NOTAS SOBRE LA PRODUCCIÓN CONJUNTA A PARTIR DE SRAFFA

Antonio Mora Plaza

Abstract

The joint production is an historical matter from Sraffa, although the text books don´t treat it frequently, perhaps for the formal accommodation to the single production, despite that the joint production is the question more empirical important. Along this papers will appear the names of authors who they have treated this question under a ricardian or neo-ricardian survey. The marginalist joint production is obviated . The other hand, is not my intention to talk about the the historical developement of joint production. This matter has been worked with succes and facilitated many graduates and doctorates. This is an attempt to contribute with somes ideas and to make also somes criticals to the unquestioned knowledge.

keywords: joint production, Sraffa

Introducción

El tema de la producción conjunta es un tema manido desde Sraffa, aunque los manuales se resisten a tratarlo, quizá, por la comodidad formal que supone la producción simple, a pesar de que lo relevante empíricamente es la conjunta. A lo largo del artículo saldrán nombres de autores que se han ocupado de esto, es decir, de la producción conjunta en un contexto ricardiano o neo-ricardiano. Se obvia pues la producción conjunta marginalista. No obstante, nada más lejos de mi intención hacer un recuento histórico del tema. Esto ya se ha hecho[1] con éxito y ha dado juego para doctorados. Estas notas son intentos de aportación, de novedad en algunos aspectos de la producción conjunta, por un lado, y, por otro, alguna crítica a verdades consideradas indiscutibles[2].

palabras clave: producción conjunta, Sraffa

Jel: B24

1 En general, los libros de Pasinetti; en internet se puede ver el art. de Peris i Ferrando. Ambos se mencionan en la bibliografía.

2 El caso del aspecto de la frontera salarios-beneficios.

NOTAS SOBRE LA PRODUCCIÓN CONJUNTA A PARTIR DE SRAFFA

Antonio Mora Plaza

Producción simple y producción conjunta

Como se ha observado en varias ocasiones, uno de los muchos méritos de Piero Sraffa en su obra "*Producción de mercancías por medio de mercancías*" es haber dado una importancia a la producción conjunta, relegada en la enseñanza de la economía a tesis doctorales y artículos especializados y poco más. Y ello ha sido así a pesar del caso irrelevante en la práctica de la producción simple. Siendo bienpensante, se puede decir que acaso se confiaba demasiado en que las posibles conclusiones que se extrajeran de la producción conjunta fueran las mismas que las de la simple. Y sin embargo, para Sraffa, el caso de la producción conjunta lo justifica para el posterior tratamiento del Capital fijo y la Tierra[3] y no es hasta el capítulo IX (tercero de la producción conjunta), cuando lleva entonces 2 capítulos, que el economista italiano lo justifica en relación a la producción simple de esta manera: "*Queda ahora por ver en qué medida las otras conclusiones alcanzadas en el caso de las industrias de productos simples son aplicables al caso de las industrias con producción conjunta. Una de las que claramente necesita verificación es la norma según la cual, cuando el tipo de beneficio es cero, el valor relativo de las mercancías es proporcional a la cantidad de trabajo que, directa o indirectamente, ha ido a producirlas*"[4]. Lo cual es cierto si, como hace Sraffa, reduce el capital a trabajo fechado, lo que nos queda es un vector de precios dependientes *proporcionalmente* del salario y de la sumas de trabajo en distintas fechas. Sraffa no lo explica así porque no hace mención a ecuaciones que no hace explícitas, pero esta es la explicación más sencilla y evidente. Y la segunda justificación que nos da es que cabe la posibilidad de precios negativos en la producción conjunta, cosa imposible en la simple. Esta ya no es tan intuitiva ni tan fácil de ver a primera vista, pero tiene que ver -como veremos- con la imposibilidad de aplicar el teorema de Perrón-Froebenius en la producción conjunta al no tener una matriz de medios de producción cuadrada y, por tanto, invertible. Esta sería la explicación formal; la explicación económica es algo más compleja en Sraffa, pero viene a ser la siguiente: en la producción simple los precios varían siempre proporcionalmente a los salarios (ver ecuación (1)), incluso con ganancias positivas, lo que hace que el precio del producto considerado aumente como producto en la misma proporción que lo hace como medio (factor); en cambio, en la producción conjunta son muchos los productos que se producen mediante un mismo proceso y, aún cuando la suma normalizada con la razón-patrón de todos esos productos fuera equivalente a un único precio (caso anterior en la producción simple), ahora

[3] "Producción de mercancías…", pág. 67, nota 1, pie de página.
[4] Ídem, pág 83.

podría ocurrir que uno de los sumandos contuviera un precio negativo sin afectar por ello a la positividad de la suma (ver la ecuación (24))[5]. En esta ocasión, la explicación es más farragosa, pero creo que lo expuesto sintetiza correctamente lo expresado por el italiano. Sin más dilación y justificación entramos en faena y, aunque las anotaciones de Sraffa son como siempre peculiares para lo que ahora se acostumbra, el modelo del italiano se podría caracterizar por la ecuación:

(1) $$\underset{1xn}{p}\underset{nxn}{Y} = \left[\underset{1xn}{L}\underset{nxn}{W} + \underset{1xn}{p}\underset{nxn}{X}\right] \times \left(1 + \underset{nxn}{G}\right)$$

donde **P** es el precio de los bienes, **Y** la matriz diagonal de bienes finales, **L** los inputs de trabajo, **W** la matriz diagonal de salarios, **X** los medios de producción y **G** la matriz también diagonal de tasas de ganancia según sectores (o mercancías). Todo ello es muy parecida a la de la reproducción simple, pero con una notable diferencia: en aquélla la matriz de productos finales **Y** era diagonal, es decir, con ceros en todos los elemento en los que ***i*** es diferente de ***j***. Aquí, en la producción conjunta, todos los elementos de **Y** tienen o pueden tener cualquier valor positivo, de tal forma que la matriz de la diferencia **Y-X** es o puede ser semipositiva. Aunque es un caso de producción conjunta, porque tenemos ***n*** mercaderías de ***n*** sectores (**X**) que producen ***n*** mercaderías distribuidas en ***n*** sectores, también es un caso muy restrictivo y podemos llamarlo caso de *producción conjunta srafiana simplificada*. El caso más amplio que puede concebirse y que normalmente está fuera de la literatura económica[6] sería aquel que vendría dado por la ecuación del sistema:

(2) $$\underset{1xm}{p_b}\underset{mxn}{Y} = \left[\underset{1xn}{L}\underset{nxn}{W} + \underset{1x\tilde{n}}{p_\eta}\underset{\tilde{n}xn}{X}\right] \times \left(1 + \underset{nxn}{G}\right) \qquad \text{para } \boldsymbol{m}>\boldsymbol{n}$$

donde la matriz de bienes finales **Y** tiene dimensión ***mxn*** y la de medios de producción ***ñxn***. Ambas, por lo tanto, coinciden en los sectores de donde proceden tanto bienes como medios (***n***), pero no en las características de estos (***m*** para **Y**, ***ñ*** para **X**). Sin embargo, este caso tan abierto de producción conjunta tendría al menos los siguientes problemas:

---

5 Claro que la discusión al respecto es más compleja porque no podría ocurrir en cualquier caso con muchas mercancías. La razón es que si un grupo considerable de ellas salieran de la producción con precios negativos se verían beneficiadas las industrias que utilizan el producto como medio; ello supondría una disminución de sus costes y, a su vez, de sus precios, lo cual permitiría una subida general del sistema de salarios y beneficios; pero eso, en contra de lo que pueda parecer y dado el mismo nivel general de tasa de salario y ganancias del sistema en el modelo considerado, provocaría costes insoportables para otras muchas que no emplearan esos productos de precios negativos como medios. El sistema poco a poco se haría inviable hasta que no se desecharan los procesos que originan precios negativos. Esto podría valer como una crítica lógica a las subvenciones que permiten precios -es decir, costes por encima de los ingresos- negativos a sectores sin futuro, salvo que se valoren otros aspectos no estrictamente económicos.

6 Pasinetti, Schefold, Ahijado.

(a) La inversa[7] de ($\mathbf{YY}^T$) -que da lugar a una matriz simétrica dado que se ha supuesto que $m>n$ -carece de sentido económico, aún cuando sea factible despejar los precios $\mathbf{P_b}$ finales de la ecuación (2).

(b) No se puede hacer la resta **Y**-**X** por ser matrices de distinta dimensión.

(c) Ni *la mercancía-patrón* ni *la razón-patrón* -que podrían obtenerse de las variables no monetarias de (2)- serían únicas. En efecto, la mercancía-patrón se obtiene de reducir los valores reales de productos finales y medios de producción mediante q_i *multiplicadores* de acuerdo con las siguientes ecuaciones:

(3) $$u \underset{mxn}{Y} \underset{nx1}{Q} = \underset{ñxn}{X} \underset{nx1}{Q}$$

(4) $$\underset{1xn}{L} \underset{nx1}{Q} = 1$$

que, aún cuando hiciéramos $m=ñ$ para que la igualdad (3) fuera posible, tendríamos $m+1$ ecuaciones (m filas de (3) y la ecuación (4)) y $n+1$ incógnitas (n *multiplicadores* q y un u *coeficiente reductor*). Además hemos supuesto que $m>n$ por motivos de realismo económico. Y si no es única la mercancía-patrón, tampoco lo será la razón-patrón, puesto que todas estas $n+1$ incógnitas se obtendrían conjuntamente resolviendo (3) y (4). A pesar que se ha abierto mucho las posibilidades formales de plantear la producción conjunta desde los trabajos de Pasinetti (1980), Newmann, Schefold (1971) y el teorema de Mangasarian[8] (1971), etc. todo tiene un límite.

(d) Si no se puede calcular los autovalores en la producción conjunta eso no significa que no pueda obtenerse resultados significativos de las ecuaciones del sistema, pero lo que está vedado es entonces que la ecuación que resulta de hacer cero los salarios en (2) nos de un tipo de beneficio que, aún siendo el máximo posible por lo anterior, no tiene porqué coincidir con el autovalor que garantiza unos precios positivos. De ello se percató Sraffa en su libro revolucionario diciendo que: *"... mientras las ecuaciones pueden ser satisfechas por soluciones negativas para las incógnitas, sólo son practicables aquellos métodos de producción que, en las condiciones efectivamente dominantes (es decir, al salario dado o al tipo de beneficio dado), sólo implican precios positivos*"[9]. Por esta razón y a falta de la agarradera de Perrón-Froebenius para el cálculo del autovalor que va a permitir que la razón-patrón (**M** en (7)) coincida con los beneficios que resultan de hace cero los salarios en (6), Sraffa nos da un razonamiento económico por reducción al absurdo utilizando los salarios como variable estratégica[10]. Es cierto que con ello se obtiene la razón-patrón única,

---

[7] A pesar de las posibilidades del cálculo de las *matrices inversas generalizadas*.
[8] Para el cálculo de autovalores de matrices de orden **m**x**n**.
[9] "Producción de mercancías... ", pág. 68, edic. Oikos-Tau.
[10] "Producción de mercancías... ", pág. 79.

pero el problema sigue siendo el mismo: sin Perrón-Froebenius no se garantizan precios positivos. Este modo de pensar, esta inversión de variables, es una de las revoluciones que introduce Sraffa en el análisis económico. En efecto, para la economía neoclásica y marginalista se acostumbra a pensar que precios, ganancias y salarios son las variables que han de adaptarse a la tecnología (llámase función de producción neoclásica o matriz de requerimientos); en la filosofía srafiana es lo contrario o al menos, las posibilidades de cambio están en pie de igualdad. La otra gran revolución de su filosofía es la posibilidad de que los sistemas sean abiertos (más incógnitas que ecuaciones) y que sea la sociedad y, por ende, la sociología la que se encargue de analizar la resolución de conflictos o la lucha de clases en Marx.

Consecuencias de la producción conjunta

Entre ambos extremos, es decir, entre los sistemas de producción conjunta caracterizados por las ecuaciones (1) y (2), nosotros vamos a proponer el siguiente sistema de ecuaciones siguiendo el espíritu srafiano -aunque no estrictamente su letra- con distinción entre bienes básicos y no básicos.

(6) $$\underset{1xm}{p_b}\underset{mxn}{Y_b}+\underset{1xn}{p_n}\underset{nxn}{Y_n}=\left[\underset{1xn}{L}\underset{nxn}{W}+\underset{1xm}{p_b}\underset{mxn}{X}\right]\times\left(1+\underset{nxn}{G}\right)$$

(7) $$\underset{1xm}{p_b}\underset{mxn}{Y_b}+\underset{1xn}{p_n}\underset{nxn}{Y_n}=\left[\underset{1xm}{p_b}\underset{mxn}{X}\right]\times\left(1+\underset{nxn}{M}\right)$$

(8) $$\underset{1xm}{p_b}\underset{mxn}{Y_b}I+\underset{1xn}{p_n}\underset{nxn}{Y_n}I-\underset{1xm}{p_b}\underset{mxn}{X}I=1$$

(9) $$\underset{1xn}{L}\underset{nx1}{I}=1$$

donde **I** es el vector vertical ***n***x***1*** de unos y $\mathbf{P_b}$, $\mathbf{P_n}$, $\mathbf{Y_b}$ e $\mathbf{Y_n}$ son los precios y los productos finales y medios de los bienes básicos y no básicos, respectivamente. Ahora el vector de precios $\mathbf{P_b}$ es común a productos finales y medios; **M** es la matriz diagonal de beneficios máximos y las ecuaciones (8) y (9) son los numerarios empleados para trabajar en un conjunto cerrado y acotado que normalizan el producto neto y los inputs de trabajo, y $\boldsymbol{m}>\boldsymbol{n}$ porque en la producción conjunta la lógica económica implica se producirán más y *distintos* productos finales que los medios empleados. Este sistema es aún más general que el propuesto por el economista italiano, porque la matriz de productos -que está representada por $\mathbf{Y_b}$ y $\mathbf{Y_n}$ -tienen $\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}$ filas entre ambas y, en cambio, la matriz de medios $\mathbf{Y_n}$ sólo tiene ***n***; en Sraffa el número de filas y columnas coinciden tanto en la de productos finales como la de medios, de tal forma que se puede efectuar la resta de ambas y hallar su inversa. Nada de esto se puede hacer en la que aquí se propone. Pues bien, de este conjunto de ecuaciones se pueden obtener algunos resultados no triviales:

(a) *Los precios de los productos básicos influyen en la formación de los precios de los básicos y de los no básicos; en cambio los precios de los no básicos no influyen en la de los básicos.*

Esta afirmación puede ser sostenida mediante la ecuación (6) despejando los precios de los no básicos y queda:

$$(10) \quad p_n = LY_n^{-1}\, W\,(1+G) + p_b\left[X(1+G) - Y_b\right]Y_n^{-1}$$

El conspicuo lector podría objetar que también es despejable los precios de los productos básicos, aunque de forma más complicada formalmente. A ello se puede responder de la siguiente forma: a1) que el sentido causal de las matemáticas quedan fuera de la propia lógica de relaciones entre variables que es en definitiva esta materia y que ese sentido lo pone, en este caso, el economista que las utiliza, y eso es lo que hace Sraffa en su libro clásico; a2) que hay una razón más poderosa, porque despejar los precios de los productos básicos en función de los no básicos y del resto de las variables exigiría hallar la inversa de $\mathbf{Y_b Y_b^T}$ ($\mathbf{Y_b^T}$ es la traspuesta de $\mathbf{Y_b}$), que es una matriz simétrica que carece de sentido económico, y puede dar lugar a valores sin sentido por haber considerado que $\boldsymbol{m}>\boldsymbol{n}$. Veamos las palabras de Sraffa: “*Desde el principio, sin embargo, la principal implicación económica de la distinción era que los productos básicos juegan una parte esencial en la determinación de los precios y del tipo de beneficio, en tanto que los productos no básicos no la juegan*”[11].

(b) *La frontera de tipo de salario-tipo de ganancia que surge en la producción conjunta según el modelo definido por (6), (7), (8) y (9) es formalmente el mismo que el que surge en la producción simple (modelo Sraffa) <u>sin</u> adelantamiento de salarios.*

Esta afirmación parece ir contra el sentido común por lo alejado que están los modelos aludidos, especialmente porque este de producción conjunta, por lo que se ha explicado, es mucho menos restrictivo que el propuesto por el propio Sraffa en su libro tantas veces mencionado. Y sin embargo, las matemáticas esta vez nos sirven para desvelar lo que la intuición nos niega. En efecto, si igualamos (6) y (7) en lo que tienen de común queda:

$$(10) \quad P_b X \times (1+M) = (LW + P_b X) \times (1+G)$$

[11] “Producción de mercancías... “, pág. 80.

Y ahora abandonamos los múltiplos salarios y ganancias para ir a un único salario y una única ganancia, y si multiplicamos las ecuaciones por el vector vertical de unos **I** queda de (9) y (10): $w + wg = (M - g) p_b XI$

y de (7), (8) y (9) a su vez nos deja: $1 = p_b Y_b I + p_n Y_n I - p_b XI = M p_b XI$

y entre ambas ecuaciones anteriores nos da:

$$\left(\frac{M-g}{M}\right) = w(1+g) \tag{11}$$

Veamos ahora el sistema *srafiano* de producción simple sin adelantamiento de salarios caracterizado por (12), (13), (14) y (15).

(12) $pY = (1+\pi)[wL + pX]$

(13) $pY = (1+R)pX$

(14) $pYI - pXI = 1$

(15) $L\mathrm{I} = 1$

De este conjunto de ecuaciones sale que la relación entre salario y tipo de ganancia es:

$$w = \frac{R-\pi}{(1+\pi)R} \tag{16}$$

que es formalmente el mismo que (11) en la producción conjunta con tal de hacer **R**=**M** y $\pi = g$. Ello demuestra la potencialidad que tiene la invención **-**¿o descubrimiento?**-** de la *razón-patrón* de Sraffa, porque sin ese recurso no podría haberse llegado a esta insospechada conclusión.

(c) *En la producción conjunta -al menos en este modelo- se producirá un aumento de los precios de los bienes y servicios (mercancías)* <u>*no básicos*</u> *ante: a) una disminución de la productividad, b) un aumento de los salarios, c) un aumento de los precios de los bienes y servicios básicos, d) un aumento de los medios de producción por unidad de los bienes y servicios finales no básicos, e) un aumento de las ganancias en cualquier sector, f) una disminución de los bienes y servicios básicos en relación a los no básicos.*

En efecto, si se lleva de (10) el producto de los bienes y servicios básicos al otro lado de la igualdad restando se obtiene[12]:

[12] Todo ello se puede hacer porque las matrices de salarios y ganancias son diagonales con valores cero en los lugares donde **i** es distinto de **j**.

(20) $$p_n = LY_n^{-1} w\left(1+G\right) + p_b\left[XY_n^{-1}(1+G) - Y_b Y_n^{-1}\right]$$

$$\frac{dp_n}{dLY_n^{-1}} > 0 \; ; \; \frac{dp_n}{dw} > 0 \; ; \; \frac{dp_n}{dg} > 0 \; ; \; \frac{dp_n}{dp_b} > 0 \; ; \; \frac{dp_n}{dXY_n^{-1}} > 0 \; ; \; \frac{dp_n}{dY_b Y_n^{-1}} < 0$$

donde $\mathbf{LY_n^{-1}}$ es la inversa de la productividad del trabajo, $\mathbf{XY_n^{-1}}$ es la relación entre medios de producción por unidad de bienes y servicios no básicos, y donde $\mathbf{Y_bY_n^{-1}}$ es la relación también entre bienes y servicios (mercancías) básicos finales y no básicos. Con (20) se calculan las derivadas de los precios de los bienes no básicos ($\boldsymbol{p_n}$) con respecto a todas las variables anunciadas y los signos de las mismas son los enunciados en (d).

(d) *Por encima de un cierto nivel de salarios (de ganancias), las ganancias (los salarios) son más altas (altos) en la producción simple que en la conjunta, dada la matriz de medios de producción; por debajo de ese nivel, ocurre lo contrario.*

En la producción simple con salarios *ex-ante* ya hemos visto que la frontera salarios-ganancias está dada por la ecuación **w=(R-g)/R**, mientra que la misma frontera en la producción conjunta se define a través de **w=(M-g)/(1+g)M**. El punto de corte en el eje de ordenadas es igual para ambos: **w=1**, como se pude comprobar haciendo la tasa de ganancia **g=0** en ambas ecuaciones. En cambio, para ambas ecuaciones no coinciden en el punto de corte con el eje de abcisas, es decir, cuando los salario son **w=0** en ambos. Para la primera ecuación -la de la reproducción simple- es **g=R**, mientras que para la producción conjunta es **g=M**, que ya hemos visto que se cumple que **R**<**M**. Eso significa que ambas ecuaciones se cortan en *dos* puntos: para **g=0** que ya hemos comentado y que vale **w=1** para ambas, y también en un punto intermedio entre la recta que representa la ecuación srafiana **w=(R-g)/R** de producción simple con salarios *ex-ante* y la curva que representa la ecuación de la producción conjunta (*srafiana simplificada*) **w=**(**M-g**)/((**1**+**g**)x**M**). Ese punto de corte de ambas ecuaciones se da para **w=R**x(**M-g**)**/M** y **g=**((**1**+**M**)x**R-M**)**/M**. Por ello podemos afinar más y decir que entre **w=1** y **w=(M-g)/M** son más altas las ganancias en la producción simple srafiana que en la producción conjunta srafiana, y lo contrario desde este último punto hasta **w=0**. De forma simétrica, se puede añadir que entre **g=0** y **g=R** les interesaría la producción simple (con adelantamiento de salarios) a los asalariados, y que a partir de **R** hasta **M** (donde los salarios se hacen cero), lo contrario, siendo -como se recordará- **R** la razón-patrón de la producción simple y **M** la tasa máxima de beneficio para la producción conjunta *srafiana simplificada*. No se tiene la intención, en principio, de considerarlo como un cambio en las técnicas porque la matriz de medios de producción **X** no ha cambiado, aunque sí lo han hecho las de bienes y servicios finales y también el comportamiento empresarial en cuanto al momento del cobro de los salarios. No obstante, si se quiere ver así podría hacerse, porque el catecismo sobre *qué es un cambio en las técnicas* no está escrito. Lo que no hay en este modelo en ningún caso retorno de las técnicas porque recta y curva *se cruzan* sólo una vez[13].

(e) *La tasa máxima de beneficios (***M***) cuando los salarios son cero no garantiza que sea igual a la razón-patrón porque esta no es única en este modelo de producción conjunta srafiana simplificada; en cambio, sí está acotada respecto a la producción simple srafiana con adelantamiento de salarios (ex-ante).*

Esta afirmación es aún menos intuitiva que la anterior, pero es útil para limitar el grado del error que se comete al no poder utilizar directamente Perrón-Froebenius. Igualmente se intuye que puede acotar la posibilidad de precios negativos. En el epígrafe anterior hemos visto que la ecuación de la reproducción simple y la que define la producción conjunta se cortan en el punto $\mathbf{g}=((\mathbf{1}+\mathbf{M})\times\mathbf{R}-\mathbf{M})/\mathbf{M}$, en el cual si se hace $\mathbf{g}>\mathbf{0}$ y tras pasos algebraicos elementales se obtiene:

(17) $M<R/(1-R)$

De otra parte, la relación entre razón-patrón, tasa de salario y tasa de ganancia en la producción simple con adelantamiento srafiano de salarios es: $\mathbf{w}=(\mathbf{R}-\mathbf{g})/\mathbf{g}$.
Si ahora sustituimos esta tasa de ganancia **g** por su valor en la producción conjunta (11) se obtiene que $\mathbf{w}=(\mathbf{M}-\mathbf{R})/(\mathbf{M}\times\mathbf{R})$, con lo que para que los salarios **w** sean positivos ha de ocurrir que:

(18) $M>R$

Y uniendo (17) y (18) queda:

(19) $$R < M < \frac{R}{1-R}$$

Es decir, a falta de razón-patrón única en la producción conjunta, la tasa de ganancia en esta modalidad de producción (**M**) está acotada por la razón-patrón de la producción simple ex-ante (**R**) según (19), y cuanto menor sea la razón-patrón, menor será el intervalo de acotación. Esta relación es quizá la mayor novedad de este artículo.

[13] Aunque tienen 2 puntos de contacto, pero uno de ellos es cuando $\mathbf{g}=\mathbf{0}$, es decir, en el inicio de la curva en ordenadas (la vertical), tal como se ha explicado.

La frontera salario-ganancia[14]

En la última parte del capítulo **IX** dedicado a "*otros efectos de la producción conjunta*", inicia Sraffa una discusión sobre la posibilidad de que ante un descenso en los salarios tenga como consecuencia necesariamente un alza en el tipo de beneficio[15]. Sraffa afirma que no siempre ha de ocurrir esto, porque si cambia el patrón de medida (mercancía-patrón), el salario medido en una mercancía-patrón cambiante puede tomar cualquier dirección y compensar -esto es lo que hay que interpretar de las palabras de Sraffa- durante algún tramo el aumento natural del tipo de beneficio ante el descenso de los salarios. Sin embargo, todo esto parecería contradecir la ecuación (11) que es monótona decreciente, lo que sería incoherente con las explicaciones del economista italiano. No obstante, el punto clave de todo esto está en la ecuación (19) que hemos deducido, donde hemos acotado la tasa máxima de beneficios en la producción conjunta, pero no tenemos -a diferencia de la producción simple- una razón-patrón única. En efecto, al menos entre los tramos que van de **R** a **M** y de **M** a **R/(1-R)**, la relación de los salarios con su mercancía patrón puede ser oscilante y permitir un descenso de las ganancias, a la vez que un descenso en el salario-patrón. Todo ello se deriva indirectamente de que en la producción conjunta tengamos más incógnitas que ecuaciones que impiden una única razón-patrón, que tengamos posibles multiplicadores negativos y, por último, unos posibles precios también negativos. Sraffa lo soluciona con criterio económico como hemos visto: es la propia economía y sus actores los que eliminarán soluciones de precios negativos por inviables. Y esto es una pista para ciertos comportamientos que la economía neoclásica y marginalista no puede explicar. Me refiero a que los comportamientos económicos lleven, a pesar de todo, a precios negativos. La necesidad de una subvención casi permanente a ciertos sectores (en Europa, leche, algunos productos agrícolas, carbón, etc.) podrían explicarse a partir de estas posibilidades de precios negativos por las relaciones de costes directos e indirectos de estas industrias o sectores, que llevarían a que los precios de sus inputs elevaran sus costes directos e indirectos, de tal forma que la suma de todos estos costes -seguidos a través de la matriz de requerimientos- fueran tales que superaran los ingresos; ello se debería a que los precios finales (de producción) no pudieran elevarse al mismo ritmo que sus costes por la necesidad que tiene la economía -según estos modelos- de tender a igualar las tasas de beneficios y de salarios; también porque, en todo caso, no hay una única *razón-patrón* que determine la tasa máxima de beneficios, aunque hemos visto que está acotada (19). Sraffa, como casi siempre, no especificó la función que justificaba sus afirmaciones, pero sí dio las explicaciones económicas pertinentes.

14 Se abandona la diferenciación entre productos básicos y no básicos.
15 "Producción de mercancías... ", pág. 90.

La posibilidad del cambio de convexidad - y por tanto del retorno de las técnicas- depende exclusivamente del cambio de las técnicas y no de los períodos de trabajo fechado, cambio de patrón (Sraffa) o de la actualización del valor del capital físico (Pasinetti, Nuti).

Desde que Sraffa planteó el problema en los capítulos de la producción conjunta se ha hecho un esfuerzo por demostrar el error de la teoría del capital en el marginalismo. En efecto, en la teoría marginalista la relación entre la intensidad del capital por hora u hombre trabajada con respecto al tipo de interés es una relación monótona decreciente sin cambio de convexidad. Para la crítica iniciada en el Cambrigde inglés con Robinson, Sraffa, Kaldor, seguido luego por Nuti, Pasinetti, Garegnani, Morishima, etc., se ha demostrado la falsía de esta teoría en lo que respecta a este punto. Y si falla eso, también falla la misma relación respecto a la relación entre la productividad del trabajo de esta misma teoría, porque la frontera salario-ganancia puede ser en algunos tramos no monótona decreciente. Y con ello tampoco se cumple el teorema Euler de reparto del producto en función del valor de las productividades marginales de los factores. Sin embargo, a veces se traslada erróneamente la posibilidad del retorno de las técnicas -que es su consecuencia- achacándolo a lo que no es. Así, en el excelente -por otra parte- libro de Ahijado[16] se dice referido a la función de producción que relaciona salarios-ganancia $\mathbf{L(I-A(1+g))^{-1}w=1}$ "*que es una función polinomial muy compleja, de orden n-1, que es el orden de la matriz* **A**, *y tiene un trazado irregular*". Desde luego nada más gratificante que la derrota de unos los aspectos claves del marginalismo, pero no con falsos argumentos o errores y este lo es. Desde entonces parece que perpetúa el error. Si *la frontera precios/salario-ganancia* es irregular, incluso, como afirmaba antes, no monótona decreciente[17] en algún tramo pero no por lo que dice el autor referido. La función de los precios en la *producción simple con salarios ex-post* es como sigue:

$$(21) \quad p = w(1+g)LY^{-1}\left[I - A(1+g)\right]^{-1} \quad \text{con} \quad A = XY^{-1}$$

que multiplicada por la matriz vertical **I** de unos ***n***x***1***, despejado el salario y tomado **pI** como numerario queda:

$$(22) \quad w = \frac{pI = 1}{(1+g)LY^{-1}\left[I + (1+g)A + (1+g)^2A^2 + \cdots + (1+g)^{n-1}A^{n-1}\right]I}$$

[16] "Distribución, precios de producción y crecimiento", Manuel Ahijado, 1982, edit. Ceura, pág. 53.

[17] Una función es monótona decreciente en el tramo considerado si se cumple que para todo $\mathbf{x}_1<\mathbf{x}_2$ se ocurre que $f(\mathbf{x}_1)<f(\mathbf{x}_2)$; si creciente, con el signo de desigualdad cambiado.

Se ha partido desde el principio de que **A** es productiva, es decir, que se cumple que $\mathbf{A^i}>\mathbf{A^{i+1}}$, además de que la razón-patrón es menor que la tasa de ganancia (**R**<**g**), por lo que está acotada. Con ambas cabe la posibilidad de que la función que hay entre corchetes:

$$S = I + (1+g)A + (1+g)^2 A^2 + \cdots + (1+g)^{n-1} A^{n-1} \qquad (23)$$

sea convergente[18]. Por su parte el teorema de Perrón-Froebenius nos dice que (23) es una función creciente tanto de **g** como de **A**. Es por lo tanto una función contínua por ser suma de funciones contínuas; es también monótona creciente para cualquier valor de **g** (aunque sabemos que está acotada esta tasa). Y si (23) es contínua y convergente, (22) es monótona decreciente, con puntos de corte en el eje de ordenadas tangente en el infinito en el de abscisas. ¿Donde queda entonces la afirmación de Ahijado que el recoge de otros autores? La confusión viene -creo yo- al no distinguir entre movimiento a lo largo de la curva (entre salario-ganancia (**w-g**)) y traslación de esta misma curva. Esta es posible siempre que consideremos los valores de $\mathbf{A^i}$, es decir, de la matriz de requerimientos elevada al exponente temporal correspondiente. En efecto, ante *cualquier variación del exponente podemos considerar que el resultado es un cambio de la técnica*, con variaciones discontínuas si colocáramos las tres variables **g**, **w**, **A** en un espacio tridimensional. Pero aún eso no es suficiente. Para obtener una curva *salario-ganancia* con cambio de convexidad -que es una condición suficiente[19] para el retorno de las técnicas- es necesario partir de la hipótesis económica de que el comportamiento empresarial consista en dejar fija una de las dos variables monetarias -salarios o ganancias- y optimizar alguna función empresarial -ventas, beneficios, etc.-, variando la elección de las técnicas, es decir, **A**. Nuti da en cambio una explicación financiera para el retorno de las técnicas: "*el significado económico de la oscilación es que, en ciertos intervalos de variación de la tasa de interés, una empresa es prestataria en ciertos períodos y prestamista en otros, y gana con un incremento de la tasa de interés como prestamista más de lo que pierde como prestatario, de manera que pueda pagar un mayor nivel de salarios si realiza operaciones de otorgamiento y toma de préstamos con una tasa más elevada de interés*"[20]. Pero la explicación de Nuti va en contra de la igualación de las tasas de ganancia, porque esta hipótesis - la de la igualación- llevaría a igualar los tipos de interés (modalidad de la tasa de ganancia) entre prestamistas y prestatarios. No se puede negar aún así la posibilidad de que un descenso en la tasa de salarios no se corresponda necesariamente con un aumento de la tasa de ganancia. Posibilidad, es decir, todo lo dicho es la condición necesaria, pero lo normal es que no sea suficiente, porque el cambio brusco de la matriz de

[18] Con la posibilidad nos vale en este contexto. No entramos en ver las condiciones de convergencia.

[19] No es necesaria porque hay un caso siempre posible: una recta que nos da la frontera salario-ganancia en la producción simple con salarios ex-ante y una curva que surge bajo otros tipos de supuestos a partir de los salarios ex-post.

[20] "Capitalism, Socialism and Sleady Growth", D. Nuti (1970).

requerimientos puede dar lugar a lo más a cambios de convexidad en la frontera de salarios-ganancias, considerada esta frontera como la envolvente del comportamiento empresarial de optimización dada la tasa de ganancia o de salarios. Sin embargo, esto no será normalmente suficiente para cambiar el signo de la primera[21] derivada *salario-ganancia* y ocurra que sea siempre monótona decreciente esta relación, aunque cambie la convexidad. Sraffa, por su parte, habla de *cambio de patrón* para justificar una línea oscilante entre salarios y ganancias y lo hace por la "*posibilidad de que el precio de un producto pueda descender más deprisa que el salario*". Sraffa nunca dio la ecuación con la que trabajaba.

Para la producción conjunta donde ***m***>***n*** (*srafiana ampliada*) el caso es el mismo, sólo que la ecuación (21) es más complicada por no ser cuadrada la matriz de productos **Y**. El resultado es la ecuación (24).

(24) $$p = Lw(1+G)\times\left[Y - X(1+G)\right]^T \times \left[\left[Y - X(1+G)\right]\times\left[Y - X(1+G)\right]^T\right]^{-1}$$

La conclusión es la de que sin cambio en las técnicas -es decir, variando **Y**, **X** o $\mathbf{A^i}$- no se ve cómo pueda darse los casos de Sraffa y Ahijado que puedan dar lugar a un retorno de las técnicas que hemos discutido. Un cambio de las técnicas *más* el tipo de comportamiento empresarial que hemos visto podría dar lugar a una frontera salario-ganancia con retorno de las técnicas, lo que supondría no sólo un cambio de convexidad en la frontera salario-ganancia, sino un cambio en el signo de la primera derivada de la función que une las dos variables. Sin ello, por más complicada que sea la ecuación característica -que no lo es- que menciona Ahijado, no por eso deja de ser continua y creciente (21). También puede estar el error de los autores al considerar a $\mathbf{L(I-A(1+g))^{-1}w=1}$ como un polinomio que hay que resolver de forma tradicional[22], calculando los ceros (valores de la función que se obtienen al hacer cero la tasa de ganancia). No es cierto. Lo que se hace es calcular los autovalores de forma tradicional y elegir el único autovalor que cumpla el teorema de Perrón-Froebenius (P-F). No hay polinomio característico[23] de ***n*** ceros, sino un sólo cero: el autovalor de P-F elegido, es decir, el autovalor más alto en términos absolutos, que sea real y no repetido. No hay, por tanto, una ecuación algebraica cuyas ***n*** soluciones haya que utilizar en (21), sino un único valor. Y por más que variemos **g** para cada **A** dado, sólo tenemos un **w** bajo una relación monótona decreciente.

[21] Lo cambiará en todo caso será el signo de la segunda derivada.
[22] Como nos dice Ahijado.
[23] Otra cosa es que para calcular todos los autovalores se tenga que calcular el determinante $|\lambda - A| = 0$ de dimensiones **n**x**n**. Aquí si hay un polinomio característico n-dimensional. Pero esto es previo; luego sólo se toma un autovalor: el P-F.

Retorno de las técnicas sin cambio de convexidad

Ante las dificultades de construir una *función salarios-beneficios* con cambio de convexidad a pesar del cambio de la tecnología (cambios en la matriz **A** de requerimientos más los inputs de trabajo), vamos a presentar cómo se puede construir una función con retorno de las técnicas convexa en todo su recorrido. Para ello podemos utilizar la ecuación (22) de producción simple sraffiana o la (24) de producción conjunta con ***m***>***n*** (no srafiana). Utilizamos la (22) en un primer momento. Para ello partimos ecuaciones tipo (22) como las que siguen:

$$w(A_1,L_1,Y_1)=\frac{pI=1}{(1+g)L_1Y_1^{-1}\left[I+(1+g)A_1+(1+g)^2A_1^{\,2}+\cdots+(1+g)^{n-1}A_1^{\,n-1}\right]I} \tag{25}$$

$$w(A_2,L_2,Y_2)=\frac{pI=1}{(1+g)L_2Y_2^{-1}\left[I+(1+g)A_2+(1+g)^2A_2^{\,2}+\cdots+(1+g)^{n-1}A_2^{\,n-1}\right]I} \tag{26}$$

Ambas ecuaciones se diferencian en las matrices de requerimientos **A** y en los inputs de trabajo (L). Ambas ecuaciones cortan en el eje de ordenadas (vertical) para **g=0**, pero en puntos diferentes (salvo que se diera $A_1=A_2$, $L_1=L_2$ y $Y_1=Y_2$) **-** lo cual es esencial para lo que sigue**-** y descienden a medida que aumenta la tasa de ganancia de forma continua porque el denominador es una función suma de funciones continuas siempre crecientes (la inversa, por tanto, es decreciente). Pues bien, siempre podremos elegir valores de $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$, $\mathbf{Y}_1$ y $\mathbf{Y}_2$ tales que se cumpla que:

			puntos de cambio	*envolvente*
para	$g=0$	se de	$w(A_2,L_2,Y_2) < w(A_1,L_1,Y_1)$	$w(A_1,L_1,Y_1)$
para	$0<g<g_1$	se de	$w(A_2,L_2,Y_2) < w(A_1,L_1,Y_1)$	$w(A_1,L_1,Y_1)$
para	$g_1<g<g_2$	se de	$w(A_1,L_1,Y_1) < w(A_2,L_2,Y_2)$	$w(A_2,L_2,Y_2)$
para	$g_2<g<g_3$	se de	$w(A_2,L_2,Y_2) < w(A_1,L_1,Y_1)$	$w(A_1,L_1,Y_1)$

y que ambas curvas se corten en los puntos $\mathbf{g}_1$ y $\mathbf{g}_2$. La función estaría definida por la curva quebrada *envolvente*, que es continua a lo largo de todo ella, derivable -salvo en los puntos de corte $\mathbf{g}_1$ y $\mathbf{g}_2$- y convexa siempre. No hay pues cambio de convexidad y si retorno de las técnicas. Para su construcción es necesaria el concurso de los empresarios, que tienen a disposición los dos posibles procesos implicados en las curvas (25) y (26) y que maximicen las ganancias, cambiando la técnica de producción en los puntos $\mathbf{g}_1$ y $\mathbf{g}_2$, para pasar de la ecuación (25) a la (26) en $\mathbf{g}_1$ y retornar a la (25) de nuevo en $\mathbf{g}_2$.

Si en lugar de (22) hubiéramos empleado (24), las conclusiones hubieran sido parecidas, salvo que los movimientos en el cambio de las técnicas serían más bruscas, con posible aparición de precios negativos, pero en ningún caso, y dado que hemos hecho **pI** = numerario, la suma de todos ellos sería positivo y la función siempre decreciente. En ningún caso cambiaría la convexidad quebrada de la curva *envolvente*.

<u>Bibliografía</u>

Afriat, S.; “Sraffa´s Prices”, Universitá degli Studi di Siena, quaderni 474, www.econ-pol.unisi.it/quaderni/474.pdf

Ahijado, M.; “Distribucción, precios de producción y crecimiento”, 1982, Centro de Estudios Universitarios Ramón Areces.

Caballero, A. y Lluch, E. (1986); “Sraffa en España”, Investigaciones Económicas (2ª época, vol. X, n.º 2)

Dobb, M.; “Teoría del valor y de la distribución desde Adam Smith, edit. Siglo XXI editores.

Dobb, M.; “The Sraffa system and the critique of neoclassical theory of distribution”, 1970

Estrin, S. y Laidler, D; “Introduction microeconomics”.

Fiorito, Alejandro; “La implosión de la economía neoclásica”. Está en la red: www.geocities.com/aportexxi/sraffa12.pdf

Foncerrada, Luis Antonio; “Sraffa y Böhm-Bawerk”. Está en la red: http://www.economia.unam.mx/secss/docs/tesisfe/FoncerradaPLA/tesis.pdf

Gehrke, Ch.y Kurz, D.; “Sraffa on von Bortkiewicz”. Está en la red: http://www.newschool.edu/cepa/events/papers/050509_Bortkiewicz.pdf

Harcourt, G.C.; “Teoría del capital” (*Some Cambridge controversies in the theory of capital, 1975*), apéndice al cap. 4, 1975, edit. Oikos-tau.

Heahtfield, D. F.; “Productions funtions”.

Marx, Carlos; “El método en la Economía Política”, 1974, Ediciones Grijalbo, S.A.

Marx, Carlos; “El Capital”, en el FCE, traducción de Wenceslao Roces.

Meade, J.; “A neo Classical Theory of Economic Growth”, 1961.

Meek, R.; “Mr. Sraffa´s Rehabilitationof Classical Economics”, 1961

Morhisima, M.; “La teoría económica de Marx” (*Marx´s Economics, 1973*), 1977, pág. 15, edit. Tecnos.

Moseley, F.; “El método lógico y el problema de la transformación”, http://www.azc.uam.mx/publicaciones/etp/num7/a8.htm

Murga, Gustavo; “Piero Sraffa” http://marxismo.cl/portal/index.php?option=com_content&task=view&id=100&Itemid=1

Nuti, D.; “Capitalism, Socialism and sleady growth”, 1970

Okishio, N.; “A mathematical note on marxian theorems”. 1963

Fiorito, Alejandro; “La implosión de la economía neoclásica”. Está en la red: www.geocities.com/aportexxi/sraffa12.pdf

Pasinetti. L.; “Critical of the neoclassical theory of growth and distribution”. Está en la red: http://www.unicatt.it/docenti/pasinetti/pdf_files/Treccani.pdf

Pasinetti, L.; “Structural Change and Economic Growth: a theoretical essay on the dynamics of Wealth of Nations”, 1981, Cambridge University Press.

Pasinetti, L.; “Rate of profit and income distribution in relation to the rate of economic growth”, 1961/2.

Pasinetti, L.; “Switches of technique and the rate of return in Capital Theory”, (1969)

Pasinett, L.; “Crecimiento económico y distribucción de la renta” (“*Growth and Income Distribution*”, 1974), 1978, Alianza Editorial.

Peris i Ferrando, J.E: “Análisis de la resolubilidad de modelos lineales de producción conjunta”, 1987, en internet: http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/3829/1/Peris%20Ferrando,%20Josep.pdf

Potier, J.P.; “Piero Sraffa”, 1994, edicions Alfons Magnànim.

Ricardo, D.; “Principios de Economía Política y Tributación” (*On the Principles of Political Economy and Taxation,*), 1973, F.C.E.

Robinson, J.; “Ensayos críticos”, 1984, Ediciones Orbis.

Samuelson, Paul; “Understanding the Marxian notion of Exploitation”, 1971

Sargent, T.J.; “Teoría macroeconómica” (*Macroeconomic Theory, 1979*), 1988, Antoni Bosch editor.

Schumpeter, J. A.; “Historia del Análisis Económico” (*History of Economic Analisis*, 1954), 1971, Ediciones Ariel.

Segura, J.; “Análisis microeconómico”, pág. 88, 2004, Alianza editorial Tecnos.

Steedman, I.; “Marx, Sraffa y el problema de la transformación” (*Marx after Sraffa, 1977*), 1985, F.C.E.

Sraffa, Piero; “Producción de mercancías por medio de mercancías” (*Production of commodities by means commodities, 1960*), 1975;

Fiorito, Alejandro; “La implosión de la economía neoclásica”. Está en la red: www.geocities.com/aportexxi/sraffa12.pdf

Schumpeter, J. A.; “Historia del Análisis Económico” (*History of Economic Analisis*, 1954), 1971, Ediciones Ariel.

Segura, J.; “Análisis microeconómico”, pág. 88, 2004, Alianza editorial Tecnos.

Solow, R.; “The interest rate and transition between techniques”, 1967

Sraffa, Piero; “Producción de mercancías por medio de mercancías” (*Production of commodities by means commodities, 1960*), 1975;

Ricardo, D.; “Principios de Economía Política y Tributación” (*On the Principles of Political Economy and Taxation,*), 1973, F.C.E.

Vegara, J. M.; “Economía política y modelos multisectoriales”,1979, edit. Tecnos.

AMP, Madrid 29 de noviembre de 2009