

NOTAS SOBRE EL TEOREMA FUNDAMENTAL MARXIANO
Somes notes about fundamental marxian theorem
(como continuación de “Aspectos de la economía de Sraffa”)
(as following of “Aspectos de la economía de Sraffa”)

Antonio Mora Plaza

Abstract:

These notes are a following writing of my paper on Piero Sraffa and his book “Production commodities by means commodities”. I try to amplify one aspect of my article “Aspectos de la economía de Sraffa”, with in an special treatment of Okishio´s theorem about marxian exploitation theory.

Keywords: Sraffa, Marx, marxian theorem, exploitation theory

Resumen:

Estas notas son continuación de mi artículo sobre Piero Sraffa y su obra “Producción de mercancías por medio de mercancías”. Con esto intento desarrollar un aspecto del artículo de entonces “Aspectos de la economía de Sraffa”; en especial el teorema de Okishio sobre las condiciones de la existencia de explotación.

Palabras clave: Sraffa, Marx, teorema marxiano, teoría de la explotación.

JEL: B24

NOTAS SOBRE EL TEOREMA FUNDAMENTAL MARXIANO

(como continuación de “Aspectos de la economía de Sraffa”¹)

Antonio Mora Plaza

Estas notas son un añadido del artículo que escribí en el 2007 con el título de “Aspectos de la economía de Sraffa”, a partir, a su vez, del libro del economista italiano “Producción de mercancías por medio de mercancías”. En aquellas notas se corroboraba el teorema fundamental marxiano que dice según Morishima y que recoge de Okishio² que *“para que exista un conjunto de precios y un tipo de salarios reales capaz de producir beneficios positivos –en otras palabras, para que pueda mantenerse una sociedad capitalista- es necesario y suficiente que los capitalistas exploten a los trabajadores”*³. Todos los caminos llevan a Roma porque yo me he apartado –al menos en los aspectos formales- del libro de Morishima, dado que el economista afincado en Cambridge, además de otras diferencias, hace explícita la cesta de la compra de los trabajadores directos –los que generan la plusvalía- y yo no lo hago. Como se verá aquí, se trata de aunar los descubrimientos de Sraffa y aplicarlo al corazón de la teoría de Marx que es la teoría de la explotación, sin la cual nada de lo escrito por el germano tendría sentido⁴. Recojo aquí también las palabras de David Vegara⁵: *“... en el modo de producción capitalista los trabajadores, para obtener mediante su salario una unidad de mercancía, deben vender su capacidad de trabajo durante más tiempo que el preciso -directa o indirectamente- para obtener una unidad de la mercancía indicada”*.

A) Teorema fundamental marxiano con producción simple

Sin más preámbulo pasamos a explicar las ecuaciones que van a caracterizar el modelo, donde se parte de Marx, pero se utiliza a Sraffa –y por extensión a Ricardo- instrumentalmente. La primera ecuación es la que define el sistema económico:

$$(1) \quad pY = [Lw + pX](I + g)$$

¹ Doy el enlace de la publicación del artículo en la revista “Nómadas”, de la Universidad Complutense de Madrid: (<http://www.ucm.es/info/nomadas/23/antoniomora.pdf>)

² “A mathematical note on marxian theorems”, 1963. Okishio lo relacionó con el cambio de técnicas, pero aquí lo obviamos tal y como hace Morishima.

³ “La teoría económica de Marx”, 1977 (Marx’s Economics, 1973), M. Morishima.

⁴ Ahí aúna los aspectos económicos, sociológicos e históricos de la lucha de clase. A partir de ahí, es decir, a partir de las diversas formas históricas de la apropiación del excedente es como articula Marx su gigantesca obra.

⁵ “Economía Política y Modelos Multisectoriales”, 1979, pág. 56.

$$(3) \quad \theta_i = \frac{C_i}{V_i} \rightarrow \begin{matrix} L & w & \theta & = & P & X \\ 1 \times n & n \times n & n \times n & & 1 \times n & n \times n \end{matrix}$$

De Sraffa traemos la cuarta ecuación. En concreto su razón patrón “ R ”, que siempre se cumple, sean cuales sean los supuestos sobre pagos de salarios –ex ante o ex post-, tasas de explotación o composiciones orgánicas, porque la razón-patrón es el cociente del producto neto y los medios de producción en términos físicos –por tipo de mercancías- en un sistema reducido de la economía; además, y esta es su virtud esencial, es independiente de los precios.

$$(4) \quad pY = (1 + R)pX$$

De este conjunto de ecuaciones tenemos $5n+1$ incógnitas ($1 R + n$ precios + n salarios + n tipos de ganancias + n composiciones orgánicas + n tasas de explotación) y $4n$ ecuaciones que salen de (1), (2), (3) y (4). Ello nos da $n+1$ grados de libertad y, por tanto, a 2 juegos de ecuaciones con n grados de libertad cada una, como ahora veremos. Aquí no es necesario hacer ningún supuesto sobre el numerario tal y como hace Sraffa; no obstante, si lo necesitáramos, lo haríamos, y lo haremos -como luego se verá- cuando cambiemos las hipótesis de partida. En otro contexto de análisis de equilibrio general walrasiano o, en general, marginalista, estos grados de libertad, es decir, este exceso de variables respecto al de ecuaciones sería un desastre; bajo la filosofía sraffiana no ocurre tal porque no hay ninguna pretensión en el economista italiano en buscar puntos de equilibrio ni precios de equilibrio, ni cosas por el estilo, como si la economía fuera un circo. Para él la realidad está en desequilibrio y en permanente dinamismo, y eso lo refleja la libertad que da estos modelos donde la economía impone límites, pero la sociedad, en sus egoísmos –la lucha de clases en Marx-, es la que fija las variables que quedan libres⁹. Lo de la lucha de clase no lo menciona Sraffa pero cabe en su modelo, lo mismo que cabe momentos de la historia más sosegados. En (4) no se ha especificado el tamaño de los vectores porque ya se ha hecho en (1). Pues bien, de este conjunto de ecuaciones obtenemos la notable:

$$(5) \quad RLw\theta = Lw + Lwe \qquad f(R, L, w, \theta, e) = 0$$

los costes depende de incluir o no los salarios en los costes desde donde luego opera la tasa de ganancia, independientemente de en qué momento se paguen los salarios: es un problema de criterio y no de oportunidad. Eso sí, ese diferimiento se debería homogeneizar con un tipo de interés monetario, que aquí está fuera de lugar por el nivel de abstracción con el que se opera.

⁹ Para una visión (survey) general crítica de la teoría de la distribución véase: “Critical of the neoclassical theory of growth and distribution”, por L. Pasinetti. Está en la red: http://www.unicatt.it/docenti/pasinetti/pdf_files/Treccani.pdf

Y de aquí se sale que $Lwe = Lw(R\theta - I)$, por lo que se deduce que para que la tasa de explotación en el sector “ i ” sea positiva ($e > 0$) ha de cumplirse que:

(6) $\theta_i > 1/R$ para todo “ i ” desde $i=1$ a n , es decir, en todos los sectores de la economía ha de ocurrir que la composición orgánica marxiana del capital sea mayor que la inversa de la razón-patrón sraffiana. Lo notable de la ecuación (5) no son las variables que aparecen sino la que no aparece: la tasa de ganancia. ¿Será acaso que las tasas de explotación de cada uno de los sectores no dependen de la tasa de ganancia y no se cumpliría entonces el teorema fundamental marxiano? No hay tal, porque del conjunto de las 4 primeras ecuaciones también se obtiene la no menos notable:

$$(7) \quad Lwe = Lwg + Lw\theta g \qquad f(L, w, e, \theta, g) = 0$$

Y de aquí sí se puede extraer la condición necesaria y suficiente de que para que exista una tasa de explotación positiva ha de haber una tasa de ganancia positiva (y viceversa). Lo que no aparece aquí es la razón-patrón de Sraffa, porque la relación entre tasa de explotación y tasa de ganancia no necesita el concurso del italiano. No obstante, en realidad no se han hecho muchos avances conceptualmente –tan sólo formalmente- porque ya partíamos en la ecuación (2) de que las tasas de explotación dependían de las tasas de ganancia. Pero algo podemos añadir, porque de (7) se deduce que el teorema fundamental marxiano se cumple, independientemente de los precios, composiciones orgánicas, salarios y horas de trabajo: esto no podíamos aseverarlo en (2) antes de resolver el sistema de ecuaciones. La conclusión de (6) y (7) es la siguiente: *en este sistema económico generalizado¹⁰ representado por las ecuaciones anteriores se produce explotación en cada uno de los sectores si existen ganancias en cada uno de los sectores respectivos también y si las composiciones orgánicas de capital de aquellos son todas mayores que la inversa de la razón-patrón de Sraffa.*

La segunda condición implica también que a medida que se desarrollan las fuerzas productivas aumentan las posibilidades de explotación, es decir, de que las diferentes composiciones orgánicas de cada uno de los sectores sean mayores que la inversa de la razón-patrón $\theta > 1/R$. Usando conceptos de Marx, la explotación aumenta a medida que aumenta el trabajo muerto (capital constante) sobre el capital vivo (capital variable). La aportación de Sraffa es que pone el límite mínimo para la explotación; también el máximo, porque la razón patrón es el máximo de la tasa de ganancia. Veamos que surge de ambos límites. Si $\theta > 1/R$ y además $R > G$, de ambos se obtiene:

¹⁰ Aún se puede generalizar de otra forma, como luego veremos.

$$\sqrt{G/\theta} < R$$

Es decir, que para *exista una tasa de explotación positiva y la economía sea viable (productiva)*, la raíz cuadrada que surge de dividir la tasa de ganancia entre la composición orgánica de capital no ha de superar la razón-patrón sraffiana; y todo ello, sean cuales sean los precios de producción, los medios de producción empleados y los productos obtenidos: curioso.

También es notable (6) porque podemos comparar las composiciones orgánicas de capital marxianas -que vienen medidas en términos de valor- con la razón-patrón de Sraffa que carece de dimensión al ser un cociente entre productos netos de bienes físicos y medios de producción, también en términos físicos. La razón-patrón de Sraffa permite arreglar el desajuste de Marx con la transformación de valores a precios sin necesidad de hacerla explícita¹¹. En realidad, este fue el gran objetivo de Sraffa: dejar a Böhm-Bawerq y al marginalismo y su función de capital y su teoría de la distribución en el rincón de la historia¹²: intelectualmente lo consiguió, históricamente aún se está en ello, porque sin función de producción los marginalistas no pueden justificar su renta, y esto si es revolucionario en el seno de la teoría.

Veamos ahora el caso especial de igualdad de composiciones orgánicas de capital. Este supuesto hay que abandonarlo por carecer de realismo, pero como curiosidad histórica lo retomamos. Si estas composiciones orgánicas son iguales, la ecuación (5) queda:

$$(8) \quad e L w = L w \left[R \theta - I_d \right]$$

donde I_d es el vector diagonal de unos.

De (8) se deduce que para que *exista explotación*, la condición suficiente queda ahora como que $\theta > 1/R$, es decir, que la composición orgánica de capital -ya igual en todos los sectores- ha de ser mayor que la inversa de la razón-patrón sraffiana.

Vamos ahora a modificar la ecuación (2) del sistema de ecuaciones original y haremos el supuesto de que existe una sola tasa de explotación global que es el cociente entre la suma de las plusvalías de toda la economía y el capital total variable. Aquí nos apartamos un tanto de Marx, pero sin abandonar su espíritu sobre la concepción de la plusvalía, el surplus, como

¹¹ Obviando todas las críticas al respecto. Por esta razón comenzó Sraffa su obra "Producción de mercancías..." por los precios directamente y no verse así empantanado con el problema de la transformación, y sin que el fantasma de Böhm-Bawerq y los suyos le persiguieran en sueños con las cadenas del marginalismo.

¹² Véase: "Sraffa on von Bortkiewicz", por Ch. Gehrke y D. Kurz. Está en la red: http://www.newschool.edu/cepa/events/papers/050509_Bortkiewicz.pdf

derivado del trabajo directo y su apropiación por los dueños de los medios de producción. Veamos ahora como queda la ecuación (2) si hacemos: $e_g = \frac{\sum S_i}{\sum V_i}$

para todo “ i ” desde $i = 1$ a n . Ello supone dar 2 pasos más allá de donde dejó Marx la teoría de la explotación. Ya habíamos abandonado la explotación en el seno de la empresa para pasar a las diversas tasas de explotación según sectores: ahora abandonamos cada sector para ir a una teoría de la *explotación global*, donde lo que cuenta es que en el conjunto de la economía los trabajadores directos trabajen más horas que las trabajadas en los bienes y servicios (mercaderías en Sraffa, mercancías en Marx) que consumen ellos y sus familias. Con este supuesto se justifica la siguiente ecuación:

$$(9) \quad e_g L w I = [L w + p X] g I \quad \text{donde “} I \text{” es el vector vertical de unos.}$$

Con esta ecuación y el resto de las 4 primeras¹³ queda la siguiente:

$$(10) \quad e_g = \frac{RLw\theta I - Lw I}{Lw I}$$

De la anterior se deduce que para que la tasa de explotación “ e_g ” sea positiva ha de ocurrir que:

$$(11) \quad L w \theta - \frac{1}{R} L w > 0$$

Es decir, que la *condición suficiente para que exista una tasa de explotación global positiva es la de que la suma de las composiciones orgánicas de capital ponderadas por la masa de salarios “ Lw ” supere a esta misma masa multiplicada por la inversa de la razón patrón:*

$$(12) \quad \sum_{i=1}^n l_i w_i \theta_i > \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n l_i w_i \quad f(L, w, \theta, R) = 0$$

Esta vez –a diferencia de (8)- no es necesario que todas las composiciones orgánicas de capital de los diversos anteriores supere a inversa de la razón-patrón, pero sí al menos ha de ocurrir para algún k , es decir que: $\theta_k > 1/R$

Hasta ahora hemos sido un tanto infiel a Sraffa porque no hemos aplicado ningún numerario al sistema de ecuaciones tal y como hace el economista italiano en toda su obra de “Producción de mercancías por medio de mercancías”. La razón es la de que no era necesario porque empleábamos

¹³ Las ecuaciones (1), (3) y (4)

tasas de ganancias y de explotación distintas para cada sector. Hacemos ahora ese supuesto sobre el numerario con la ecuación que sigue:

$$(13) \quad pYI - pXI = 1$$

Y con esta y las 4 primeras –sustituida la (2) por la (9)- obtenemos:

$$(14) \quad e_G = \frac{1 - L w I}{L w I} \quad \text{donde} \quad \frac{d e_G}{d w} < 0 \quad f(e_G, L, w) = 0$$

y donde se refleja la relación inversa entre el salario y la tasa de explotación global. En la obra de Morishima citada llega el autor a una ecuación similar, donde el numerador es el trabajo no retribuido y el denominador es el retribuido¹⁴. Ésta es, en cambio, de significado más amplio por tres motivos: 1) porque la tasa de explotación no depende de la prolongación o no de la jornada de trabajo dado que los inputs de trabajo son un dato; 2) porque no se necesita recurrir a los valores-trabajo para obtener las mismas conclusiones; 3) porque no es necesario especificar la matriz de *los bienes-salario* de los trabajadores directos. Es notable no sólo de lo que depende la tasa de explotación sino de lo que no depende: ni de las tasas de ganancia, ni de las composiciones orgánicas, además tampoco de las habituales de precios, bienes-salarios comentados, medios de producción (inputs), productos finales (outputs), horas de trabajo.

Similar a la (14) es la que sale de sustituir el producto neto (que vale I en la (14) debido al numerario de la (13)):

$$(15) \quad e_G = \frac{R L w \theta I - L w I}{L w I}$$

de la que se vuelven a obtener las conclusiones de la (11), pero con un añadido: si en esta última ecuación hacemos el supuesto de Marx de igualdad de composiciones orgánicas en las distintas ramas de producción, es decir, si hacemos que:

$\theta_u = \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n$ queda de (15) la notable fórmula:

$$(16) \quad e_G = \theta_u R - 1 \quad \rightarrow \quad 1 + e_G = \theta_u R \quad f(e_G, \theta, R) = 0$$

Y aquí se repite la historia: la condición suficiente para que exista una tasa de explotación positiva es la de que la composición orgánica de capital de

¹⁴ “La teoría económica de Marx”, pag. 61

cualquier sector –en este caso todos tienen la misma composición orgánica- es que ésta última sea mayor que la inversa de la razón-patrón de Sraffa. En este caso especial -que es una curiosidad histórica por falta de realismo- puede comprobarse la eficacia de la razón-patrón relacionando exclusivamente dos constantes o invariantes como son la razón-patrón y la composición orgánica -si se mide en términos de valor- y una variable que, en este contexto, no depende ni de la jornada de trabajo, ni de la matriz de requerimientos o de medios de producción, ni de los salarios, y tampoco de los beneficios. La razón-patrón de Sraffa y Perrón-Frobenius arreglan los desaguizados de Marx con la transformación de valores a precios y las angustias de Ricardo por encontrar una mercancía que sirviera de numerario (cuyo requisito para este menester es que fuera invariante a los precios). Y estos sí que son avances intelectuales en el campo del conocimiento y no mera ideología o historia de doctrinas.

Para acabar esta sección no me resisto a comparar la ecuación (16) con la ecuación que Morishima llama de *Morishima-Seton*¹⁵: $g = eV / (C + V)$, donde e y g son tasas de explotación y ganancias únicas, y V y C son los capitales constante y variable de Marx, como cabía esperar. De ambas obtenemos por eliminación de la tasa de explotación y equiparando el cociente V/C en términos de valor a nuestra composición orgánica de capital en términos de precio que aparece en (16), se llega a la ecuación: $\theta = (1 + g) / (R - g)$, donde si hacemos la tasa de ganancia cero en correspondencia de que haya hecho cero también la tasa de explotación en la ecuación anterior queda $\theta = (1 / R)$, que es el caso límite que hemos deducido de (12) en nuestro sistema para algún k . Más tarde volverá a aparecer esta relación entre la composición orgánica marxiana y la razón-patrón sraffiana, aunque siempre con signo de desigualdad estricta y de forma generalizada. En cierto medida indica que ambos conceptos son redundantes o, al menos, equivalentes, cada uno en su sistema, y que podemos pasar de uno a otro a través del espejo de Alicia de precio/valor.

B) Teorema fundamental marxiano con producción conjunta

Dedica Sraffa los capítulos VII, VIII y IX de su libro a la producción conjunta, es decir, cuando en cada sector en que dividimos al sistema económico puede producir más de un bien final con los medios iniciales. Con ello ganamos realismo, pero las complicaciones formales se multiplican cuando pasamos de la producción simple -un sector, un producto- por varios motivos: 1) al tener más -o menos- productos que sectores ya no tenemos una matriz de coeficientes A que aún cuando ha estado implícita, la necesitábamos para aplicar el teorema Perrón-Frobenius. En efecto, este teorema nos

¹⁵ “La teoría económica de Marx”, pág. 80.

asegura al menos un autovalor positivo en la ecuación matricial $AX = \lambda X$ y un conjunto de precios positivos si la matriz A es productiva e indescomponible¹⁶. Aquí no vamos a poder aplicar este teorema porque la matriz A de requerimientos -y en su defecto la Y de productos finales y X de medios- no son matrices cuadradas (salvo por casualidad); 2) la segunda dificultad es la construcción de la razón-patrón y la mercancía-patrón. Por lo mencionado en el punto anterior, no tenemos un sistema de ecuaciones simultáneo del tipo $\mu Yq = Xq$ más el numerario de los inputs del trabajo de Sraffa $Lq = 1$ que sea resoluble, porque ahora puede haber más filas que columnas -o al revés- tanto en Y como en X . Eso nos impide construir una mercancía-patrón y una razón-patrón determinada por algún tipo de algoritmo o mecanismo matemático que surja de la resolución de un sistema de ecuaciones (como era Perrón-Froebenius), pero podemos elegir -como hace Sraffa¹⁷- de entre todos los R “al mínimo valor posible” de todas las razones-patrones posibles, es decir, compatible con el sistema de ecuaciones que definen la razón-patrón; 3) si siguiéramos estrictamente a Sraffa en su libro de “Producción de...” deberíamos diferenciar entre productos básicos y no básicos, con lo cual de la matriz posible de requerimientos ni siquiera podríamos asegurar que es indescomponible¹⁸. Sraffa no lo menciona explícitamente de esta forma porque su intención es sólo analizar las hipótesis económicas y sus consecuencias de su sistema y distraer lo menos posible la atención sobre los aspectos formales. Para el tema que nos ocupa cual es relajar en lo posible las condiciones de aplicación del teorema fundamental marxiano no seguimos a Sraffa en la distinción de bienes básicos y no básicos. Quizá en otro momento.

Consideramos como siempre para empezar la ecuación que define el modelo económico, en este caso, de producción conjunta:

$$(17) \quad p Y = \begin{bmatrix} L & w + p M & X \\ 1_{xp} & p_{xm} & 1_{xp} \quad p_{xn} \quad nxm \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 + g \\ m_{xm} \end{pmatrix}$$

Aquí p son en Y las filas de productos finales y m los sectores, mientras que n son las mercancías -en terminología sraffiana- que sirven como medios de producción. La matriz M es la novedad de este modelo y sería *la matriz de requerimientos de bienes finales en términos de medios de producción* (p_{xn}) sin tener en cuenta los sectores donde se producen, puesto que lo que importa es relacionar ambos tipos de productos -finales e iniciales- para obtener junto con X los bienes finales por sector (nxm). Matemáticamente M es una aplicación lineal que transforma la matriz X en otra con las mismas filas y

¹⁶ Pueden verse en los libros de D. Vegara y I. Steedman mencionados en la bibliografía.

¹⁷ “Producción de...” , pág. 79.

¹⁸ Es digno de lectura atenta el capítulo VIII del libro de Sraffa que titula “El sistema patrón con productos conjuntos”

columnas que Y . Ahora Y ya no es diagonal, pero sí lo es g , porque las ganancias se atribuyen por sectores y no por tipos de mercancías (no estamos en contabilidad de costes), ni por empresas. En cambio, la matriz de salarios sí podría llegar a ser un problema. Tal como está debería haber $p \times m$ salarios, según sectores y productos finales. Esto carece de sentido económico, pero si hacemos que todos los elementos de cada columna sean iguales para que sólo haya diferentes tipos de salario por cada sector, no hay que olvidar entonces que tenemos una matriz de rango sólo $p \times m$ o $m \times p$. Para lo que sigue no hay problema matemático, porque no vamos a descomponer la matriz en submatrices ni hallar sus inversas.

La siguiente ecuación es, como siempre, la resultante de hacer cero los salarios en la ecuación anterior:

$$(18) \quad pY = (1+R)pMX$$

Ya se ha señalado que R , que de indica el máximo tipo de ganancia posibles, ya no se corresponde de una manera unívoca con una única razón-patrón posible, sino sólo con la menor de todas las posibles. Es sólo un problema de cálculo, pero su función económica dual sigue intacta: representa a la vez la máxima ganancia y la razón-patrón como cociente entre el producto neto y los medios empleados en cada sector (igual para todos los sectores). De no elegir la menor R de las posibles, esta razón no representaría el máximo tipo de ganancia posible¹⁹.

$$(19) \quad e_G = \frac{\sum_{i=1}^{i=m} S_i}{\sum_{i=1}^{i=m} V_i} \rightarrow e_G Lw = [Lw + pMX] g$$

La ecuación (20) es simplemente el numerario que emplea Sraffa en su obra para la producción simple, aplicado aquí para la conjunta.

$$(20) \quad pYI - pMXI = 1$$

Pues bien, del conjunto de ecuaciones (17), (18), (19) y (20) se obtiene mediante sustituciones y algo de paciencia la (21), que representa la tasa de explotación (global) en función de la masa de salarios (" LwI ").

$$(21) \quad e_G = \frac{1 - LwI}{LwI}$$

¹⁹ Sraffa, cap. VIII, epígrafe 64 de "*Producción de ...*"

Sólo señalar -como cabía esperar- que hay una relación inversa entre los salarios w y la tasa de explotación (global) e_G en un sistema económico capitalista caracterizado por estas 4 ecuaciones. Pero hay algo más, porque el numerador de (21) puede interpretarse con el valor de los bienes no salariales en moneda corriente o, dicho en términos de valor, como la plusvalía absoluta; el denominador es precisamente el valor corriente de los bienes-salario, es decir, los bienes y servicios (mercancías en términos marxianos) que consume el trabajador directo. La ecuación (21) es análoga a la que llega Morishima²⁰, pero aquí se ha generalizado lo máximo posible: 1) aquí no se han distinguido dos sectores, uno de bienes-salario que sólo consumen los trabajadores y otro de bienes de capital; 2) se ha partido de una tasa de explotación global (ecuación (19)), es decir, no se ha requerido que las tasas de explotación sean iguales para todos los sectores por muy marxiana que sea esa hipótesis; 3) aquí se ha generalizado para la producción conjunta y no sólo la simple.

La ecuación (23) surge igualmente de las ecuaciones (17), (18), (19) y (20) con igualación de cuotas de ganancia en todos los sectores. Con esta ecuación se demuestra el teorema fundamental marxiano para la producción conjunta: *la condición suficiente para que exista una tasa de ganancia positiva (única por sector) en un sistema capitalista caracterizado por las ecuaciones mencionadas es la de que se de una tasa de explotación (global) positiva.*

$$(23) \quad g_u = \frac{e_G R}{1 + e_G + R} \quad f(g_u, e_G, R) = 0$$

Steedman llega formalmente a idéntica ecuación²¹, pero por otros caminos. En primer lugar lo hace por la vereda de los valores-trabajo siguiendo a Marx y para discutir la ley marxiana de la caída (a largo plazo) de la tasa de ganancia; y en segundo lugar lo hace para producción simple y utilizar Perrón-Froebenius para poder igualar la tasa de explotación con una solución de precios no negativos y de la razón-patrón a partir de la matriz A de *requerimiento*²²s. Lo notable de (23) o (24) -es la misma fórmula- es que hemos partido de la producción conjunta; tampoco hemos empleado Perrón-Froebenius para encontrar el autovalor positivo que nos garantice una solución de precios estrictamente positivos, y, sin embargo, las posibles conclusiones sobre la ley decreciente de la tasa de ganancia o el teorema fundamental marxiano tienen la máxima generalidad posible. Quizá su mayor limitación y única -y que es inevitable- sea precisamente la hipótesis de la igualdad de tasas de ganancia para todos los sectores.

²⁰ “La teoría económica de Marx” (“Marx’s economics”), Tecnos, cap. 6 sobre la cuota de ganancia, pág. 69 y siguientes.

²¹ “Marx, Sraffa y el problema de la transformación”, edit. FCE, pág. 122

²² Para la ecuación $Y=AX$.

Pero no ha acabado la cosa aquí, porque la ecuación (24) deja explícito la condición necesaria para que se cumpla el teorema fundamental marxiano, cosa que no se percibe bajo las hipótesis de Steedman y Morishima: *que la condición necesaria es que la tasa máxima de beneficios (y a la vez razón-patrón sraffiana) sea mayor que la tasa de ganancia* $R > g_u$. En realidad todo lo anterior ha sido una preparación para llegar a este punto. Lo notable es que la razón-patrón media y concreta tres aspectos colaterales al teorema fundamental: 1) que a medida que la diferencia entre la razón-patrón y la tasa de ganancia disminuye aumenta la tasa de explotación, es decir, a medida que los dueños de los medios de producción se apropian del excedente es a costa de una mayor diferencia entre los bienes-salarios consumidos por los trabajadores y el conjunto de los bienes producidos por estos (se mida como se mida, que eso es otro problema y en todo caso secundario por más que Böhm-Baverg nos distraiga la atención con el problema de la transformación); 2) que el aumento de la tasa de explotación se produce por el efecto del aumento la tasa de ganancia, tanto en el numerador como en el denominador; 3) que en la medida que la razón-patrón representa el nivel de desarrollo de *las fuerzas productivas* (al ser una medida del excedente), Sraffa le hecha una mano a Marx en su teoría de que a mayor desarrollo de aquéllas, mayor explotación, es decir, mayor apropiación, mayor diferencia entre lo producido por los trabajadores directos y los medios consumidos por estos (medidos en términos de valor-trabajo o en términos de moneda corriente). Sin la razón-patrón de Sraffa esta condición suficiente hubiera permanecido oculta en el análisis del teorema; de hecho, con este modelo hay que modificarlo como se ha explicado.

$$(24) \quad e_G = \frac{g_u (1+R)}{R - g_u}$$

Para rematar la faena sobre el teorema fundamental vamos a introducir la ecuación que caracteriza la composición orgánica de capital marxiana y la vamos a igualar a su equivalente sraffiano-ricardiano, al igual que se ha hecho con la ecuación que define la tasa de explotación. Entonces no se hizo comentario alguno, pero aquí querría detenerme. Creo que es preferible equiparar directamente -sin recurrir ni intentar resolver ningún problema de transformación- los modelos ricardo-sraffianos medidos en moneda corriente (precios) a los equivalentes marxianos medidos en términos de valores trabajo. Yendo a la ciencia física que nos sirva de ejemplo -salvando las distancias- es lo que hizo Schrödinger con su ecuación de onda en la mecánica cuántica: no la dedujo de otras que explicaran los fenómenos cuánticos descubiertos hasta el momento, sino que la implantó en su modelo de manera heurística y la cosa parece que ha funcionado, tanto desde el punto de vista explicativo como predictivo. Al final, la bondad de un modelo económico o de

cualquier tipo de conocimiento hay que medirlo por su capacidad explicativa, predictiva y de concreción ulterior. Más vale una vez colorado que ciento amarilla, que dice el refrán. Con ello además sorteamos el error de Marx al igualar la tasa de ganancia global de la economía con la tasa de plusvalía y/o las ganancias totales con la plusvalía total. Steedman demostró el error, y eso independientemente del error evidente -que el mismo Marx reconoce- en su libro III de *El Capital* y en las *Teorías de la Plusvalía*, de que los productos que compran las empresas a otras como medios de producción lo hacen por sus precios y no por sus valores²³. Las ecuaciones a resolver en este modelo son las que siguen:

$$(25) \quad pY = \begin{bmatrix} Lw + pMX \\ 1xp \quad pxm \quad 1xp \quad pxm \quad nxm \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1+g \\ mxm \end{pmatrix}$$

$$(26) \quad pY = (1+R)pMX$$

$$(27) \quad e_G = \frac{\sum_{i=1}^{i=m} S_i}{\sum_{i=m} V_i} \rightarrow e_G Lw = [Lw + pMX] g$$

$$(28) \quad \theta_i = \frac{C_i}{V_i} \rightarrow Lw\theta = pMX$$

De este conjunto de ecuaciones donde se ha obviado por innecesaria la ecuación del numerario de Sraffa sobre el producto, la novedad es la (28) donde “ θ ” es la matriz diagonal $m \times m$ de composiciones orgánicas de los diferentes sectores. De este conjunto surgen las dos siguientes:

$$(29) \quad e_G = \frac{Lw[R\theta - 1]I}{LwI} \quad f(L, w, e, R, \theta) = 0$$

$$(30) \quad e_G = \frac{Lw[(1+\theta)g]I}{LwI} \quad f(L, w, e, g, \theta) = 0$$

En el modelo anterior veíamos las condiciones necesarias y suficientes para que hubiera una tasa de ganancia positiva: que hubiera una tasa de explotación positiva (suficiente) y que la tasa de ganancia permaneciera menor que la razón-patrón sraffiana. En este modelo hay otra razón necesaria

²³ “Marx, Sraffa y el problema de la transformación”, epígrafe sobre “El valor, precio y ganancia”.

que no habíamos descubierto en la anterior porque las composiciones orgánicas de capital no se habían hecho explícitas: *que la suma (multiplicada por la razón-patrón) de las composiciones de capital ponderadas por sus masas salariales superen a estas masas salariales*. La ecuación de (29) para una tasa de explotación (global) mayor que cero quedaría:

$$(31) \quad R \sum_{p=1}^{p=m} l_p w_p \theta_p > \sum_{p=1}^{p=m} l_p w_p \quad \text{para que la tasa de explotación } e_g > 0$$

Esta ecuación es la equivalente a la (12) en la producción simple. A diferencia del tratamiento de otros autores, aquí se ha llegado al teorema fundamental de Morishima-Seton-Okishio de una manera mucho más generalizada: con **pxm** tasa de salarios, **m** tasas de ganancia, con una tasa global de explotación y con **m** composiciones orgánicas de capital, y todo ello par la producción conjunta: ¿se puede pedir más? Se puede, porque en lugar de una tasa de explotación global puede haber **m** tasas de explotación (una por sector). Si en la ecuación de la tasa de explotación global (27) la sustituimos por la que sigue:

$$(32) \quad e_i = \frac{S_i}{V_i} \rightarrow Lwe_i = [Lw + pMX] g \quad \text{para } i=1 \text{ a } m$$

De esta ecuación en lugar de la (27) y con (25), (26) y (28) se obtienen ecuaciones de tasas (y no de tasa) de explotación parecidas a las de (29) y (30)

$$(33) \quad Lwe = Lw(R\theta - I) \quad \equiv \quad \sum_{p=1}^{p=m} l_p w_p e_p = R \sum_{p=1}^{p=m} l_p w_p \theta_p - \sum_{p=1}^{p=m} l_p w_p$$

$$(34) \quad Lwe = Lw[(1+\theta)g] \quad \equiv \quad \sum_{p=1}^{p=m} l_p w_p e_p = \sum_{p=1}^{p=m} l_p w_p \theta_p + \sum_{p=1}^{p=m} l_p w_p g_p$$

Ambas son las más generalistas posibles, que demuestran el teorema fundamental como hemos hecho antes y sin caer en la trivialidad de los equilibrios walrasianos de que todo depende de todo. Si ahora particularizamos (33) y (34) para tasas de salario, tasas de explotación, composiciones orgánicas y tasas de ganancias únicas, obtendríamos de ambas ecuaciones los mismos resultados que en la producción simple con las ecuaciones (23) y (34).

A la luz de las últimas consideraciones y ecuaciones podríamos reunir las piezas del teorema fundamental marxiano de la siguiente manera: para que exista una tasa de ganancia en un sistema capitalista (caracterizado por las ecuaciones anteriores) es condición suficiente que la tasa de explotación sea positiva, y son condiciones necesarias que la razón-patrón srafiiana sea mayor que la tasa de ganancia y que la composición orgánica de capital sea

mayor que la inversa de la razón-patrón. Ya se ha explicado anteriormente sobre las diferencias -secundarias- de tener o no tasas de explotación diferentes por sectores; lo mismo con ganancias diferentes o no, e igualmente con las composiciones orgánicas de capital. Las dos condiciones necesarias podrían resumirse en la inecuación que ya ha aparecido para la producción simple:

$$(35) \quad \sqrt{G/\theta} < R \quad \text{donde} \quad \frac{dg}{dR} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2g}{dR^2} < 0$$

Es decir, que *las condiciones necesarias para que se cumpla el teorema fundamental marxiano se resumen en la inecuación de que la razón-patrón sraffiana sea mayor que la raíz cuadrada que resulta de dividir la tasa de ganancia (única) entre la composición orgánica de capital marxiana (única también).*

Es otra manera de presentarlo. En un primer momento resulta sorprendente la fórmula anterior de la condición necesaria porque parecería que la relación entre la tasa de ganancia y la razón-patrón debiera ser lineal. Está claro que cuando aumenta la razón-patrón -que es una medida a la vez del excedente y de la productividad del sistema- debe aumentar las ganancias: ¿entonces porqué la raíz cuadrada, que es un crecimiento decreciente? Se debe a que como quiera que ahora estamos operando con una tasa de ganancia (y de salarios) única, todos los sectores tienen que adaptarse a esa tasa. Ocurre entonces que hay un factor que hace que parte del aumento de la razón-patrón se lo lleve también los salarios (*efecto de complementariedad*): ¿porqué vía? La tasa de ganancia es un porcentaje sobre los costes (véase ecuación (17)²⁴), donde están incluidos los salarios; si estos disminuyen porque aumenta la tasa de ganancia, parte de ese aumento se contrarresta con la disminución del margen de ganancia como consecuencia de que uno de los costes -los salariales precisamente- ha disminuido (podríamos llamar por analogía *efecto sustitución*).

C) Conclusiones y consideraciones finales

A modo de conclusiones para el caso de la producción conjunta podríamos decir que esta producción -tal como se entiende en este modelo concreto- se obtienen las mismas conclusiones que en la simple porque el obstáculo de no poder emplear el teorema de Perrón-Froebenius no es suficiente para impedir tener una razón-patrón (obtenida como la menor de todas las posibles, tal y como hace Sraffa); que hemos podido obtener la demostración del teorema fundamental marxiano con producción conjunta

²⁴

$$p Y = \begin{bmatrix} L & w + p M & X \\ 1_{xp} & p_{xm} & 1_{xp} & p_{xm} & X \\ & & 1_{xp} & p_{xm} & n_{xm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + g \\ m_{xm} \end{bmatrix}$$

porque la matriz auxiliar de requerimientos “ M ” tampoco es un obstáculo a pesar de no ser invertible, y además tiene sentido económico; que todo lo hemos hecho de manera directa sin pasar por las horcas caudinas del problema de la transformación de valores a precios. Hay, no obstante, dos puntos negros en este modelo o en esta manera de abordar el teorema fundamental: 1) que en la matriz de salarios no tenemos un salario por sector sino pxm posibles salarios diferentes. Este problema es soluble; 2) que al no poder emplear Perrón-Froebenius, si bien se ha podido encontrar una razón patrón-óptima como la menor de las posibles²⁵, nada se ha hecho para impedir que pueda haber precios negativos. La realidad es que con este modelo no es posible asegurarlo. El mismo problema se presenta para Sraffa en su libro comentado, y eso a pesar de su distinción entre productos básicos y no básicos²⁶. Aunque se han empleado muchas matemáticas se ha intentado no poner el carro delante de los bueyes y se ha mantenido -o al menos ese es el intento- dar prioridad a los aspectos económicos de los problemas abordados sobre las matemáticas.

Quería aquí hacer unas consideraciones sobre el problema de la transformación de valores a precios²⁷. Aún cuando ese problema está resuelto desde el punto de vista formal, creo que hay que abandonarlo conceptualmente porque me parece un error que cometió Marx, enfangándose en tierras movedizas de las que no hay manera de salir. En mi opinión, Marx, para seguir a Ricardo y a los clásicos -a pesar de sus críticas- debió seguir hablando de valores-trabajo hasta el final, porque estos son sólo una unidad de medida, como podía haber utilizado los julios como medidor del gasto de energía de lo bienes-salario o las calorías incorporadas en los alimentos. Lo único que hay que mantener -y creo que resulta evidente- es que los valores-trabajo incorporados a la producción de mercancías -tanto finales como los intermedias en el ciclo de un año- son mayores que las incorporadas en los bienes-salario o mercaderías-salario, es decir, en las mercancías que consumen los trabajadores directos. Con esto se unen dos cosas que siempre han estado divorciadas en la historia del análisis económico: poder ser fiel a Marx en la medida que el rigor y la realidad lo permiten e integrar al germano en la corriente clásica del pensamiento. No hay porqué mezclar precios con valores, llevando estos al mercado, porque nunca la compra-venta de bienes y servicios se hacen por los valores, ni siquiera en épocas precapitalistas. Otra

²⁵ Como hace y discute Sraffa con su modelo en el libro citado, pág. 87.

²⁶ Decimos a pesar porque al hacer esta distinción al menos le cabe a Sraffa particionar la matriz de medios X en cuatro submatrices, unas de las cuales puede ser indescomponible y productiva -las de los básicos- y puede para esta submatriz aplicar Perrón-Froebenius y garantizar al menos una solución positiva para el tipo de ganancia y de precios de producción positivos para los productos básicos. En nuestro modelo, al no ser la matriz de requerimientos especial M y tampoco X cuadradas, no podemos aplicar Perrón-Froebenius.

²⁷ Una introducción histórica al problema de la “transformación” puede verse en “El método lógico y el problema de la transformación”, de Fred Moseley, que se puede obtener en internet en: <http://www.azc.uam.mx/publicaciones/etp/num7/a8.htm>

cosa es cuando rebajamos nuestro nivel de abstracción²⁸ -como hacemos aquí- y mezclamos *directamente* de forma *heurística* las ecuaciones que definen el sistema económico y la razón-patrón sraffianas en término de precios y las que definen la teoría de la explotación y las composiciones orgánicas de capital marxianas en términos de valor-trabajo. El modelo de Sraffa es muy abstracto en su principio, desde su comienzo, -aunque no tanto como la teoría marginalista del capital-, pero su mayor virtud es la de que puede ir concretándose, añadiéndosele capas de realismo hasta llegar a los análisis input-output de Leontief. Hay trabajos hechos con *modelos Sraffa-Leontief* con datos empíricos. Como decía antes, la razón-patrón de Sraffa es como la ecuación de onda de Schrödinger: no ha sido deducida de ninguna otra, se ha admitido de forma heurística, pero funciona. Forzando la analogía, podríamos decir que Ricardo es al análisis económico lo que Galileo a la Física, Marx a Newton y Sraffa a Einstein, guardando las diferencias de genialidad y de tiempo. También con el tiempo el marginalismo será a la economía lo que el flogisto o el calórico a la combustión, o el éter a la astrofísica: errores - *¿interesados?*- del pasado. Pero para eso aún falta tiempo, bastante tiempo.

²⁸ Marx habla de *ascender* de lo abstracto a lo concreto.

Bibliografía:

Fiorito, Alejandro; “La implosión de la economía neoclásica”. Está en la red:
www.geocities.com/aportexxi/sraffa12.pdf

Schumpeter, J. A.; “Historia del Análisis Económico” (*History of Economic Analysis*, 1954), 1971, Ediciones Ariel.

Sraffa, Piero; “Producción de mercancías por medio de mercancías” (*Production of commodities by means commodities*, 1960), 1975;

Ricardo, D.; “Principios de Economía Política y Tributación” (*On the Principles of Political Economy and Taxation*, 1950), 1973, F.C.E.

Vegara, J. M.; “Economía política y modelos multisectoriales”, 1979, edit. Tecnos.

Segura, J.; “Análisis microeconómico”, pág. 88, 2004, Alianza editorial Tecnos.

Robinson, J.; “Ensayos críticos”, 1984, Ediciones Orbis.

Estrin, S. y Laidler, D; “Introduction microeconomics”.

Sargent, T.J.; “Teoría macroeconómica” (*Macroeconomic Theory*, 1979), 1988, Antoni Bosch editor.

Meade, J.; “A neo Classical Theory of Economic Growth”, 1961.

Dobb, M.; “Teoría del valor y de la distribución desde Adam Smith, edit. Siglo XXI editores.

Morhisima, M.; “La teoría económica de Marx” (*Marx’s Economics*, 1973), 1977, pág. 15, edit. Tecnos.

Okishio, N.; “A mathematical note on marxian theorems”. 1963

Heathfield, D. F.; “Productions functions”.

Afriat, S.; “Sraffa’s Prices”, Università degli Studi di Siena, quaderni 474,
www.econ-pol.unisi.it/quaderni/474.pdf

Moseley, F.: “El método lógico y el problema de la transformación”,
<http://www.azc.uam.mx/publicaciones/etp/num7/a8.htm>

Pasinetti, L.: “Rate of profit and income distribution in relation to the rate of economic growth”, 1961/2.

Caballero, A. y Lluch, E. (1986); “Sraffa en España”, Investigaciones Económicas (2ª época, vol. X, n.º 2)

Steedman, I.; “Marx, Sraffa y el problema de la transformación” (*Marx after Sraffa*, 1977), 1985, F.C.E.

Harcourt, G.C.; “Teoría del capital” (*Some Cambridge controversies in the theory of capital*, 1975), apéndice al cap. 4, 1975, edit. Oikos-tau.

Potier, J.P.; “Piero Sraffa”, 1994, edicions Alfons Magnànim.

Ahijado, M.; “Distribucción, precios de producción y crecimiento”, 1982, Centro de Estudios Universitarios Ramón Areces.

Pasinetti, L.; “Structural Change and Economic Growth: a theoretical essay on the dynamics of Wealth of Nations”, 1981, Cambridge University Press.

Gehrke, Ch.y Kurz, D.; “Sraffa on von Bortkiewicz”. Está en la red:
http://www.newschool.edu/cepa/events/papers/050509_Bortkiewicz.pdf

Pasinetti. L.; “Critical of the neoclassical theory of growth and distribution”. Está en la red:
http://www.unicatt.it/docenti/pasinetti/pdf_files/Treccani.pdf

Foncerrada, Luis Antonio; “Sraffa y Böhm-Bawerk”. Está en la red:
<http://www.economia.unam.mx/secss/docs/tesisfe/FoncerradaPLA/tesis.pdf>

Madrid, 14 de octubre de 2009