ISSN 1696-8360
http://www.eumed.net/ce/index.htm
Agosto 2007

¿Y SI CANTOR ESTUVIERA EQUIVOCADO?

Antonio Mora Plaza

Resumen:

Este artículo viene a cuento sobre algunas de las cuestiones planteadas en la última parte del publicado en el número de JUNIO 1995 de la revista INVESTIGACIÓN Y CIENCIA con el título de BREVE HISTORIA DEL INFINITO y, simultáneamente, cuestiona modestamente algunos de los paradigmas más consolidados de la matemática del infinito. De hecho en la primera parte se plantea un método de recuento de los números reales que resulta contradictorio con la consideración cantoriana del conjunto de los números reales como conjunto no enumerable (al menos desde algún punto de vista); en la segunda se aborda lo que llamaríamos el de "la inconsistencia del método de Cantor", para pasar a la última parte -junto con las nota 4- donde se hacen algunas consideraciones e implicaciones del abandono del paradigma. El fin último del artículo es señalar el grado de insatisfacción que nos encontramos los que nos acercamos desde otras disciplinas a los fundamentos de las Matemáticas.

Abstract:

This article emerge as answer to some the questions raised in the last part from the published one in the number of JUNE 1995 of the magazine INVESTIGACIÓN Y CIENCIA (Scienfic American) with the title of BREVE HISTORIA DEL INFINITO (Brief history of the infinite) and, simultaneously, modestly, make questions of the some consolidated paradigms about of the infinite mathematical. In fact in the first part is proposed a method of count of reals numbers that is contradictory with the "cantoriana path" consideration of the set of the reals numbers like non-enumerable set (at least from some point of view); in second it is approached what we would call the one of "the inconsistency of the method of Cantor", to ending the last part - together with them note 4 - where become some considerations and implications of the abandonment of the paradigm. The last aim of the article is to indicate the dissatisfaction degree that we were those that we approached from other disciplines about the foundations of the Mathematics.

¿Y SI CANTOR ESTUVIERA EQUIVOCADO?

Antonio Mora Plaza
Economista
Madrid, agosto 2007

Entramos en harina y partimos de un subconjunto finito de números racionales comprendido entre cero u uno definidos por la expresión:

$$Q(s) = a/10^1 + b/10^2 + \cdots + h/10^s$$

siendo "**a,b,c, ... ,h**" cualquiera de los dígitos **0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,** y "**s**" cualquier número natural. Por otro lado un número real "**R(s)**" comprendido entre cero y uno podría ser:

$$\underset{cuando}{R}(s) = \lim_{s\to\infty}(a/10^1 + b/10^2 + \cdots + h/10^s)$$

Esta definición de número real es equivalente al obtenido por el método de las cortaduras de Dedekind -método asentado para definir los números reales- y nos va a permitir pasar de un número racional a un número real con suma facilidad. Un ejemplo: del número racional **3/8 (=0,375)** pasamos al número real "**0,375000.....0**", sin más que añadir un número infinito de ceros a la derecha del **5** [ver nota 1].

Partamos de un número de racional "**Q(s)**" tal que "**s**"=**10** y en el que haya intervenido en su composición al menos una vez los primeros 9 números naturales y el cero. El número más pequeño que podemos formar con estos requisitos es el "**0,0123456789**" que llamaremos "**menor Q(10)**" -lo siento, otra definición-. Obviamente todos los números racionales comprendidos entre cero y el número "**menor Q(10)**" con 10 dígitos a la derecha de la coma forman un conjunto finito y por tanto numerable.

A partir de "**menor Q(10)**" invito a meditar sobre el "**conjunto de todos los números racionales mayores (o igual) que el número menor Q(10)**". ¿Es enumerable este segundo conjunto?. Sabemos por Cantor que el conjunto de los números racionales -todos, no sólo los comprendidos entre cero y uno- es enumerable, por lo que contamos con la ventaja de conocer la respuesta. ¿Entonces porqué buscar una meta conocida? ¿No ocurre a veces que al cambiar de sendero nos encontramos con nuevos interrogantes, caminos desconocidos, inusuales perspectivas?.

Preguntémonos ahora cuántos números racionales comprendidos entre cero y uno de longitud "s" -es decir, de longitud genérica- podemos formar de tal manera que intervengan al menos una vez los 9 primeros números naturales y el cero. Aquí podemos recurrir a la combinatoria: la respuesta es $\mathbf{10}^{s}$ (variaciones con repetición de **10** elementos tomados de "**s**" en "**s**"). ¡Y no se olvide que $\mathbf{10^{s}}$ es un número natural! [ver nota 2].

Llamemos ahora "**Q(s+1)**" -¡horror, otra definición!- a "*cualquier número racional mayor que cero y menor que uno de longitud "s"* -es decir con "s" dígitos a la derecha de la coma- y en el que haya intervenido en su composición al menos una vez los 9 primeros números naturales y el cero. Si ahora aumentamos la longitud de "**Q(s,10)**" en una unidad -pasamos de "**s**" a "**s+1**"- es el momento de preguntarnos cuántos números de tipo "**Q(s+1)**" podremos formar. La respuesta es $\mathbf{10^{s+1}}$, es decir, tantos números racionales como variaciones con repetición existen a partir de **10** elementos -los **9** primeros números naturales y el **cero**- tomados de "**s+1**" en "**s+1**". Nada nos impide hacer lo propio con "**s+2**", con "**s+3**", y así sucesivamente, para calcular -y contar- todos los números racionales (entre cero y uno) que se pueden formar empleando "**s+1**", "**s+2**", "**s+3**", etc... dígitos.

Veamos a modo de resumen el siguiente esquema:

longitud	tipo de número	números formados
s	**Q(s,1o)**	$\mathbf{1o^{s}}$
s+1	**Q(s+1,1o)**	$\mathbf{1o^{s+1}}$
s+2	**Q(s+2,1o)**	$\mathbf{1o^{s+2}}$

Generalicemos para así pasar a un número de tipo "**Q(s+u,10)**" -siendo "**u**" cualquier número natural- y construir (y contar) el conjunto de los números de tipo "**Q(s+u,10)**" de longitud "**s+u**" -racionales mayores que cero y menores que uno- en los que intervienen al menos una vez los **9** primeros números naturales y el **cero**. Para ello hemos necesitado $\mathbf{10^{s+u}}$ números naturales.

¡Paciencia que llegamos al final!. ¿Preguntémonos que ocurriría si hiciéramos tender "u" a infinito? Simplemente que abandonaríamos el terrenal conjunto de los números racionales -donde sólo nos podía guiar en nuestro peregrinaje el noble Virgilio, "padre dulcísimo"- y alcanzar así el Paraíso de los reales -donde descubre su rostro Beatriz, "esplendor de viva luz eterna"-, al mismo tiempo que haríamos infinita la expresión $\mathbf{10^{s+u}}$ con "**u**" disparado al infinito. Por mucho que aumentáramos "**u**" en **Q(s+u,10)** siempre podríamos hacer lo propio en $\mathbf{10^{s+u}}$, sin salto alguno, sin discontinuidad, incluso cuando "u" tendiera a esa cosa que llamamos infinito. ¡Y sin embargo y por grande que fuera "**u**", $\mathbf{10^{s+u}}$ sería siempre un número natural!

UN MÉTODO DISCUTIBLE

El método de la diagonal de Cantor para demostrar la no enumerabilidad de los números reales -que aquí ponemos en duda- es muy conocido y de una gran sencillez. El ejemplo más simple posible consiste en relacionar sucesivamente el subconjunto (infinito) de números reales -convertidos a **base 2** para mayor comodidad- comprendidos entre cero y uno, con el conjunto de los números naturales de la forma que sigue:

<u>números naturales</u>	<u>números reales</u>
1	**o,1o1oo1......**
2	**o,oo111o......**
3	**o,111oo1......**
4	**o,o11o1o......**
.....	**....................**
n	**o,o1o11o......**

Una vez que todos los números reales comprendidos entre cero y uno -o si se quiere, sólo los irracionales, es decir, aquellos números de infinitos dígitos a la derecha de la coma que no son iguales al cociente de dos números enteros- se han escrito y puesto en correspondencia con el conjunto de los números naturales, es decir, una vez contados, podemos construir un número real como el que sigue:

o,o1o1.....

que difiere del primer número real en el primer dígito, del segundo real en el segundo dígito, del tercer real en el tercer dígito (infinito potencial), y así sucesivamente hasta el infinito -de lo contrario el pobre sólo sería racional-. Tenemos pues un nuevo número real que no habíamos escrito a pesar de haberlo intentado denodadamente en un principio.

Por el método expuesto en la primera parte del artículo -aunque en nuestra más común base **10**- procederíamos de la siguiente manera. El primer número a contar sería el cero:

<u>números naturales</u>	<u>números reales</u>
1	**o**

a continuación aumentaríamos en una unidad la longitud de los números -racionales por el momento- que vamos a contar y pasaríamos a relacionarlos uno tras otro sin importar el orden:

<u>números naturales</u>	<u>números racionales</u> (por el momento)
1	**o,oo**
2	**o,o1**
3	**o,1o**
4	**o,11**

Comprobamos que cuando sólo disponíamos de un dígito (el cero) sólo éramos capaces de formar un número racional. Ahora que tenemos **2** dígitos (el cero y el uno) podemos crear **4** (es decir $\mathbf{2^2}$).

Cruzado el Rubicón del "menor número que se puede formar con dos dígitos" -que es el número **o,o1** asignado al número natural **2**- nos disponemos a alargar en una unidad la longitud de los números racionales que vamos construyendo y nos adentramos en los racionales distintos que se pueden formar con **2** dígitos tomados de **3** en **3**.

números naturales	números racionales
1	**o,ooo**
2	**o,oo1**
3	**o,o1o**
4	**o,1oo**
5	**o,1o1**
6	**o,o11**
7	**o,11o**
8	**o,111**

que son justamente $\mathbf{2^3}$; para los de longitud **4** tendríamos **16**=($\mathbf{2^4}$). Siguiendo con este procedimiento para números racionales de longitud "**n**" -siendo "**n**" cualquier número natural- tendríamos 2^n números racionales (y $\mathbf{2^n}$ es un número natural por grande que sea "n"). Construidos pacientemente todos los números racionales para "**n**" tan grande como se quiera -aunque no infinito- haríamos tender "**n**" a infinito para darnos de bruces con el "Paraíso de los reales", usando de la misma paciencia que demuestra el método de Cantor al relacionar todos los reales, *pero con la seguridad de que no nos hemos dejado ni repetido ninguno por el camino*.

Si en lugar de dos dígitos distintos - el **0** y el **1**- empleamos tres dígitos, a saber, el **0, 1 y 2**, para los números de longitud **1** tendremos **3** números: el **0,0**; el **0,1** y el **0,2**. Para los de longitud **2** tendríamos **9** números, es decir, variaciones de **3** elementos tomados de **2** en **2**. Para los de longitud **3**, **27** números, y en general, el número de números mayores cero y menores que uno, de longitud “**n**”, formados con tres dígitos serían $\mathbf{3^n}$.Y, en general, cuando utilicemos los diez dígitos -del **0** al **9**- de nuestro vulgar sistema de numeración, obtendremos $\mathbf{10^n}$ números racionales de longitud “**n**”. Sólo cuando “**n**” aterriza en el infinito podemos hablar de números reales[1]. Por ello podemos escribir que el total de números reales es igual a:

[1] Bertrand Russell niega que los números racionales puedan demostrar la existencia de los irracionales como sus límites y sólo admite que, de existir éste -el límite- debe ser irracional. Para mantener la definición de límite no son necesarios los números reales, pero sí en cambio lo son para la noción de continuidad. B. Russell niega la necesidad de los reales para el cálculo de los límites (ver capítulo 34 de “Los Principios ...”). Así, siempre podremos establecer una cortadura entre los racionales cuyo cuadrado es

$$\underset{cuando\ n \to \infty}{Conjunto\ reales} = 10^n$$

DOS MÉTODOS EN UNA SOLA DEMOSTRACIÓN

Parece un lugar común ejemplarizar el criterio del infinito actual por medio de la diagonal de Cantor sin advertir – en mi opinión- que al crear un número que no estaba en la diagonal por el método de cambiar los números que nos encontramos a su paso, no sólo empleamos un método –el mencionado del infinito actual- sino dos. Es verdad que cuando se postula que se nos ha dado –impuesto como Moisés a los judíos con los diez mandamientos- la ristra de números reales mayores que cero y menores estamos inmersos en el infinito actual. Sin embargo, cuando nos lanzamos a permutar ceros por unos y unos por ceros –en el sistema binario, pero lo mismo vale para cualquier sistema de numeración- debemos proceder a examinar cada número de la ristra infinita y comprobar cuál es el dígito que debemos cambiar en función del lugar que ocupa el número en el “listado” cantoriano. Es decir empleamos un método constructivo para crear un número, porque el número que queda tras la permuta es distinto del que había en su lugar. Y esto sólo lo puedo entender y justificar bajo el criterio del infinito potencial.

Quizás tampoco se ha reparado que con el criterio del infinito actual podría ocurrir que tuviéramos un “listado” infinito de números pero con un número finito de números distintos, porque con este criterio no se puede distinguir unos de otros, cosa que podemos solventar con criterios constructivos adecuados. Pero pasemos por alto a modo de licencia poética este último punto.

DIAGONAL, SISTEMAS DE NUMERACIÓN Y CÁLCULO DE VARIACIONES

Llegado a este punto surge una nueva perspectiva -el fondo del argumento es el mismo- sobre la no enumerabilidad de los reales. Veamos: cuando avanzamos en nuestra diagonal se nos abre la posibilidad de obtener **9** números distintos por cada escalón que descendemos porque dado un dígito del peldaño de nuestra escalera

---

menor que 2 y los que son mayor que 2, con tal de que seamos capaces de construir una sucesión creciente de racionales que permanecen por debajo de raíz de 2 y otra decreciente que son siempre superior a raíz de 2, y que la diferencia entre el término más pequeño de la segunda serie y el más grande de la primera tienda a cero cuando el número de términos tienda a infinito. La noción de continuidad es una hipoteca del Cálculo y el Algebra respecto a la Geometría. ¿Se puede construir un Cálculo -y en general una Matemática- consistente sin la noción de continuidad? Bertrand Russel contestaría afirmativamente.

podemos cambiarlo por cualquiera de los **9** dígitos distintos que forman el sistema de numeración de base **10**. De ello se desprende que para un número racional de longitud genérica "**n**" podemos obtener $\mathbf{9^n}$ números distintos.

Rebajemos en un dígito nuestro sistema de numeración y convirtamos todos los racionales de longitud finita -reales en el infinito- de nuestra diagonal a un sistema de numeración de base **9**. Ahora sólo disponemos de **9** dígitos distintos -**0,1,2,3,4,5,6,7,8**- y llamemos "conjunto de posibilidades" al conjunto de todos los números racionales que se pueden crear al cambiar el dígito que avistamos en la diagonal por otro distinto. Para números de longitud "**n**" tenemos "$\mathbf{9^n}$" números para este "conjunto de posibilidades".

No nos detengamos. Para los números racionales convertidos a un sistema de numeración de base **8** obtenemos $\mathbf{7^n}$ distintos de los de la diagonal, y así podemos avanzar hasta llegar a los de ... base **2**. Y aquí nos detenemos y nos hacemos la siguiente pregunta: *¿cuántos números distintos podemos formar sustituyendo los dígitos -sólo tenemos dos posibles: el cero o el uno- ubicados en nuestra descendiente escalera*?. La respuesta es **UNO**. Poco a poco, paso a paso, se nos ha esfumado todos los números alternativos que surgían al sustituir en nuestra diagonal el dígito que avistábamos por otros dígitos. Al final sólo nos han quedado "$\mathbf{1^n}$" números alternativos para este "conjunto de posibilidades" cuando el número de números formados de longitud "**n**" es $\mathbf{2^n}$ en el sistema binario. ¿Dependerá el Paraíso de los transfinitos de nuestros terrícolas sistemas de numeración? Sin embargo y, aunque de forma pírrica, parecería que los diagonalistas han creado un conjunto de cardinalidad superior al conjunto de los naturales porque nos faltaría un número natural para contar todos los reales (los reales relacionados y el real construido en la diagonal). No hay tal, porque nos hemos guardado bajo la manga un algún comodín que sacaremos en el momento oportuno. Veamos como emplearlo, pero primero un punto y a parte.

En la formación -por el método de la diagonal- de todos los posibles reales hemos obviado que siempre se ha podido formar el número real **0,999...9** (infinitos nueves) en el sistema de numeración de base **10**, el número de **0,888...8** (infinitos ochos) en el de base **9**,..., etc. hasta el número **0,111...1** (infinitos unos) en el de base **2**, que son todos iguales al número **1** (al extremo superior del intervalo en el que siempre nos hemos movido). Y en general el **0,a999...9**, el **0,ab999...9**,..., el **0,abc999...9**,..., etc. (siendo a,b,c,...,h cualquier número natural entre cero y ocho). Y los mismos ejemplos podrían ponerse para los demás sistemas de numeración. Es decir, cuando pasamos de un subconjunto de los racionales a los reales -al alargar hasta al infinito la ristra de dígitos a la derecha de la coma- no sólo no nos faltan números sino que nos sobra al menos uno –en realidad nos sobran muchos más como luego veremos- para contar el número -único- construido en la diagonal al permutar ceros por unos y unos por ceros cuando expresamos nuestros números en el modesto sistema de numeración binario.

Veámoslo de otra manera. Imaginemos que estamos justo en el momento en el que poseemos "**n**" números racionales de longitud "**n**" comprendidos entre cero y uno antes de proceder a lanzar "**n**" al infinito y nos preguntamos cuántos números podemos formar al sustituir el primer dígito del primer número por otro distinto que no sea el **9**, el segundo dígito del segundo número con el mismo criterio y así indefinidamente. Es evidente que al hacer el cambio en el primer número nos quedan **8** dígitos –los primeros **9** números naturales más el cero, menos el número cambiado y menos el número **9** para evitar el problema "técnico" aludido en el punto y aparte anterior-. Como la longitud del número es "**n**", concluimos que con **10** dígitos –es decir, en el sistema de numeración de **base 10**- podemos formar $\mathbf{8^n}$ números distintos, es decir, variaciones con repetición de **8** dígitos distintos de longitud "**n**". Ahora rebajemos nuestro orgulloso sistema de base **10** a uno de **base 9**. Siguiendo el mismo razonamiento obtendríamos $\mathbf{7}^n$ números distintos cuando su longitud –el número de dígitos a la derecha de la coma- es "**n**". Sigamos. En el sistema de numeración de **base 8** nos salen $\mathbf{6^n}$ números distintos. En el de base **7**, $\mathbf{5^n}$ números, ..., en el de base **4**, $\mathbf{2^n}$, y en el de base **3**, $\mathbf{1^n}$ –es decir, **1**, no más- y para el de **base 2** –nuestro modesto sistema binario- ¡nos hemos quedado sin ningún número sobrante!. Y si ahora lanzamos "**n**" al infinito el resultado es el mismo porque la correspondencia biyectiva no se pierde al variar el sistema de numeración.

A esta forma de razonar se le pueden hacer varias objeciones de las que trataré de salir al paso. La primera es la que se está empleando el mismo exponente "**n**" –cualquier número natural- para calcular el número de números de longitud "**n**" que se pueden formar con distintas bases de numeración. Ello es cierto, pero se subsana empleando diferentes números naturales para calcular los números de números de las distintas bases de numeración. Así, por ejemplo, para calcular el número de números en el sistema binario equivalente al sistema decimal necesitaríamos un número natural, digamos "**m**", tal que $\mathbf{10^n}$ fuera igual a $\mathbf{2^m}$. De hecho se necesitarían –despejando "m"- el entero más próximo de "$\mathbf{n/log_{10}2}$" números naturales. Ahora lanzamos "**n**" al infinito –y con ello "**m**" porque depende de "**n**" y de una constante- y solucionado.

Otra objeción sería como sigue: al calcular el número de números que se pueden obtener con el método de la diagonal hemos eliminado dos números de **10** posibles: el cambiado, obviamente, y el **9**, para evitar contar **2** veces números equivalentes. Pero con ello hemos eliminado una infinidad de números formados con nueves que no son equivalentes. Subsanemos la cuestión. Cuando estemos en el sistema de numeración de **base 10** formemos $\mathbf{9^n}$ números distintos al sustituir el número que vemos en la diagonal por cualquiera de los otros 9 posibles –ahora incluimos también el mismo número **9**-; cuando nos encontremos en el sistema de base **9**, $\mathbf{8^n}$ variaciones posibles; en el de base **8**, $\mathbf{7^n}$,..., etc. y en el de base **2** sólo nos queda $\mathbf{1^n}$ –tal como ocurría en dos epígrafes anteriores-. ¿Acaso son más los números reales en el sistema binario –aunque sea uno más- que el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números reales tiene una potencia o cardinalidad superior a la de los números naturales?. Imaginemos que hemos colocado de forma inocente el número real siguiente en el lugar "i-ésimo" de acuerdo con la relación cantoriana de números reales mayores que cero y menores que uno:

i) $\mathbf{0{,}a_1a_2...a_{i-1}0111...1}$
i (posición que ocupa el cero)

Este número se caracteriza por:

1) ocupa el lugar "i-ésimo" –como hemos dicho- antes de cambiar a la manera cantoriana ceros por unos y unos por ceros en la diagonal principal.
2) Hasta el dígito que ocupa la posición "i-ésima" –en este caso es el cero- los dígitos son indiferentemente cualquier combinación de ceros y unos.
3) Todos los dígitos que ocupan la posición "i-ésima más una" y siguientes son todos unos sin excepción.

Ahora, con este dígito retenido en la posición "i-ésima" se le hace corresponder con el "i-ésimo" número natural y se procede al intercambio cantoriano de ceros por unos y unos por ceros en la diagonal. El número que queda es el:

i) $\mathbf{0{,}a_1a_2...a_{i-1}1000...0}$
i (posición que ocupa el primer uno)

que es equivalente al número:

i) $\mathbf{0{,}a_1a_2...a_{i-1}0111...1}$
i (posición que ocupa el primer cero

que es el mismo número del que partíamos. _Este último número ocupará su lugar –no nos importa cual- en la ristra cantoriana de números, por lo que habrá sido contado o se le contará en otro lugar._ Conclusión: al menos nos sobra un número –en realidad nos sobra una infinidad- para poder contar el número que por el método cantoriano de la diagonal sale de más. Y todo esto lo hemos hecho con el mismo criterio de la diagonal y de la mano del infinito actual[2]

[2] De hecho, si en el lugar "i-ésimo más uno" estuviera ocupado por el número "$\mathbf{0{,}a_1a_2...a_{i-2}11000...0}$" en el que el primer "uno" ocupa la posición "i-ésima menos una" y el segundo "uno", lógicamente, la "i-ésima", al permutar ceros por unos y unos por ceros en la diagonal, nos quedaría el número "$\mathbf{0{,}a_1a_2...a_{i-2}1000...0}$" con el 1 en la posición "i-ésima menos una", que es el mismo número que el que ocupa el lugar "i-ésimo" tras el cambio, sólo que este se aloja en el siguiente lugar. Conclusión: partiendo de 2 números diferentes hemos creado el mismo número. Veamos los 2 números antes de la permuta en la diagonal:

Supongamos que alguien nos tildara de manipuladores o de intervencionistas con el siguiente argumento: bajo el imperio del infinito actual no podemos colocar los números en los lugares que nos interesa porque que el conjunto de los números reales mayores que cero y menores que uno nos viene dado como un vendaval del que no podemos zafarnos. Mi respuesta sería como sigue: calcúleme usted cual sería la probabilidad de que en la ristra de números infinitos no existiera ningún número que, ocupando cualquier lugar en el "listado infinito", no tenga un cero en esa misma posición y una ristra infinita de sólo unos a su derecha. La respuesta es cero porque con infinitos números, cualquier cosa que pueda ocurrir –por improbable que sea- ocurrirá necesariamente.

¿UN CONJUNTO SOBRANTE?

Hasta ahora hemos empleado lo que hemos llamado "números equivalentes" de forma un tanto oportunista para arrimar el ascua a nuestra sardina, pero no le hemos tomado con la seriedad que merece. De entrada, definimos "número equivalente" –en nuestro conjunto de números reales mayores que cero y menores que uno, claro- a cualquier número que a partir de un dígito –sea cero o uno- el resto de los dígitos a la derecha son unos. Y "conjunto sobrante", al conjunto de los números equivalentes. Estos números son los que están contados de más con el método del infinito actual por ser iguales a un número en el que hemos sustituido un cero por un uno cuando a la derecha de ese número aparecía la ristra infinita de unos, a la vez que hemos permutado esa misma ristra de unos por otra de ceros. Lo mismo que hacemos cuando en nuestro orgulloso sistema de numeración de base diez se nos aparece, por ejemplo, el "**0,008999...9**" y lo sustituimos por el "**0,009000...0**". Y ahora nos hacemos la inocente pregunta: ¿cuál es la cardinalidad del "conjunto "sobrante" según el criterio de Cantor?. Imaginemos que hemos colocado el siguiente subconjunto del conjunto sobrante de la manera que sigue:

---

i) $\mathbf{0,a_1a_2...a_{i-1}0111...1}$
i (posición que ocupa el cero)

i+1) $\mathbf{0,a_1a_2...a_{i-2}11000...0}$
i (posición que ocupa el segundo uno)

Tras el cambio de ceros por unos y unos por ceros en la diagonal, ambos dan el mismo número en dos lugares diferentes:

i) e i+1) $\mathbf{0,a_1a_2...a_{i-2}1000...0}$
i-1 (posición que ocupa el uno)

1) **0,01111.........1**
2) **0,001111........1**
3) **0,0001111.......1**
....
i) **0,00..001111.....1**
i (posición que ocupa el último cero)
....

y así indefinidamente ¿Hemos contado todos los números equivalentes?. No, porque, al cambiar a la manera cantoriana los ceros de la diagonal principal por unos, nos surge el número:

i) **0,111..........1**

que es un número equivalente que no aparecerá nunca en la relación anterior. Hemos de concluir que la cardinalidad del "conjunto sobrante" es la misma que la de los números reales contados por el método de Cantor. Con este criterio, este conjunto sería un "**aleph 1**" (por usar la terminología al uso). Y ahora nos preguntamos: ¿cuál es la cardinalidad del "conjunto de Cantor menos el conjunto sobrante"? La respuesta cantoriana sería un aleph 1. Pero razonemos de la manera siguiente: a partir del conjunto de Cantor de los números reales hemos dado los siguientes pasos: 1) hemos reducido el "conjunto de posibilidades" al pasar del sistema de numeración de base 10 a un único elemento contado de más en el sistema binario. 2) hemos podido contar este elemento de más al eliminar al menos un "elemento equivalente" con lo cual ya somos capaces de hacer corresponder el conjunto de los naturales con los números reales. Es decir, nos ha bastado la cardinalidad de los números naturales para tamaña empresa. Y esto ha ocurrido tan sólo al eliminar un elemento equivalente. La conclusión sorprendente y terrible es la de que la cardinalidad del "conjunto de Cantor menos el conjunto sobrante" no es un aleph 1. ¿Será entonces un conjunto finito? Tan bajo no caerá. Veamos el siguiente subconjunto del conjunto de números reales:

1) **0,010101.........**
2) **0,0010101.......**
3) **0,00010101.....**
....
i) **0,00...010101...**
i (posición que ocupa el cero anterior al primer 1)
....

que están formados por tantos ceros como el lugar que ocupan y a partir de ahí por una sucesión de unos y ceros hasta el infinito. Este conjunto es infinito –nada lo impide-, es numerable –por construcción- y no presenta ningún término equivalente porque lo hemos evitado con la alternancia de ceros y unos a partir del cero de turno. Es por lo tanto un “**aleph 0**”.

DOS MÉTODOS, UN RESULTADO

Quizás haya pasado desapercibido que al contar los números reales en el sistema de numeración binaria hemos empleado dos criterios de recuento que dan el mismo resultado pero que no son el mismo. Por el método de Cantor habíamos concluido que se nos quedaba un número –sólo uno- sin contar al cambiar ceros por unos y unos por ceros en la diagonal principal (aunque luego lo hemos arreglado amigablemente). Por el método del cálculo de variaciones decíamos que por cada número que sustituyéramos en la diagonal principal –aquí no era necesario tener todos los números en un puño (infinito actual) sino que los íbamos construyendo con paciencia (infinito potencial)- podíamos engendrar **9** distintos. Cuando teníamos “**n**” números surgían “$\mathbf{9^n}$” números distintos, “$\mathbf{9^n}$” posibilidades. Pero cuando pasábamos del sistema de numeración de base “**10**” al de base “**2**” sólo nos quedaba “$\mathbf{1^n}$”, es decir, uno. Esto nos lleva a pensar que cuando rebajamos del “conjunto de Cantor” el “conjunto sobrante”, lo que obtenemos es un conjunto aleph 0 que puede ser parido por el método del “cálculo de variaciones”. A modo de resumen quedaría el siguiente esquema:

“CONJUNTO DE CANTOR(infinito actual, aleph 1)” menos “CONJUNTO SOBRANTE (infinito actual, aleph 1)” igual a CONJUNTO CÁLCULO DE VARIACIONES (infinito potencial, aleph 0)”

UNA CONSIDERACIÓN FINAL

Imaginemos refutado el teorema de Cantor de la no enumerabilidad de los números reales. Rota la primera cadena de los transfinitos quedan rotas todas, por lo que todos los conjuntos infinitos tienen la misma potencia o cardinalidad (pueden ser puestos en correspondencia con los números naturales). Tomemos el conjunto de los “n primeros números naturales y el cero” y preguntémonos cuántos subconjuntos podemos formar con él. Para ello tenemos que sumar las combinaciones de los "**n**" elementos tomados de cero en cero, de uno en uno, de dos en dos, etc., hasta las de "**n**" en "**n**". Esta suma vale $\mathbf{2^n}$ (recuérdese el binomio de Newton). El resultado coincide formalmente con el obtenido al "crear" por nuestro método los números racionales -reales para "**n**" infinito-, pero conceptualmente son absolutamente distintos: en el primer caso tenemos "n" elementos -los "**n**" números naturales de los que hallamos todas las posibles combinaciones- y en el segundo son sólo 2 los elementos distintos -los números cero y uno- que utilizamos en su momento para hallar las variaciones con repetición de "**n**" en "**n**" y así crear los números racionales -reales para "**n**" infinito-. Por muy grande que sea "**n**", el "conjunto de todos los conjuntos que se pueden formar a partir "**n**" elementos vale $\mathbf{2}^n$. Y sin embargo $\mathbf{2}^n$ sigue siendo un número natural, incluso con un "**n**" arrojado al infinito. Por otro lado y, dada la inobjetable demostración de Cantor de la mayor cardinalidad del conjunto de todos los subconjuntos respecto del conjunto original -por ejemplo, los "infinitos números naturales"- llegamos a una contradicción (al menos desde alguna concepción filosófica): por el teorema de Cantor el conjunto de los subconjuntos de los números naturales no es enumerable; por el del "cálculo de variaciones" siempre dispondremos de $\mathbf{2^n}$ números naturales para contarlos (incluso cuando orillemos el infinito).

Estas contradicciones o paradojas no son nuevas y el intento de solucionarlas ponen en juego, o bien la definición cantoriana de conjunto infinito (sobre la que se sustenta la mayor cardinalidad de los subconjuntos de un conjunto infinito dado), o la existencia del infinito actual (sin el cual no tiene sentido hablar del límite de cualquier algoritmo como algo que tenga un valor o existencia actual, sino como la posibilidad de avanzar indefinidamente, noción de límite, por otro lado, formalizada por Bolzano, Cauchy y Weiertrass en el siglo XIX basándose en deltas y epsilones y base del Cálculo diferencial actual)[3], o bien la no enumerabilidad de los números reales.

---

[3] El problema de relacionar los problemas de contar y los problemas de medir se manifiestan en el problema matemático de la continuidad. Desde que Fermat, Cavalieri, Roberval, Wallis, Descartes, Newton, Leibniz, etc. inventaron el Análisis en el siglo XVII hasta que se logró unas definiciones de límite y de continuidad satisfactorias por Cauchy, Weiertrass y Dedekind pasaron 2 siglos. Y a pesar de todo la cosa no parece tener una solución indiscutida. Se dice que una función "**f(X)**" es contínua en el punto $\mathbf{X_o}$ si existen un épsilon y un delta mayores que cero, pero tan pequeños como queramos, tales que la diferencia entre X y X_o, por un lado, y la diferencia entre **f(X)** y $\mathbf{f(X_o)}$ por otro, sean menores que los épsilon y deltas aludidos. Pero para ello ha de existir $\mathbf{f(X_o)}$. Imaginemos que quisiera comprobar la continuidad en el punto **2** de la recta ¿real? para la función " $f(x)=\sqrt{2}$ ". ¿Cuál es el valor concreto de $\sqrt{2}$ para poder calcular la diferencia entre la función y su valor en este punto? Simplemente no existe (aún cuando lo podamos aproximar tanto como queramos con números racionales), y eso lo sabemos por lo menos desde los diálogos de Platón. Es el problema de la inconmensurabilidad entre la hipotenusa de un triángulo rectángulo y sus catetos cuando estos valen el simple valor de 1. La cosa podría solventarse con una definición de continuidad basada en las cortaduras de Dedekind de la manera siguiente: la función " $f(x)=\sqrt{2}$ " sería contínua en el punto X_o siempre que fuéramos capaces de construir 4 sucesiones de números racionales "$\mathbf{a}_n$", "$\mathbf{b}_n$", "$\mathbf{c}_n$" y "$\mathbf{d}_n$" tales que:

1) $\mathbf{a_1 < a_2 < \ldots < a_n < X_o < b_n < b_{n-1} < \ldots < b_1}$
2) $\mathbf{c_1 < c_2 < \ldots < c_n < \mathit{f}(X_0) < d_n < d_{n-1} < \ldots < d_1}$
3) con tal de que "$\mathbf{c_n - d_n}$" tienda a cero cuando "$\mathbf{b_n - a_n}$" haga lo propio.

A modo de epílogo querría disculparme por la intromisión de un economista en el campo de los fundamentos de las matemáticas. No he pretendido decir nada nuevo que no se haya dicho, bien sea desde una escuela de pensamiento –intuicionista, formalista, logicista, etc.- de la disciplina, bien sea ortodoxa o heterodoxa. Sólo puede entenderse esta intromisión como el de un cierto grado de insatisfacción de aquellos que nos sentimos del país de Liliput frente a luminarias como Arquímedes, Newton, Euler, Gauss, Cantor, Gödel, - y con la extrema prudencia del que desconoce lo que desconoce-, porque no somos capaces de entender los fundamentos de la materia. Y cuando indagamos algo sobre el tema, ocurre que se acompasan las respuestas por decenas, pero los interrogantes por centenas. Es posible que la cosa sea así a juzgar por las historias de las matemáticas –algunas excelentes- que he podido leer con verdadera fruición. En cualquier caso esta es la Historia de la Ciencia o, para ser más precisos, del conocimiento científico: sobrevivir en el barco de lo conocido en el proceloso mar de lo ignoto.

<u>bibliografía:</u>

---

4) siendo los elementos de la series “$\mathbf{c}_n$” y “$\mathbf{d}_n$” números racionales tales que su cuadrado se aproxime a 2 tanto como queramos (para la función que nos ocupa).
5) y con tal de que pueda establecerse una correspondencia biyectiva entre las sucesiones “$\mathbf{a}_n$” y “$\mathbf{b}_n$” por un lado, y entre “$\mathbf{b}_n$” y “$\mathbf{d}_n$”, por otro.

No necesitamos conocer el valor de “$\sqrt{2}$” para construir dos sucesiones “$\mathbf{c}_n$” -creciente- y “$\mathbf{d}_n$” -decreciente- tales que se acercan al hipotético “**raíz de 2**” -valor numérico inexistente- porque el punto (5) nos asegura que si la diferencia “b_n-a_n” tiende a cero, lo mismo hace “$\mathbf{d}_n$-$\mathbf{c}_n$”, obligado por la aplicación biyectiva. Ante el insoluble problema de la inconmensurabilidad, los matemáticos del siglo XIX lo resolvieron sustituyendo los números por puntos, convirtiendo las distancias inconmensurables en expresiones matemáticas, ampliando el conjunto de los números racionales a expresiones tales como “$\sqrt{2}$” que no tienen un valor concreto –es decir, a los irracionales-, pasando el problema de la Geometría a la Aritmética. Pero una vez hecho esto, la definición al uso de continuidad de una función no deja –en mi opinión- de tener un carácter tautológico: ante el problema surgido con la distancia $\sqrt{2}$ –y con ello con toda función que convierte los números racionales en irracionales- se sustituye el término punto de la recta real por número –irracional, pero número- y se amplia el conjunto de los números racionales. La noción de continuidad está implícita en la noción de número real y es su consecuencia. A modo de esquema podría resumirse así:

número real (en la Aritmética) + correspondencia biyectiva = continuidad (en la Geometría)

pero este es otro tema].

- **Matematical thought from ancient to modern times**
  por *Morris Kline*
(ver el último capítulo sobre los fundamentos de las matemáticas y las escuelas logicista, intuicionista y formalista).

- **A History of mathematics**
  por *Carl B. Boyer*
(ver el capítulo sobre la aritmetización del análisis).

- **Viaje a través de los genios**
  por *William Dunham*
en la traducción española (Viaje a través de los genios) ver los capítulos 11 (la no enumerabilidad del contínuo) y 12 (Cantor y el reino de los transfinito).

- **Introducción a la lógica y al análisis formal**
  por *Manuel Sacristán*
(capítulo XII para una exposición del teorema de incompletitud de Gödel).

- **Análisis Matemático**
  por *Miguel de Guzmán y Baldomero Rubio*
(para una discusión sobre el teorema de Liouville que se menciona).

- **Conceptos de Matemática moderna**
  por *Ian Stewart*
(ver capítulo 9, Contar: lo infinito y lo infinito).

- **Historia de las Matemáticas**
  por *K. Ríbnikov*
(ver capitulo 7, epígrafe sobre Construcción de la teoría del número real y la teoría de conjuntos).

- **De aquí al infinito**
  por *Ian Stewart*
(ver capítulo 5 para el concepto de conjunto infinito en Cantor).

- **Más allá de los números**
  por *John A. Paulos*
(ver epígrafe Conjuntos infinitos).

- **Elements D´histoire des Mathématiques**
  por *Nicolas Bourbaki*
(ver capítulo 1 para los fundamentos de las matemáticas y la teoría de conjuntos y el capítulo sobre los números reales). Versión española en Alianza Universidad.

- **Los principios de las Matemáticas** (The Principles of Mathematics**)**
  por *Bertrand Russell*
(capítulos 30 sobre la teoría de los números de Dedekind, el capítulo 33 sobre los números reales y la negación de un número irracional como límite de números racionales, el capítulo 35 sobre la definición de

continuidad en Cantor, el capítulo 43 sobre la filosofía del infinito). Versión española en Espasa-Calpe

- **Aventuras Matemáticas**
  por *Miguel de Guzmán*
(capítulo 4 sobre la diagonización y la no enumerabilidad del conjunto de todos los subconjuntos posibles de un conjunto dado).

- **La Nueva Mente del Emperador**
  por *Roger Penrose*
(el libro es en realidad una discusión sobre el décimo problema de Hilbert y que Penrose concreta así: “existe algún procedimiento mecánico general que pueda resolver, en principio, todos los problemas de las matemáticas”. El punto débil del libro estriba en que Penrose se apoya en el teorema de la diagonalización de Cantor para contestar negativamente, pero previamente discute los conceptos de computabilidad de la aritmética a partir de la máquina universal de Turing. Si no se admite el teorema de Cantor sobre los números transfinitos, todo se viene abajo).

- **Las Sombras de la Mente**
  por *Roger Penrose*
(en el capítulo 3 sigue la discusión sobre la no computabilidad, manteniendo la tesis o demostración de que “la comprensión matemática humana no puede ser reducida a mecanismos computacionales cognoscibles).

- **Grandes Matemáticos**
  por *Georg W. Dauben, en* revista de Investigación y Ciencia.

- **Breve Historia del Infinito**
  por *A. W. Moore,* en el número de junio de 1.995 de Investigación y Ciencia

- **Breve Historia de las Matemáticas**
  por *Egmont Colerus.*

- **La Matemática: su contenido, métodos y significado**
  por *Kolmogorov, Laurentief y otros*, en Alianza Universidad
(parte 1, capítulo 1, visión general de la Matemática, Aritmética y Geometría. (En esta obra se parte de un concepto geométrico de número real como el cociente de dos magnitudes inconmensurables, tal como la raíz de 2, más tarde se pasa a una idea de límite como “un proceso de medida infinitamente mejorable”, para acabar con estas palabras: “el concepto mismo de número real continúa desarrollándose y está de hecho lejos todavía de ser un concepto completo”).

- **La Teoría de los Números**
  por Javier Cilleruelo y Antonio Córdoba
(en su capítulo 6 se recogen las demostraciones de trascendencia de los números “e” y “π”. Se aproxima los números reales por racionales utilizando las fracciones de Farey).

- **Las raíces del Cálculo Infinitesimal en el siglo XVII**
  por *Pedro González Urbaneja*, en Alianza Editorial.

- **Fundadores de las Matemáticas Modernas**
  por *F. Gareth Ashurst.*

- **El rincón de la pizarra**
  por *Miguel de Guzmán*.

- **¿Qué es la Matemática?**
  por *Courant / Robbins.*

- **Ideas de Espacio**
  por *Jeremy Gray*
(una historia concisa de la Geometría centrada en el tema del postulado de las paralelas).

- **Galois Theory**
  por Ian Stewart.

- **¿Qué es la lógica matemática?**
  por C.J. Ash, C.J. Brickhill, L.M. Valdés, N.H. Williams
  edit. Tecnos.

- **Los Lógicos**
  por *Jesús Mosterín.*

- **El teorema de Gödel** (Gödel´s proof, 1958)
  por *E. Ángel, J. R. Newman*

- Fundamentos para una teoría general de conjuntos
  por *George Cantor*
  ed. Crítica.

- **El camino a la realidad** (The road to Reality, 2004)
  por *Roger Penrose*
  (en especial en el capítulo 16).

- **Ideas del infinito**
  Investigación y Ciencia, temas 23