (C_i + V_i)} \right]} = \frac{(C_i + V_i + S_i) \times \Sigma_1^n S_i}{\Sigma_1^n (C_i + V_i + S_i)} = S_{pi}$$

siendo, como se sabe, ***Cp_i* *Vpi Spi*** son los capitales contante, variable y plusvalías, respectivamente, obtenidos por el método de este epígrafe, es decir, por el de proporcionalidad a las sumas (a filas y columnas). Nada hacía sospechar este resultado, porque los coeficientes obtenidos

[45] Ver epígrafe 3.

por el método de Bortkiewicz generalizado lo fueron con la condición de la reproducción simple, es decir, por la igualación de las sumas de los capitales constantes a todos los sectores productores de medios de producción, por semejante igualación de las sumas de los capitales variables a todos los sectores productores de bienes-salario, y, por último, también por igualación de todas las plusvalías a los sectores productores de bienes-no salariales; en cambio, por el método de proporcionalidad a las sumas no se exige ninguna hipótesis económica de reproducción del sistema del tipo que sea. Realmente notable.

(c) *Calculado los valores y los coeficientes de transformación por este método, es decir, por el método de la proporcionalidad a las sumas dadas, cuando se recalcula el valor de la plusvalía (ganancia ya) con el criterio marxiano, el resultado es el mismo que el valor original.*

Sea ***Sp**$_i$* las ganancias obtenidas por el método de ***p**roporcionalidad* y sea ***Sm**$_i$* de nuevos las ganancias recalculadas por el método ***m**arxiano* a partir de ***Sp**$_i$*. Las ecuaciones que definen ambas ganancias son como sigue:

$$Sp_i = \frac{(C_i + V_i + S_i) \times \Sigma_1^n S_i}{\Sigma_1^n (C_i + V_i + S_i)} \qquad \text{para i = 1 a n}$$

(37) $$Cp_i = \frac{(C_i + V_i + S_i) \times \Sigma_1^n C_i}{\Sigma_1^n (C_i + V_i + S_i)} \qquad \text{para i = 1 a n}$$

$$Vp_i = \frac{(C_i + V_i + S_i) \times \Sigma_1^n V_i}{\Sigma_1^n (C_i + V_i + S_i)} \qquad \text{para i = 1 a n}$$

(38) $$Sm_i = (Cp_i + Vp_i) \times G \quad \text{siendo} \quad G = \frac{\Sigma_1^n Sp_i}{\Sigma_1^n (Cp_i + Vp_i)} \quad \text{para i = 1 a n}$$

y sustituyendo ***G*** y (37) en (38) se obtiene que ***Sm**$_i$* = ***Sp**$_i$* tras un ejercicio de álgebra elemental[46]. Dicho de otra forma, el cálculo de la tasa de ganancia marxiana es un *invariante* respecto al cálculo de los precios por el método de proporcionalidad (a las sumas).

[46] Se deja para entretenimiento del lector.

ANEXO I: La transformación de Bortkiewicz y su generalización

anexo I: Transformación a lo Bortkiewicz generalizada

	Valores originales C	V	S	Valores	Valores unitarios	tasa de explot.	tasa de ganancia	COC
1	56	14	35	105	1,88	2,500	50,0%	4,000
2	32	4	9	45	5,63	2,250	25,0%	8,000
3	24	2	7	33	0,69	3,500	26,9%	12,000
	112	20	51	183		2,550	38,6%	5,600

tasa de ganancia global=G= 38,6%

tasa de explotación global=E= 2,55

coeficientes a,b,c de C,V,S, respectivamente

sectores	a	b	c
1	1,148	0,820	0,836
2	0,861	1,230	1,393
3	0,842	1,803	1,314

sectores	Valores transformados C	V	S	DY	precios de producción	tasa de explot.	tasa de ganancia	COC
1	64,3	11,5	29,3	105,0	1,88	2,550	38,6%	5,600
2	27,5	4,9	12,5	45,0	5,63	2,550	38,6%	5,600
3	20,2	3,6	9,2	33,0	0,69	2,550	38,6%	5,600
	112,0	20,0	51,0	183,0		2,550	38,6%	5,600

Diferencia entre transformados y originales

sectores	C	V	S	
1	13,7%	-19,8%	-17,9%	0,0%
2	-15,0%	20,6%	32,9%	0,0%
3	-17,2%	57,3%	27,1%	0,0%
	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%

COC = composición orgánica de capital

En este cuadro se muestra un ejemplo de transformación de valores a precios a partir de los datos recuadrados en amarillo (primera tabla encabezada por los capitales constante (**C**), variable (**V**) y plusvalías (**S**)). Aplicando las ecuaciones (17), (18) y (19) obtenemos *los coeficientes de transformación* ***a***, ***b*** y ***c***; y, a partir de ahí, los precios (*valores transformados unitarios*, **1,88, 05,63** y **0,69**). Como curiosidad acabamos con la "diferencia entre valores transformados y originales" (los de partida). Como puede comprobarse, los precios unitarios originales y transformados coinciden por los supuestos de igualdad de valores iniciales a precios y de suma vertical de capitales. Bajo otros supuestos, los precios originales y transformados diferirían. Aquí lo que importa es el cálculo de los coeficientes de transformación. Se han respetado 3 sectores, pero pueden ser ***n***, puesto que tenemos ***3n*** coeficientes de transformación y ***3n*** sistemas de ecuaciones ((17), (18) y (19)).

ANEXO II: Reproducción simple con tasa de ganancia marxiana

anexo II: Transformación de Valores a Precios con programación

datos originales: capitales

Demandas menos Ofertas	sectores	C	V	S	DY	g= S(C+V)	e=S/V	COC	valores unitarios
24,00	medios	56,0	14,0	42,0	112,0	60,0%	3,00	4,0	2,333
-7,00	salariales	32,0	4,0	12,0	48,0	33,3%	3,00	8,0	0,857
-17,00	no salar.	24,0	2,0	6,0	32,0	23,1%	3,00	12,0	4,000
0,00		109,0	93,0	77,0	279,0	38,1%	0,83	1,17	

Resultados / Valores (D) x Y

Demandas menos Ofertas	sectores	C	V	S	DY	S(C+V)	e=S/V	COC	precios
0,0	medios	14,3	41,4	21,3	77,0	38,1%	0,51	0,35	0,096
0,0	salariales	55,3	35,2	34,5	125,0	38,1%	0,98	1,57	0,208
0,0	no salar.	7,3	48,4	21,3	77,0	38,1%	0,44	0,15	0,085
0,0		77,0	125,0	77,0	279,0	38,1%	0,62	0,62	

restricción de máximos: Valores (D) x Y

sectores	C	V	S	DY	S(C+V)	e=S/V	COC
medios	168,0	42,0	126,0	336,0	60,0%	3,00	0,35
salariales	96,0	12,0	36,0	144,0	33,3%	3,00	1,57
no salar.	72,0	6,0	18,0	96,0	23,1%	3,00	0,15
	168,0	18,0	54,0	240,0	29,0%	0,83	0,62
				3,00			

restricción de mínimos: Valores (D) x Y

sectores	C	V	S	DY	S(C+V)	e=S/V	COC
medios	18,7	4,7	14,0	37,3	60,0%	3,00	0,35
salariales	10,7	1,3	4,0	16,0	33,3%	3,00	1,57
no salar.	8,0	0,7	2,0	10,7	23,1%	3,00	0,15
	18,67	2,00	6,00	26,67	29,0%	0,83	0,62
				0,33			

matriz de productos finales

sectores	1	2	3	totales
medios	56	-	-	56
salarial.	-	8	-	8
no salar.	-	-	48	48

matriz de medios de producción

sectores	1	2	3	totales
medios	110	50	40	200
salarial.	120	125	40	285
no salar	60	150	200	410

En este anexo dos se pueden observar las exigencias y las conclusiones del tercer epígrafe. Pasando del cuadro de "*datos originales*", hemos llegado al de "*Resultados*" como un sistema de reproducción simple tal y como se ha exigido. Además se puede comprobar -aunque no a simple vista- que se cumple la ecuación (26): 7,3 + 48,4 = 38,12% (14,3 + 41,4 + 55,3 + 34,5). Las matrices de restricción (de mínimos y máximos) han sido meros instrumentos para pasar de la matriz de *datos originales* a la de *Resultados*.

ANEXO III: Transformación a Valores proporcionales a las sumas

anexo III: Transformación de Valores a Precios proporcionales a las sumas

	Valores originales				Valores	tasa de	tasa de	
sectores	C	V	S	DY	unitarios	ganancia	explotac.	COC
medios	56,0	14,0	35,0	105,0	2,188	50,0%	2,50	4,0
salariales	32,0	4,0	9,0	45,0	0,804	25,0%	2,25	8,0
no salar.	24,0	2,0	7,0	33,0	4,125	26,9%	3,50	12,0
	112,0	20,0	51,0	183,0		38,6%	2,55	5,6

	Producción física			
sectores	C	V	S	total
medios	48	-	-	48,0
salariales	-	56	-	56,0
no salar.	-	-	8	8,0
	48,0	56,0	8,0	112,0

	Valores transformados proporcionales					tasa de	tasa de	
sectores	C	V	S	DYU	Precios	ganancia	explotac.	COC
medios	64,3	11,5	29,3	105,0	2,188	38,6%	2,55	5,6
salariales	27,5	4,9	12,5	45,0	0,804	38,6%	2,55	5,6
no salar.	20,2	3,6	9,2	33,0	4,125	38,6%	2,55	5,6
	112,0	20,0	51,0	183,0		38,6%	2,55	5,6

tasa de ganancia global= 38,6%

	Valores transformados marxianos					tasa de	tasa de	
sectores	C	V	S	DYU	Precios	ganancia	explotac	COC
medios	64,3	11,5	29,3	105,0	2,188	38,6%	2,55	5,6
salariales	27,5	4,9	12,5	45,0	0,804	38,6%	2,55	5,6
no salar.	20,2	3,6	9,2	33,0	4,125	38,6%	2,55	5,6
	112,0	20,0	51,0	183,0		38,6%	2,55	5,6

	Coeficientes de transformación		
sectores	C	V	S
medios	1,148	0,820	0,836
salariales	0,861	1,230	1,393
no salar.	0,842	1,803	1,314

	Diferencia entre Valores transformados y originales en %			
sectores	C	V	S	totales
medios	13,7%	-19,8%	-17,9%	0,0%
salariales	-15,0%	20,6%	32,9%	0,0%
no salar.	-17,2%	57,3%	27,1%	0,0%
	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%

IV - REPRODUCCIÓN SIMPLE DE MARX A LA LUZ DE SRAFFA

En el tomo II de *El Capital*[47] plantea Marx la reproducción simple en términos, claro está, de valor-trabajo. El mismo Marx nos dice líneas más atrás que "*la reproducción simple a la misma escala constituye una abstracción, puesto que, de una parte, la ausencia de toda acumulación o reproducción en escala ampliada es, sobre una base capitalista, un supuesto absurdo y, de otra parte, las condiciones en que se reproduce no permanecen absolutamente iguales en distintos años*". Y lo dice porque una cosa es, para el economista y revolucionario alemán, la reproducción en términos de valor y otra la reproducción en términos de unidades físicas de productos: aquélla puede permanecer en equilibrio entre dos sectores y sin embargo corresponder a cantidades y calidades de productos distintos, porque lo primero depende del valor incorporado socialmente a los productos y el trabajo acumulado en los medios, y lo segundo puede variar con los cambios tecnológicos, de organización, etc. No se trata sólo del lenguaje *hegelés* de Marx del que nos habla la gran economista Joan Robinson, sino de una forma de aproximación al conocimiento de las cosas a partir de diferentes grados de abstracción: el mundo de los valores-trabajo se mueve en un plano diferente de el mundo de los precios y de las cantidades físicas, al igual que el mundo de las ideas y de las realidades platónicas[48]. No por ello hay que pensar que el mundo de los valores-trabajo está por encima del de las cantidades físicas y precios, porque el propio Marx habla de "*ascender de lo abstracto a lo concreto*"[49], que parece casi una provocación metodológica. Mi opinión personal es que este doble lenguaje y esta doble construcción de conceptos ha sido más una tara que un acicate para que el marxismo económico pase a los estudios económicos universitarios y, en general, a integrarse en el mundo del pensamiento occidental, y esto lo afirmo bajo la conciencia de ser tachado de ingenuo, porque quizá pesen

[47] El Capital, II tomo, pág. 352 y siguientes.

[48] "*Plusvalía y cuota de plusvalía son, en términos relativos, lo invisible y lo esencial que se trata de investigar, mientras que la cuota de ganancia y, por tanto, la forma de la plusvalía como forma de ganancia se manifiestan en la superficie de los fenómenos*", El Capital, tomo III, pág. 58, FCE. Quizá aquí se muestre más kantiano que platónico.

[49] "*Mientras que el método que consiste en elevarse de lo abstracto a lo concreto es, para el pensamiento, la manera de apropiarse lo concreto, o sea, la manera de reproducirlo bajo la forma de lo concreto pensado*", Fundamentos de la Crítica de la Economía Política", pág. 42, edit Grijalbo.

mucho más los factores ideológicos para esta postergación. Iré ahora al grano.

A pesar de la prevención inicial de Marx sobre la reproducción simple, plantea en el II tomo[50] de *El Capital* el caso de la reproducción simple de dos sectores que producen medios de producción y medios de consumos desagregados sus valores de la siguiente forma:

(1) $4.000\ K_1 + 1.000\ V_1 + 1.000\ S_1 = 6.000\ VF$ (medios)

(2) $2.000\ K_2 + \quad 500\ V_2 + \quad 500\ S_2 = 3.000\ VF$ (consumo)

Para Marx el equilibrio se encuentra si el capital variable del primer sector ($1.000V_1$) más su plusvalía ($1.000S_1$) se intercambia por el capital constante del segundo sector ($2.000K_2$), lo cual resulta todo muy lógico porque es el resultado que obtendríamos si igualáramos la segunda ecuación -la de los consumos (oferta)- con la sumas de los capitales variables y constantes del ambos sectores (demanda) y elimináramos términos comunes. *Ello supone que las rentas de los trabajadores y las plusvalías de los poseedores de los medios de producción se destinan íntegramente al segundo sector, es decir, al consumo*. Estaríamos ante una economía estacionaria en términos de valor, aunque, como señala Marx, no en términos de reproducción de los mismos bienes físicos ni, tampoco, a los mismos precios[51]. Por mi parte renuncio, en este trabajo al menos, al mundo, al nivel de abstracción de los valores-trabajo y me quedo con el de los precios y cantidades físicas, pero para no quedar varado en un terreno sin sistema me voy al mundo de Sraffa y su concepción de las mercancías como medio de consumo unas veces y como medios de producción en otras. Las dos ecuaciones análogas a las anteriores en la concepción de Sraffa serían como sigue:

(3) $$\underset{1xm}{P_1}\ \underset{mxm}{Y_1} = \left[\underset{1xm}{L_1}\ \underset{mxm}{W_1} + \underset{1xm}{P_1}\ \underset{mxm}{X_1}\right] \times (\underset{mxm}{I_d} + \underset{mxm}{G_1}) \quad \text{de medios}$$

(4) $$\underset{1xn}{P_2}\ \underset{nxn}{Y_2} = \left[\underset{1xn}{L_2}\ \underset{nxn}{W_2} + \underset{1xn}{P_2}\ \underset{nxn}{X_2}\right] \times (\underset{nxn}{I_d} + \underset{nxn}{G_2}) \quad \text{de consumo}$$

[50] Pág. 354 del tomo II de la edición en el FCE.
[51] Esto es ya más discutible.

donde $\boldsymbol{L}_1$ y $\boldsymbol{L}_2$ son los vectores $\boldsymbol{1}\text{x}\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{1}\text{x}\boldsymbol{n}$ de inputs de trabajo; $\boldsymbol{G}_1$ y $\boldsymbol{G}_2$ son las matrices diagonales $\boldsymbol{m}\text{x}\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}\text{x}\boldsymbol{n}$ de tasas de ganancia[52] donde $\boldsymbol{g}_{ij}=0$ si $\boldsymbol{i}<>\boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{P}_1$ y $\boldsymbol{P}_2$ son los vectores de precios $\boldsymbol{1}\text{x}\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{1}\text{x}\boldsymbol{n}$; $\boldsymbol{X}_1$ y $\boldsymbol{X}_2$ son las matrices $\boldsymbol{m}\text{x}\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}\text{x}\boldsymbol{n}$ de medios de producción; $\boldsymbol{I}$ el vector de unos $\boldsymbol{n}\text{x}\boldsymbol{1}$, e $\boldsymbol{I}_\text{d}$ la matriz diagonal de unos. Para completar todo esto, de la ecuaciones (3) y (4) diríamos que $\boldsymbol{Y}_1$ e $\boldsymbol{Y}_2$ serían las matrices *esrafianas* de producción conjunta de dimensiones $\boldsymbol{m}\text{x}\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}\text{x}\boldsymbol{n}$. Aquí procederemos de igual manera que hace Marx e igualamos el valor en términos de precios de los bienes (mercancías) del sector de bienes de consumo ($\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{Y}_2$) con los ingresos salariales y las ganancias de ambos sectores de tal forma que (5):

$$\left[L_2W_2+P_2X_2\right]\times(I_d+G_2)I=L_1W_1I+\left[L_1W_1+P_1X_1\right]G_1I+L_2W_2I+\left[L_2W_2+P_2X_2\right]G_2I$$

nos da la ecuación de equilibrio:

(6) $$L_1W_1(I+G_1)I+P_1X_1G_1I=P_2X_2I$$

(6b) $$\sum_{i=1}^{n} l_{1i}\sum_{j=1}^{n} w_{1ij}(1+g_{1ij})+\sum_{i=1}^{n} p_{1i}\sum_{j=1}^{n} x_{1ij}g_{1ij}=\sum_{i=1}^{m} p_{2i}\sum_{j=1}^{m} x_{2ij}$$

Puesta la (6) de otra forma queda:

(7) $$\boxed{L_1W_1I+\left[L_1W_1+P_1X_1\right]\times G_1I=P_2X_2I}$$

donde se puede resumir que *un (posible, pero no único) modelo de equilibrio marxiano de dos sectores(o de múltiples sectores agrupados en dos) a partir de las ecuaciones de Sraffa que definen el sistema económico, es aquel en el que las rentas salariales del sector (sectores) de medios de producción más las ganancias del mismo sector (sectores), se igualan al valor de reposición de los medios de producción del sector (sectores) de bienes de consumo.* Es el mismo equilibrio que el de Marx en términos de valor-trabajo, solo que aquí, como veremos, tenemos la inmensa suerte -gracias a Sraffa- de que podemos eliminar los precios y mantener el equilibrio de la

---

[52] Si estuviéramos en la producción simple de Sraffa con una sola tasa de ganancia y una sola tasa de salarios podríamos hablar de la razón-patrón de Sraffa. Sin estas condiciones -que las creo muy restrictivas- tenemos que contentarnos con las $\boldsymbol{G}_\text{M}$, es decir, las tasas máximas de ganancia. Estas no garantizan que todos los precios sean positivos.

reproducción simple. Un comentario: si un gobierno -mejor un gobierno mundial- estuviera dotado de instrumentos políticos y económicos capaces de mantener este equilibrio -también a nivel mundial-, no habría crisis ni ciclos económicos o, al menos, estos serían mucho más benignos. Obsérvese que (7) está tan cerca de la realidad que casi podemos sustituir los datos en la ecuación y obtener resultados. Esa es la razón por la que hemos partido de ***n*** tasas de salario y ***n*** tasas de ganancia.

De las ecuaciones (3) y (4) se pueden obtener los precios y dejarlos explícitos:

(8) $$P_1 = L_1 W_1 (1+G_1) \times \left[Y_1 - X_1 (I + G_1)\right]^{-1} \quad \text{(medios)}$$

(9) $$P_2 = L_2 W_2 (1+G_2) \times \left[Y_2 - X_2 (I + G_2)\right]^{-1} \quad \text{(consumo)}$$

¡Y ahora viene la gran oportunidad gracias a Sraffa de eliminar los precios! Sólo tenemos que sustituir las ecuaciones de precios explícitos del sistema (8) y (9) en la ecuación última (7) de equilibrio y obtenemos (10):

$$L_1 W_1 (1+G_1) \times \left[I + \left[Y_1 - X_1 (I+G_1)\right]^{-1}\right] X_1 G_1 I = L_2 W_2 (1+G_2) \times \left[Y_2 - X_2 (1+G_2)\right]^{-1} X_2 I$$

Aunque Marx no lo reconozca en ningún momento, su marcha al mundo de los valores-trabajo -además de otras razones- fue una forma de soslayar el problema ricardiano de cómo encontrar una medida de la distribución entre las diferentes rentas independiente de las posibles variaciones de los precios. Sraffa lo encontró a través de la mercancía-patrón y de la razón-patrón. Quizá por eso podemos abordar los problemas de Marx en *El Capital*, pero con el instrumental conceptual de Sraffa, aunque tampoco el economista italiano hiciera explícita esa intención.

Cálculo de la tasa máxima de ganancia.

Hay otra manera de hacer desaparecer en (5) los precios. De las ecuaciones (3) y (4) que definen el sistema se obtiene (11) cuando los salarios ***W*** se hacen cero y, por lo tanto, se convierten en máximas las tasas de ganancia $\boldsymbol{G}_{1M}$ y $\boldsymbol{G}_{2M}$:

(11) $$P_1 Y_1 = P_1 X_1 (1 + G_{1M})$$ (de medios)

(12) $$P_2 Y_2 = P_2 X_2 (1 + G_{2M})$$ (de consumo)

Ello se consigue uniendo las ecuaciones (3) y (4) que definen el sistema, eliminando términos comunes y queda:

(13) $$P_1 = L_1 W_1 (1 + G_1) \times (G_{1M} - G_1)^{-1} X_1^{-1}$$ de medios

(14) $$P_2 = L_2 W_2 (1 + G_2) \times (G_{2M} - G_2)^{-1} X_2^{-1}$$ de consumo

Si ahora se sustituyen (13) y (14) en (11) y (12) queda:

(15) $$\left[L_1 W_1 (1+G_1) \times (G_{1M} - G_1)^{-1}\right] X_1^{-1} Y_1 = \left[L_1 W_1 (1+G_1) \times (G_{1M} - G_1)^{-1}\right] \times (1+G_{1M})$$

(16) $$\left[L_2 W_2 (1+G_2) \times (G_{2M} - G_2)^{-1}\right] X_2^{-1} Y_2 = \left[L_2 W_2 (1+G_2) \times (G_{2M} - G_2)^{-1}\right] \times (1+G_{2M})$$

Y observando las ecuaciones (15) y (16) podemos conjeturar una forma de calcular las ***m+n*** tasas de ganancia máximas, aunque no se desprendan directamente de ambas ecuaciones:

(17) $$\underset{mxm}{X_1^{-1}} \underset{mxm}{Y_1} \underset{mx1}{I} = (\underset{mxm}{I_d} + \underset{mxm}{G_{1M}}) \underset{mx1}{I} \Rightarrow \underset{mxm}{G_{1M}} \underset{mx1}{I} = \underset{mxm}{I_d} \underset{mx1}{I} + \underset{mxm}{X_1^{-1}} \underset{mxm}{Y_1} \underset{mx1}{I}$$

(18) $$\underset{nxn}{X_2^{-1}} \underset{nxn}{Y_2} \underset{nx1}{I} = (\underset{nxn}{I_d} + \underset{nxn}{G_{2M}}) \underset{nx1}{I} \Rightarrow \underset{nxn}{G_{2M}} \underset{nx1}{I} = \underset{nxn}{I_d} \underset{nx1}{I} + \underset{nxn}{X_2^{-1}} \underset{nxn}{Y_2} \underset{nx1}{I}$$

De (17) y (18) sale que para que $\boldsymbol{G}_{\mathrm{M}}$ sea mayor o igual que cero es condición necesaria (aunque no suficiente)[53] que:

(19) $$G_M I >= 0 \Rightarrow \left[Y - X\right] I >= 0$$

En realidad, podemos obtener ***n*** tasas de ganancia por los diversos tipos de mercancías o por los diferentes sectores, según que pos o pre multipliquemos $\boldsymbol{G}_{\mathrm{M}}$ por el vector de unos **1**x***n*** o por el vector de unos ***n***x**1**. Incluso una única tasa de ganancia máxima con $\mathbf{I}\boldsymbol{G}_{\mathrm{M}}\mathbf{I}$. Damos un ejemplo en el apéndice II.

[53] Puede haber muchas tasas máximas de ganancia negativas del conjunto de ***n***x***n*** tasas $\boldsymbol{G}_{\mathrm{M}}$, pero la suma de ellas $\mathbf{I}\boldsymbol{G}_{\mathrm{M}}\mathbf{I}$ ha de ser positiva.

Apéndice I

En el cuerpo principal de este trabajo hemos partido de el caso de la producción conjunta *esrafiana*, donde el tamaño de la matriz de productos finales ***Y*** es del mismo tamaño que la matriz de medios ***X***. Esto se puede generalizar para el caso de que no coincidan las mercancías (bienes y servicios) del producto final con el número de mercancías que se utilizan como medio, aunque coincidan los sectores. Seguimos con dos sectores, pero para lo que sigue no es preciso duplicar las ecuaciones y sólo vamos a trabajar con una única ecuación. Partimos de la ecuación *esrafiana* que define el sistema:

(a1.1) $$\underset{1xm}{P_a}\underset{mxn}{Y} = \left\lfloor \underset{1xn}{L}\underset{nxn}{W} + \underset{1xn}{P}\underset{nxn}{X} \right\rfloor \times (\underset{nxn}{I_d} + \underset{nxn}{G})$$

donde el vector de precios de productos finales $\boldsymbol{P}_{\mathrm{a}}$ tienen dimensiones **1**x***m***, mientras que el de precios de medios es **1**x***n***. La otra diferencia con respecto a la producción conjunta *esrafiana* es la de que el vector de productos finales ***Y*** consta de ***m*** mercancías y ***n*** sectores. Si hacemos ahora cero las tasas de salario ***W*** para calcular las tasas máximas de ganancia $\boldsymbol{G}_{\mathrm{M}}$ queda como siempre:

(a1.2) $$\underset{1xm}{P_a}\underset{mxn}{Y} = \left\lfloor \underset{1xn}{P}\underset{nxn}{X} \right\rfloor \times (\underset{nxn}{I_d} + \underset{nxn}{G_M})$$

Y si ahora igualamos las dos ecuaciones anteriores, eliminamos términos comunes y despejamos los precios de los medios ***P*** queda:

(a1.3) $$P = LW(1+G)\times(G_M - G)^{-1}X^{-1}$$

que es la ecuación de los precios ***P*** de los medios de producción dependiente de las tasas máximas de ganancia $\boldsymbol{G}_{\mathrm{M}}$. Ahora sustituimos los precios de esta ecuación en la primera que define el sistema y nos da la ecuación de productos finales $\boldsymbol{P}_{\mathrm{a}}$ sin dependencia de los precios de producción:

(a1.4) $$P_a = LW\left[I + (1+G)\times(G_M - G)^{-1}\right]\times(1+G_M)Y^T\left[YY^T\right]^{-1}$$

La gran diferencia entre las ecuaciones (a1.3) y (a1.4) es la de que los precios de los productos finales $\boldsymbol{P}_a$ dependen, entre otras variables, de la producción de los productos finales $\boldsymbol{Y}$, mientras que los precios de los medios de producción $\boldsymbol{P}$ son independientes directamente de estos productos finales. No obstante la dependencia indirecta se mantiene a través de las tasas máximas de ganancia $\boldsymbol{G}_M$. La otra característica que es común a ambas ecuaciones es que si las tasas de ganancia $\boldsymbol{G}$ se acercaran a las tasas máximas de ganancia $\boldsymbol{G}_M$, los precios aumentarían exponencialmente, como ya nos advierte Sraffa[54]. Y eso ocurre con todos los precios, tanto de los medios $\boldsymbol{P}$ como de los productos $\boldsymbol{P}_a$, y no sólo, como señala Sraffa en su apéndice B de su libro *Producción de mercancías por medio de mercancías*, para el caso de los productos no básicos que se auto-reproducen (el ejemplo que pone Sraffa en el apéndice son *las habas*).

En cuanto a las ecuaciones de equilibrio son las mismas que hemos visto para el caso de la producción conjunta *esrafiana* porque este equilibrio no depende de los productos finales ni de sus precios.

54 Apéndice B de *Producción de mercancías por medio de mercancías*.

Apéndice II

Si definimos la tasa de plusvalía ***e*** como ***e***=***P***/***V***, la composición orgánica de capital ***q*** como ***q***=***C***/***V*** y la tasa de ganancia ***g*** como ***g***=***P***/(***C***+***V***) se obtiene la relación:

(a2.1) $$g = \frac{e}{1+q}$$

Y si despejamos la composición orgánica de capital ***q*** a los efectos aritméticos sale:

(a2.2) $$q = \frac{e-g}{g}$$

Aquí se ve que si las tasas de explotación ***e*** y las tasas de ganancia ***g*** son únicas (iguales para todos los sectores), también lo son las composiciones orgánicas de capital ***q***. Por ello no podemos establecer -suponiendo que se consiga- leyes de formación económicas *distintas* para cada una de las tres porque eso nos llevaría a una contradicción entre los 3 coeficientes. Una de ellas sobra y una manera de salvar la cuestión es que dos de ellas sean distintas según sectores. La otra opción es abandonar como ley de formación a una de las tres.

Apéndice III

Hay otra manera de mostrar el equilibrio de la reproducción simple con las anteojeras de Sraffa. Supongamos que los medios de producción que se emplean en la ecuación (3) -para a su vez producir medios- son los mismos que se emplean para producir productos finales de consumo en la ecuación (4). Es una hipótesis con mucho sentido. Supongamos además que todas las matrices de productos y medios de los dos sectores (o conjunto de sectores) tienen la misma dimensión ***n***x***n***. Esto supone una cierta restricción que pierde generalidad. Ocurre entonces que la ecuación de equilibrio:

$$L_1 W_1 (I + G_1) I + P_1 X_1 G_1 I = P_2 X_2 I \tag{6}$$

queda como sigue:

$$L_1 W_1 (I + G_1) I + P_1 X_1 G_1 I = P_1 X_1 I \tag{a.III.1}$$

Lo que ha cambiado es que hemos hecho iguales los precios y cantidades de los medios de producción de ambos sectores, es decir, que: $\boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{X}_1$, porque son los mismos medios. De la última ecuación obtenemos la ecuación de equilibrio general del sistema económico tal y como se ha definido:

$$L_1 W_1 (I + G_1) I = P_1 X_1 (I - G_1) I \tag{aIII.2}$$

que en términos aritméticos es:

$$\sum_{i=1}^{n} l_{1i} \sum_{j=1}^{n} w_{1ij} (1 + g_{1ij}) = \sum_{i=1}^{n} p_{1i} \sum_{j=1}^{n} x_{1ij} (1 - g_{1ij}) \tag{aIII.2 bis}$$

Al igual que decíamos en el cuerpo principal de este trabajo, un gobierno nacional o mundial que tuviera suficiente poder político y económico (no existe actualmente) que fuera capaz de implementar políticas económicas capaces de hacer observar el equilibrio de la ecuación anterior, tendría mucho avanzado para combatir los ciclos y las crisis. Ha de observarse también -y es significativo- que no hay que preocuparse por los salarios, tasas de ganancia y precios de los sectores de bienes de consumo (que no aparecen en la ecuación), sino tan sólo por estas variables del sector de medios de producción. Intelectualmente no puede ser más sencillo. Eso sí, las dificultades ideológicas y de poder son inmensas. También vale esta ecuación de equilibrio -así como aquella de la que procede- para una economía abierta (con sector exterior), porque podemos asimilar las importaciones como una parte de los productos finales y las exportaciones como medios de producción para obtener precisamente las anteriores[55]. ¡Y todo esto ha surgido de la simple conjunción de Marx y Sraffa! De la ecuación (aIV.2bis) se desprende que si aumentan las ganancias sin que se muevan las demás variables la ecuación se desequilibra, y para encontrar de nuevo la condición de equilibrio han de subir los precios del sector (el de medios), han de bajar los salarios o aumentar los despidos, o una combinación ponderada de las tres cosas a la vez. ¡Con esta ecuación tendrían los sindicalistas argumentos para que no suban las ganancias en períodos de equilibrio o de crecimiento moderado y sin situaciones de crisis[56]!

Otro tema de interés es el siguiente. Como decisión *ad hoc*, conjeturamos que la ecuación (aIII.2) se cumple no sólo globalmente -el equilibrio marxiano- sino también por sectores. A continuación despejamos los precios con sus cantidades y queda:

(aIII.3) $$P_1 X_1 = \left[L_1 W_1 (I + G_1) \right] \times (I - G_1)^{-1}$$

Si la comparamos ahora con la ecuación del cuerpo principal del artículo cuando despejábamos los precios en función de las tasas de ganancia máximas:

(aIII.3bis) $$P_1 = L_1 W_1 (1 + G_1) \times (G_{1M} - G_1)^{-1} X_1^{-1}$$

de la que sale:

(aIII.4) $$P_1 X_1 = \left[L_1 W_1 (1 + G_1) \right] \times (G_{1M} - G_1)^{-1}$$

[55] Cosa que se hace en las tablas Input-Output.

[56] Recuérdese que partimos de una situación de reproducción simple en términos físicos.

Vemos que podemos conjeturar a su vez que se da la siguiente igualdad como condición *suficiente* -pero no necesaria- para que se cumplan las ecuaciones (aIII.3) y (aIII.4):

(aIII.5) $$(I - G_1) = (G_{1M} - G_1)$$

lo que nos da la condición conveniente (no es necesaria ni suficiente) para que los precios sean positivos y es que:

(aIII.6) $$G_{1M} = I_d$$

es decir, ¡que las tasas de ganancia máximas de los sectores de medios de producción no superen el 100% como tasa máxima de ganancia, independientemente de todas las demás variables! Si la producción es conjunta podemos obtener los mismos resultados haciendo $\boldsymbol{G}_{1M}\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}_d\boldsymbol{I}$. Curioso. Con esta conjetura no hay que preocuparse de los sectores de bienes de consumo, sino tan solo de los de medios de producción.

Apéndice IV

Ya hemos visto en la teoría marxista la imposibilidad de que se igualen para todos los sectores las tasas de ganancia y las tasas de plusvalía porque eso implica la igualdad de las composiciones orgánicas del capital de Marx, lo cual es inaceptable por motivos puramente empíricos. Pero es que además la tasa de plusvalía como cociente entre la plusvalía y el capital variable tiene problemas de inconsistencia interna, tanto si la consideramos sector a sector como si la consideramos globalmente. En la concepción de Marx la plusvalía surge como consecuencia de la diferenciación entre el *valor del trabajo* que le pone el trabajador (obrero o, por extensión, asalariado) al trabajo y que es por lo que le contrata el empresario, y *el valor de la fuerza de trabajo*, que es lo que le paga. Pero con la tasa de plusvalía marxiana surge 4 temas que Marx soslayó o no percibió como problemas, además del señalado anteriormente (de ese sí fue consciente): 1) el de la constancia de la tasa de plusvalía en todos los sectores; 2) uno propiamente ontológico y gnoseológico: ¿es la concepción de la tasa de plusvalía por Marx una ley económica o una definición?; 3) ¿depende de los salarios o la tasa es la misma sea cual sea a su vez la tasa de salarios?; 4) ¿depende esta tasa sólo de la duración de la jornada de trabajo? Resulta curioso que sean cuáles sean las respuestas, todas resultan problemáticas, aunque unas más que otras. En cuanto a la primera cuestión, Marx mantiene siempre esa constancia en los ejemplos en todos los sectores. Seamos generosos con Marx y supongamos la posibilidad de distintas tasas de plusvalía según sectores. No hay inconveniente porque, de lo contrario, la plusvalía (al menos la relativa) sería una definición, y como tal, no añadiría nada al conocimiento científico de raíz marciano porque sólo sería un concepto más. Lo que cabe menos duda es la adscripción de la plusvalía a la jornada de trabajo. Oigamos a Marx: "*La plusvalía producida mediante la prolongación de la jornada de trabajo es la que yo llamo plusvalía absoluta; por el contrario, a la que se logra reduciendo el tiempo de trabajo necesario, con el consiguiente cambio en la proporción de magnitudes entre ambas partes de la jornada la designa con el nombre de plusvalía relativa*"[57]. Sin embargo, unas líneas antes da a entender Marx que también depende la "*capacidad productiva del trabajo*". Dicho en lenguaje esrafiano, dependería de ***Y***, ***X*** y ***L***, es decir, de los productos finales, medios y del trabajo. De las 4 preguntas que hemos

[57] *El Capital*, tomo I, FCE, pág. 252.

hecho, la más delicada es la tercera. Ya hemos demostrado que la tasa de plusvalía depende del nivel de salarios. Vamos a verlo de otra forma. Supongamos que hemos resuelto el problema de la transformación de valores a precios correctamente (hay varias formas) y que tenemos la ecuación:

(aIV.1) $$\boxed{PY = tHY = a_i C + b_i V + c_i S}$$

donde ***t***, ***a***$_i$, ***b***$_i$, ***c***$_i$ son los **3**x***n***+**1** multiplicadores sectoriales, ***P*** el vector de precios **1**x***n***, ***H*** es el vector **1**x***n*** de trabajo unitario de cada mercancía ***i***, Y la matriz diagonal de productos finales y ***C***, ***V***, ***S*** son los vectores **1**x***n*** de capitales contantes, variables y plusvalía por cada mercancía. Y ya que tenemos transformados valores a precios por cada mercancía vamos hacer la asignación siguiente (discutible, pero lógica).

(aIV.2) $$a_i C = PX$$

(aIV.3) $$b_i V = LW$$

(aIV.4) $$c_i S = R_{NL}$$

siendo ***X*** la matriz ***n***x***n*** de medios de producción, ***L*** el vector trabajo ***1***x***n*** y ***R***$_{NL}$ las rentas *no* laborales (no derivadas del trabajo asalariado). La tasa de plusvalía, con las ecuaciones anteriores se define como:

(aIV.5) $$tasa\ de\ plusvalía(i) = \frac{cS}{bV} = \frac{R_{NL}}{LW} = \frac{PY - PX - LW}{LW}$$

En la ecuación anterior aún suponemos que *las tasas de plusvalía(i)* son distintas para cada mercancía (para hacerlas iguales siempre hay tiempo, pero entonces la cosa empeora para Marx). De (aIV.5) se obtiene:

(aIV.6) $$tdp(i) \times LW = PY - PX - LW \quad desde\ i = 1\ a\ \ n$$

De (aIV.6) surge que para que la tasa de plusvalía (*tdp(i)*) sea positiva ha de ocurrir que:

(aIV.7) $$para\ tdp(i) > 0 \Rightarrow PY - PX > LW \quad desde\ i = 1\ a\ n$$

es decir, que el producto neto de cada mercancía sea mayor que las rentas laborales correspondientes, lo cual es una condición trivial, porque de lo contrario el sistema sería inviable al consumir las rentas parte de las rentas netas (***PY-PX***) e impedir la reproducción del sistema. Pero hay más, de no haber explotación, es decir, si la tasa de plusvalía valiera cero, eso sólo sería posible en el caso particular de que:

(aIV.8) $$para\ tdp(i) = 0 \Rightarrow PY - PX = LW \quad desde\ i = 1\ a\ n$$

En este caso, el excedente de cada mercancía (producto neto) ha ido a parar a las rentas salariales. ¿Podría existir plusvalía negativa? Con *El Capital* en la mano eso es imposible porque el trabajador, según Marx, siempre produce un plusvalor, salvo que la jornada de trabajo fuera tan corta que todo lo que produjera fuera para su sustento y el de su familia. Pero en este caso el empresario no le contrataría porque no obtendría plusvalía (ganancia) para él. Vamos a suponer que la tasa de plusvalía es negativa con una tasa de hasta menos el 100%, es decir, que tdp(i)=-100%. De (aIV.6) sale:

(aIV.9) $$-1 \times LW = PY - PX - LW \quad desde\ i = 1\ a\ n$$

y queda:

(aIV.10) $$PY = PX \quad desde\ i = 1\ a\ n$$

que es el caso de la producción sin excedente. Este sistema es inviable salvo que se entienda integrado en ***PX*** los consumos de los trabajadores directos. Aún así, por un sistema sin plusvalía (ganancia) los empresarios no contratarían. Pero hemos sido muy radicales, porque el -100% es el caso extremo. Si la plusvalía es negativa, pero sin llegar al extremo de (aIV.10), con un valor tal como ***-ñ***x***tdp***(**i**), siendo ***ñ*** un coeficiente menor que uno y mayor que cero, queda entonces:

(aIV.11) $$PY - PX = (1 - ñ) \times LW \quad desde\ i = 1\ a\ n$$

Como quiera que en este caso se cumple que **0**<***1-ñ***<**1**, ahora sí hay excedente, que es la expresión que queda al lado derecho de la igualdad, y además es mayor que cero. Conclusión: ¡incluso con plusvalía negativa el sistema es viable técnicamente! Las propias leyes (o lo que es peor, simples definiciones) nos llevan a un absurdo[58]. Siguiendo el criterio de Popper, si la teoría de la plusvalía es siempre cierta, independiente de los salarios, estamos ante una definición que no añade nada al conocimiento (sería un juicio analítico a priori, según Kant); si es una ley han de admitirse varias cosas: 1) que depende del nivel de salarios, además de la duración de la jornada de trabajo; 2) que puede ser cero, porque el sistema es viable técnicamente. O si eso no es así, hay que acotar de forma *ad hoc* el valor mínimo de la tasa; 3) que, aún admitiendo los supuestos de Marx, estos han de acotarse porque pueden darse tasas negativas de plusvalía y el sistema ser, a pesar de todo, viable; 4) ha de admitirse que a partir de cierto nivel tasas de salarios, no pueden darse tasas de plusvalía (*tdp(i)*) positivas porque aquéllos (los salarios) pueden llevarse todo el excedente. Veamos este supuesto. De (aIV.6) se obtiene:

(aIV.12) $$PY - PX = \left[1 + tdp(i)\right] \times LW \quad desde\ i = 1\ a\ n$$

donde la expresión a la derecha de la igualdad es el excedente. Si la expresión de la izquierda permanece constante y las tasas de salarios crecen, eso sólo es posible si la tasa de plusvalía tiende a cero. Para verlo globalmente (***tdp***(***g***)), es decir, para el conjunto de los sectores, vamos a tomar como numerario al excedente, es decir, a ***PYI-PXI***, por lo que hacemos ***PYI-PXI*=1** y queda:

(aIV.13) $$tdp(g) = \frac{1 - LWI}{LWI}$$

Y vemos que, si los salarios ***W*** aumentan tal que ***LWI*** tiende a **1**, la tasa de plusvalía general[59] (***tdp***(***g***)) tiende a *cero*. Marx no contempla esta posibilidad que surge de sus propias hipótesis y con ello su propio sistema se vuelve incoherente. Nosotros podemos aceptar muchas

[58] La posibilidad de plusvalías negativas con tasas de ganancia positivas ya lo advirtió Ian Steedman en *Marx alter Sraffa*, 1977 (*Marx, Sraffa y el problema de la transformación*, FCE, págs. 154 y siguientes). Aquí hemos visto esa posibilidad sin condicionarlo a una tasa de ganancia positiva, que es aún más grave para la teoría de la explotación.

[59] O simplemente, tasa de plusvalía si todos los sectores (mercancías) están sujetas a la misma tasa.

cosas del sistema de Marx, pero no aquellas que lo hacen incoherente, inviable o rechazable (por contrastación empírica). Por cierto, a expresión parecida llega (mejor parte) Morishima en *Marx´s Economics*, 1973, aunque por otros caminos.

Veamos ahora la incoherencia interna del sistema marxiano. Marx parte de dos definiciones (¿o son leyes?): 1) que la tasa de plusvalía es ***tdp***=***S***/***V*** y que la tasa de ganancia vale ***g***=***cS***/(***aC***+***bV***). De acuerdo con las dos anteriores, la relación entre tasa de ganancia y de plusvalía es como sigue:

(aIV.14) $$tasa\ ganancia = tasa\ de\ plusvalía \times \frac{cV}{aC + bV}$$

En la anterior vemos que si la *tasa de plusvalía* tiende a cero, la *tasa de ganancia* también, por lo que parecería sin más que se cumple el teorema fundamental de Okishio en términos de valores marxianos independientemente de la tasa de salarios. En efecto, aun cuando pudiéramos asimilar el capital variable ***V*** marxiano transformado en términos de precios ***bV*** a la masa de salarios ***LW*** (cosa que hemos hecho antes), sea cual sea éste valor en (aIV.14), la tasa de ganancia es positiva (salvo cuando ***bV***=***LW*** fuera cero). En términos de precios ya transformados de los valores se tiene:

(aIV.13) $$tdp(g) = \frac{1 - LWI}{LWI}$$

donde la tasa de plusvalía depende del nivel de salarios y de tal forma que si los salarios ***W*** aumentan de tal forma que le llevan a 1 en la ecuación anterior (que es el valor del producto neto[60] ***PYI-PX*)**, ocurre entonces que la tasa de plusvalía (de explotación) vale cero. Hay pues una contradicción entre (aV.14) y (aV.13). ¿Cómo se soluciona? De una de estas dos formas: o negando cualquier trasiego entre valores y precios, o negando que la tasa de plusvalía sea siempre positiva

[60] Recordar que tomar un numerario en un sistema de ecuaciones y darle valor 1 a una expresión es una forma de decir que se dividen todas las ecuaciones por esa expresión, por lo que las nuevas variables debieran ir con una señalización distinta que las anteriores. No obstante, no se hace para no confundir al lector.

independientemente del nivel de los salarios. Pero de las definiciones de Marx (¿o son leyes?) no se desprende eso.

Bibliografía

Afriat, S.: “Sraffa´s Prices”, Universitá degli Studi di Siena, quaderni 474.
www.econ-pol.unisi.it/quaderni/474.pdf

Ahijado, M.: “Distribución, precios de producción y crecimiento”, 1982, Centro de Estudios Universitarios Ramón Areces.

Bour, Enrique A.: “Marx y la teoría económica moderna”, 2007
http://www.aaep.org.ar/anales/works/works2007/bour.pdf

Caballero, A. y Lluch, E.: “Sraffa en España”, Investigaciones Económicas (2ª época, vol. X, n.º 2), 1986.

Desai, M.: “Marxian Economic Theory”, 1974 [“Lecciones de teoría económica marxista”, 1977, edit. Siglo XXI].

Dobb, M.: “The Sraffa system and the critique of neoclassical theory of distribution”, 1970.

Dobb, M.: “Teoría del valor y de la distribución desde Adam Smith, edit. Siglo XXI editores.

Estrin, S. y Laidler, D: “Introduction microeconomics”.

Fiorito, Alejandro: “La implosión de la economía neoclásica”. Está en la red:
www.geocities.com/aportexxi/sraffa12.pdf

Foncerrada, Luis Antonio: “Sraffa y Böhm-Bawerk”. Está en la red:
http://www.economia.unam.mx/secss/docs/tesisfe/FoncerradaPLA/tesis.pdf

Garegnani, P.: “El capital en la teoría de la distribución”, 1982, ed. Oikos-Tau (“Il capitale nelle teorie delladistribuzone”, 1982)

Gehrke, Ch.y Kurz, D.: “Sraffa on von Bortkiewicz”. Está en la red:
http://www.newschool.edu/cepa/events/papers/050509_Bortkiewicz.pdf

Harcourt, G.C.: “Teoría del Capital” (*Some Cambridge controversies in the theory of capital, 1975*), apéndice al cap. 4, 1975, edit. Oikos-tau.

Heahtfield, D. F.: “Productions funtions”.

Korsch, Karl; “Karl Marx”, 1975, traducción de Manuel Sacristán, edit. Ariel.

Kurz, Pasinetti, Salvador y otros: “Piero Sraffa: The Man and the Scholar”, Routledge, 2008.

Lange, O., Taylor, F. M.: "On tthe Economic Theory of Socialism, 1938 [Sobre la teoría económica del socialismo, 1971, edit. Ariel]

Marx, Carlos: "El método en la Economía Política", 1974, Ediciones Grijalbo, S.A.

Marx, Carlos: "El Capital", en el FCE, traducción de Wenceslao Roces.

Meade, J.: "A neo Classical Theory of Economic Growth", 1961.

Meek, R.: "Mr. Sraffa´s Rehabilitationof Classical Economics", 1961.

Mendoza, Gabriel: "La transformación de valores en precios de producción", 1997 http://www.izt.uam.mx/economiatyp/numeros/numeros/10/articulos_PDF/10_2_La_transformacion.pdf

Mora Plaza, A.: "Aspectos de la economía de Sraffa", revista: Nómadas, n. 23, U. Complutense de Madrid, enlace: http://www.ucm.es/info/nomadas/23/antoniomora.pdf

Mora Plaza, A.: "Notas sobre la producción simple y conjunta a consecuencia de Sraffa: http://redalyc.uaemex.mx/pdf/181/18112179020.pdf;

Mora Plaza, A.: "Sobre la transformación de valores a precios":
http://www.eumed.net/ce/2009b/amp2.htm
http://revistas.ucm.es/cps/15786730/articulos/NOMA1010140379A.PDF

Mora Plaza, A.: "Notas sobre el teorema fundamental marxiano"
http://www.eumed.net/ce/2009b/amp.htm
http://econpapers.repec.org/article/ervcontri/y_3a2009_3ai_3a2009-10_3a22.htm

Morhisima, M.: "La teoría económica de Marx" (*Marx´s Economics, 1973*), 1977, pág. 15, edit. Tecnos.

Moseley, F.: "El método lógico y el problema de la transformación".
http://www.azc.uam.mx/publicaciones/etp/num7/a8.htm

Murga, Gustavo: "Piero Sraffa".
http://marxismo.cl/portal/index.php?option=com_content&task=view&id=100&Itemid=1

Nuti, D.: "Capitalism, Socialism and Sleady Growth", 1970.

Okishio, N.: "A mathematical note on marxian theorems", 1963.

Pasinetti. L.: "Critical of the neoclassical theory of growth and distribution". Está en la red: http://www.unicatt.it/docenti/pasinetti/pdf_files/Treccani.pdf

Pasinetti, L.: “Structural Change and Economic Growth: a theoretical essay on the dynamics of Wealth of Nations”, 1981, Cambridge University Press.

Pasinetti, L.: “Rate of profit and income distribution in relation to the rate of economic growth”, 1961/2.

Pasinetti, L.: “Switches of technique and the rate of return in Capital Theory”, 1969.

Pasinetti, L.: “Crecimiento económico y distribución de la renta” (“*Growth and Income Distribution*”, 1974), 1978, Alianza Editorial.

Pasinetti, L.: “Lecciones de teoría de la producción” (“Lezioni di teoria della produzioni”, 1975), 1983, FCE.

Peris i Ferrando, J.E: “Análisis de la resolubilidad de modelos lineales de producción conjunta”, 1987, en internet: http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/3829/1/Peris%20Ferrando,%20Josep.pdf

Potier, J.P.: “Piero Sraffa”, 1994, edicions Alfons Magnànim.

Ricardo, D.: “Principios de Economía Política y Tributación” (*On the Principles of Political Economy and Taxation,*), 1973, F.C.E.

Robinson, J.: “Ensayos críticos”, 1984, Ediciones Orbis.

Samuelson, Paul: “Understanding the Marxian notion of Exploitation”, 1971.

Sánchez Choliz, Julio: “La razón-patrón de Sraffa y el cambio técnico”, 1989, Investigaciones Económicas, 2ª época, Vol. XIII. ftp://ftp.funep.es/InvEcon/paperArchive/Ene1989/v13i1a7.pdf

Sargent, T.J.: “Teoría macroeconómica” (*Macroeconomic Theory, 1979*), 1988, Antoni Bosch editor.

Schefold, Bertram: *Mr. Sraffa on Joint Production*, 1971

Schumpeter, J. A.: “Historia del Análisis Económico” (*History of Economic Analisis*, 1954), 1971, Ediciones Ariel.

Segura, J.: “Análisis microeconómico”, pág. 88, 2004, Alianza editorial Tecnos.

Steedman, I.: “Marx, Sraffa y el problema de la transformación” (*Marx after Sraffa, 1977*), 1985, F.C.E.

Schumpeter, J. A.: “Historia del Análisis Económico” (*History of Economic Analisis*, 1954), 1971, Ediciones Ariel.

Segura, J.: “Análisis microeconómico”, 2004, Alianza editorial Tecnos.

Solow, R.: “The interest rate and transition between techniques”, 1967.

Sraffa, Piero: “Produción de mercancías por medio de mercancías” (*Production of commodities by means commodities, 1960*), 1975, Oikos-Tau.

Ricardo, D.: “Principios de Economía Política y Tributación” (*On the Principles of Political Economy and Taxation,*), 1973, F.C.E.

Vegara, J. M.: “Economía política y modelos multisectoriales”,1979, edit. Tecnos.

Varios,: “Matemáticas avanzadas aplicadas a la Economía”, UNED, 2001.

Madrid, 13 de septiembre de 2010.

$$p_j y_j = w\ l_j + (1+r)\sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} \quad \text{desde } j=1 \text{ a } j=\text{n}$$

$$p_j y_j = (1+R)\sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} \quad \text{desde } j=1 \text{ a } j=\text{n}$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j y_j - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} = 1$$

$$\sum_{1}^{n} l_j = 1$$