MODELO MONEY IN UTILITY FUNCTION (MIU)

Cesar Antunez. I[Ψ]
(Lima, Perú - 2010)

Introducción

En este documento intentaremos esbozar un modelo simple de demanda de dinero en la Función de Utilidad para atacar este problema, hay que mencionar que Patrinkin (1965), modelaba la existencia del dinero incluyéndolo en la función de utilidad.[1]

Pero fue Sidrauski (1967) quien menciona, que así como el consumo de bienes y servicios, mantener dinero (dinero en términos reales, es decir, expresado en cantidades de bienes y servicios que pueden ser adquiridos) también genera utilidad. Esta aproximación tiene varias críticas, por que hay que reconocer que el dinero no proporciona utilidad directa sino a través de los bienes que pueden ser comprados con este dinero. Por lo que al incluir los bienes y el dinero en la función de utilidad se incurriría en una doble contabilidad. Pero Hansen (1970) nos responde esta crítica, diciendo que además de intercambiarse por bienes, el dinero presta un servicio de transacción y de esta manera aumenta el nivel de satisfacción de los individuos, también nos dice que para incluir el dinero en la función de utilidad es necesario incluir también sus precios, así lo que debe incluirse son los saldos reales y no el dinero nominal.

Resuelto esta crítica, comenzaremos mencionando que Sidrauski comienza haciéndose una pregunta de por que los agentes valoran el dinero sea trivial, pues éste tipo de activo esta directamente en le función de utilidad, al proporcionar servicios facilitan las transacciones.

[Ψ] Alumnote la facultad de Economía de la UNMSM. Por ultimo todo error es responsabilidad del autor cuyo correo es nakatabox@hotmail.com

[1] Este punto fue planteado por Patrinkin, D. (1965) “Money, Interest and Price”

Supuestos del Modelo

Para el modelo consideraremos los siguientes supuestos:

- Se presenta una economía cerrada sin relación con el exterior.
- El gobierno debe financiar una secuencia exógena de gasto.
- El modelo Money in Utility Function se presenta en un contexto Neoclásico.
- La función de utilidad tiene buen comportamiento.
- Se asume que la oferta de trabajo es inelástica $l_t = 1$ para todo t.
- El stock de capital se deprecia a una tasa constante δ.
- La función de utilidad de los individuos depende del consumo y de los saldos reales.
- La única fuente de financiamiento del gobierno es la emisión de dinero.

Si incomparamos a las familias estas presenta una función de utilidad a maximizar que es la siguiente:

$$Máx: \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, \frac{M_{t+1}}{P_t})$$

Donde la función de utilidad presenta buen comportamiento, por eso pasaremos por alto la demostración de las propiedades de la función. Por lo que $u_c > 0$, $u_{cc} > 0$, $u_m > 0$ y $u_{mm} > 0$.

Y esta función se enfrenta a la siguiente restricción y esta s.a:

$$c_t + i_t + g_t = w_t.l_t + r_t.k_t - \tau_t$$
$$i_t = k_{t+1} - (1-\delta)k_t$$
$$g_t = \frac{M_{t+1}}{P_t} - \frac{M_t}{P_t}$$

Donde:

$0 < \beta < 1$: Representa el factor de descuento intertemporal.

c_t: Representa el consumo del periodo t.

i_t: Es el nivel de inversión en el periodo t.

k_t: Es el stock de capital en el periodo t.

g_t: Representa el nivel de gasto de gobierno en el periodo t.

τ_t: Son impuestos de suma fija en el periodo t.

M_t : Es la cantidad nominal de dinero que las familias tiene al inicio en el periodo t.

P_t : Es el nivel de precios de la economía en el periodo t.

δ : Representa la tasa de depreciación del stock de capital.

w_t : Es el salario real en el periodo t.

r_t : es la tasa de retorno del capital en el periodo t.

l_t : Representa la fuerza de trabajo en el periodo t.

Además la cantidad de dinero inicial y el stock de capital esta representado k_0, M_o que están dados.

Dado que las empresas tratan de maximizar su beneficio, esta estará representada por:

$$Máx : \Pi = f(k_t) - w_t.l_t - r_t.k_t$$

Pero como asumimos que la oferta de trabajo es inelástica $l_t = 1$, reemplazando este supuesto en la ecuación anterior se tiene:

$$Máx : \Pi = f(k_t) - w_t - r_t.k_t$$

Además la $f(k_t)$, es la función de producción que cumple con las propiedades habituales como demostraremos:

a) La magnitud de los productos marginales (PMg) son positivos.

$$\frac{df}{dl_t} = f_l' > 0 \qquad \frac{df}{dk_t} = f_k' > 0$$

b) La curva de los productos marginales son decrecientes.

$$\frac{d^2 f}{dl^2_t} = f_l'' < 0 \qquad \frac{d^2 f}{dk^2_t} = f_k'' < 0$$

c) Cuando k_t tiende al infinito, entonces el $PMg_{k(t)}$ tiene al vector nulo.

$$Lím_{k(t)\to\infty} = PMg_k = 0$$

d) Cuando L_t tiende al infinito, entonces el $PMg_{l(t)}$ tiene al vector nulo.

$$Lím_{l(t)\to\infty} = PMg_l = 0$$

e) Cuando k_t tiende al cero, entonces el $PMg_{k(t)}$ tiene al infinito.

$$Lím_{k(t)\to 0} = PMg_k = \infty$$

f) Cuando L_t tiende al cero, entonces el $PMg_{k(t)}$ tiene al infinito.

$$Lím_{l(t)\to 0} = PMg_l = \infty$$

Por lo tanto hemos demostrado que la función satisface las condiciones de INADA

- El Gobierno se enfrenta el gobierno se enfrenta a la siguiente restricción presupuestaria, en la cual asumimos que la única fuente de financiamiento es la emisión de dinero, para financiar el gasto en cada periodo (recursos arrojados al mar).

$$\frac{M_{t+1}}{P_t} - \frac{M_t}{P_t} = g_t - \tau_t$$

- En el Equilibrio General Dinámico (EGD), la secuencia de cantidades c_t, k_{t+1}, l_t y y_t, junto con los precios de la economía y los factores P_t, w_t y r_t. Dado que siempre hay una igualdad entre la oferta y la demanda $c_t + i_t + g_t = y_t$..

- Platearemos nuestro Lagrangiano para las familias, reemplazando la restricción 1 y CIA, tendremos en cuenta las variables de control c_t, k_{t+1} y M_{t+1}.

$$Max: L = \sum_{t=0}^{\infty}\left[\beta^t u\left(c_t, \frac{M_{t+1}}{P_t}\right) - \lambda_t(c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t + \frac{M_{t+1}}{P_t} - \frac{M_t}{P_t} - w_t - r_t.k_t + \tau_t)\right]$$

Donde:
λ_t; Es el multiplicador de Lagrange.

Condición de Primer Orden (CIO)

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = 0 \Rightarrow \beta^t u_{c_1}(c_t^1, M_{t+1}/P_t) - \lambda_t = 0 \to \lambda_t = \beta^t u_{c_1}(c_t^1, M_{t+1}/P_t)_t \cdots (I)$$

$$\frac{\partial L}{\partial k_{t+1}} = -\lambda_t + \lambda_{t+1}(1-\delta + r_{t+1}) = 0 \to \lambda_t = \lambda_{t+1}(1-\delta + r_{t+1}) \ldots (II)$$

$$\frac{\partial L}{\partial M_{t+1}} = \frac{\beta u_{m_t}(c_t, M_{t+1}/P_t)}{P_t} - \frac{\lambda_t}{P_t} + \frac{\lambda_{t+1}}{P_{t+1}} = 0 \ldots (III)$$

- Igualaremos la ecuación (I) con la ecuación (III)

$$\beta^t u_{c_t}(c_t, M_{t+1}/P_t) = \lambda_{t+1}(1 + r_{t+1} - \delta)$$

- Adelantando un periodo t+1, a la ecuación (I) y reemplazando en la ecuación anterior se tiene:

$$\beta^t u_{c_t}(c_t, M_{t+1}/P_t) = \beta^{t+1} u_{c_t}(c_{t+1}, M_{t+2}/P_{t+1})(1+r_{t+1}-\delta)$$

Simplificando la ecuación anterior se obtiene la ecuación de Euler

$$\frac{u_{c_t}(c_t, M_{t+1}/P_t)}{\beta u_{c_t}(c_{t+1}, M_{t+2}/P_{t+1})} = (1+r_{t+1}-\delta)\ldots(IV)$$, la ecuación de Euler

- Reemplazando la ecuación (I) en (III)

$$\frac{\beta^t u_{m_t}(c_t, M_{t+1}/P_t)}{P_t} - \frac{u_{c_t}(c_t, M_{t+1}/P_t)}{P_t} - \frac{\beta^t.\beta.u_{c_t}(c_{t+1}, M_{t+2}/P_{t+1})}{P_{t+1}} = 0$$

Simplificando la ecuación anterior se obtiene la condición de no arbitraje

$$\frac{\beta.u_{c_t}(c_{t+1}, M_{t+2}/P_{t+1})}{u_{m_t}(c_t, M_{t+1}/P_t) - u_{c_t}(c_t, M_{t+1}/P_t)} = \frac{P_{t+1}}{P_t}\ldots(V)$$, la condición de no Arbitraje

- Y como la condición de factibilidad:

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t + g_t = f(k_t)$$

Por lo que el sistema de ecuaciones es:

$$\frac{u_{c_t}(c_t, M_{t+1}/P_t)}{\beta u_{c_t}(c_{t+1}, M_{t+2}/P_{t+1})} = (1+r_{t+1}-\delta)$$

$$\frac{\beta.u_{c_t}(c_{t+1}, M_{t+2}/P_{t+1})}{u_{m_t}(c_t, M_{t+1}/P_t) - u_{c_t}(c_t, M_{t+1}/P_t)} = \frac{P_{t+1}}{P_t}$$

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t + g_t = f(k_t)$$

Por lo que tenemos un sistema no lineal de ecuaciones en diferencia de primer orden y con condición estática en c_t y k_t. Donde la trayectoria de g_t es exógena.

Demanda de Dinero

- Primero Para obtener la demanda de dinero despejamos el numerador de la condición de no arbitraje (V).

$$\beta . u_{c_t}(c_{t+1}, M_{t+2}/P_{t+1}) = \frac{P_{t+1}}{P_t}\left[u_{m_t}(c_t, M_{t+1}/P_t) - u_{c_t}(c_t, M_{t+1}/P_t)\right]$$

✍ Ahora reemplazamos esta ecuación en la ecuación de Euler (IV)

$$\frac{u_{c_t}(c_t, M_{t+1}/P_t)}{\frac{P_{t+1}}{P_t}\left[u_{m_t}(c_t, M_{t+1}/P_t) - u_{c_t}(c_t, M_{t+1}/P_t)\right]} = (1 + r_{t+1} - \delta)$$

$$\underbrace{\frac{u_{c_t}(c_t, M_{t+1}/P_t)}{u_{m_t}(c_t, M_{t+1}/P_t) - u_{c_t}(c_t, M_{t+1}/P_t)}} = \frac{P_{t+1}}{P_t}(1 + r_{t+1} - \delta)$$

$$\boxed{1 + \pi_{t+1} = \frac{P_{t+1}}{P_t}(1 + r_{t+1} - \delta) \ldots (VI)}$$

Donde:

$$\frac{u_{c_t}(c_t, M_{t+1}/P_t)}{u_{m_t}(c_t, M_{t+1}/P_t) - u_{c_t}(c_t, M_{t+1}/P_t)} = 1 + \pi_{t+1}$$

Como se puede apreciar en el lado derecho de la ecuación (VI), es uno más la tasa de interés. Apartir de esto se obtiene la demanda de dinero que esta implícitamente y depende positivamente del nivel de consumo y negativamente de la tasa de interés nominal.

Ejemplo

Si la función de utilidad de los agentes de la sociedad

$$u\left(c_t, \frac{M_{t+1}}{P_t}\right) = \psi \ln(c_t) + (1-\psi)\ln\left(\frac{M_{t+1}}{P_t}\right)$$

Utilizando la ecuación de demanda óptima de dinero (VI)

$$\frac{u_{c_t}(c_t, M_{t+1}/P_t)}{u_{m_t}(c_t, M_{t+1}/P_t) - u_{c_t}(c_t, M_{t+1}/P_t)} = \frac{P_{t+1}}{P_t}(1 + r_{t+1} - \delta)$$

$$\frac{\frac{\psi}{c_t}}{\frac{\psi}{c_t} - \frac{c(1-\psi)}{M_{t+1}/P_t}} = (1 + \pi_{t+1})$$

$$\frac{\psi}{1-\psi}\left(\frac{1+\pi_{t+1}}{\pi_{t+1}}\right) = \frac{M_{t+1}}{P_t} \to \frac{M_{t+1}}{P_t} = f\left(\underset{-}{\pi}\right)$$

Estado Estacionario

Si $g_t = g$, $\tau_t = \tau$

Sabemos que en el estado estacionario

$$c_t = c_{t+1} = c\ ,\ r_{t+1} = r_t\ ,\ \frac{P_{t+1}}{P_t} = 1 + \pi = 1 + \alpha$$

α : Tasa de crecimiento del dinero

Esto nos dice que la función implícita de demanda de dinero en el estado estacionario, que va depender negativamente de la tas de inflación del estado estacionario de la restricción del gobierno.

$$\pi . f(\pi) = g - \tau$$

Esta ecuación nos dice que si despejamos es la tasa de inflación $\pi . f(\pi)$ del estado estacionario, entonces las rentas por señoreaje que obtiene el gobierno es la igualdad.

REFERENCIAS

- Hansen, B. “A Survey of General equilibrium System”, New York, McGraw-Hill, 1970.
- Patinkin, D. “Money, Interest and Prices”, New York, Haperd & Row, 1965.
- Sargent, T. J. “Dynamic Macroeconomic Theory”, Cambridge, Havard University Press, 1987.
- Sidrauski, M. “Rational Choice and Patterns of Growth in a Monetary Economy”, American Economic Review 57, 1967, pp: 534-544.
- Wilfredo Toledo. “El Dinero en los Modelos Macroeconómicos”, Revista de Economía Institucional, segundo semestre, año/vol. 8, número 015, Universidad Externado de Colombia, 2006, pp: 97-116.